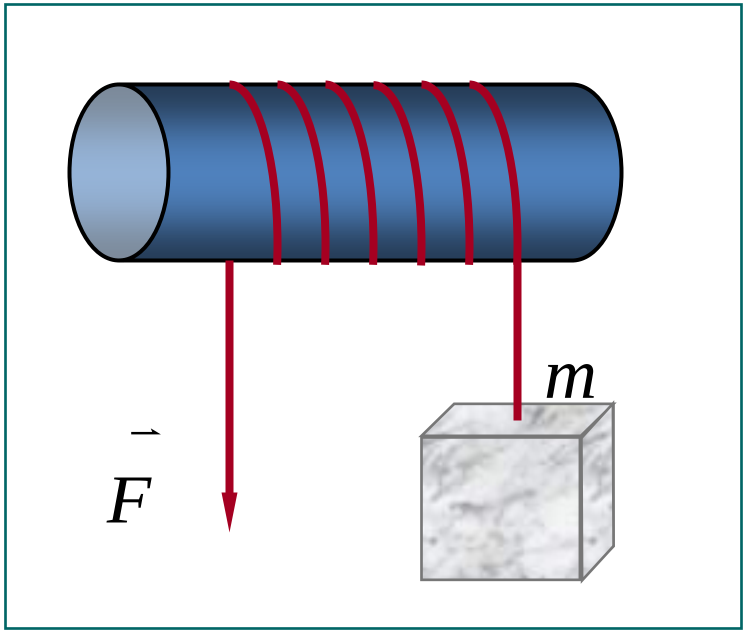
第　二　章

牛顿定律

F最小需要多大，可以让质量为m的物体不动？



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

§2-1 牛顿定律

牛顿　Issac Newton（1643－1727）杰出的英国物理学家，经典物理学的奠基人．他的不朽巨著《自然哲学的数学原理》总结了前人和自己关于力学以及微积分学方面的研究成果． 他在光学、热学和天文学等学科都有重大发现．

一 牛顿第一定律

任何物体都要保持其静止或匀速直线运动状态，直到外力迫使它改变运动状态为止.

数学形式：当 $\vec{F}=0$ 时，$\vec{v}=$ 恒矢量

- 定义了物体的**惯性** 任何物体都有保持其运动状态不变的性质, 这一性质叫惯性.
- 定义了**力** 力是物体运动状态发生变化的原因.
- 定义了**惯性参照系** 物体在某参考系中，不受其他物体作用而保持静止或匀速直线运动状态，这个参考系称为惯性系. 相对惯性系静止或匀速直线运动的参照系也是惯性系.

二 牛顿第二定律

物体动量随时间的变化率 $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ 等于作用于物体的合外力 $\vec{F}=\sum\vec{F}_i$，即

★ $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$, $\vec{p}=m\vec{v}$

★ 当 m 为**常量，** $\boxed{\vec{F}=m\vec{a}}$

★ 牛顿第二定律只适用于**质点**的运动.

★ 质点所受合外力与获得的加速度为**瞬时对应**关系

★ 牛顿第二定律的数学表达式

一般的表示 $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}$

直角坐标表示

$$\begin{cases} F_x = ma_x = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ F_y = ma_y = m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

自然坐标表示

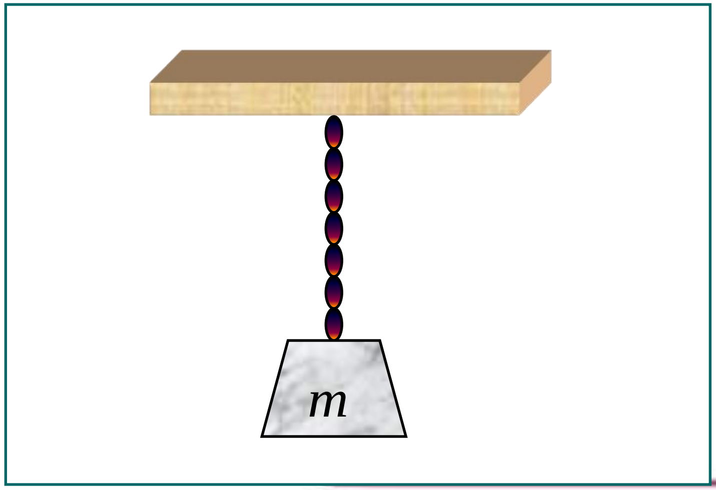
$$\begin{cases} F_t = ma_t = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mr\alpha \\ F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{r} = mr\omega^2 \end{cases}$$

