第 四 章

刚体转动

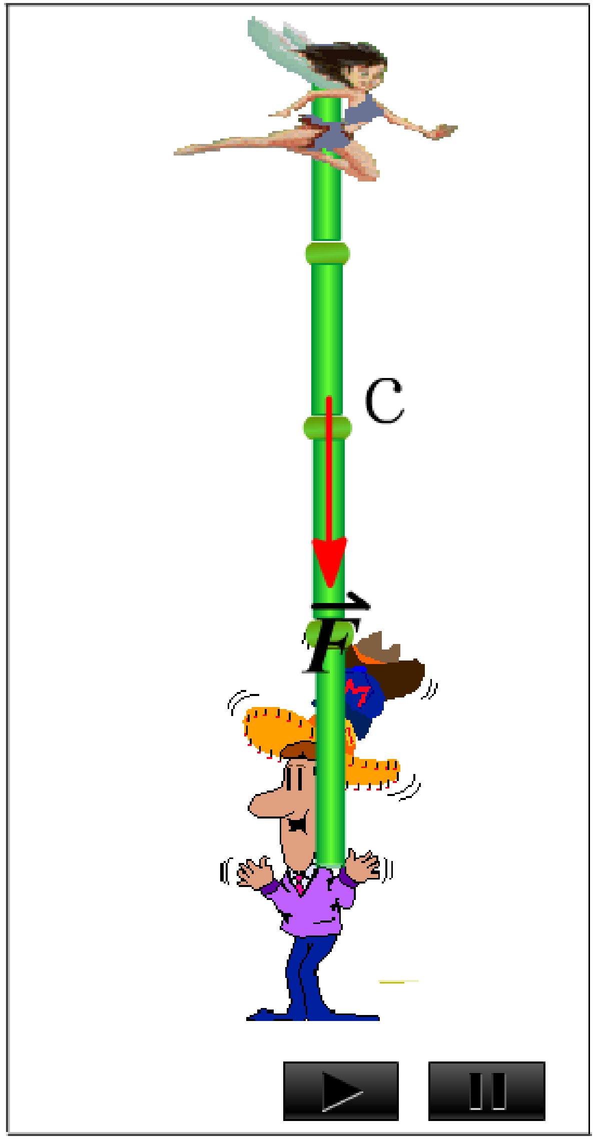
投票 最多可选1项

设置

竿子长些还是短些较安全？

A 长些安全

B 短些安全



提交

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

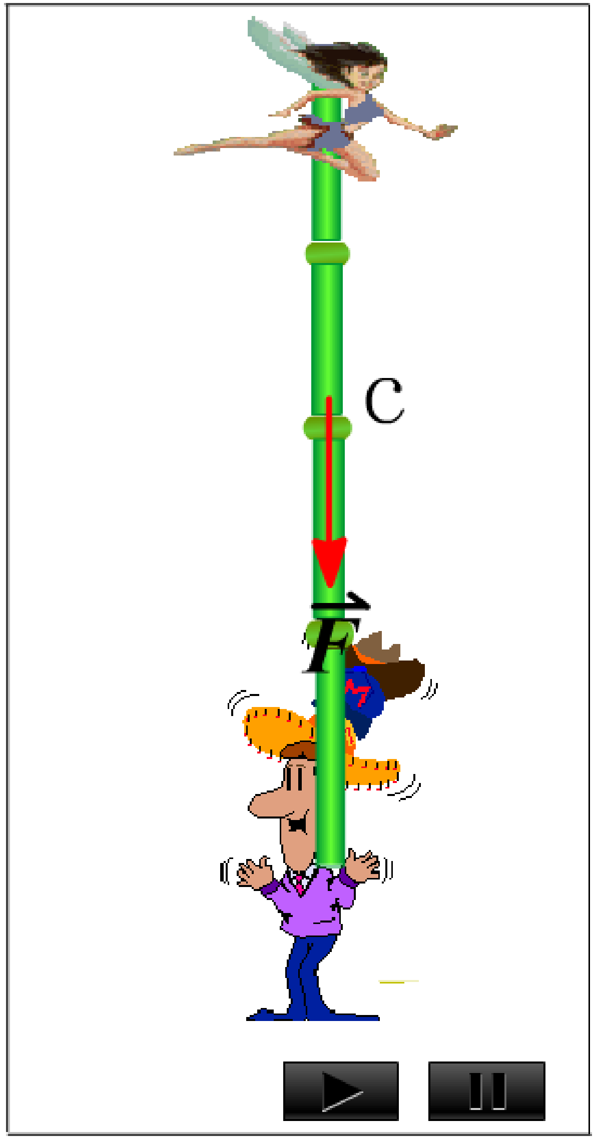
投票 最多可选1项

设置

竿子长些还是短些较安全?

A 长些安全

B 短些安全



提交

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

主要内容:

1. 刚体的运动；
2. 刚体的转动定律；
3. 刚体的角动量；
4. 刚体定轴转动的动能定理。

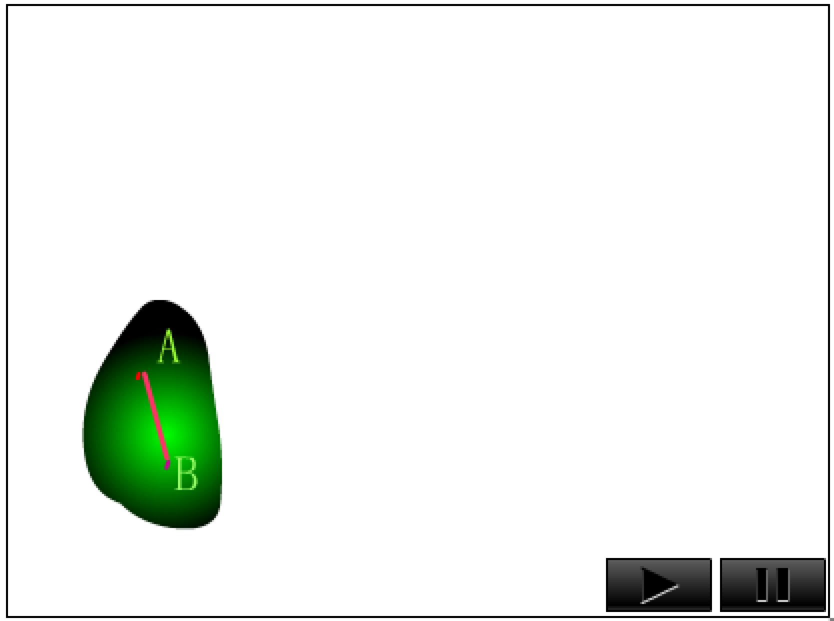
§4-1 刚体的定轴转动

一. 刚体的平动与转动

➢ **刚体：**在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体.（任意两质点间距离保持不变的特殊质点组）

刚体的运动形式：平动、转动.

➢ **平动：**若刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同，或者说刚体内任意两点间的连线总是平行于它们的初始位置间的连线.

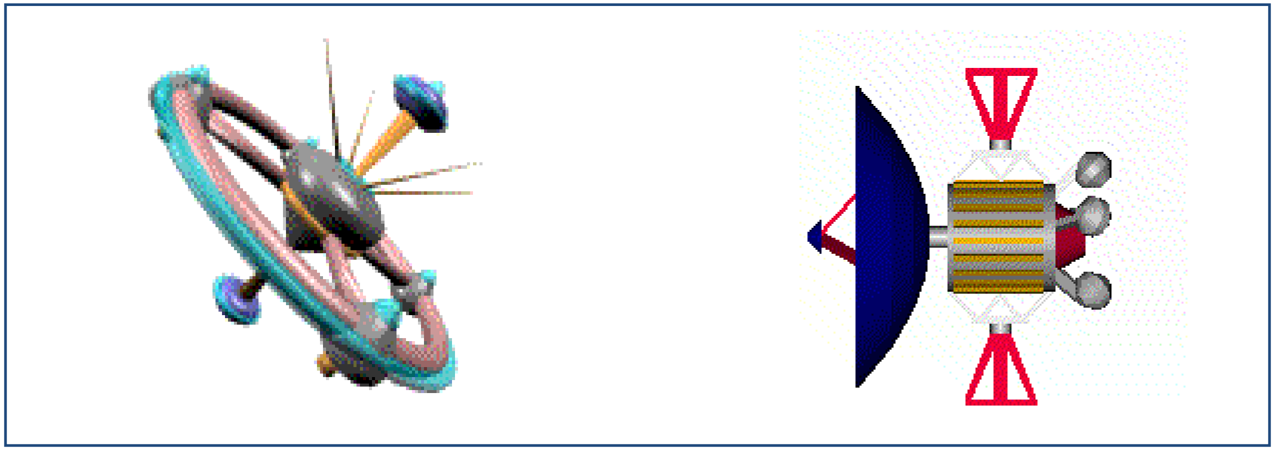


刚体平动 ⟹ 质点运动

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

- **转动：** 刚体中所有的点都绕同一直线做圆周运动 .

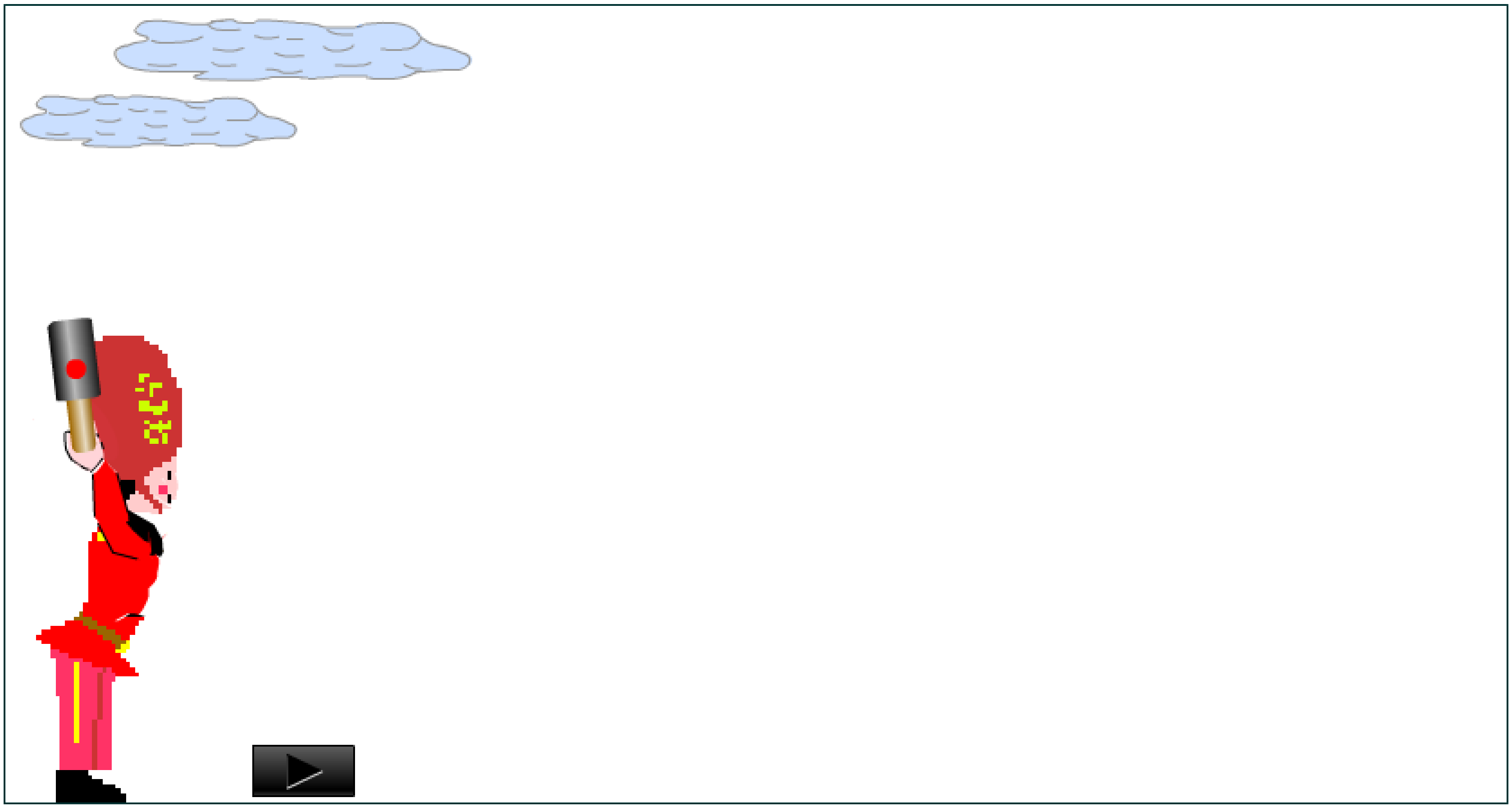
转动又分定轴转动和非定轴转动 .



- **刚体的平面运动 .**

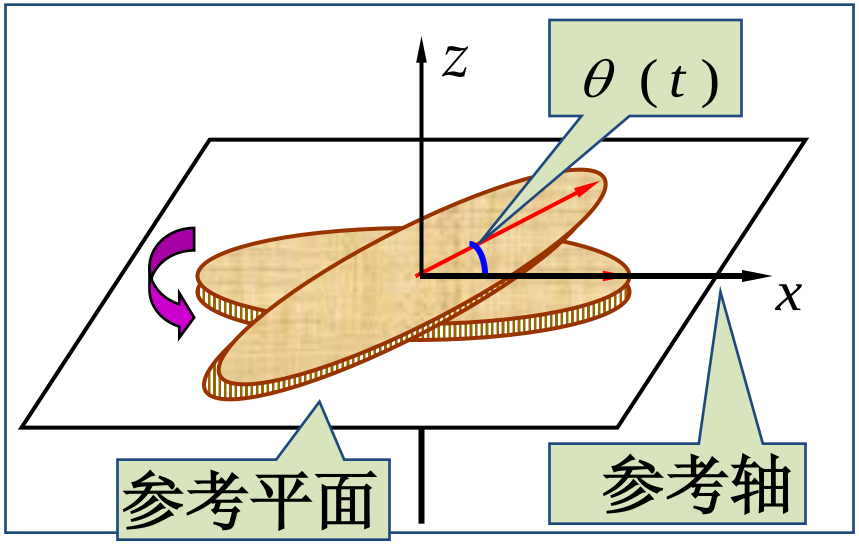
郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

- 刚体的一般运动 质心的平动 + 绕质心的转动



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

二．刚体定轴转动的描述



- 角坐标 $\theta = \theta(t)$

◆ 约定

沿逆时针方向转动 $\theta > 0$

沿顺时针方向转动 $\theta < 0$

- 角位移 $\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$

- 角速度 $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}$

- 角加速度 $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

角量与线量的关系

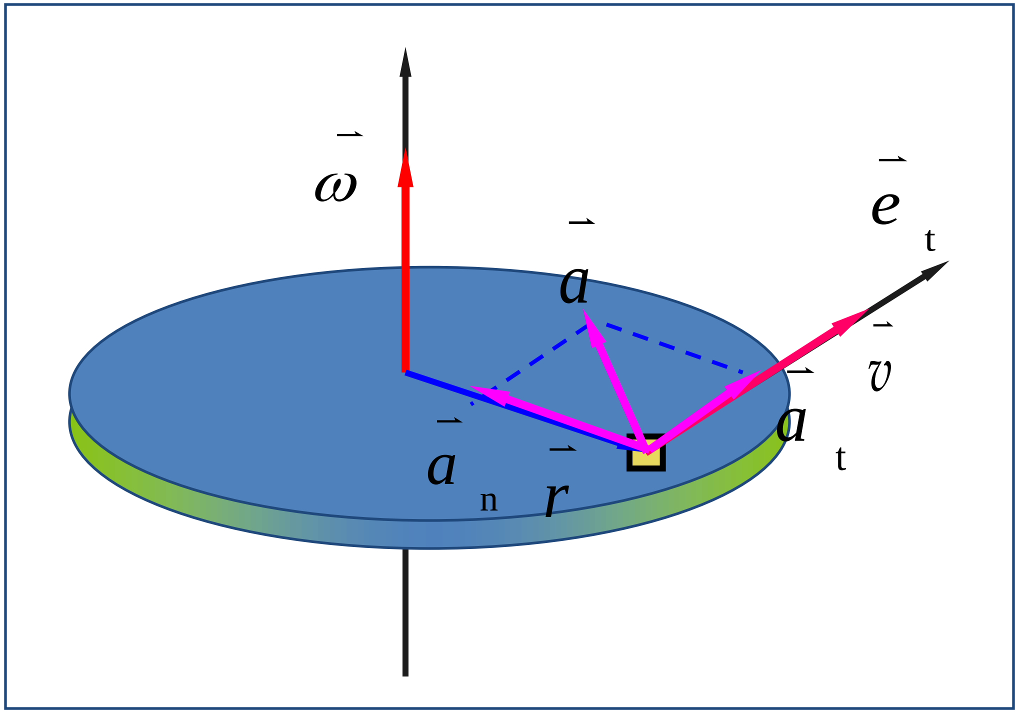
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\vec{v} = r\omega\vec{e}_t$$

$$a_t = r\alpha$$

$$a_n = r\omega^2$$



$$\vec{a} = r\alpha\vec{e}_t + r\omega^2\vec{e}_n$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

定轴转动的特点

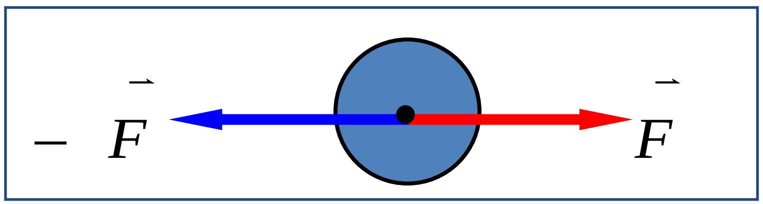
1） 每一质点均作圆周运动，圆面为转动平面；

2） 任一质点运动 $\Delta\theta, \omega, \alpha$ 均相同，但 $\vec{v}, \vec{a}$ 不同；

3） 运动描述仅需一个坐标 .

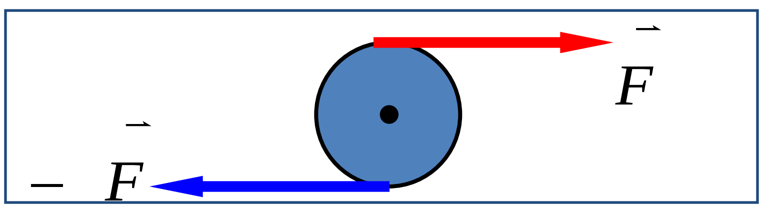
§ 4-2 转动定律

问：在质点问题中，我们将物体所受的力均作用于同一点，并仅考虑力的大小和方向所产生的作用；在刚体问题中，我们是否也可以如此处理？力的作用点的位置对物体的运动有影响吗？



$$\sum \vec{F}_i = 0 \ , \sum \vec{M}_i = 0$$

圆盘静止不动



$$\sum \vec{F}_i = 0 \ , \sum \vec{M}_i \neq 0$$

圆盘绕圆心转动

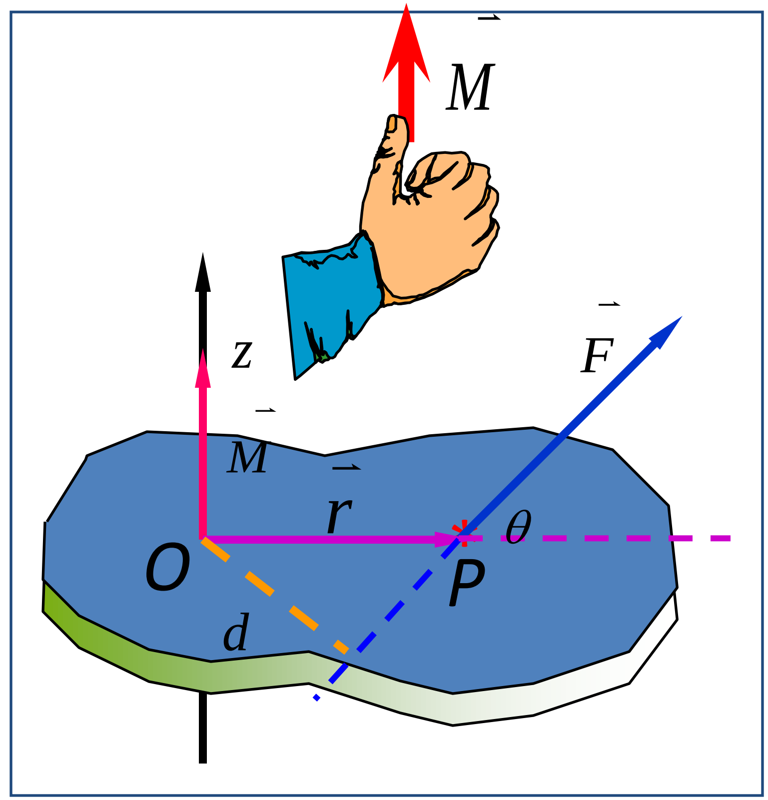
力矩可以反映力的作用点的位置对物体运动的影响.

一．力矩

刚体绕 Oz 轴旋转，力 $\vec{F}$ 作用在刚体上点 P，且在转动平面内，$\vec{r}$ 为由点 O 到力的作用点 P 的径矢．

$\vec{F}$ 对转轴 z 的力矩

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



1. $M = Fr\sin\theta = Fd$

$d = r\sin\theta$ ：力臂

注意：当力的作用线过轴时，力臂为0，力矩为0。

2. $M = Fr\sin\theta = F_t r$　$F_t = F\sin\theta$ ：切向力

郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn

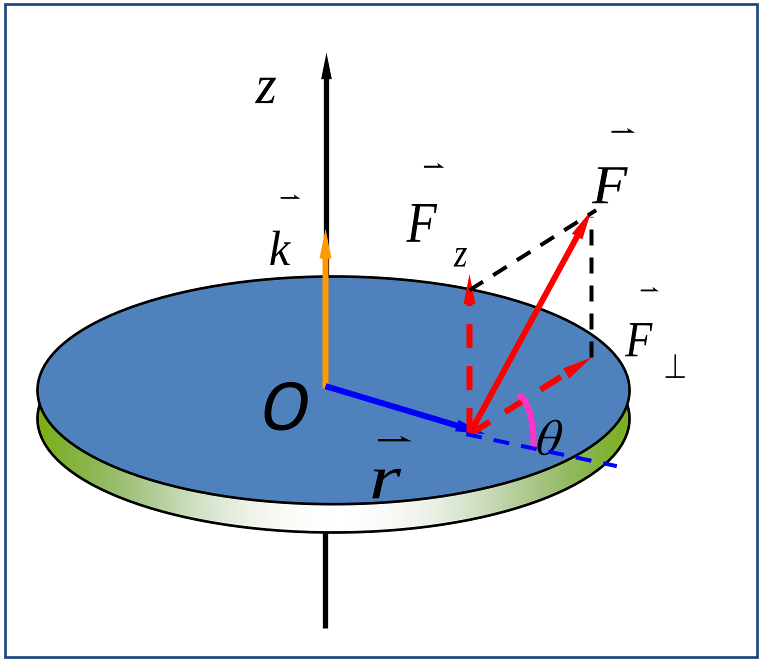
1）若力 $\vec{F}$ 不在转动平面内，可把力分解为平行于和垂直于转轴方向的两个分量

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_\perp$$

其中 $\vec{F}_z$ **对转轴的力矩为零**，故力对转轴的力矩

$$M_z \vec{k} = \vec{r} \times \vec{F}_\perp$$

$$M_z = rF_\perp \sin\theta$$



2）合力矩等于各分力矩的矢量和

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \cdots$$

单选题 3分

设置

一对作用力和反作用力在同一时间段的的力矩和为（　　）

A 一定为0

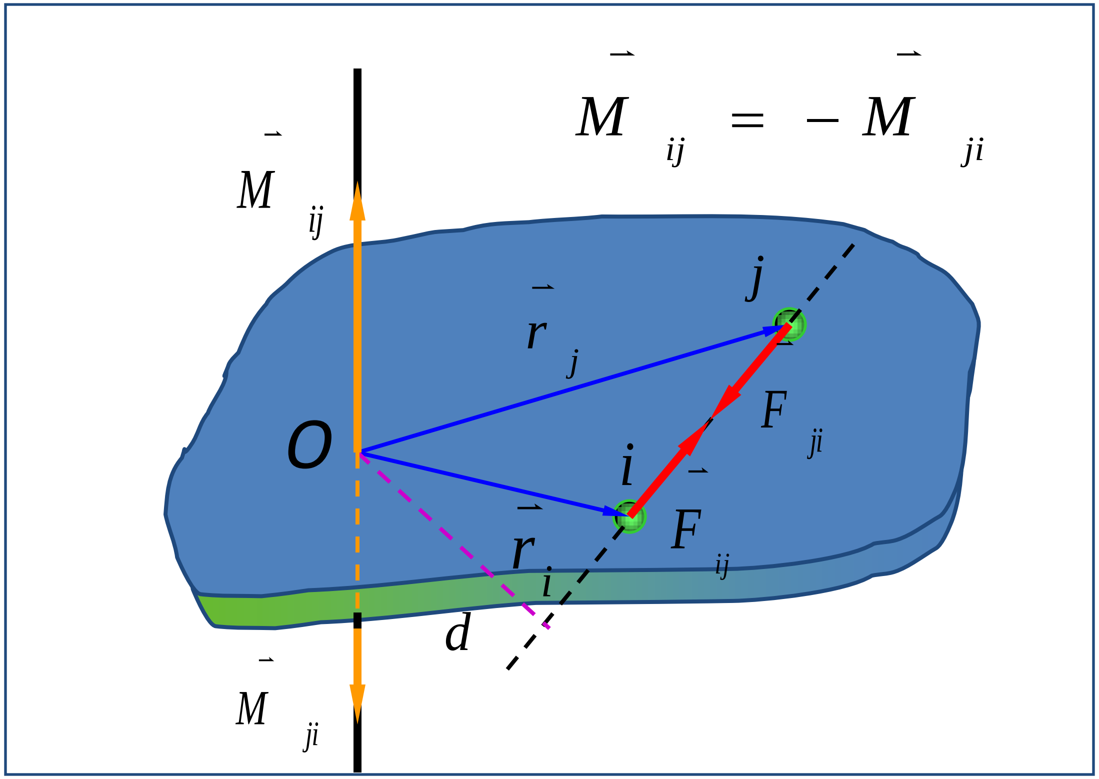
B 一定不为0

C 可能为0，也可能不为0，需要具体情况具体分析

提交

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

3） 刚体内**作用力和反作用力**的力矩互相**抵消**



结论：刚体内各质点间的作用力对转轴的**合内力矩为零.**

$$M = \sum M_{ij} = 0$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

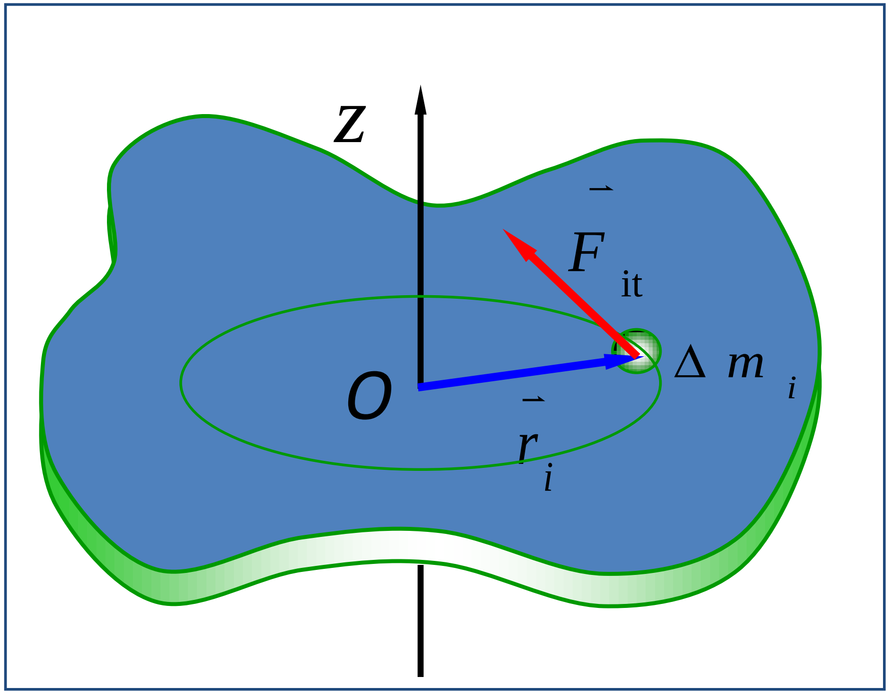
二. 转动定律

$$F_{it} = (\Delta m_i) a_t$$

$$M_i = r_i F_{it} = (\Delta m_i) a_t r_i$$

$$\because \quad a_t = r_i \alpha$$

$$\therefore \quad M_i = (\Delta m_i) r_i^2 \alpha$$



$$M = \sum M_i = \sum (\Delta m_i) r_i^2 \alpha = \alpha \sum (\Delta m_i) r_i^2$$

- **转动惯量** $J = \sum \Delta m_i r_i^2$
- **转动定律** $\boxed{M = J\alpha}$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

◆ **转动定律** $M = J\alpha$ $J = \sum \Delta m_i r_i^2$

刚体定轴转动的角加速度与它所受的**合外力矩**成正比，与刚体的**转动惯量**成反比．

- 转动惯量物理**意义**：转动惯性的量度.
- 质量连续分布刚体的转动惯量

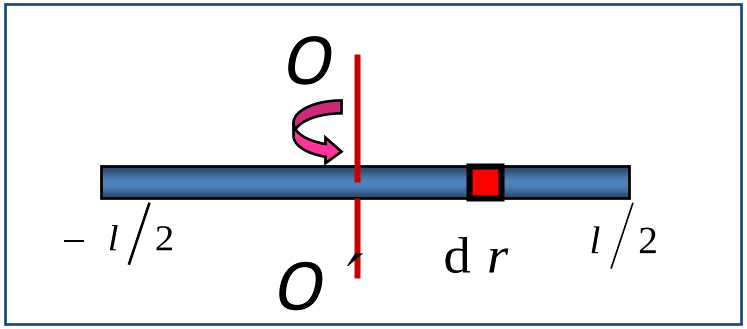
$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 \mathrm{d}m$$

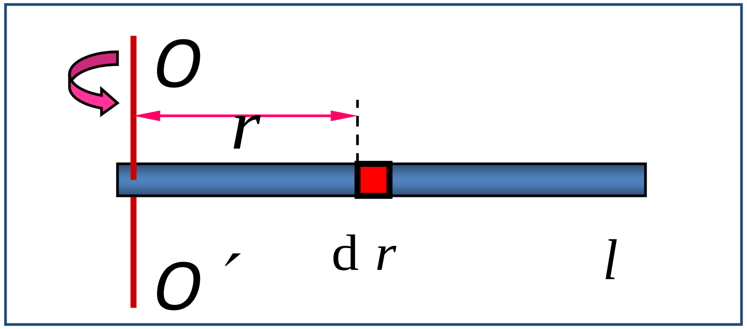
质量元：$\mathrm{d}m$

1. 质点运动惯性的量度是质量
2. 几何形状：人展开手臂和收回手臂比较
3. 转轴位置不同，r不同，转动。惯量不同

注意 转动惯量的大小取决于刚体的密度、几何形状及转轴的位置.

讨论： 一质量为 m 、长为 l 的均匀细长棒，与棒垂直的轴的位置不同，转动惯量的变化 .



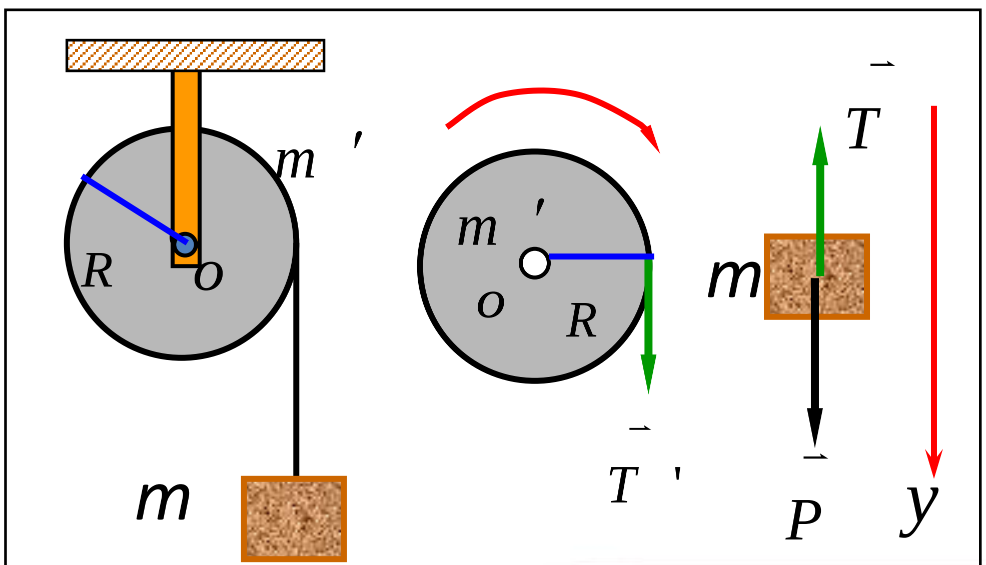


郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

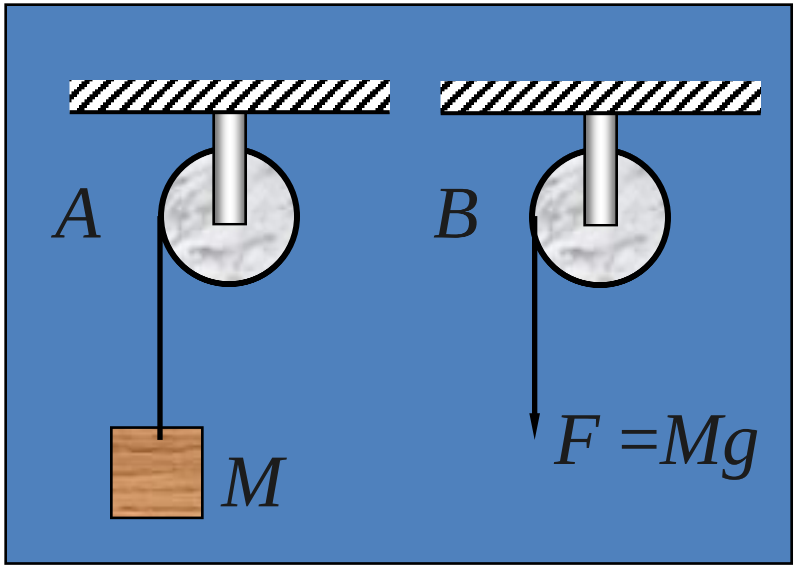
郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

例1 如图，有一半径为 R 质量为 m' 的匀质圆盘，可绕通过盘心 O 垂直盘面的水平轴转动．转轴与圆盘之间的摩擦略去不计．圆盘上绕有轻而细的绳索，绳的一端固定在圆盘上，另一端系质量为 m 的物体．试求物体下落时的加速度、绳中的张力和圆盘的角加速度．



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

如图所示，A、B为两个相同的定滑轮，A滑轮挂一质量为M的物体，B滑轮受力$F = Mg$，设A、B两滑轮的角加速度分别为α_A和α_B，不计滑轮的摩擦，这两个滑轮的角加速度的大小关系为：



A $\alpha_A = \alpha_B$；

B $\alpha_A < \alpha_B$；

C $\alpha_A > \alpha_B$；

D 无法确定.

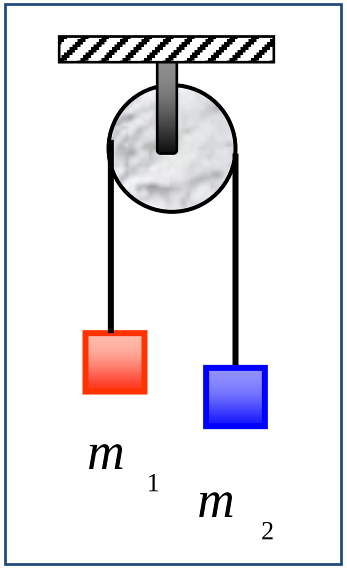
提交

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

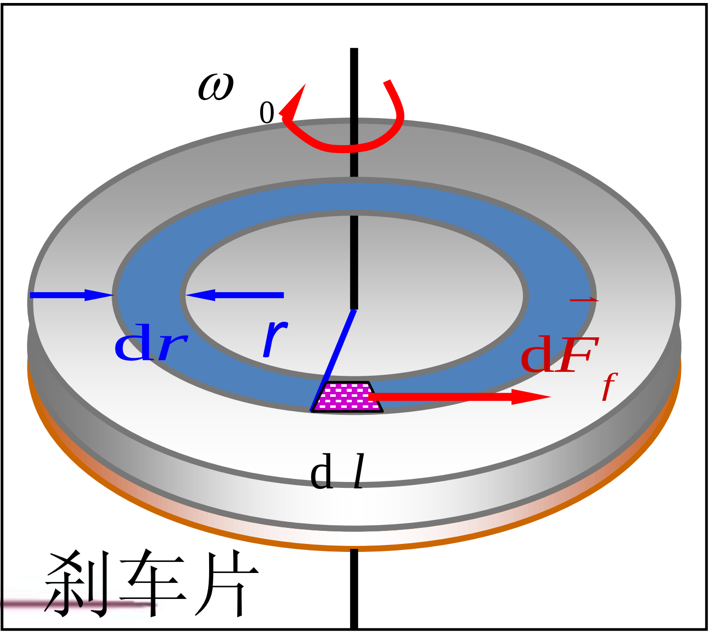
例1.5　阿特伍德机

如图所示阿特伍德机，不计绳的质量，不计轴承摩擦，且绳不可伸长，绳与滑轮之间没有相对滑动，滑轮质量不可忽略，滑轮半径为R，对中心轴的转动惯量为J，滑轮两边的物体质量分别为m_1和m_2，且$m_1 > m_2$。求重物释放后物体的加速度。

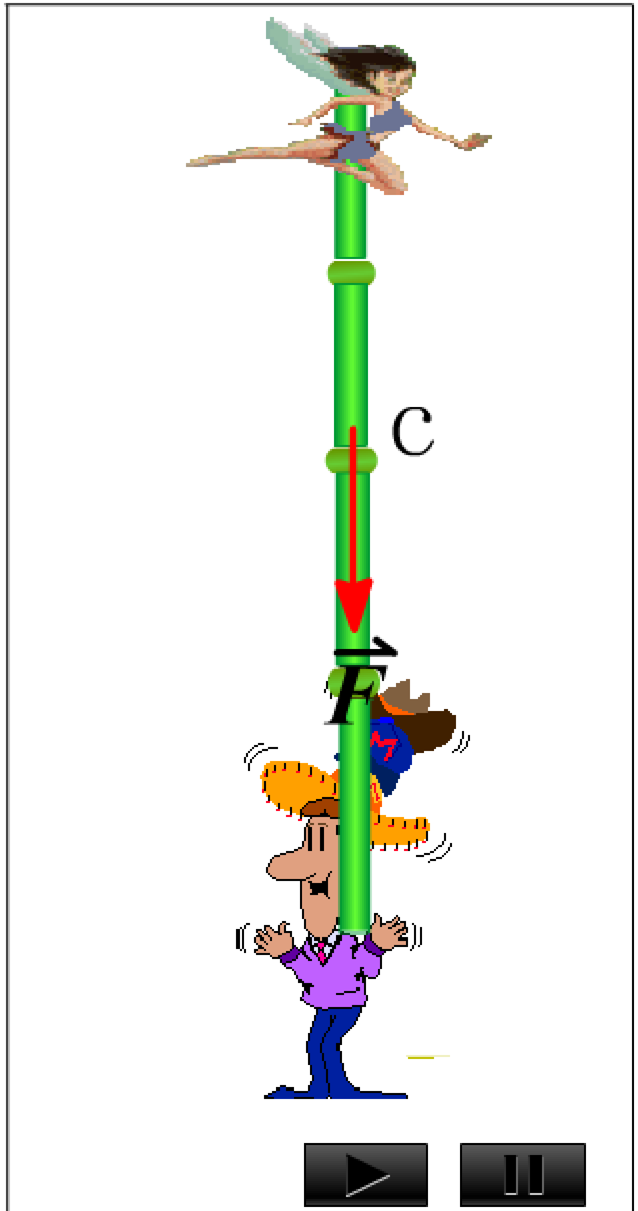


郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

例2 有一半径为R质量为 m 匀质圆盘, 以角速度 ω_0绕通过圆心垂直圆盘平面的轴转动. 若有一个与圆盘大小相同的粗糙平面(俗称刹车片)挤压此转动圆盘, 故而有正压力N 均匀地作用在盘面上, 从而使其转速逐渐变慢. 设正压力N 和刹车片与圆盘间的摩擦系数均已被实验测出. 试问经过多长时间圆盘才停止转动?



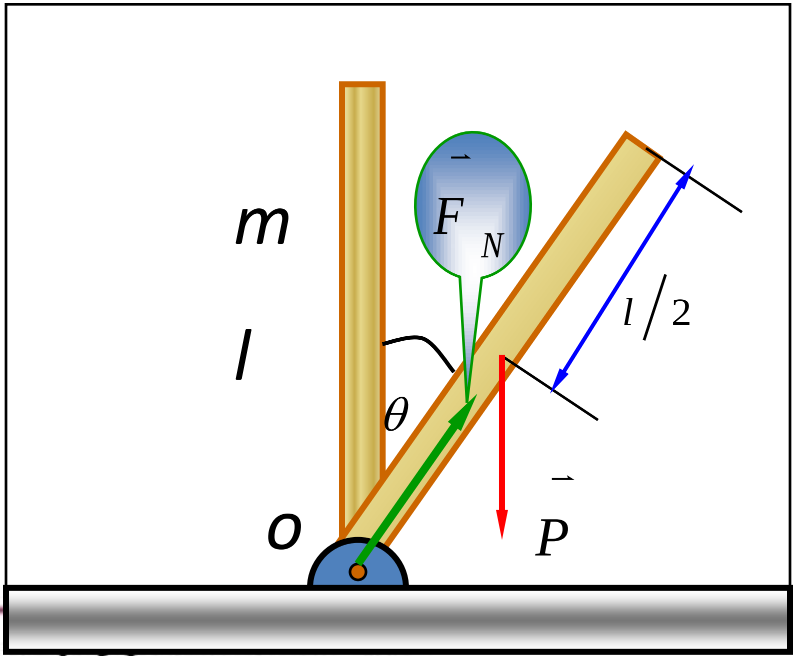
1. 用转动定律来解；
2. 用伞和粉笔和笔演示。



竿子长些还是短些较安全？

郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn

例3 一长为 l 质量为 m 匀质细杆竖直放置，其下端与一固定铰链 O 相接，并可绕其转动. 由于此竖直放置的细杆处于非稳定平衡状态，当其受到微小扰动时，细杆将在重力作用下由静止开始绕铰链 O 转动. 试计算细杆转动到与竖直线成 θ 角时的角加速度和角速度.



§4-3 角动量

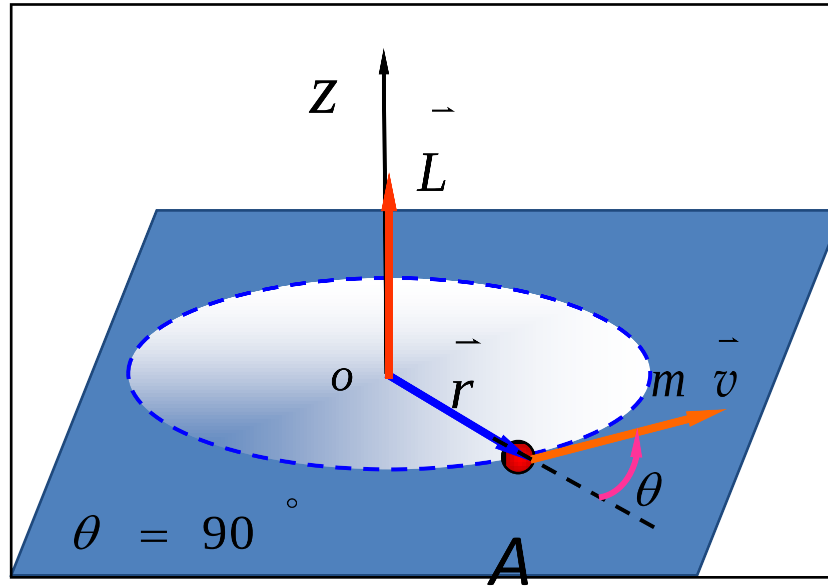
力的时间累积效应 ⟹ 冲量、动量、动量定理.

力矩的时间累积效应 ⟹ 冲量矩、角动量、角动量定理.

一．质点的角动量和刚体的角动量

1. 质点角动量

质点在垂直于 z 轴平面上以角速度 ω 作半径为 r 的圆运动.



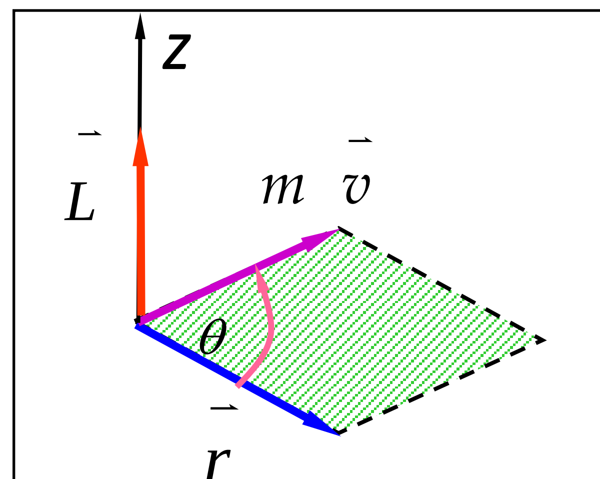
➢ 质点角动量（相对圆心）

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

大小 $L = rmv\sin\theta$

$$L = rmv = mr^2\omega \quad （圆运动）$$

$\vec{L}$ 的方向符合右手法则.

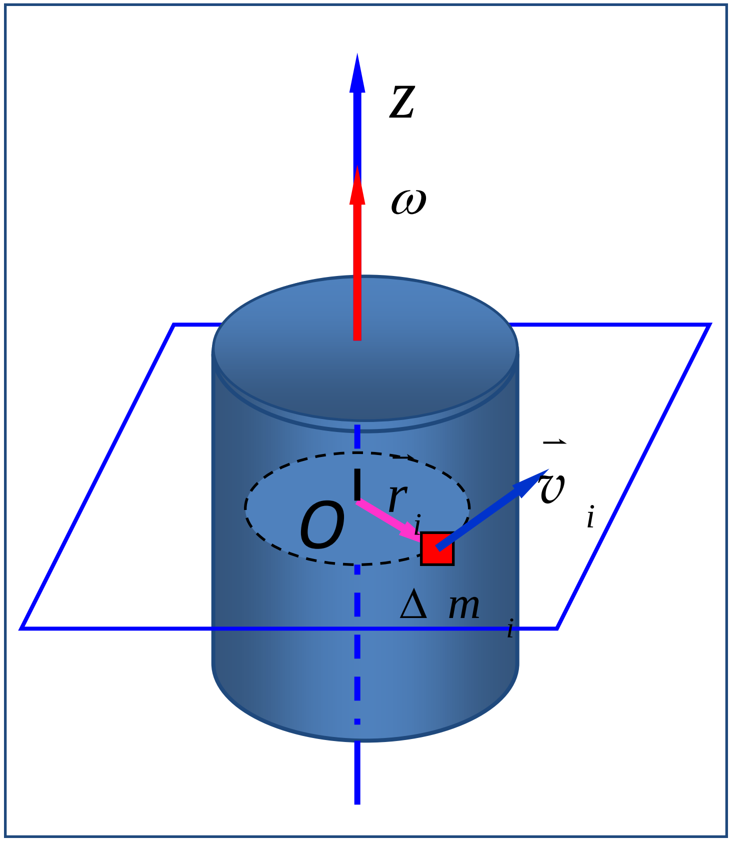


郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

质点角动量（相对圆心）：

$$L = rmv = mr^2\omega$$

2. 刚体定轴转动的角动量



$$L_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

$$L = \sum_i L_i = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega$$

$$\boxed{L = J\omega}$$

刚体定轴转动的角动量:

$$\boxed{L = J\omega}$$

二 刚体定轴转动的角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\alpha = M$$

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M\,\mathrm{d}t = \int_{L_1}^{L_2} \mathrm{d}L = J\omega_2 - J\omega_1$$

非刚体定轴转动的角动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} M\,\mathrm{d}t = J_2\omega_2 - J_1\omega_1$

- 刚体定轴转动的角动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} M\,\mathrm{d}t = J\omega_2 - J\omega_1$

三. 刚体定轴转动的角动量守恒定律

- 若 $M = 0$，则 $L = J\omega =$ 常量.

讨论

- 守恒条件 $M = 0$

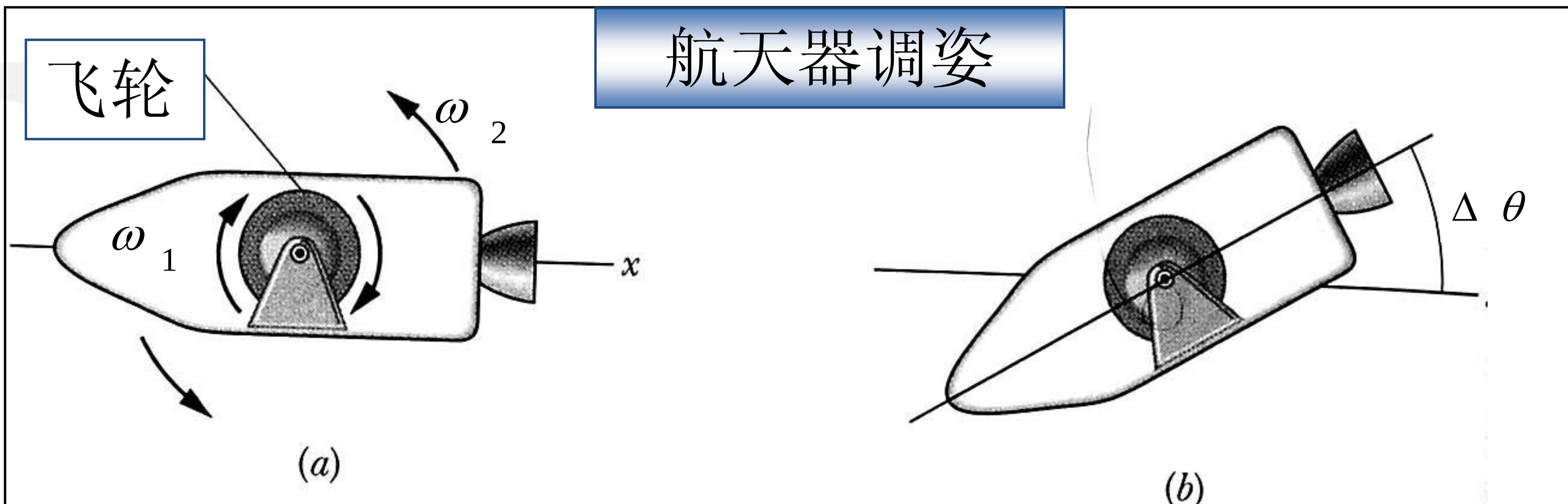
若 J 不变，ω 不变；若 J 变，ω 也变，但 $L = J\omega$ 不变.

- 内力矩不改变系统的角动量.
- 在冲击等问题中 $\because M^{\text{in}} \gg M^{\text{ex}} \quad \therefore L \approx$ 常量
- 角动量守恒定律是自然界的一个基本定律.

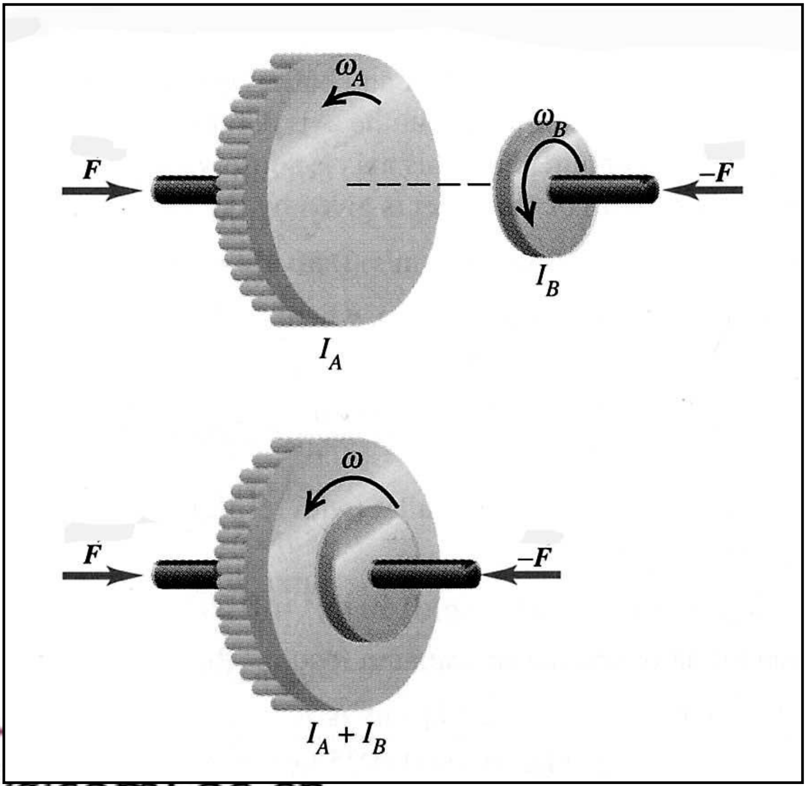
有许多现象都可以用角动量守恒来说明. 它是自然界的普遍适用的规律.

- 花样滑冰
- 跳水运动员跳水

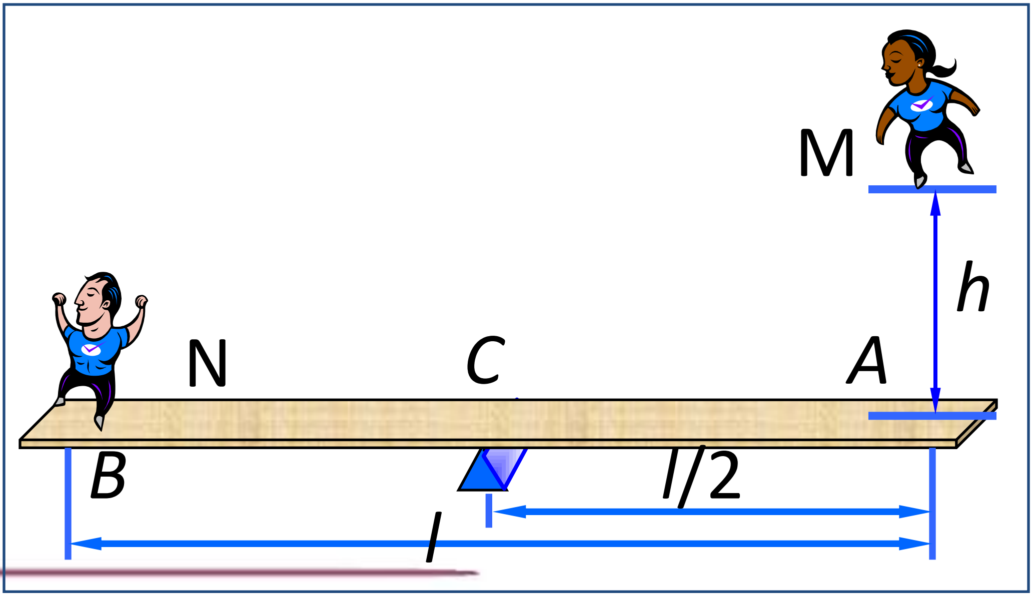
航天器调姿



例1 两个转动惯量分别为 J_1 和 J_2 的圆盘 A和 B. A 是机器上的飞轮， B 是用以改变飞轮转速的离合器圆盘. 开始时，他们分别以角速度 ω_1 和 ω_2 绕水平轴转动. 然后，两圆盘在沿水平轴方向力的作用下. 啮合为一体，其角速度为 ω，求齿轮啮合后两圆盘的角速度.

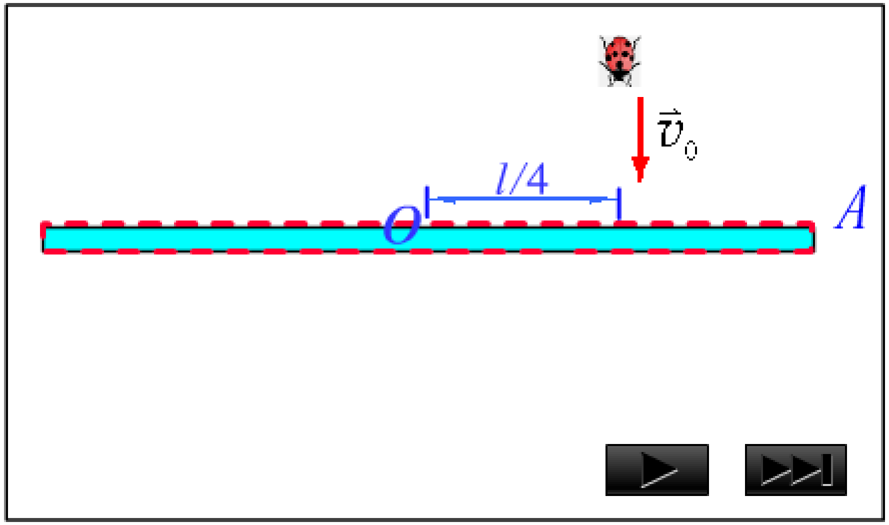


例2 一杂技演员 M 由距水平跷板高为 h 处自由下落到跷板的一端 A，并把跷板另一端的演员 N 弹了起来.设跷板是匀质的，长度为 l，质量为 m'，跷板可绕中部支撑点 C 在竖直平面内转动，演员的质量均为 m. 假定演员 M 落在跷板上，与跷板的碰撞是完全非弹性碰撞 .问演员 N 可弹起多高？



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

例3 质量很小长度为l的均匀细杆，可绕过其中心O并与纸面垂直的轴在竖直平面内转动．当细杆静止于水平位置时，有一只小虫以速率v_0垂直落在距点O为$l/4$处，并背离点O向细杆的端点A爬行．设小虫与细杆的质量均为m．问：欲使细杆以恒定的角速度转动，小虫应以多大速率向细杆端点爬行?



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

§ 4-4 力矩做功 能量

力的空间累积效应 ⟹ 力的功,动能,动能定理.

力矩的空间累积效应 ⟹ 力矩的功,转动动能,动能定理.

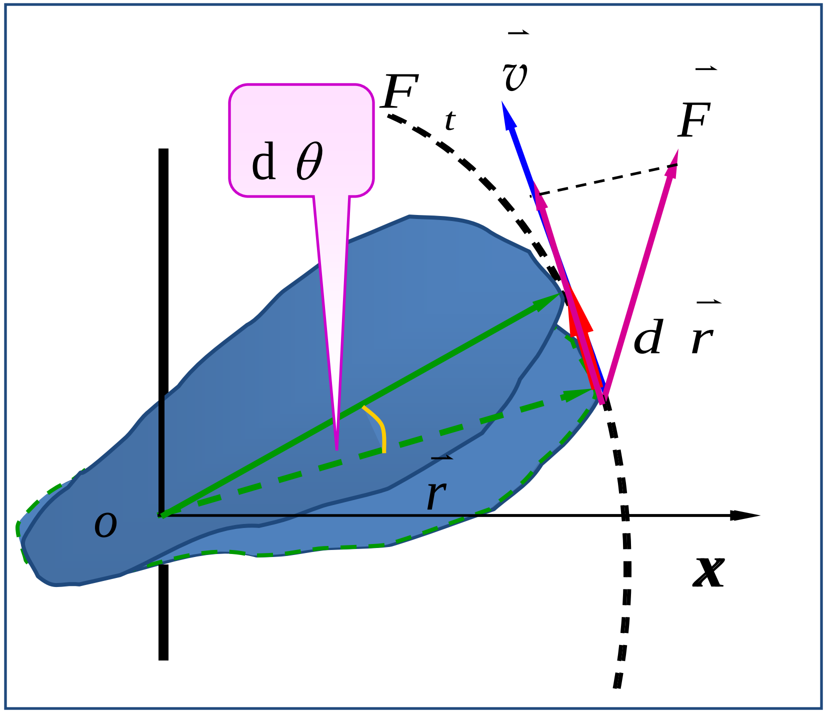
一. 力矩作功

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}\cdot\mathrm{d}s\,\hat{e}_{\mathrm{t}} = F_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}s$$

$$= F_{\mathrm{t}}\,r\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}W = M\,\mathrm{d}\theta$$

力矩的功 $\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,\mathrm{d}\theta}$



二. 力矩的功率

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

三. 转动动能

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i \Delta m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

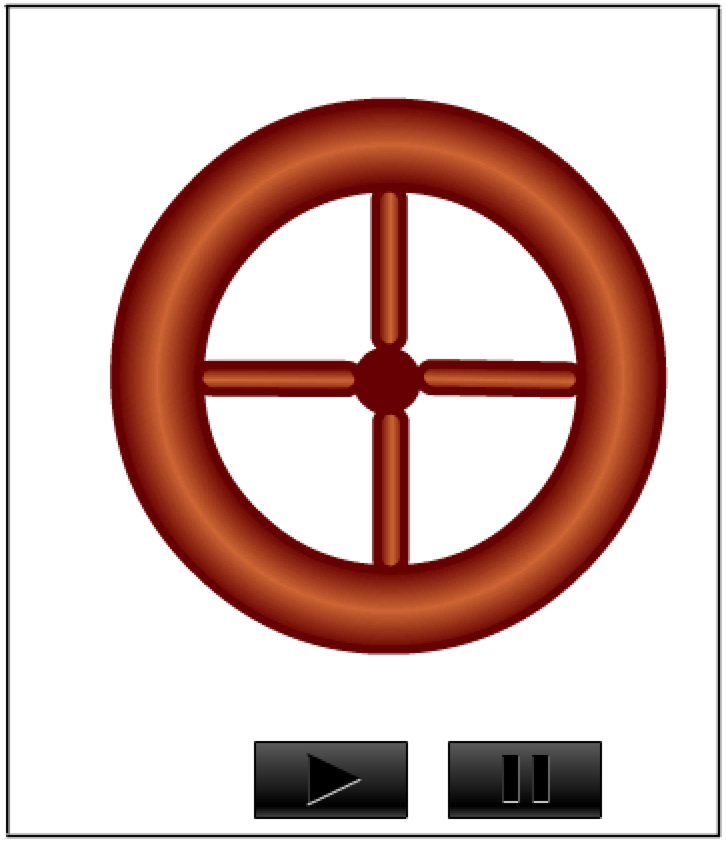
四. 刚体绕定轴转动的动能定理

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_1} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\,\mathrm{d}\omega$$

$$\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2}$$

合外力矩对绕定轴转动的刚体所作的功等于刚体转动动能的增量 .

1.飞轮具有较大转动惯量。由于发动机各个缸的做功是不连续的，所以发动机转速也是变化的。当发动机转速增高时，飞轮的动能增加，把能量贮蓄起来;当发动机转速降低时，飞轮动能减少，把能量释放出来。飞轮可以用来减少发动机运转过程的速度波动。飞轮损伤的主要原因及维修，上文中有提到。



飞轮的质量为什么大都分布于外轮缘？

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

质点运动与刚体定轴转动对照

质点运动		刚体定轴转动	
速度	$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$	角速度	$\omega=\frac{d\theta}{dt}$
加速度	$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$	角加速度	$\alpha=\frac{d\omega}{dt}$
力	$\vec{F}$	力矩	$\vec{M}$
质量	m	转动惯量	$J=\int r^2 dm$
动量	$\vec{P}=m\vec{v}$	角动量	$L=J\omega$

质点运动规律与刚体定轴转动的规律对照

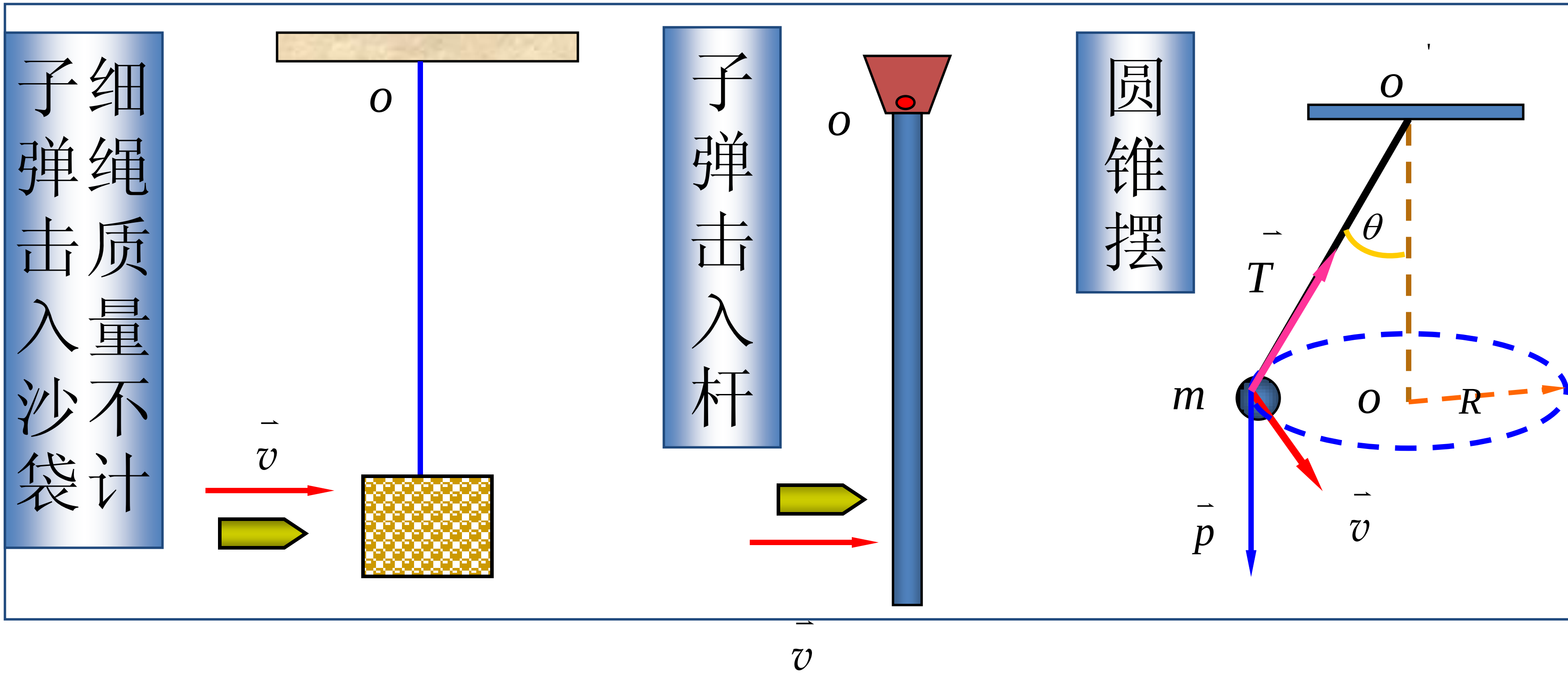
质点的平动	刚体的定轴转动
运动定律 $\vec{F}=m\vec{a}$	转动定律 $M=J\alpha$
动量定理 $\int_{t_0}^{t}\vec{F}\,\mathrm{d}t=m\vec{v}-m\vec{v}_0$	角动量定理 $\int_{t_0}^{t}\vec{M}\,\mathrm{d}t=\vec{L}-\vec{L}_0$
动量守恒定律 $\sum\vec{F}_i=0,\ \sum m_i\vec{v}_i=$恒量	角动量守恒定律 $\vec{M}=0,\ \sum J_i\vec{\omega}_i=$恒量
力的功 $W=\int_a^b\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	力矩的功 $W=\int_{\theta_0}^{\theta}M\,\mathrm{d}\theta$
动能 $E_\mathrm{k}=mv^2/2$	转动动能 $E_\mathrm{k}=J\omega^2/2$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

质点运动规律与刚体定轴转动的规律对照	
质点的平动	刚体的定轴转动
动能定理 $W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$	动能定理 $W=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$
重力势能 $E_p=mgh$	重力势能 $E_p=mgh_C$
机械能守恒 只有保守力作功时 $E_k+E_p=$ 恒量	机械能守恒 只有保守力作功时 $E_k+E_p=$ 恒量

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

讨论



以子弹和沙袋为系统	以子弹和杆为系统	圆锥摆系统
动量守恒；	动量不守恒；	动量不守恒；
角动量守恒；	角动量守恒；	角动量守恒；
机械能不守恒．	机械能不守恒．	机械能守恒．

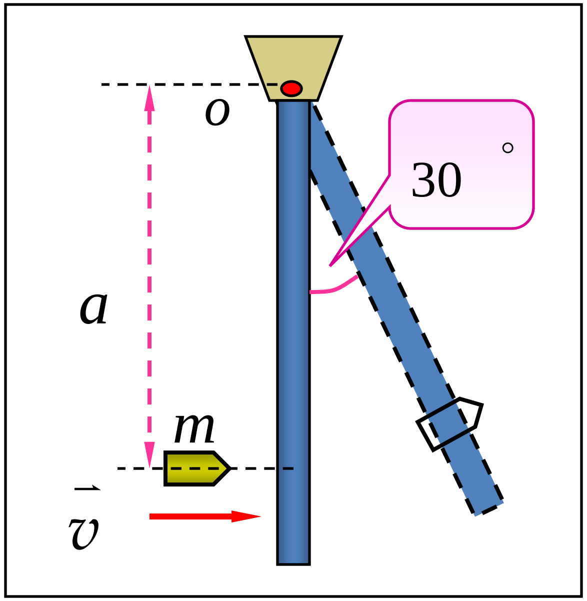
郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

例1 有一吊扇第一档转速为 $n_1 = 7\text{r/s}$，第二档转速为 $n_2 = 10\text{r/s}$．吊扇转动时要受到阻力矩 M_f 的作用,一般来说,阻力矩与转速之间的关系要由实验测定，但作为近似计算，我们取阻力矩与角速度之间的关系为 $M_f = k\,\omega^2$，其中系数 $k = 2.74\times10^{-4}\ \text{N·m·rad}^{-2}\text{·s}^2$．试求（1）吊扇的电机在这两种转速下所消耗的功率；（2）吊扇由静止匀加速地达到第二档转速经历的时间为 5s．在此时间内阻力矩做了多少功？

解（1）

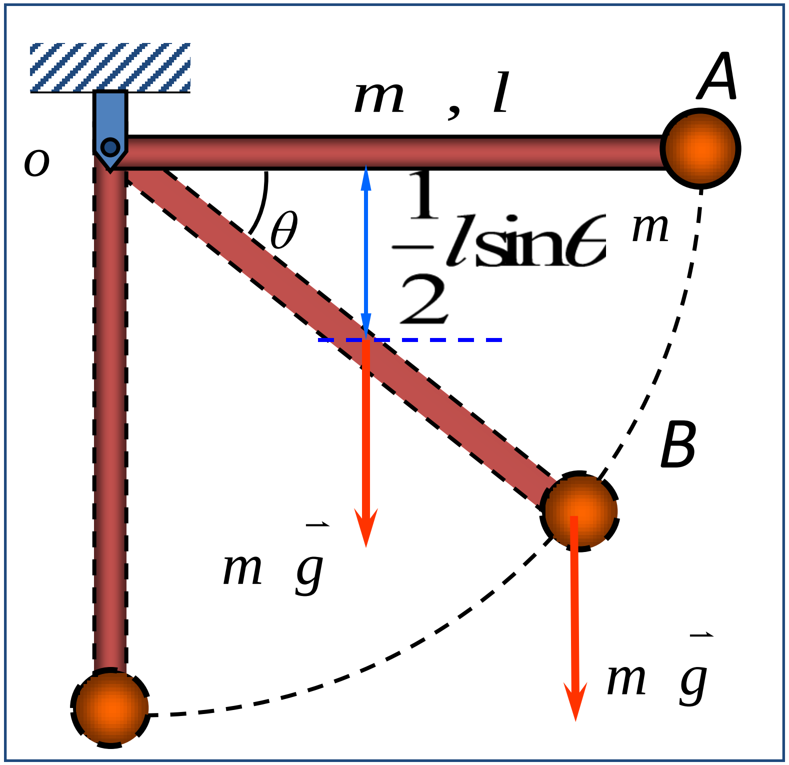
郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

例2 一长为 l，质量为 m' 的竿可绕支点O自由转动．一质量为 m 、速率为 v 的子弹射入竿内距支点为 a 处，使竿的偏转角为30º．问子弹的初速率为多少？



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

例3 一根长为l、质量为m的均匀细棒，棒的一端可绕通过O点并垂直于纸面的轴转动，棒的另一端有质量为 m 的小球. 开始时，棒静止地处于水平位置A. 当棒转过 θ 角到达位置 B，棒的角速度为多少?



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

17 世纪牛顿力学构成了体系．可以说，这是物理学第一次伟大的综合． 牛顿建立了两个定律， 一个是运动定律， 一个是万有引力定律， 并发展了变量数学微积分，具有解决实际问题的能力． 他开拓了天体力学这一科学，海王星的发现就充分显示了这一点．

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn