力学主要内容:

力学：研究宏观物体的机械运动规律的学科

1. 质点运动学：关注运动的描述，位移，路程，轨迹，速度，加速度；
2. 质点动力学：关注力的分析
3. 动量和能量：关注始末状态的动量和能量
4. 刚体的定轴转动：研究对象发生改变，变为刚体。

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

第　一　章

质点运动学

北京水立方跳水池30米*25米，水深4.5-5.5米，可以进行各类跳水项目，如1米跳板，3米跳板，10米跳台等。为什么水深在5米附近？

§1-1 质点运动的描述

1. 质点，刚体
2. 参考系，坐标系
3. 位置矢量　运动方程　轨迹方程　位移　路程
4. 速度
5. 加速度

郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn

§1-1 质点运动的描述

物理模型：

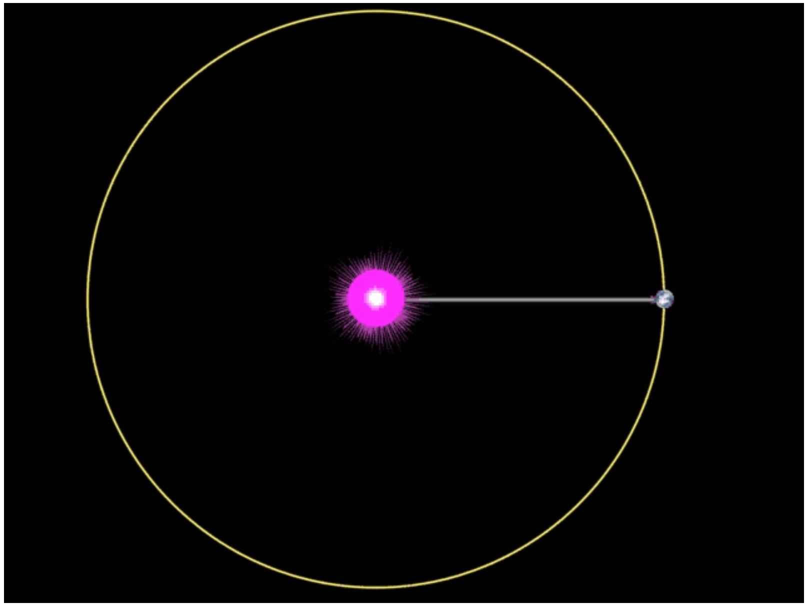
质点：不考虑物体的大小和内部结构，看作一个有质量的几何点。

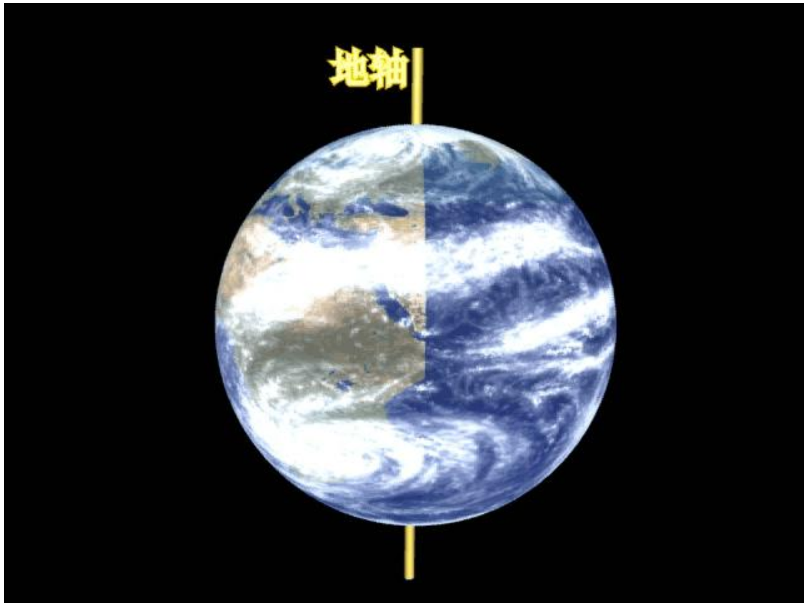
无大小，无形状，有质量。

刚体：外力作用下，大小和形状保持不变的物体。

有大小，有形状，有质量，但大小和形状不会改变

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn





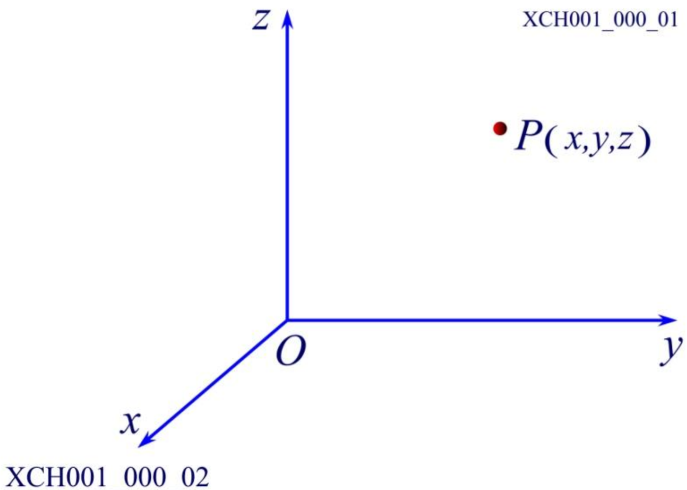
地球公转： 地球上各点的公转速度相差很小，将地球看作质点。

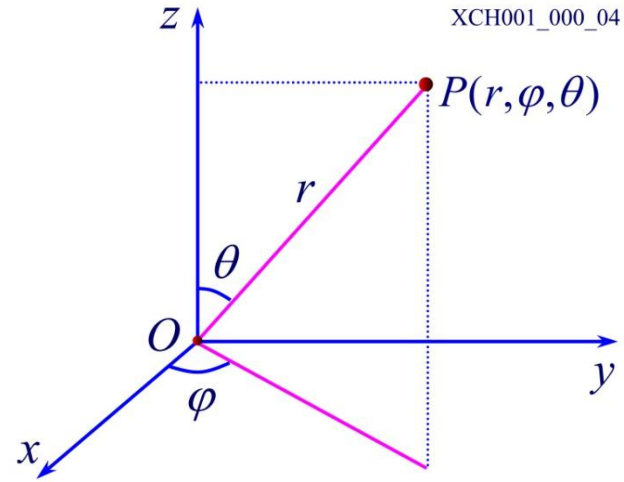
地球自转： 地球上各点的速度相差很大，将地球看作刚体。

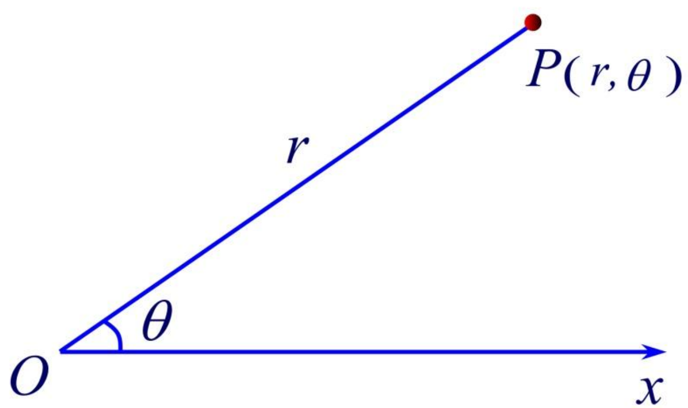
参考系：为描述物体的运动而选择的标准叫做参考系。

1. 描述物体运动时必须明确参考系。
2. 运动学中，参考系的选择是任意的。
3. 选择不同的参考系，对同一物体的描述是不同的。

坐标系：参考系的数学抽象.







郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

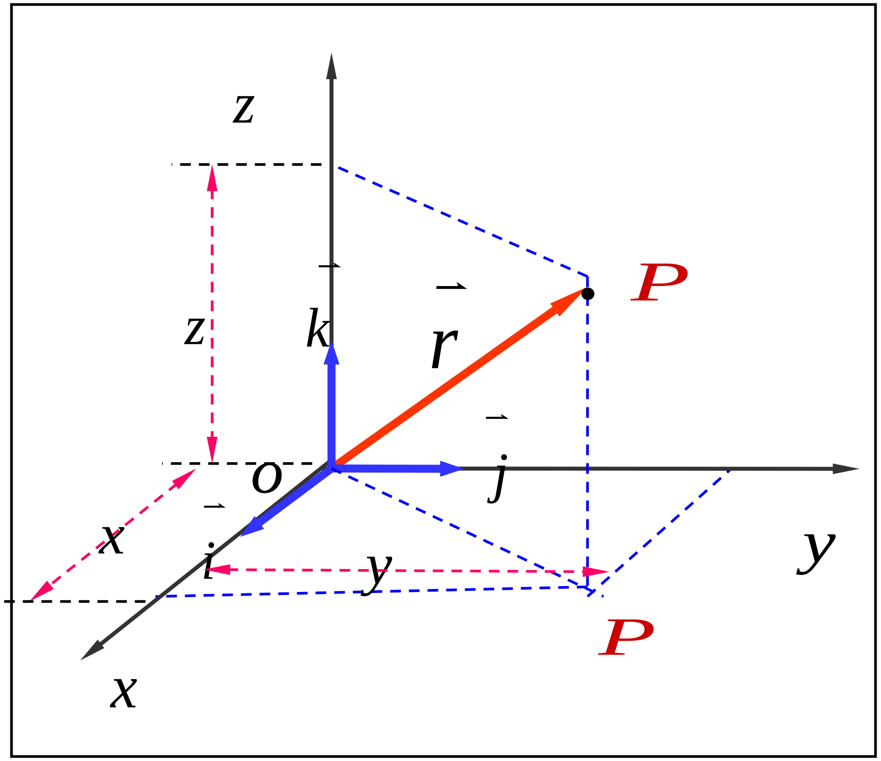
位置矢量　运动方程　轨迹方程　位移　路程

1　位置矢量：

原点指向质点的矢量，可确定质点的位置。

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

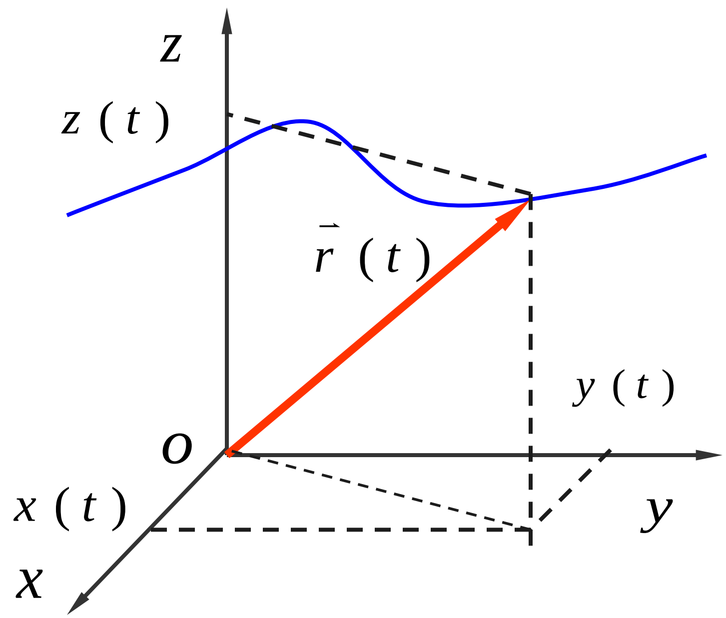


2 运动方程和轨迹方程

运动方程：位置矢量随时间变化的方程

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

分量式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$



轨迹方程：描述质点运动轨迹曲线的方程，从运动方程消去参数 t 得**轨迹方程**

$$f(x, y, z) = 0$$

Ex1：平抛运动

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

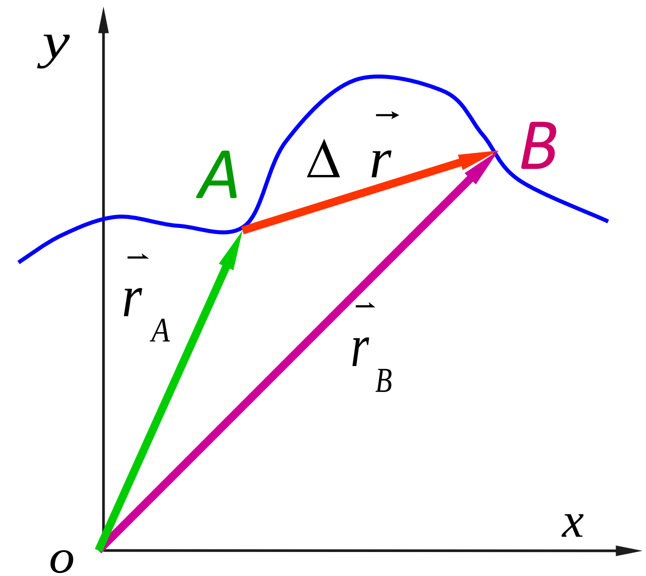
Ex1：平抛运动

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

3　位移和路程

t：　　A点；$\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$

t+Δt：B点；$\vec{r}_B = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}$



Δt时间内的**位移：**A指向B的**矢量**

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

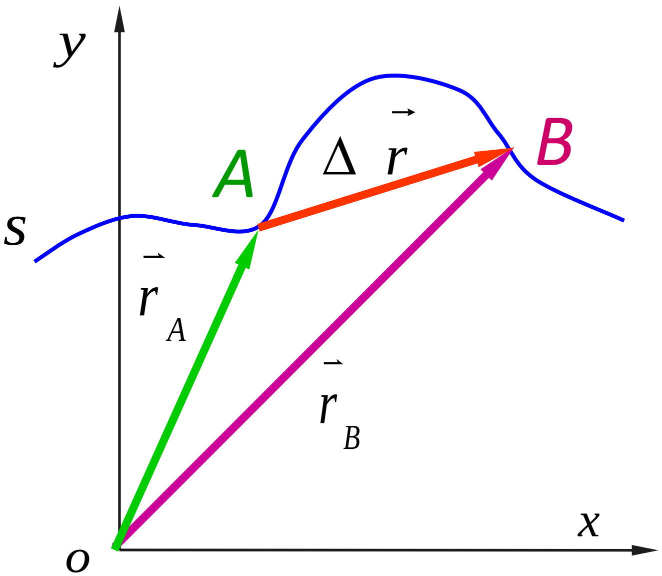
位移的大小为　$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

路程（Δs）：质点实际运动轨迹的长度，是**标量**。

郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn

讨论

（A） 一般情况，位移大小不等于路程. $|\Delta \vec{r}| \neq \Delta s$ $|\Delta \vec{r}| \leq \Delta s$



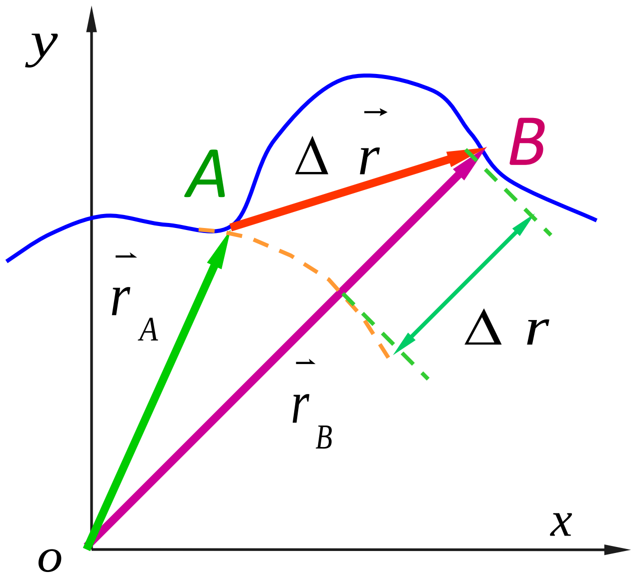
（B）什么情况 $|\Delta \vec{r}| = \Delta s$ ？

1. 单向直线运动;

2. 当$\Delta t \to 0$ 时，$|\Delta \vec{r}| = \Delta s$，即 $\boxed{|d\vec{r}| = ds}$。

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

讨论



(C) $\left|\Delta \vec{r}\right| = \Delta r$?

$$\boxed{\left|\Delta \vec{r}\right| \neq \Delta r}$$

$$|\Delta \vec{r}| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A|$$

$$\Delta r = \Delta |\vec{r}| = |\vec{r}_B| - |\vec{r}_A|$$

位矢长度的变化

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

已知质点沿x 轴作直线运动,其运动方程为

$$x = 2 + 6t^2 - 2t^3$$

,式中x 的单位为m,t 的单位为 s．求：(1) 质点在运动开始后4.0 s内的位移的大小；(2) 质点在该时间内所通过的路程；

作答

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

主观题 10分

设置

已知质点沿x轴作直线运动,其运动方程为

$$x = 2 + 6t^2 - 2t^3$$

,式中x的单位为m,t的单位为 s．求：(1) 质点在运动开始后4.0 s内的位移的大小；(2) 质点在该时间内所通过的路程；

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

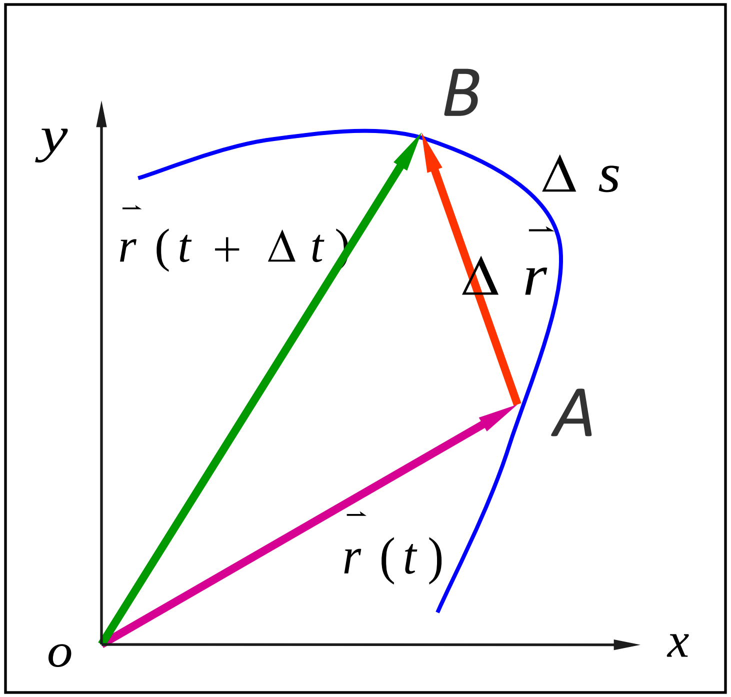
作答

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

速度

平均速度和平均速率

Δt 时间内，质点的平均速度



$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

平均速度 $\bar{\vec{v}}$ 与 $\Delta \vec{r}$ 同方向.

Δt 时间内，质点的平均速率

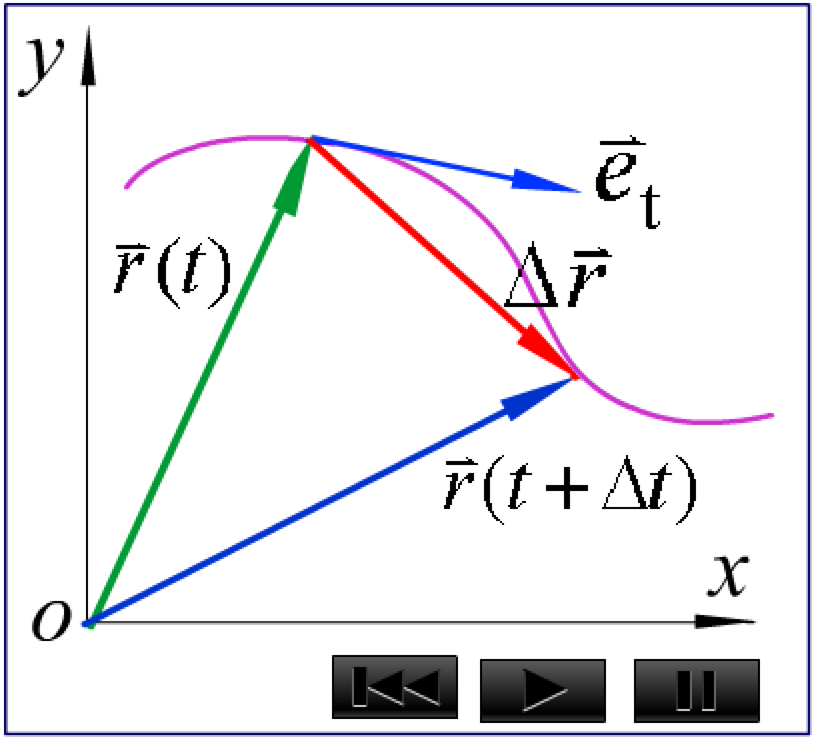
$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Ex2：操场跑5圈

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

瞬时速度 $\vec{v}$ 和瞬时速率 v （velocity and speed）

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$



当$\Delta t \to 0$时，$\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \mathrm{d}s$

$d\vec{r}$ 的方向？

轨迹的切线方向 $\vec{e}_{\mathrm{t}}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}} = v\vec{e}_t$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

$$v = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

单选题 3分

设置

一运动质点在某瞬时位于矢径 $\vec{r}(x,y)$ 的端点处，其速度大小为

A $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

B $\dfrac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$

C $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

D $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

提交

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

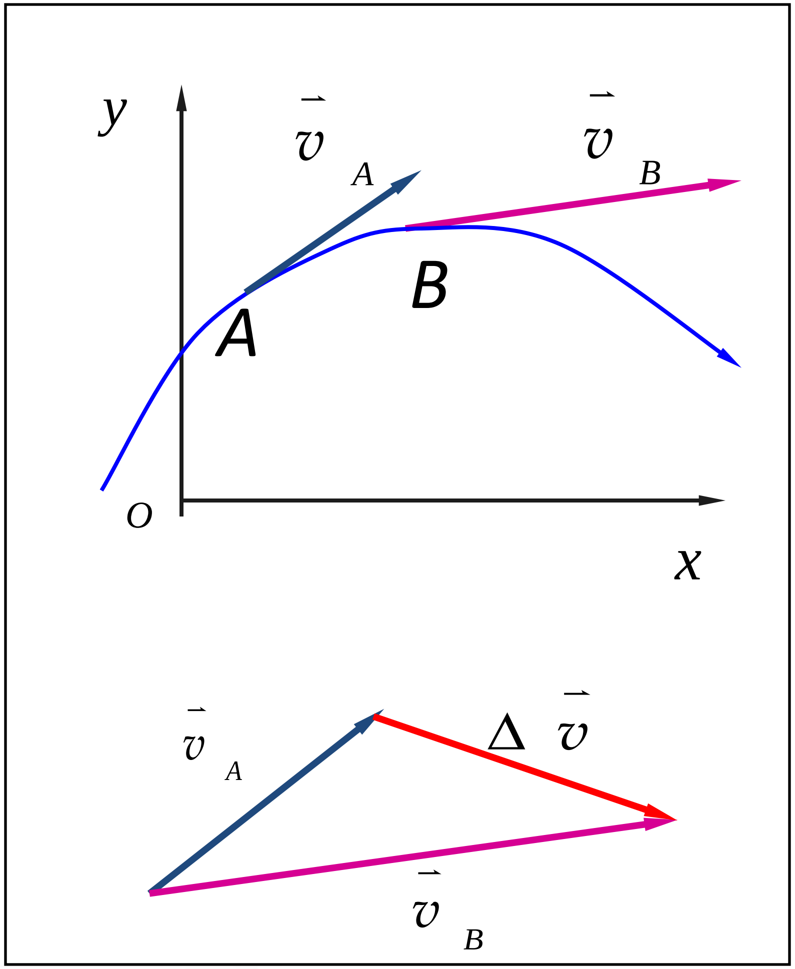
加速度：反映速度变化快慢的物理量

1） 平均加速度

单位时间内的速度增量即平均加速度

$$\overline{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$\overline{\vec{a}}$ 与 $\Delta \vec{v}$ 同方向 .



2） （瞬时）加速度

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad \begin{cases} a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \\ a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

主观题 10分

设置

已知质点沿x 轴作直线运动,其运动方程为

$$x = 2 + 6t^2 - 2t^3$$

,式中x 的单位为m,t 的单位为 s．求： (3) $t=4$ s时质点的速度和加速度.

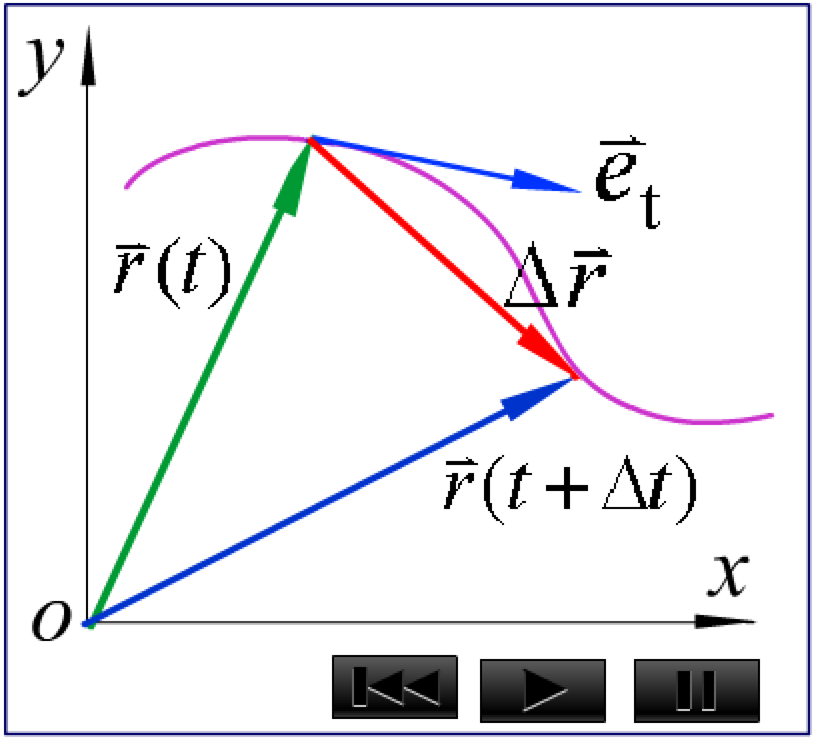
正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

作答

小结:

1. 质点，刚体
2. 参考系，坐标系
3. 位置矢量 运动方程 轨迹方程 位移 路程
4. 速度
5. 加速度



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t = v\vec{e}_t \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

§ 1-2 求解运动学问题举例

质点运动学两类基本问题

第一类： 由质点的运动方程求质点在任一时刻的位矢、速度和加速度；

$$\vec{r}(t) \xrightarrow{\text{求导}} \vec{v}(t) \xrightarrow{\text{求导}} \vec{a}(t)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

例 2 设质点的运动方程为 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$，其中 $x(t)=1.0t+2.0$，$y(t)=0.25t^2+2.0$．式中各量的单位均为SI单位. **求（1）** $t = 3\text{s}$ 时的位置，速度和加速度. （**2**）作出质点的运动轨迹图.

解 （**1**）只要把时间带入运动方程即可

$$x(3)=5(\text{m})\qquad y(3)=4.25(\text{m})$$

$t = 3\text{s}$ 时，质点的位置： $\vec{r}(3)=5\vec{i}+4.25\vec{j}(\text{m})$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

例 2 设质点的运动方程为 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$，其中 $x(t)=1.0t+2.0$，$y(t)=0.25t^2+2.0$．式中各量的单位均为SI单位. **求（1）** $t=3\text{s}$ 时的位置，$\boxed{\text{速度}}$和加速度. （**2**）作出质点的运动轨迹图.

速度分量：$v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0.5t\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$t=3\text{s}$ 时速度：$\vec{v}=1.0\vec{i}+1.5\vec{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$t=3\text{s}$ 时速度大小：$v=\sqrt{1.0^2+1.5^2}=1.8\ \mathrm{m/s}$

速度 $\vec{v}$ 与 x 轴之间的夹角：$\theta=\arctan\dfrac{1.5}{1}=56.3^\circ$

例 2 设质点的运动方程为 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$，其中 $x(t)=1.0t+2.0$，$y(t)=0.25t^2+2.0$．式中各量的单位均为SI单位．**求**（**1**）$t=3\text{s}$ 时的位置，速度和加速度．（**2**）作出质点的运动轨迹图．

速度分量：$v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0.5t\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

加速度分量：

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=0.5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$t=3\text{s}$ 时加速度：$\vec{a}=0.5\vec{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

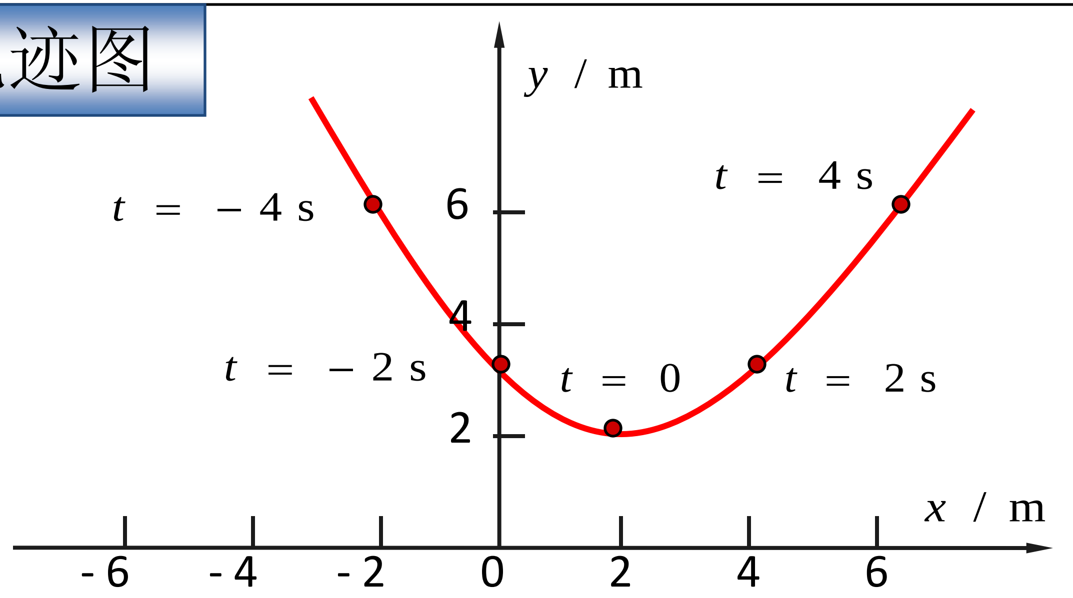
例 2 设质点的运动方程为 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$，其中 $x(t)=1.0t+2.0$，$y(t)=0.25t^2+2.0$．式中各量的单位均为SI单位．求（1）$t=3\text{s}$ 时的位置，速度和加速度．（2）作出质点的运动轨迹图．

（2）运动方程 $\begin{cases} x(t)=1.0t+2.0 \\ y(t)=0.25t^2+2.0 \end{cases}$

由运动方程消去参数 t 可得轨迹方程为

$$y=0.25(x-2)^2+2\ \text{m}$$

轨迹图



质点运动学两类基本问题

第二类: 已知质点的加速度以及初始速度和初始位置，求质点速度及其运动方程 .

$$\vec{r}(t) \xleftarrow{\text{积分}} \vec{v}(t) \xleftarrow{\text{积分}} \vec{a}(t)$$

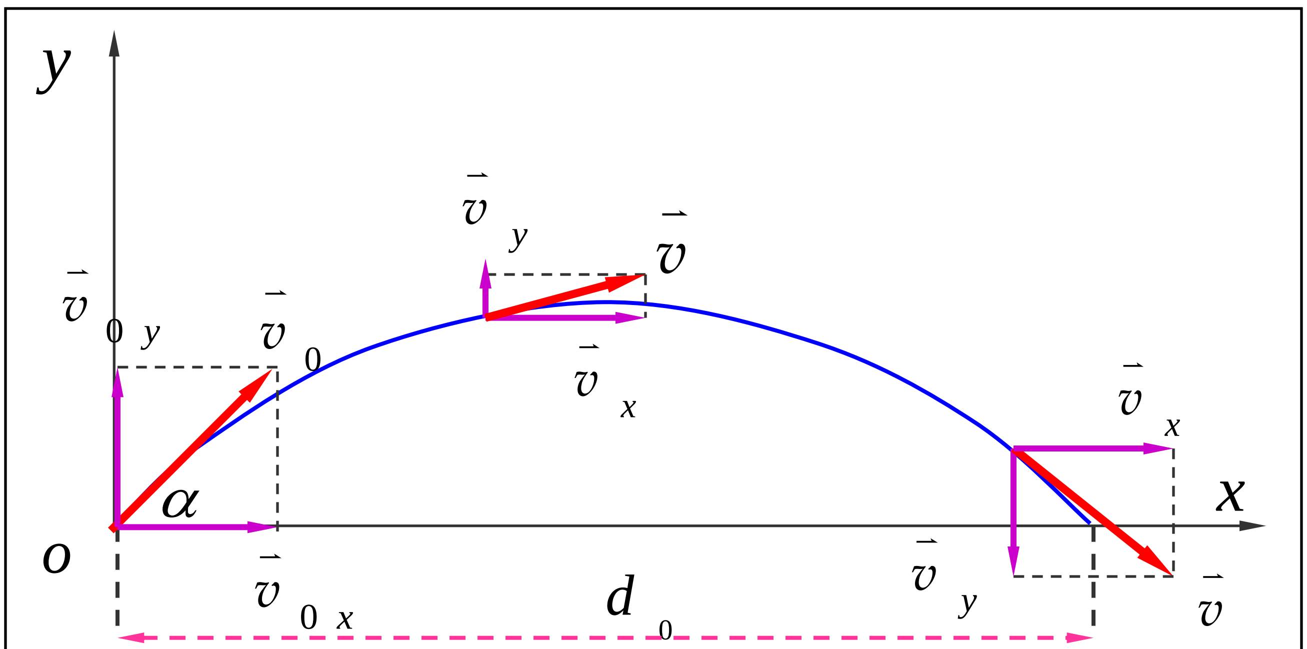
1. $\vec{a} = \vec{C}$

3. $\vec{a} = \vec{a}(\vec{v})$

2. $\vec{a} = \vec{a}(t)$

4. $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$

例1 设在地球表面附近有一个可视为质点的抛体,以初速 v_0 在 *Oxy* 平面内沿与 *Ox* 正向成 α 角抛出，并略去空气对抛体的作用.（**1**）求抛体的运动方程和其运动的轨迹方程;（**2**）抛体的最大射程.



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

例1 设在地球表面附近有一个可视为质点的抛体,以初速 v_0 在 Oxy 平面内沿与 Ox 正向成 α 角抛出，并略去空气对抛体的作用. （1）求抛体的运动方程和其运动的轨迹方程;（2）抛体的最大射程.

解 （1）

x方向，匀速运动：

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$

y方向，匀加速运动：

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

例1 设在地球表面附近有一个可视为质点的抛体,以初速 v_0 在 Oxy 平面内沿与 Ox 正向成 α 角抛出，并略去空气对抛体的作用.（1）求抛体的运动方程和其运动的轨迹方程;（2）抛体的最大射程.

运动方程:
$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

消去方程中的参数 t 得轨迹

$$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

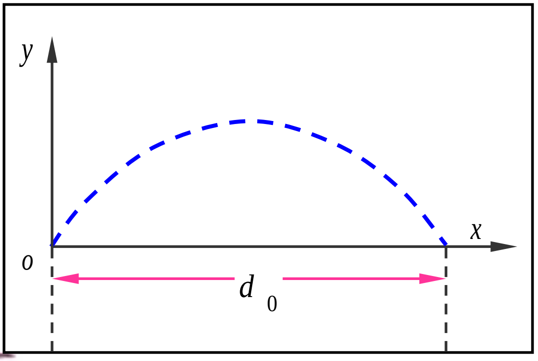
例1 设在地球表面附近有一个可视为质点的抛体,以初速 v_0 在 *Oxy* 平面内沿与 *Ox* 正向成 α 角抛出，并略去空气对抛体的作用.（1）求抛体的运动方程和其运动的轨迹方程;（2）抛体的最大射程.

解 （2）$d_0 = v_0 \cos\alpha \Delta t$ $\quad \Delta t = 2 v_0 \sin\alpha / g$

$$d_0 = \frac{2 v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$$

$$\alpha = \pi/4$$

最大射程 $d_{0\mathrm{m}} = v_0^2 / g$



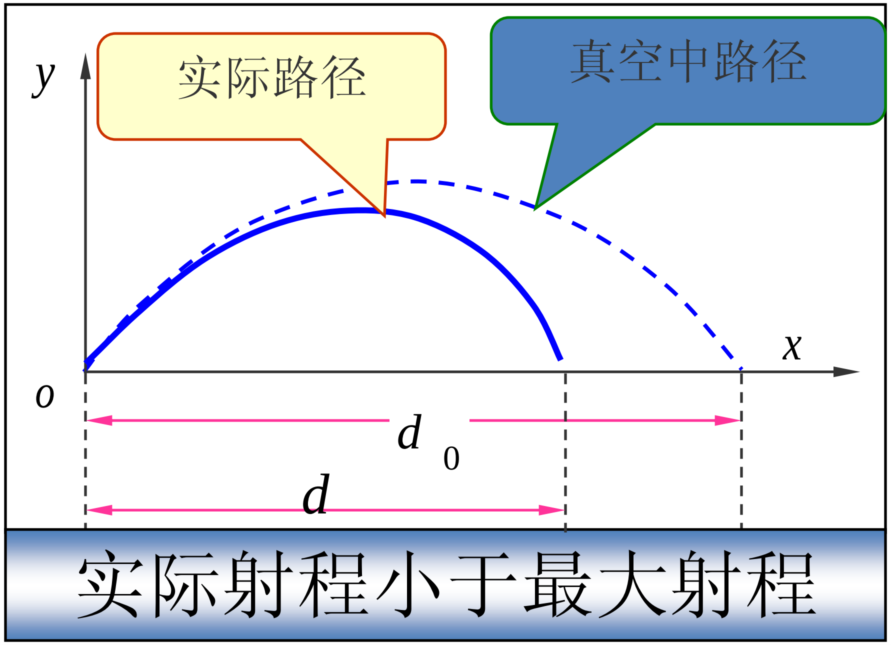


表 1-1 在真空和空气中弹丸射程的比较

	初速 $v_0/(m \cdot s^{-1})$	射角 α	真空射程 d_0/m	实际射程 d/m
7.6 mm 枪弹	800	15°	32 700	3 970
85 mm 炮弹	700	45°	50 000	16 000
82 mm 迫击炮弹	60	45°	367	350

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

补充例题： 一质点沿x轴运动，其加速度为 $a = 4t$ (SI制)，当 $t = 0$ 时， 物体静止于 $x = 10\text{m}$ 处. 试求质点的速度，位置与时间的关系式.

解： $a = \frac{dv}{dt} = 4t \Longrightarrow dv = 4t\,dt$

不定积分

$$\int dv = \int 4t\,dt$$

$$\Rightarrow v = 2t^2 + C$$

当 $t = 0$ 时， $v = 0$

$$\Rightarrow v = 2t^2$$

定积分

$$\int_0^v dv = \int_0^t 4t\,dt$$

$$\Longrightarrow v = 2t^2$$

补充例题： 一质点沿x轴运动，其加速度为 $a=4t$ (SI制)，当 $t=0$ 时， 物体静止于 $x=10\text{m}$ 处. 试求质点的速度，位置与时间的关系式.

解：

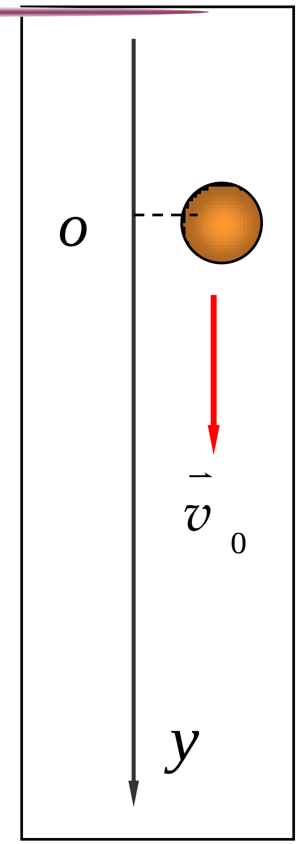
$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t^{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x=2t^{2}\mathrm{d}t$$

当 $t=0$ 时， $x=10\ \text{m}$

$$\int_{10}^{x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{t}2t^{2}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad x-10=\frac{2}{3}t^{3}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{2}{3}t^{3}+10$$

例3 有一个球体在某液体中竖直下落，其初速度为 $\vec{v}_0 = 10\vec{j}$，它的加速度为 $\vec{a} = -1.0v\vec{j}$. **问：（1）**经过多少时间后可以认为小球已停止运动，**（2）**此球体在停止运动前经历的路程有多长？



解： 由加速度定义 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -1.0v$

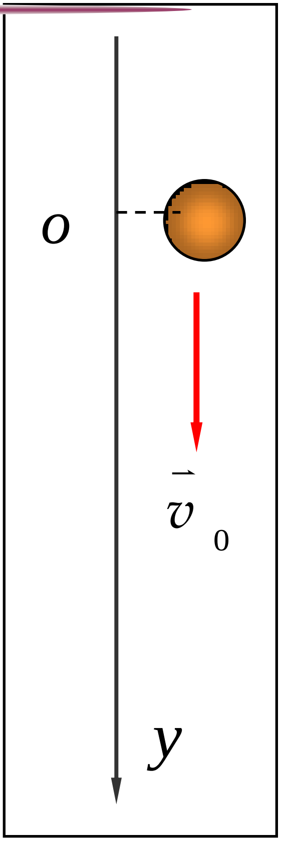
$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -1.0\,\mathrm{d}t \qquad \int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = -1.0\int_0^t \mathrm{d}t\,,$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -1.0t \qquad v = v_0\mathrm{e}^{-1.0t}$$

例3 有一个球体在某液体中竖直下落，其初速度为 $\vec{v}_0 = 10\vec{j}$，它的加速度为 $\vec{a} = -1.0v\vec{j}$. **问：（1）**经过多少时间后可以认为小球已停止运动，**（2）**此球体在停止运动前经历的路程有多长？

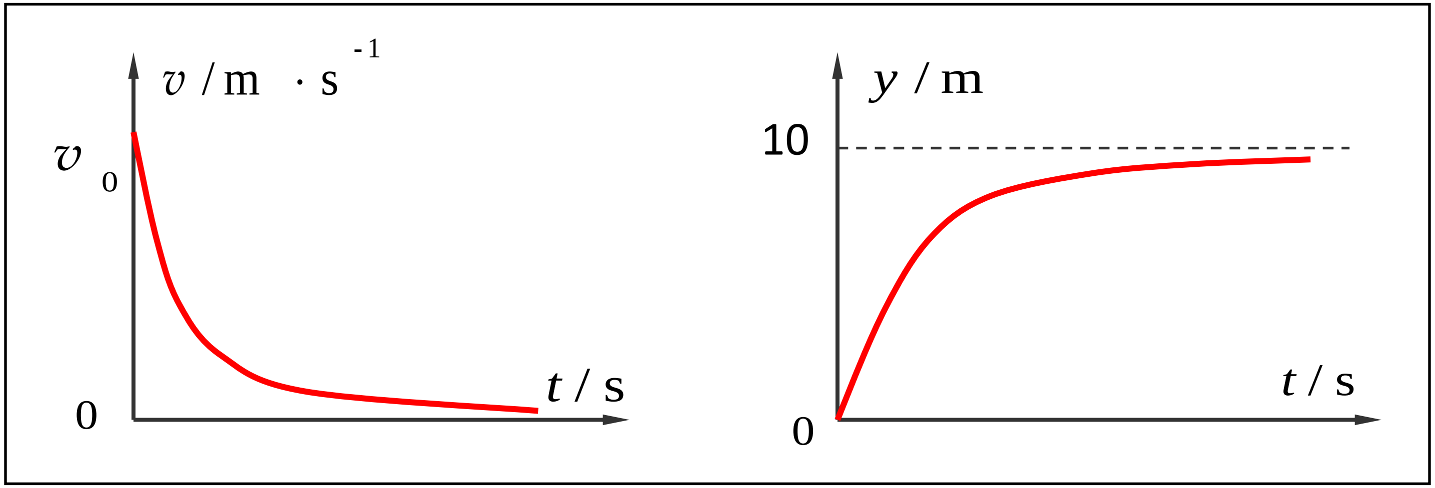
$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0 \mathrm{e}^{-1.0t} \qquad \int_0^y \mathrm{d}y = v_0 \int_0^t \mathrm{e}^{-1.0t}\mathrm{d}t$$

$$y = 10(1 - \mathrm{e}^{-1.0t})\ \mathrm{m}$$



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

$$v = v_0 e^{-1.0t} \qquad y = 10(1 - e^{-1.0t})\ \mathrm{m}$$

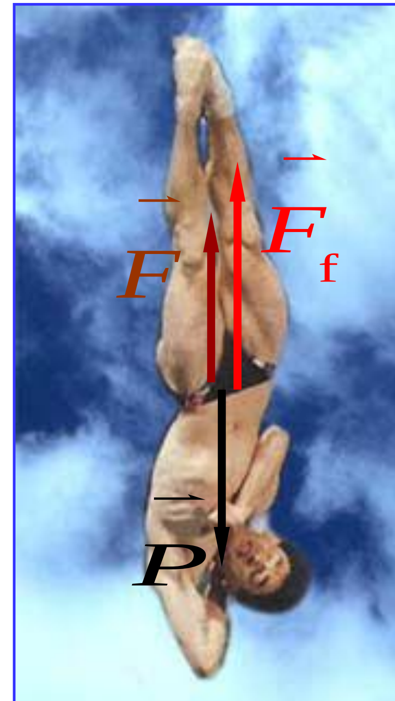


v	$v_0/10$	$v_0/100$	$v_0/1000$	$v_0/10000$
t/s	2.3	4.6	6.9	9.2
y/m	8.9974	9.8995	9.9899	9.9990

$$t = 9.2\,\mathrm{s},\quad v \approx 0,\quad y \approx 10\,\mathrm{m}$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

例4 高台跳水游泳池的深度．为保证跳水运动员从10m 高台跳入游泳池中的安全，规范要求水深必须在4.50 ~ 5.50m 之间．为什么要做这样的规定呢？



解：1）运动员自由落体入水，速度

$$v_0 = \sqrt{2gh} = 14.0 \text{ m/s}$$

2） $\because \rho_{水} \approx \rho_{人}, \quad \therefore \vec{F} + \vec{P} = 0$

设所受阻力： $F_f = -\dfrac{1}{2} b \rho A v^2$

$b = 0.5, \rho_{水} = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, A = 0.08 \text{ m}^2$

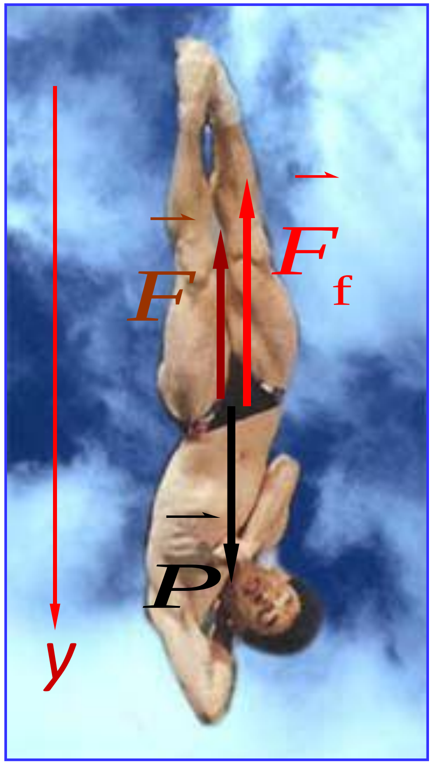
水中安全速度 $v = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$； 人体质量 $m = 50 \text{ kg}$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

已知： $b = 0.5,\ \rho_{水} = 1.0 \times 10^{3}\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}},\ A = 0.08\ \mathrm{m}^{2}$

$v_0 = 14.0\ \mathrm{m/s} \qquad v = 2.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \qquad m = 50\ \mathrm{kg}$

令： $k = b\rho A/2 \qquad F_{\mathrm{f}} = -kv^{2}$



入水后 $F_r = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^{2}$

由 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ 得 $\dfrac{\mathrm{d}v}{v} = -\dfrac{k}{m}\mathrm{d}y$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{k}{m}\int_{0}^{y}\mathrm{d}y$$

$$y = \frac{m}{k}\ln\frac{v_0}{v} = \frac{50}{20}\ln\frac{14.0}{2.0} = 4.86\ \mathrm{m}$$

例 一快艇正以速度 v_0 行驶，发动机关闭后得到与速度方向相反大小与速率平方成正比的加速度． 试求快艇在关闭发动机后又行驶 x 距离时的速度.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

例　质点沿 x 轴运动，其加速度 a 与位置坐标的关系为 $a=3+6x^2$ (SI)，如果质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度。

解：　设质点在 x 处的速度为 v

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=3+6x^2$$

$$\int_0^v v\,\mathrm{d}v=\int_0^x(3+6x^2)\mathrm{d}x$$

$$v=(6x+4x^3)^{1/2}$$

小结：

1. 由质点的运动方程求质点在任一时刻的位矢、速度和加速度；--------微分
2. 已知质点的加速度以及初始速度和初始位置，求质点速度及其运动方程 .---------积分

1. $\vec{a} = \vec{C}$

2. $\vec{a} = \vec{a}(t)$

3. $\vec{a} = \vec{a}(\vec{v})$

4. $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$

§ 1-3 圆周运动

一 描述圆周运动的物理量

圆周运动的运动方程

角坐标 $\theta(t)$

路程 $s(t)$

$$s = r\theta$$

角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

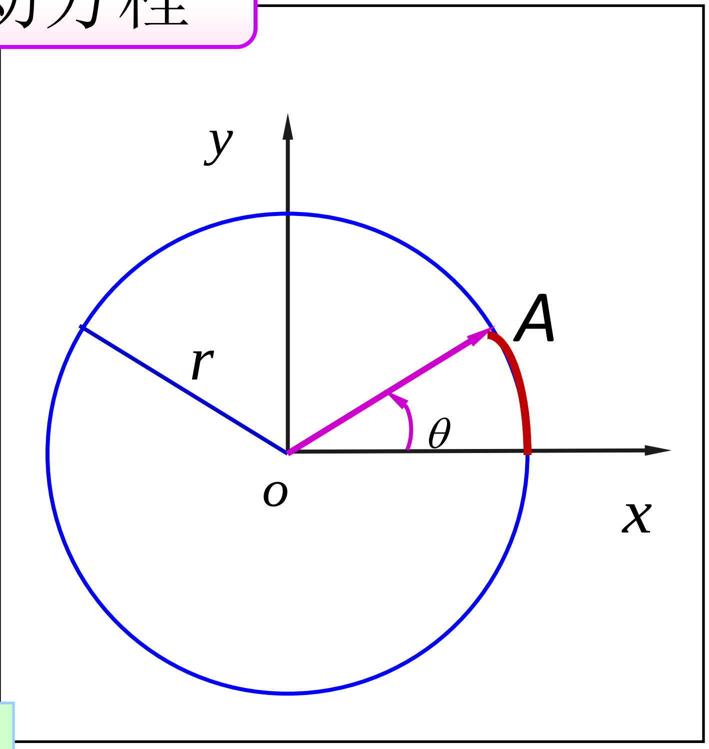
速率 $v = \frac{ds}{dt}$

$$v = r\omega$$

角加速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

切向加速度 $a_t = \frac{dv}{dt}$

$$a_t = r\alpha$$



二 圆周运动的加速度

速度 $\vec{v} = v\hat{e}_t$

加速度 $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\hat{e}_t + v\dfrac{d\hat{e}_t}{dt}$

$$= a_t\hat{e}_t + v\dfrac{d\hat{e}_t}{dt}$$

$$\vec{a} = a_t \hat{e}_t + v \frac{\mathrm{d}\hat{e}_t}{\mathrm{d}t}$$

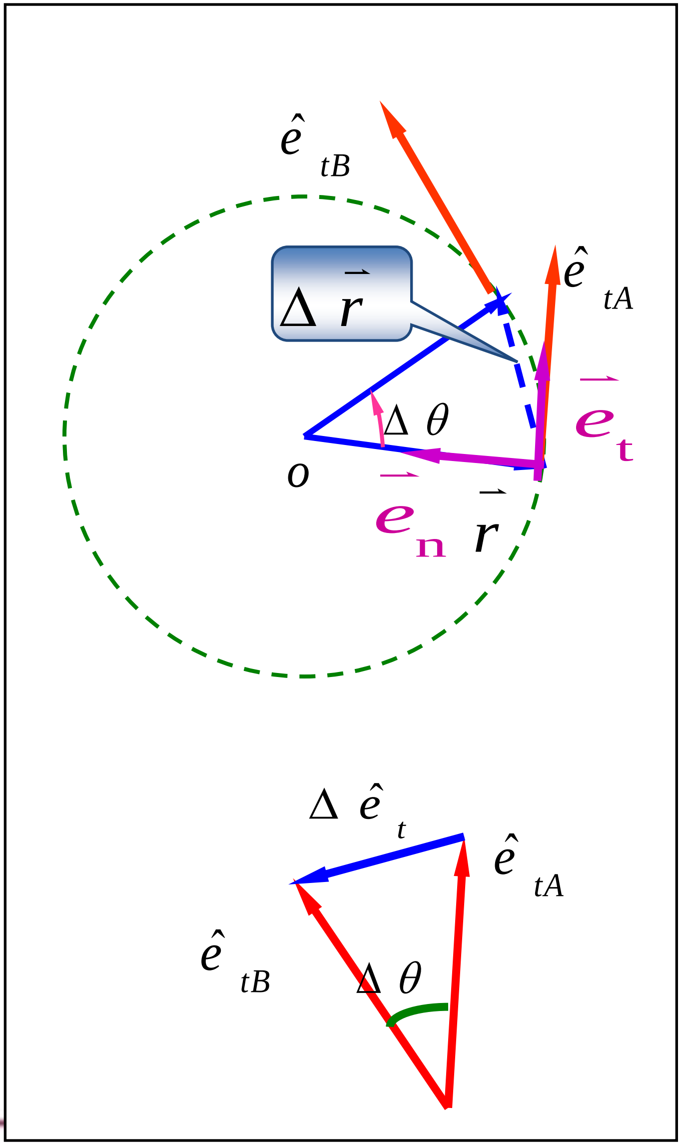
$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{e}_t}{\Delta t}$$

方向： 和$\Delta t \to 0$时$\Delta \hat{e}_t$的方向相同

$$\Delta t \to 0,\quad \Delta\theta \to 0,\quad \Delta \hat{e}_t \perp \hat{e}_t$$

所以，其方向为内法线方向。

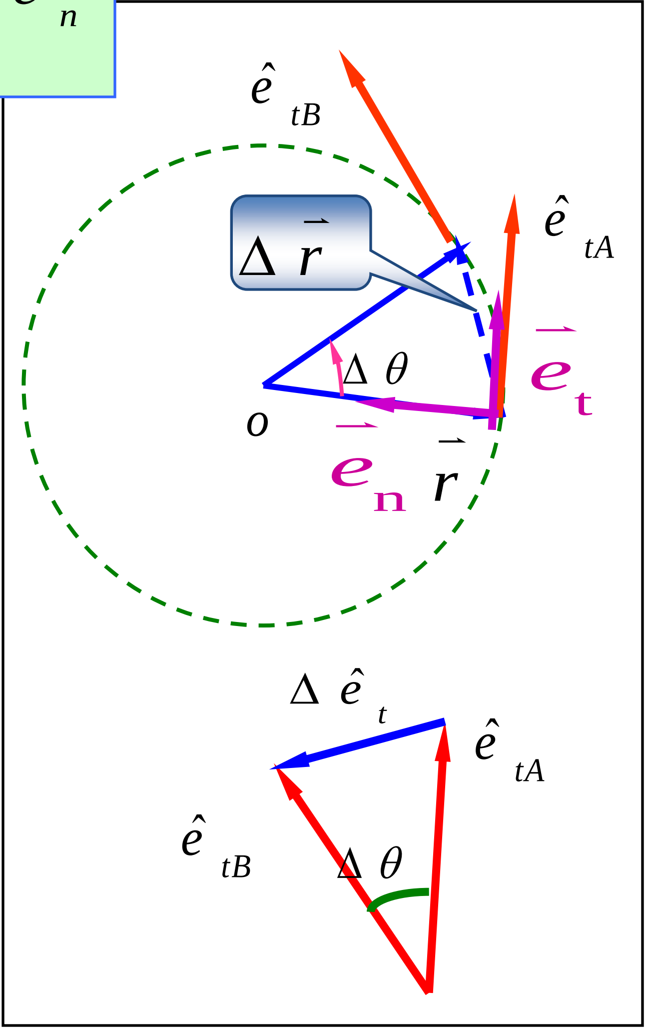
$\boxed{\hat{e}_n}$ 法向单位矢量



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

$$\vec{a} = a_t \hat{e}_t + v \frac{d\hat{e}_t}{dt} = a_t \hat{e}_t + \frac{v^2}{r} \hat{e}_n$$

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{e}_t}{\Delta t} = \frac{v}{r} \hat{e}_n$$



大小：

$$\left|\frac{d\hat{e}_t}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \hat{e}_t|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 \times \Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{v}{r}$$

圆周运动加速度

$$\vec{a} = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n$$

$$= \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{r}\vec{e}_n$$

切向加速度（速度大小变化引起）

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\alpha = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

法向加速度（速度方向变化引起）

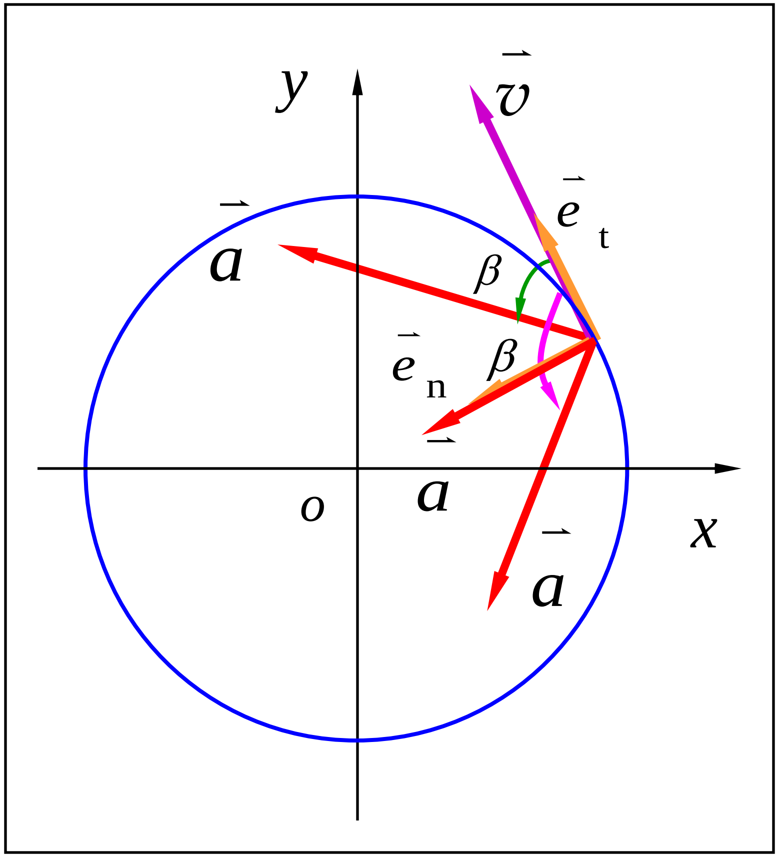
$$a_n = v\omega = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

$$\vec{a} = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n$$

$\vec{a}$ 与 $\vec{e}_t$ 夹角为β

$$a_t = a\cos\beta \qquad a_n = a\sin\beta \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{a_n}{a_t}$$

$\because a_n > 0 \quad \therefore 0 < \beta < \pi$



➢ 切向加速度

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\alpha$$

$$a_t \begin{cases} > 0, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad v \ \text{增大} \\ = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad v \equiv \text{常量} \\ < 0, \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \quad v \ \text{减小} \end{cases}$$

讨论

对于作曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的：

（A）切向加速度必不为零；

（B）法向加速度必不为零（拐点处除外）；

（C）由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零；

（D）若物体作匀速率运动，其总加速度必为零；

（E）若物体的加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量，它一定作匀变速率运动 .

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

讨论

例 质点作半径为R的变速圆周运动的加速度大小为：

（1） $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ （2） $\dfrac{v^2}{R}$

（3） $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\dfrac{v^2}{R}$ （4） $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{v^2}{R}\right)^2}$

例1 设有一个质点作半径为 r 的圆周运动. 质点沿圆周运动所经历的路程与时间的关系为 $s = bt^2/2$, 并设b为一常量, 求（1）此质点在某一时刻的速率;（2）法向加速度和切向加速度的大小;（3）总加速度.

解:（1）
$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}bt^2\right) = bt$$

（2）
$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = b \qquad a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{r} = \frac{(bt)^2}{r}$$

（3）
$$a = (a_{\mathrm{t}}^2 + a_{\mathrm{n}}^2)^{1/2} = b\left(\frac{b^2t^4}{r^2} + 1\right)^{1/2}$$

$$\tan\varphi = \frac{a_{\mathrm{t}}}{a_{\mathrm{n}}} = \left(\frac{b^2t^4}{r^2} + 1\right)^{-1/2}$$

匀变角加速圆周运动公式

➢ 若 α = 常量， $t = 0$ 时， $\theta = \theta_0$， $\omega = \omega_0$，

$$
\begin{cases}
\omega = \omega_0 + \alpha t \\
\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\
\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)
\end{cases}
$$

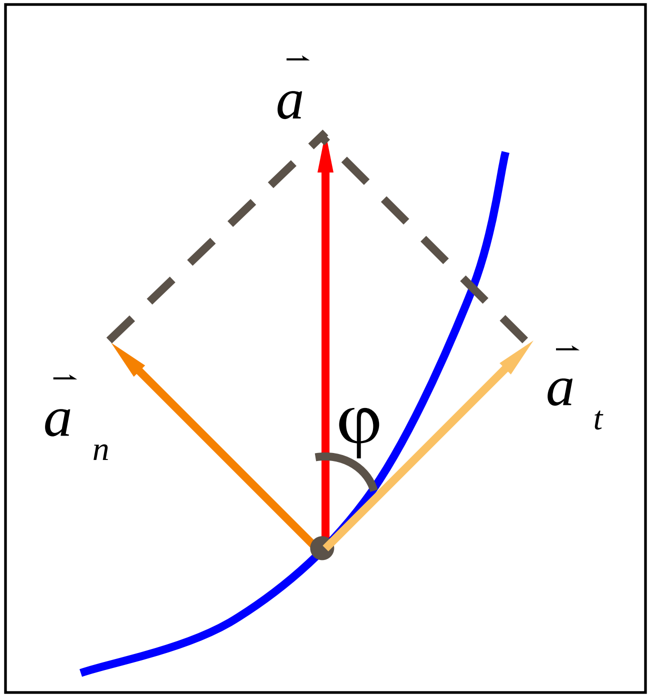
注意：仅适用于角加速度为恒量情况.

- 对于一般的曲线运动

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}} \qquad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

其中 $\rho=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$ 曲率半径.

利用自然坐标，一切运动可以根据切向、法向加速度来分类：



$a_n=0$	$a_t=0$	匀速直线运动
$a_n=0$	$a_t\neq 0$	变速直线运动
$a_n\neq 0$	$a_t=0$	匀速曲线运动
$a_n\neq 0$	$a_t\neq 0$	变速曲线运动

$\vec{a}$ 与 $\vec{a}_t$ 的夹角

$$\tan\varphi=\frac{a_n}{a_t}$$

小结：

1. 描述圆周运动的物理量：

角坐标 $\theta(t)$ 角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ 角加速度 $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

路程 $s(t)$ 速率 $v = \dfrac{ds}{dt}$ 切向加速度 $a_t = \dfrac{dv}{dt}$

$\boxed{s = r\theta}$ $\boxed{v = r\omega}$ $\boxed{a_t = r\alpha}$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

小结：

2. 圆周运动的速度和加速度

速度 $\vec{v} = v\hat{e}_t$

$$\vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n$$

$$= \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{r}\vec{e}_n$$

3. 加速度物理意义：

切向加速度：改变速度的大小；

法向加速度：改变速度的方向。

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

§1-4 相对运动

一 时间与空间

在两个相对作直线运动的参考系中， 时间的测量是绝对的， 空间的测量也是绝对的， 与参考系无关， 时间和长度的的绝对性是经典力学或牛顿力学的基础 .

质点在相对作匀速直线运动的两个坐标系中的位移

S 系 $(Oxyz)$

s'系 $(O'x'y'z')$

位矢关系

$$\vec{r} = \vec{r}' + \overrightarrow{OO'}$$

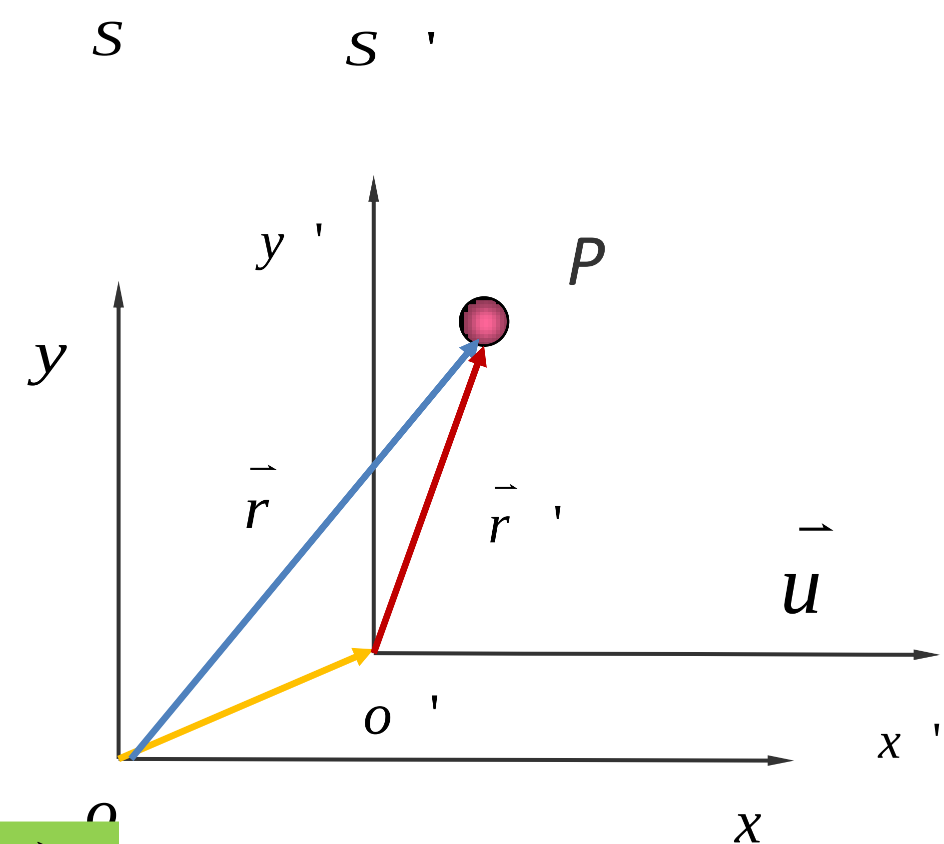
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}}$$

牵连速度

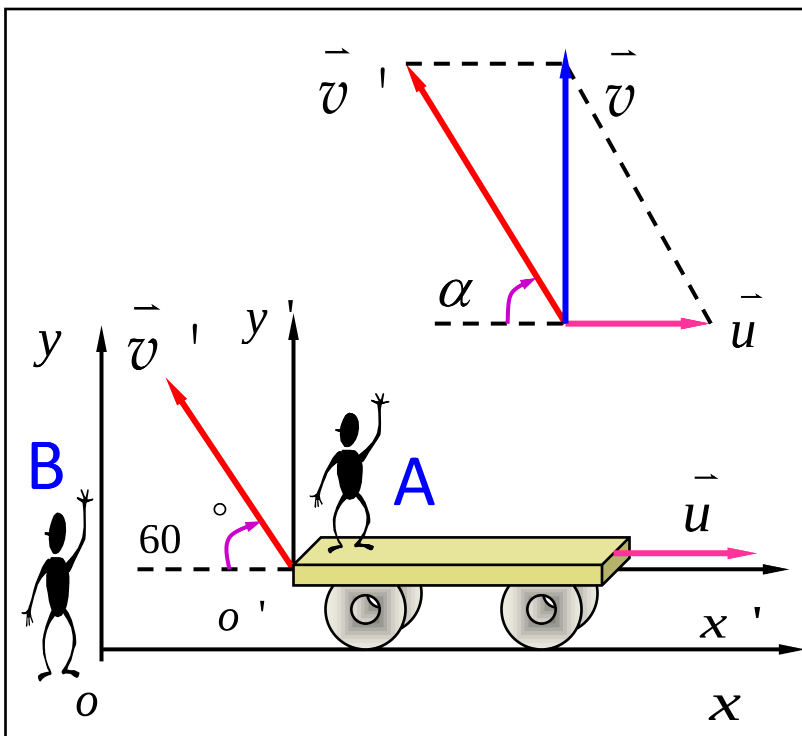
绝对速度

相对速度



伽利略速度变换

例 如图示，一实验者 A 在以 10 m/s 的速率沿水平轨道前进的平板车上控制一台弹射器，此弹射器以与车前进方向呈 60° 度角斜向上射出一弹丸 . 此时站在地面上的另一实验者 B 看到弹丸铅直向上运动, 求弹丸上升的高度 .



解：地面参考系为 S 系

平板车参考系为 s 系

$$\tan\alpha = \frac{v'_y}{v'_x}$$

速度变换 $v_x = u + v'_x$

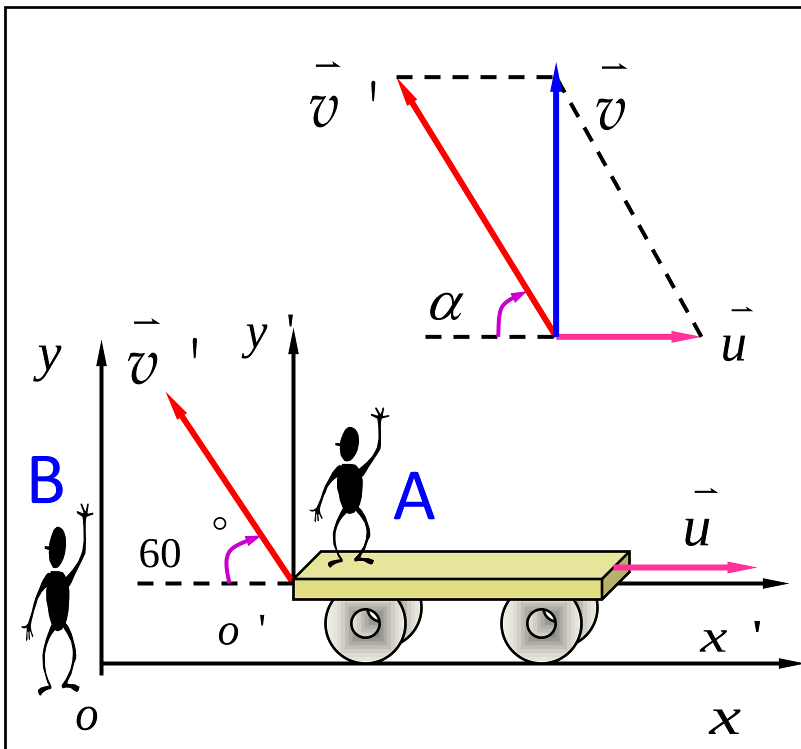
$$v_y = v'_y$$

langxiaoli@semi.ac.cn

解：地面参考系为 s 系，平板车参考系为 s′系.

$$\tan\alpha = \frac{v'_y}{v'_x} \qquad v_x = u + v'_x \qquad v_y = v'_y$$

$$\because\ v_x = 0 \qquad \therefore\ v'_x = -u = -10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$



$$\left|v_y\right| = \left|v'_y\right| = \left|v'_x \tan\alpha\right|$$

$$\left|v_y\right| = 17.3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

弹丸上升高度

$$y = \frac{v_y^2}{2g} = 15.3\ \mathrm{m}$$

小结：

伽利略速度变换

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}}$$

绝对速度　　相对速度　　牵连速度