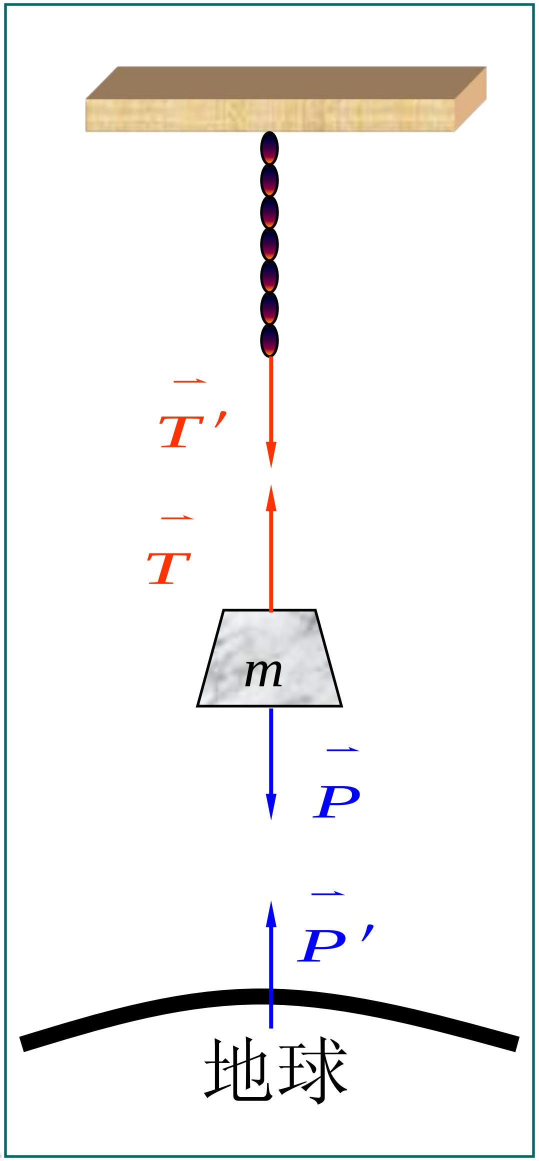
三　牛顿第三定律

两个物体之间作用力 $\vec{F}$ 和反作用力 $\vec{F}'$，沿同一直线，大小相等，方向相反，分别作用在两个物体上．

★ $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

（作用力和反作用力应是同一种力）





§2-2 物理量的单位和量纲

在国际单位制（SI）下

力学中的基本量	长度	质量	时间
单位名称	米	千克	秒
符号	m	kg	s

- 1m 是光在真空中在（1/299792458 s ）内所经过的距离 .
- 1s 是铯的一种同位素133 Cs 原子发出的一个特征频率光波周期的9192631770倍 .
- “千克标准原器” 是用铂铱合金制造的一个金属圆柱体，保存在巴黎度量衡局中 .

力学中的导出量：

速率	$v = ds/dt$	$1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 1\,\mathrm{m}/1\,\mathrm{s}$
力	$\vec{F} = m\vec{a}$	$1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}}$
功	$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$	$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\cdot m}$

量纲

- 定义：表示一个物理量如何由基本量的组合所形成的式子.

某一物理量 Q 的量纲

$$\dim Q = \mathrm{L}^{p}\mathrm{M}^{q}\mathrm{T}^{s}$$

- 如何得到一个物理量的量纲？

1. 通过物理量的单位；
2. 通过物理公式.

- 物理公式从量纲考虑应满足哪些规则：

1. 只有量纲相同的量才能相加，相减和相等；
2. 指数函数，对数函数和三角函数的自变量的量纲必须为1（无量纲量）。

$$e^{x}=1+x+\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{3!}x^{3}+\cdots$$

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^{3}}{3!}+\frac{\theta^{5}}{5!}-\frac{\theta^{7}}{7!}+\cdots$$

例 一快艇正以速度 v_0 行驶，发动机关闭后得到与速度方向相反大小与速率平方成正比的加速度. 试求快艇在关闭发动机后又行驶 x 距离时的速度.

解：

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2$$

求 $v = v(x)$ 的关系，可作如下变换

$$a = -kv^2 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$-k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{v}\mathrm{d}v \Rightarrow \int_0^x -k\,\mathrm{d}x = \int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

$$v = v_0 e^{-kx}$$

- 量纲作用：

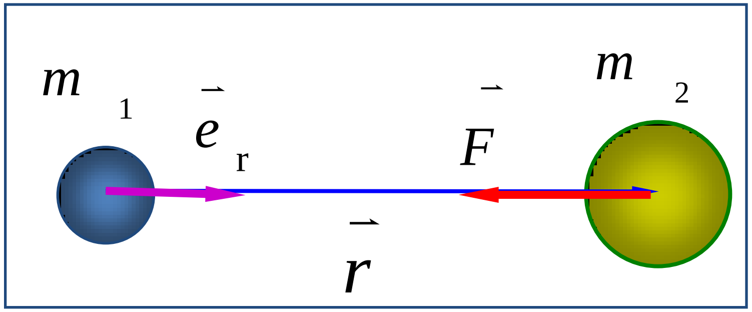
1. 从量纲分析中定出方程中比例系数的量纲和单位；
2. 量纲可检验结果的正确与否。

§ 2-3 几种常见的力

牛顿定律是以力的概念为核心的。

一　万有引力

➢ 物体间的万有引力：



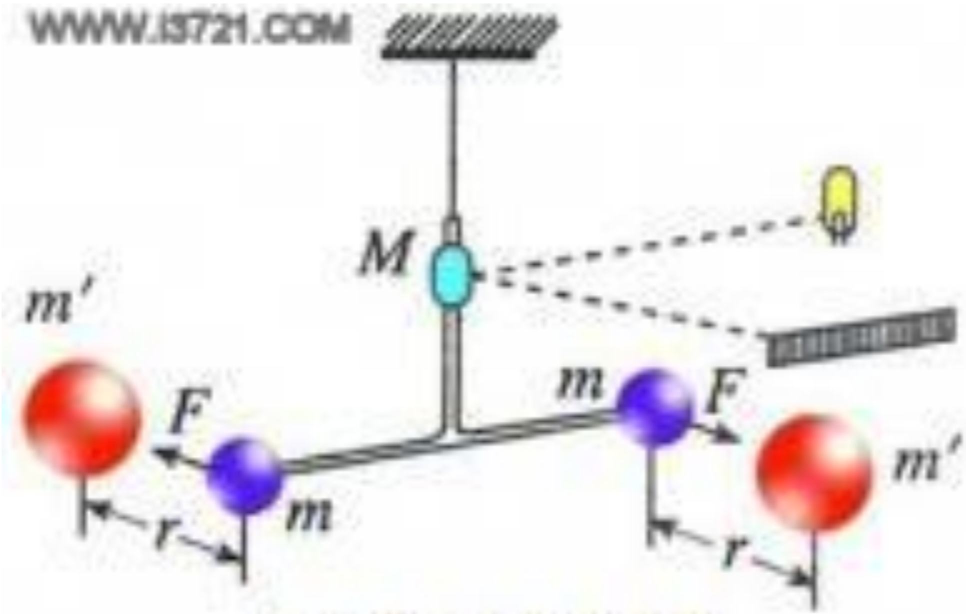
$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r$$

万有引力常数：$G = 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$

➢ 万有引力定律适用于两个质点.

➢ 重力：地球对地面附近物体的万有引力. $\vec{P} = m\vec{g}$

$$g = Gm_E/r^2 \approx Gm_E/R^2 = 9.82\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$



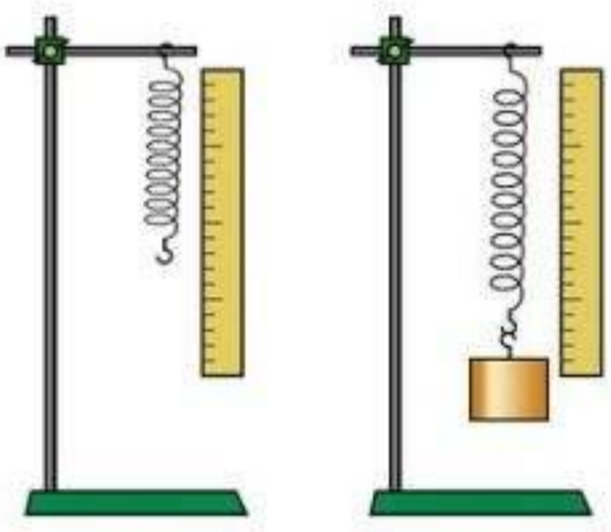
卡文迪许实验示意图

二　弹性力:（压力、支持力、张力、弹簧弹性力等）

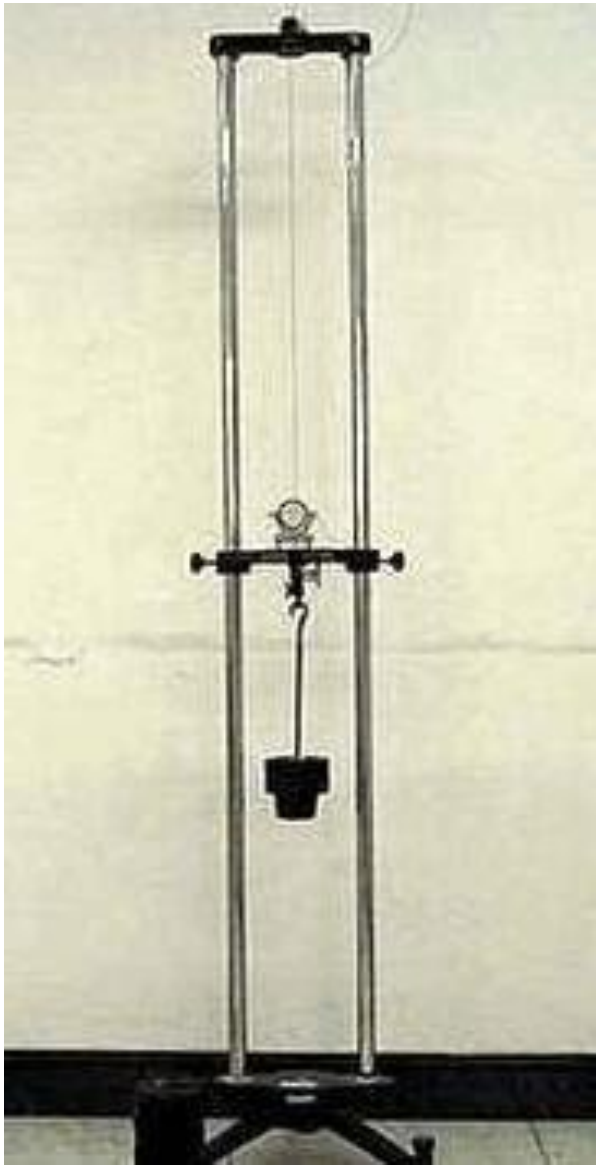
物体在受力形变时,有恢复原状的趋势, 这种抵抗外力,力图恢复原状的的力就是弹性力.

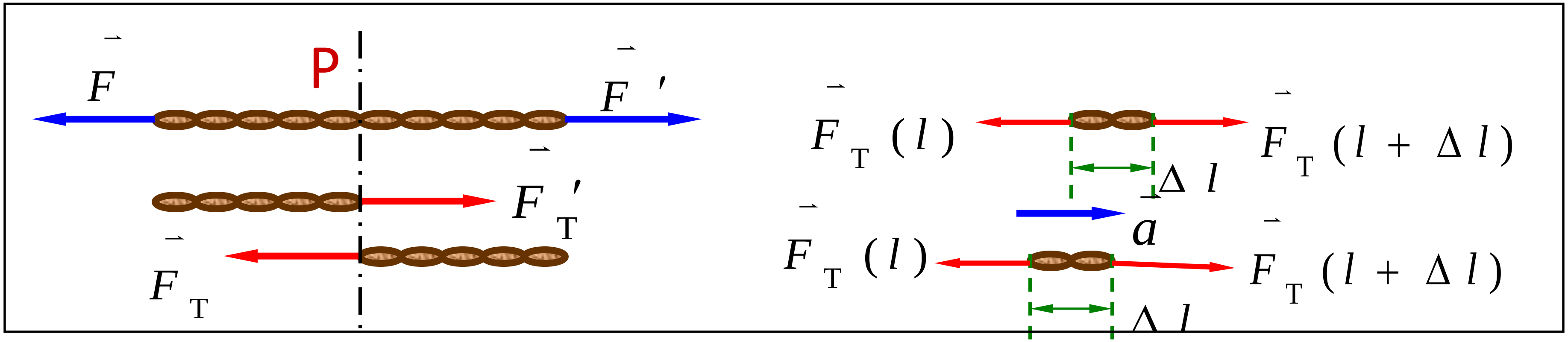
- 在弹性限度内弹性力遵从胡克定律

$$F = -kx$$



郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn





绳静止时 $$F_T(l+\Delta l)-F_T(l)=0$$

绳加速时 $$\Delta F_T=F_T(l+\Delta l)-F_T(l)=\lambda\Delta la$$

若线密度 $\lambda\to 0,\quad \Delta F_T\to 0$ 绳各处张力相等.

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

三　摩擦力

当相互接触的物体作相对运动或有相对运动的趋势时，它们中间所产生的阻碍相对运动的力称为摩擦力.

- 湿摩擦：液体内部或液体和固体表面的摩擦.
- 干摩擦：　固体表面之间的摩擦.（滑动摩擦、静摩擦、滚动摩擦）

接触面间正压力

- 滑动摩擦力　$F_f = \mu F_N$
- 静摩擦力　$0 < F_{f0} \le F_{f0m}$

最大静摩擦　$F_{f0m} = \mu_0 F_N$

一般情况滑动摩擦系数 $\mu \approx \mu_0$ 静摩擦系数

摩擦在实际中的意义

- 摩擦的必要性:

  人行走, 车辆启动与制动, 机器转动（皮带轮）, 弦乐器演奏等.

- 害处: 消耗大量有用的能量, 使机器运转部分发热等.

- 减少摩擦的主要方法:

  1. 化滑动摩擦为滚动，轴承；
  2. 化干摩擦为湿摩擦，加润滑剂，如水，油；
  3. 加气垫，如气垫导轨，二氧化碳气垫滑块。

§2-4 牛顿定律的应用举例

解题的基本思路

1）确定研究对象进行受力分析；

（隔离物体，画受力图.）

2）取坐标系；

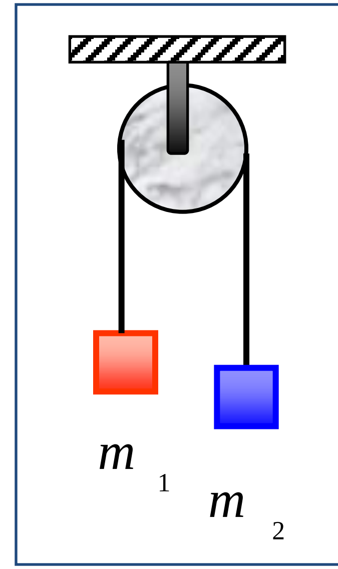
3）列方程（一般用分量式，用文字符号列方程式）；

4）利用其它的约束条件列补充方程；

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

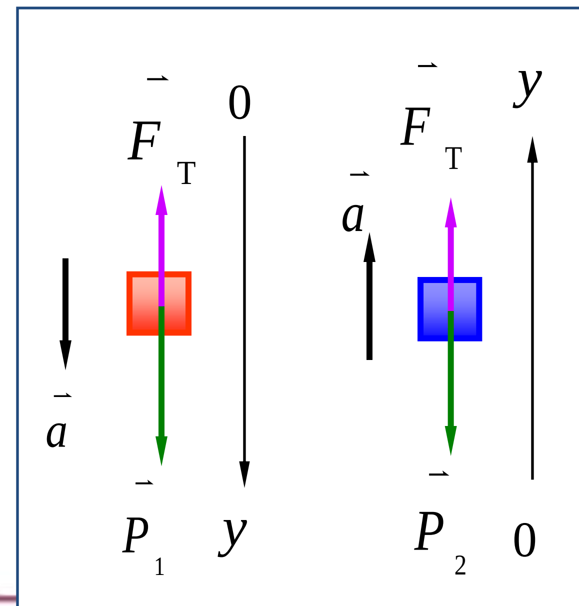
例1　阿特伍德机

（1）如图所示滑轮和绳子的质量均不计，滑轮与轴间的摩擦力不计，滑轮与绳间无滑动，绳不可伸长。且$m_1 > m_2$．求重物释放后，物体的加速度和绳的张力



解　以地面为参考系

画受力图、选取坐标如图

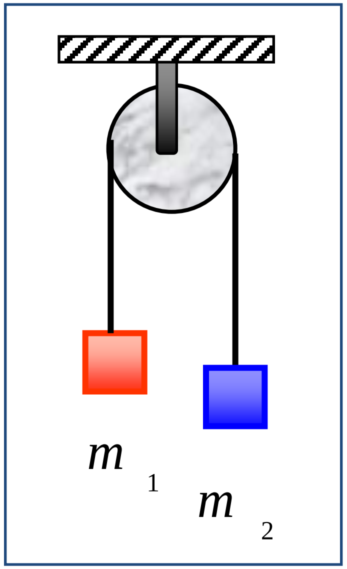


$$\begin{cases} m_1 g - F_T = m_1 a \\ -m_2 g + F_T = m_2 a \end{cases}$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \qquad F_T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn

（2）求物体的运动方程.

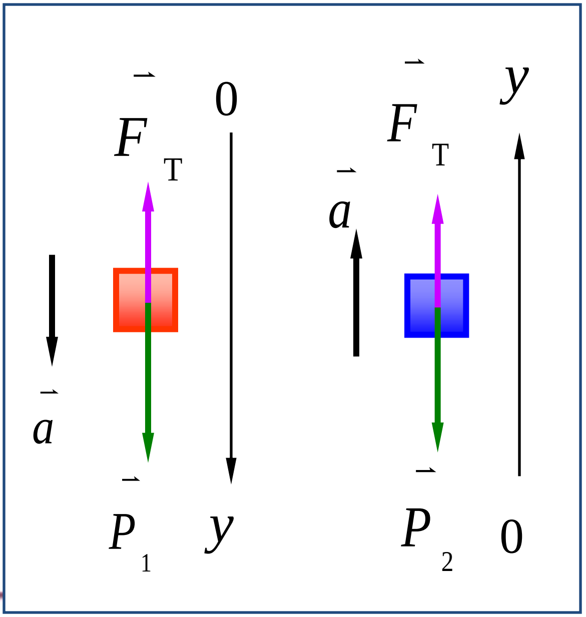


解　绳不可伸长, 则两物体的加速度的值保持相等, 对m_1

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\qquad \int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g\,\mathrm{d}t$$

$$v=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}gt$$

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\qquad \int_0^y \mathrm{d}y=\int_0^t \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}gt\,\mathrm{d}t$$



$$y=\frac{m_1-m_2}{2(m_1+m_2)}gt^2$$

郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn

例2 设有一质量为$m = 2500\text{kg}$ 的汽车，在平直的高速公里上以每小时 120km 的速度行驶. 若欲使汽车平稳地停下来，驾驶员启动刹车装置，刹车阻力是随时间线性增加的，即$F_{\text{f}} = -bt$，其中 $b = 3500\text{N}\cdot\text{s}$．试问此车经过多长时间停下来.

解 汽车的加速度 $a = -\dfrac{bt}{m}$

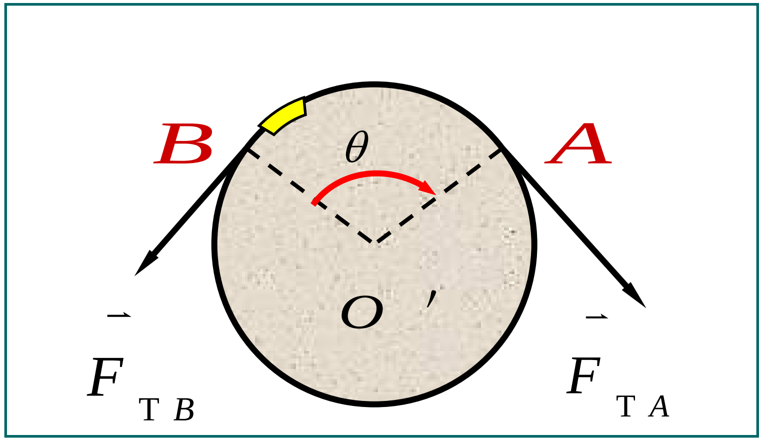
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad \int \mathrm{d}v = \int a\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{0} \mathrm{d}v = \frac{1}{m}\int_0^t (-bt)\mathrm{d}t \qquad t = \left(\frac{2v_0}{b}m\right)^{1/2} = 6.90\ \text{s}$$

思考：在 6.90s ~~的时间里，汽车行进~~了多长的路程？

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

例5 如图绳索绕圆柱上，绳绕圆柱张角为 θ ，绳与圆柱间的静摩擦因数为 μ ， 求绳处于滑动边缘时，绳两端的张力 F_{TA} 和 F_{TB} 间关系．（绳的质量忽略）

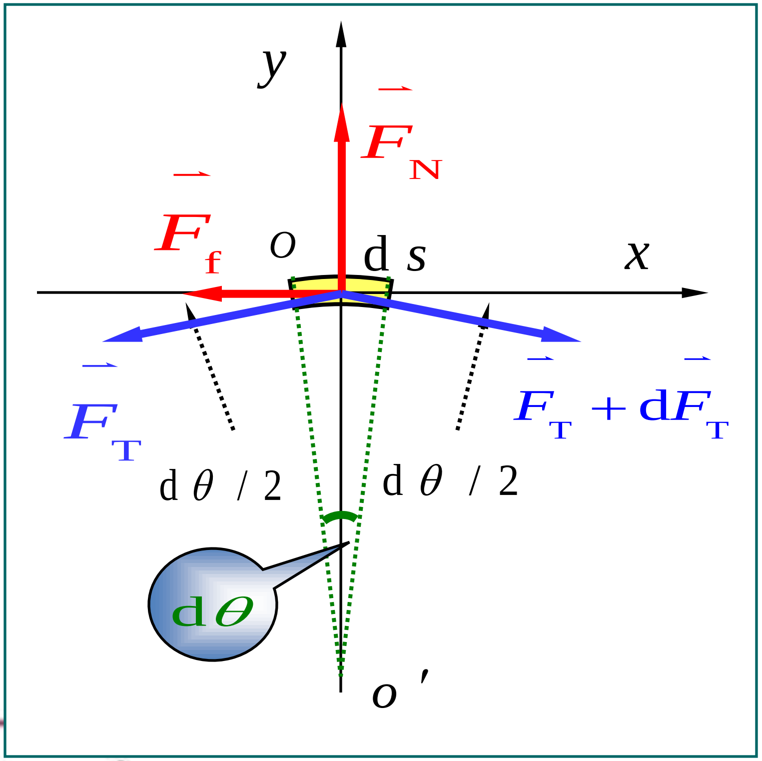


解: 取坐标如图，取一小段绕圆柱上的绳 ds.

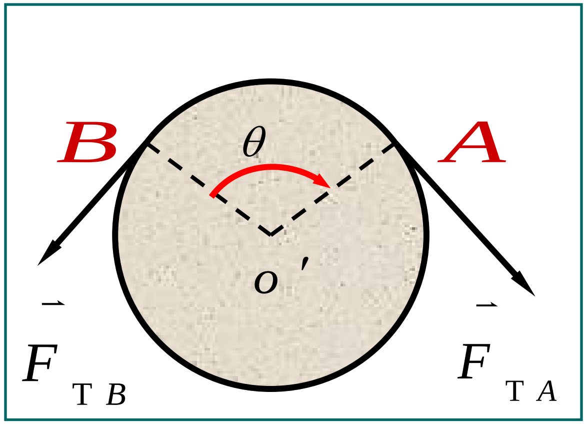
ds 两端的张力 F_T，$F_T + dF_T$

圆柱对 ds 的摩擦力 F_f

圆柱对 ds 的支持力 F_N

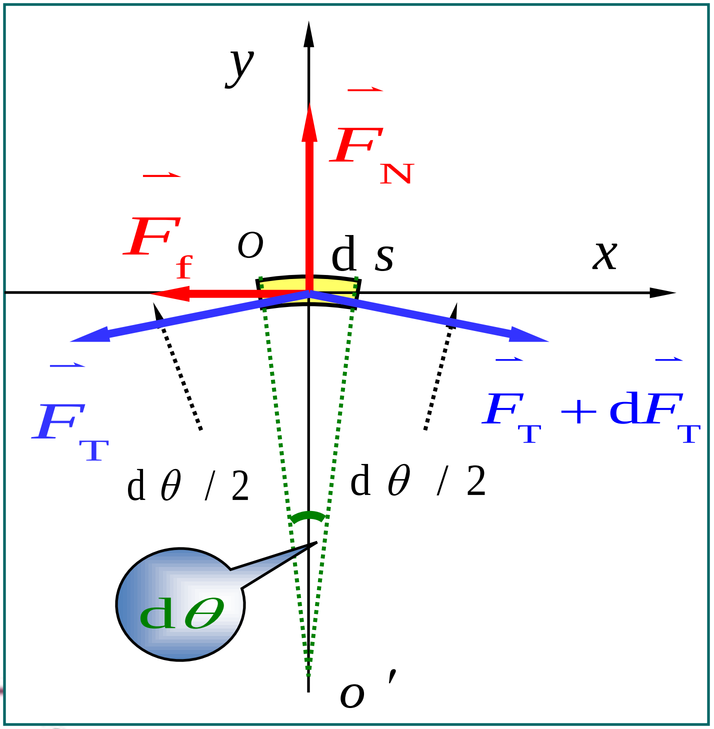


$$\begin{cases} (F_{\mathrm{T}} + \mathrm{d}F_{\mathrm{T}})\cos\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2} - F_{\mathrm{T}}\cos\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2} - F_{\mathrm{f}} = 0 \\ -(F_{\mathrm{T}} + \mathrm{d}F_{\mathrm{T}})\sin\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2} - F_{\mathrm{T}}\sin\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2} + F_{\mathrm{N}} = 0 \\ F_{\mathrm{f}} = \mu F_{\mathrm{N}} \end{cases}$$



$$\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} \approx \frac{\mathrm{d}\theta}{2} \qquad \cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2} \approx 1$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}F_{\mathrm{T}} = F_{\mathrm{f}} = \mu F_{\mathrm{N}} \\ \cancel{\dfrac{1}{2}\mathrm{d}F_{\mathrm{T}}\mathrm{d}\theta} + F_{\mathrm{T}}\mathrm{d}\theta = F_{\mathrm{N}} \end{cases}$$



$$\mathrm{d}F_{\mathrm{T}} = \mu F_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}\theta$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{T}} = \mu F_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}\theta$$

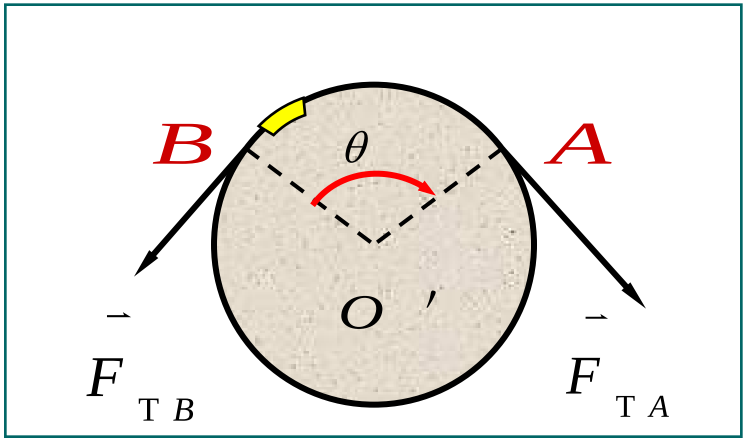
$$\int_{F_{\mathrm{T}B}}^{F_{\mathrm{T}A}} \frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{T}}}{F_{\mathrm{T}}} = \mu \int_0^{\theta} \mathrm{d}\theta$$

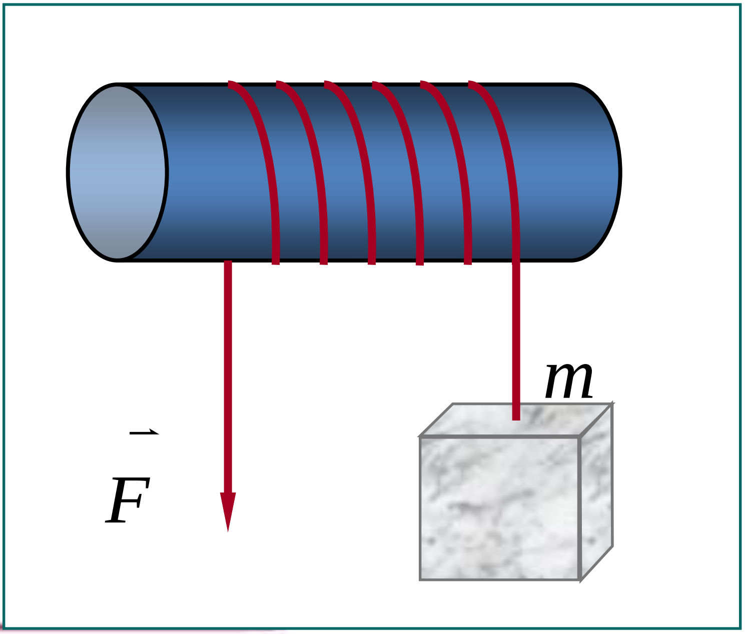
$$F_{\mathrm{T}B} = F_{\mathrm{T}A}\,\mathrm{e}^{-\mu\theta}$$

$$F_{\mathrm{T}B} / F_{\mathrm{T}A} = \mathrm{e}^{-\mu\theta}$$

若 $\mu = 0.25$

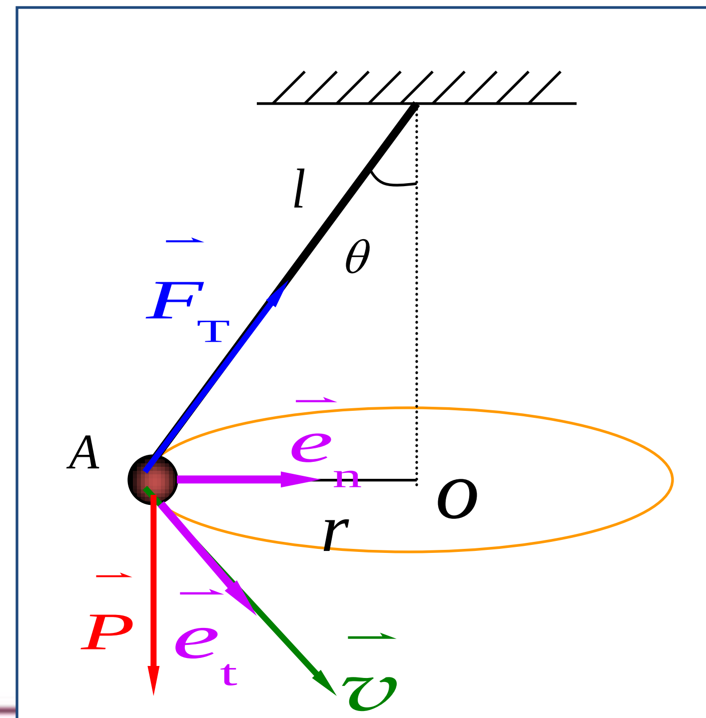
θ	$F_{\mathrm{T}B} / F_{\mathrm{T}A}$
π	0.46
2π	0.21
10π	0.00039





郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

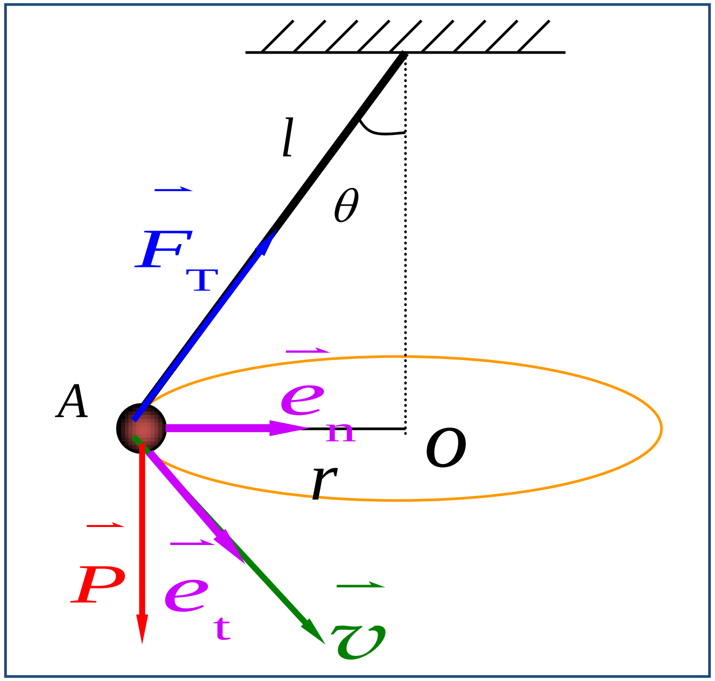
例6 如图所示（圆锥摆），长为 l 的细绳一端固定在天花板上，另一端悬挂质量为 m 的小球，小球经推动后，在水平面内绕通过圆心 O 的铅直轴作角速度为 ω 的匀速率圆周运动．问绳和铅直方向所成的角度 θ 为多少？空气阻力不计.

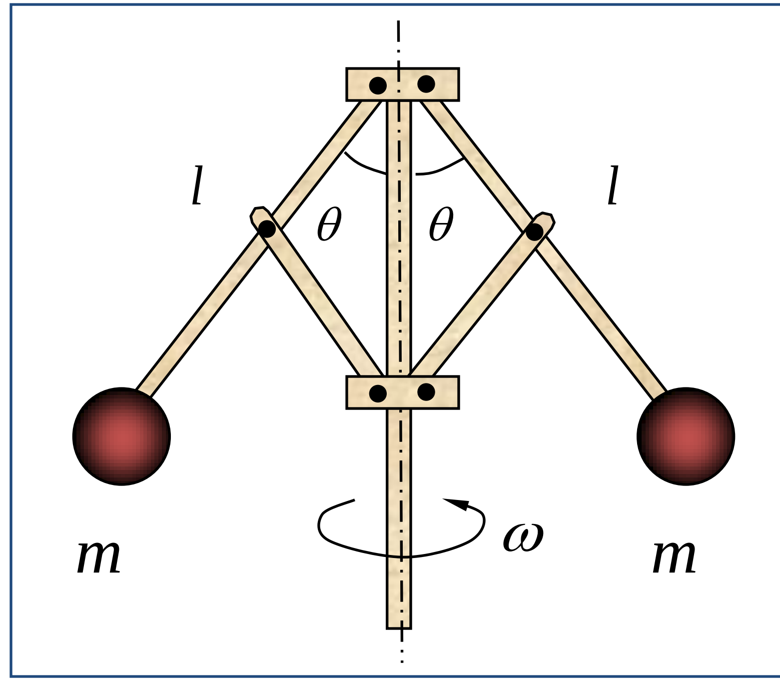


解: $\vec{F}_\mathrm{T} + \vec{P} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} F_\mathrm{T}\sin\theta = ma_\mathrm{n} = m\dfrac{v^2}{r} = mr\omega^2 \\ F_\mathrm{T}\cos\theta - P = 0 \end{cases}$$

$$r = l\sin\theta$$



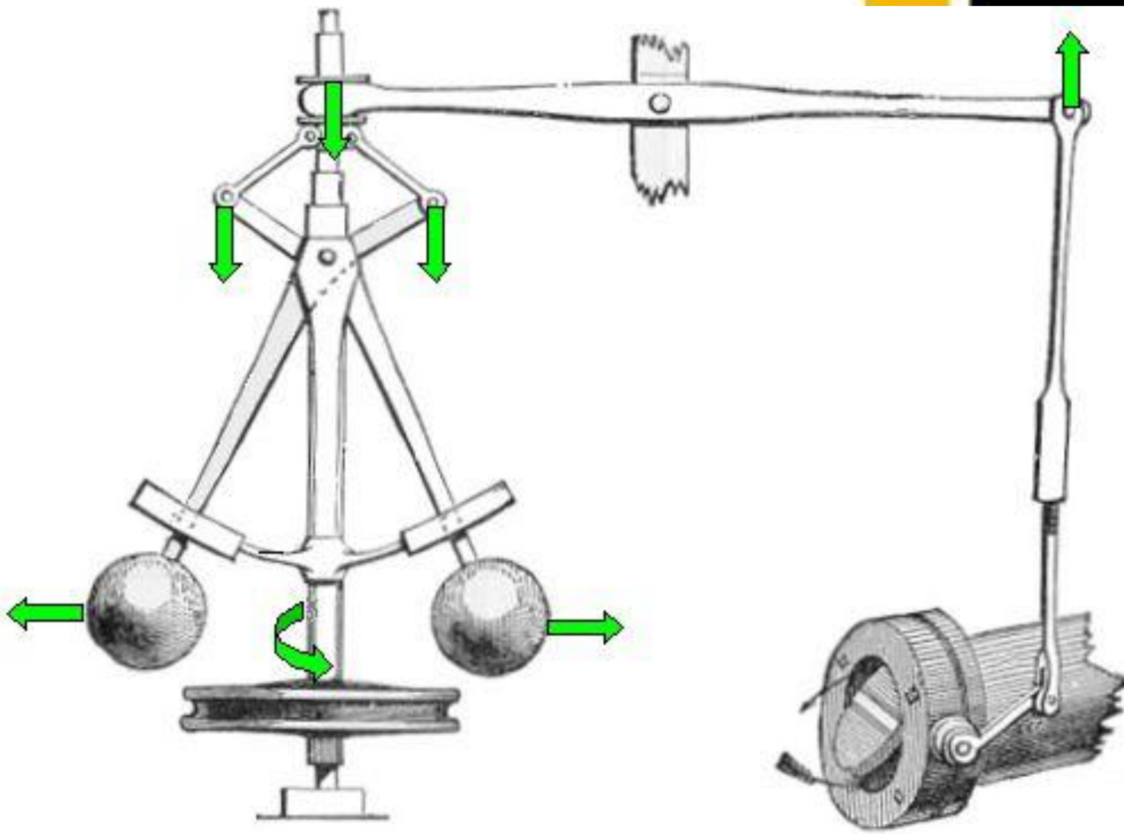


$$F_T\cos\theta = P \qquad F_T = m\omega^2 l \qquad \theta = \arccos\frac{g}{\omega^2 l}$$

$$\cos\theta = \frac{mg}{m\omega^2 l} = \frac{g}{\omega^2 l}$$

ω 越大，θ 也越大

利用此原理，可制成蒸汽机的调速器（如图所示）.



这个简单的设计，开创了现代工业自动控制的先河，因为这个貌似简单的装置基本具备了控制论所依据的所有的基本要素：感应、分析、执行……的反馈全自动的闭环系统.

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

外界负荷大时机器的转速下降由于离心力减小，由于重力的作用滑块下降。相应连接滑块的连杆就开大气门供气量，从而加大机器得输出功力进而机器的转速响应提高。

外界负荷小了机器的转速上升飞铁由于离心力增大克服了自身重力就向外张开，滑块上行相应减少供气量，机器的转速就要下降了。

这样就基本上完成了机器转速无论外界的负荷怎么变化都能保持了基本稳定。

别小看这么一个简单的设计，他开创了现代工业自动控制的先河，因为这个貌似简单的装置基本具备了控制论

所依据的所有的基本要素：感应、分析、执行……的反馈全自动的闭环的闭环系统

唯一欠缺点的是分析信息的参照不可调整（飞铁重量不可调整）不过后期改进的调速器加了个弹簧

而弹簧的弹力是可以调整的，这样就可以满足对机器转速的任意设定了~~~~~……

后现代控制论在此基本思想的基础上得到了超乎人想象地在人类所触及的各个领域得到了尽情地发扬广大。

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn