第　九　章

静电场

主要内容:

1. 电场强度;
2. Gauss定理;
3. 电势。

重点和难点：如何求电场强度和电势

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

电磁学的发展

库仑定律(1785年)：电荷与电荷间的相互作用

奥斯特的发现（1820年）：电流的磁效应，即电生磁，安培发现电流与电流间的相互作用规律。

法拉第的电磁感应定律（1831年）：　磁生电

麦克斯韦电磁场统一理论（19世纪中叶）

赫兹在实验中证实电磁波的存在（1886年），光是电磁波。

技术上的重要意义：发电机、电动机、无线电技术等.

§9-1 电荷的量子化 电荷守恒定律

一 电荷的量子化

基本性质

1 电荷有正负之分；

2 电荷量子化； 电子电荷 $e = 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$

$$q = ne \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

3 同性相斥，异性相吸.

强子的**夸克模型**具有**分数电荷**（$\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$电子电荷）但实验上尚未直接证明.

二 电荷守恒定律

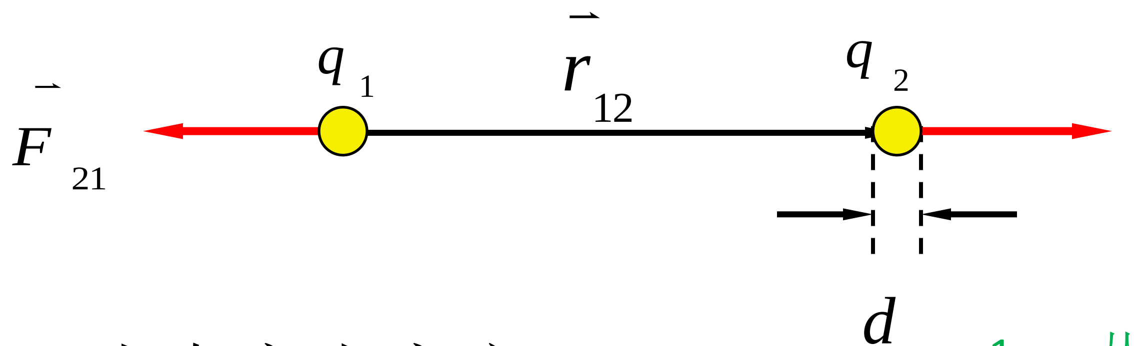
在**孤立**系统中，电荷的代数和保持不变.

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

§9-2　库伦定律

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

1. 点电荷之间的相互作用力；（ $d \ll r_{12}$ ）



2. ε_0 为真空电容率

$$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}}$$

1. 从左到右解释方程；
2. F12：点电荷1对2的力；
3. r12：两个电荷之间的距离
4. e12：1到2的单位矢量。

郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn

§9-3　电场强度

一　静电场

实验证实了两静止电荷间存在相互作用的静电力，但其相互作用是怎样实现的？

电荷 $\xleftrightarrow{\text{电场}}$ 电荷

场是一种特殊形态的物质

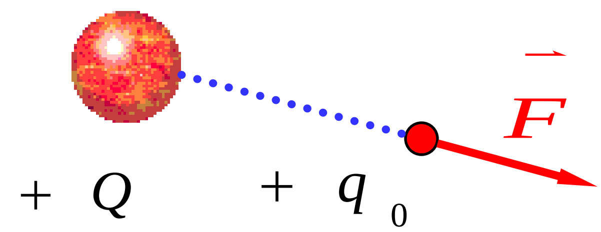
场
实物

物　质

二　电场强度

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

电场中某点处的电场强度 $\vec{E}$ 等于位于该点处的单位试验电荷所受的力，其方向为正电荷受力方向.



$\begin{cases} +Q：场源电荷 \\ +q_0：试验电荷 \end{cases}$

（试验电荷为点电荷、且足够小，故对原电场几乎无影响）

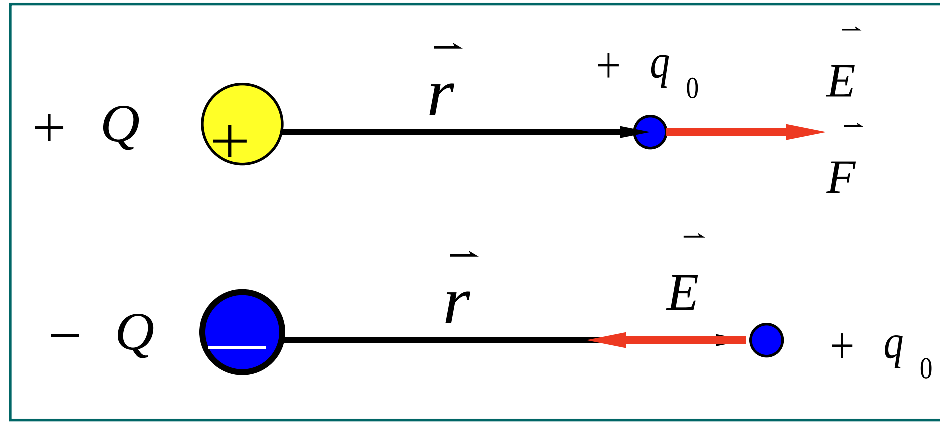
- 单位　$\mathrm{N \cdot C^{-1}}$　$\mathrm{V \cdot m^{-1}}$
- 电荷 q 在电场中受力　$\vec{F} = q\vec{E}$

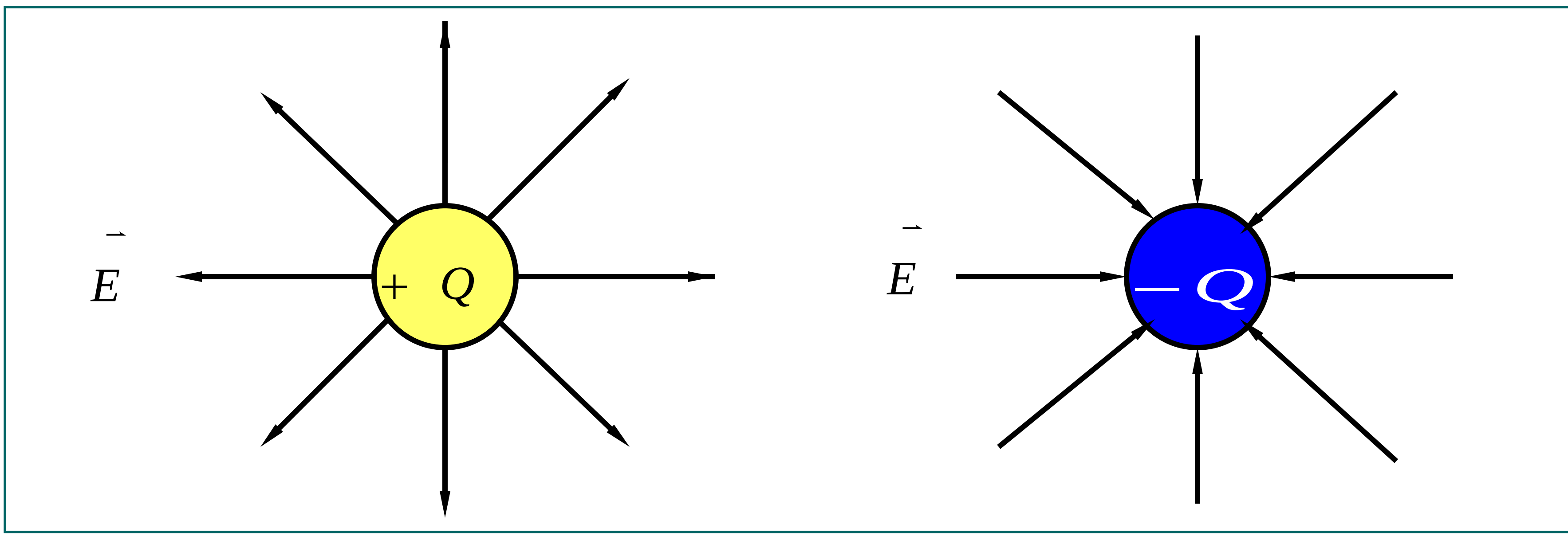
郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn

三　点电荷的电场强度

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq_0}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r$$





问　$r \to 0$　$E \to \infty$?

郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn

单选题 3分

设置

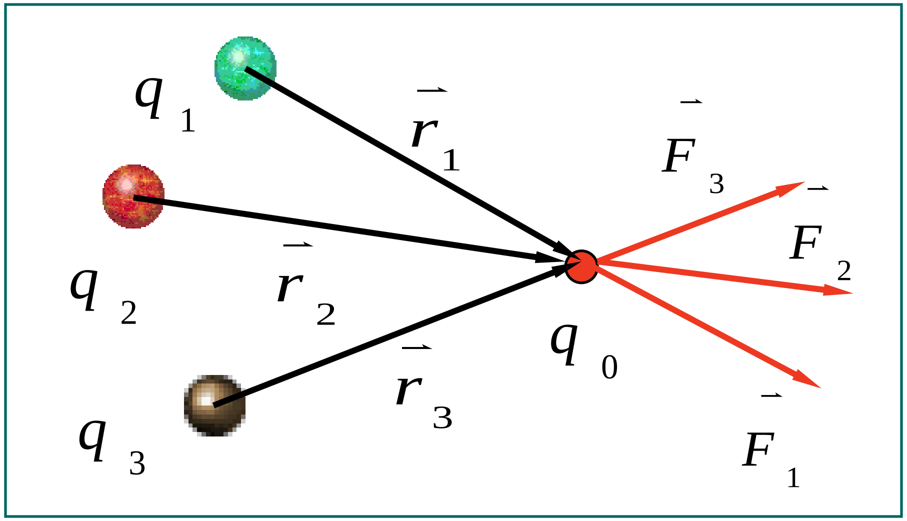
$r \rightarrow 0 \quad E \rightarrow \infty$?

A 同意

B 不同意

提交

四　电场强度的叠加原理



点电荷 q_i 对q_0 的作用力

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_0}{r_i^3}\vec{r}_i$$

由力的叠加原理得 q_0 所受合力 $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

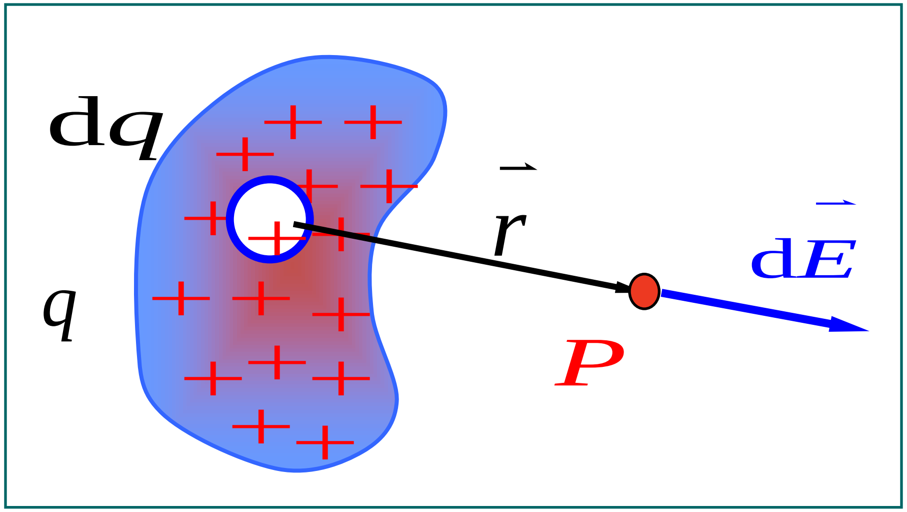
故 q_0 处总电场强度 $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0} = \sum_i \dfrac{\vec{F}_i}{q_0}$

电场强度的叠加原理 $\boxed{\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i}$

郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn

电荷连续分布情况

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{e}_r$$



$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_r}{r^2}\mathrm{d}q$$

电荷体密度 $\rho = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$

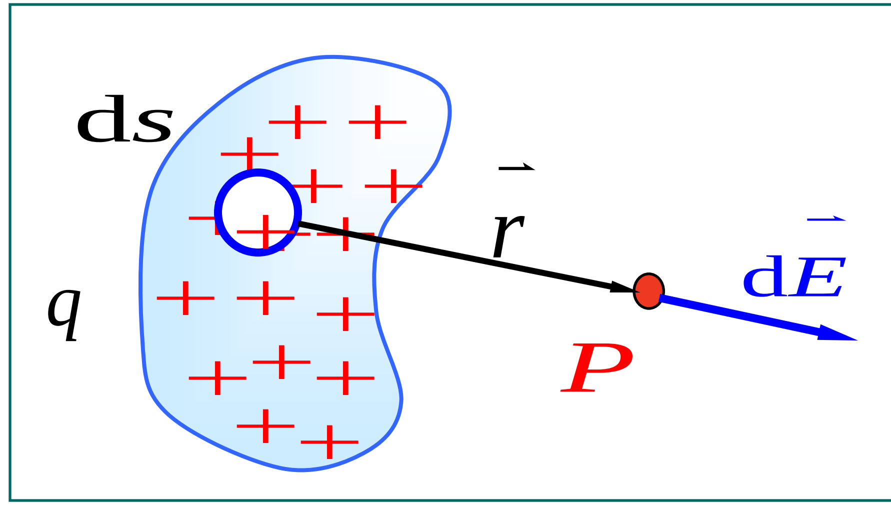
点 P 处电场强度

$$\vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\vec{e}_r}{r^2}\mathrm{d}V$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

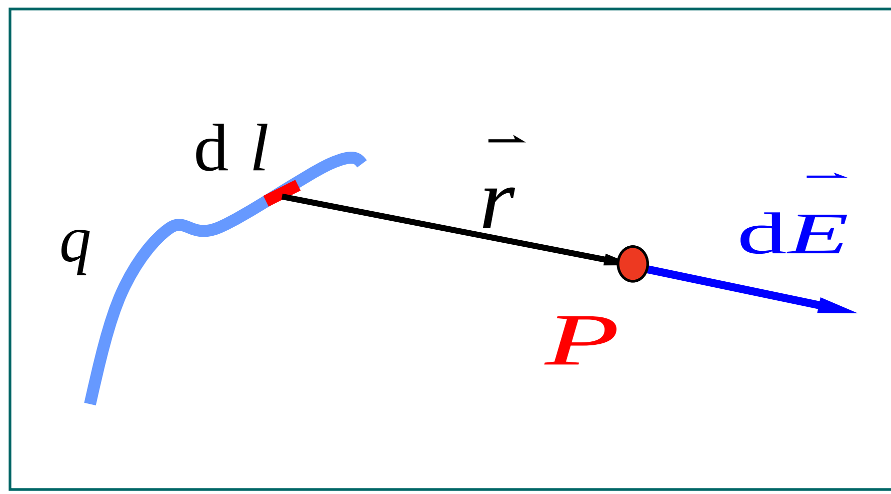
电荷面密度 $\sigma = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}$

$$\vec{E} = \int_{s} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma \vec{e}_r}{r^2} \mathrm{d}s$$



电荷线密度 $\lambda = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$

$$\vec{E} = \int_{l} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda \vec{e}_r}{r^2} \mathrm{d}l$$

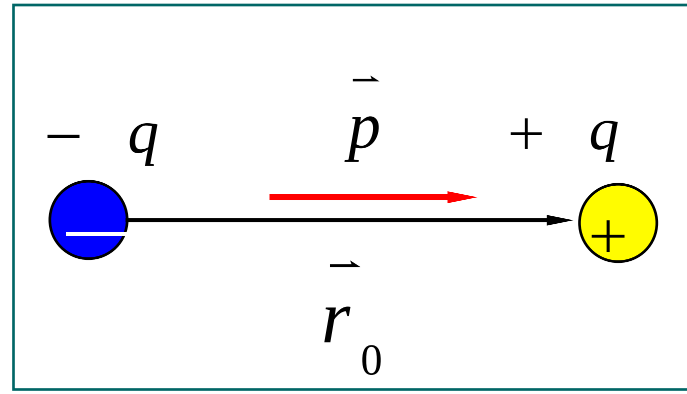


郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

例1 电偶极子的电场强度

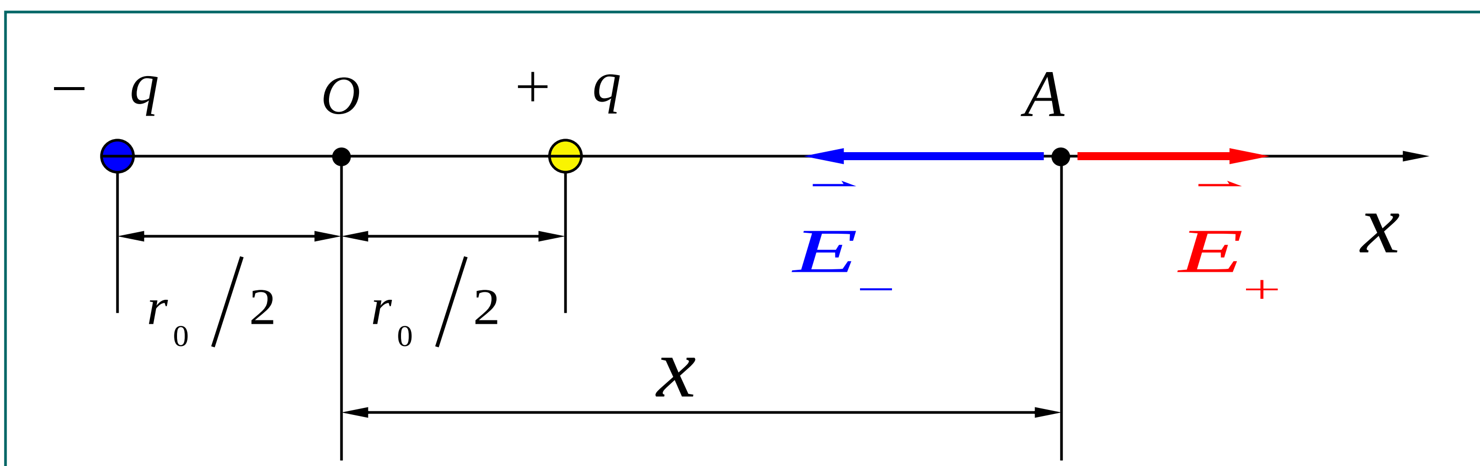
电偶极子的轴 $\vec{r}_0$

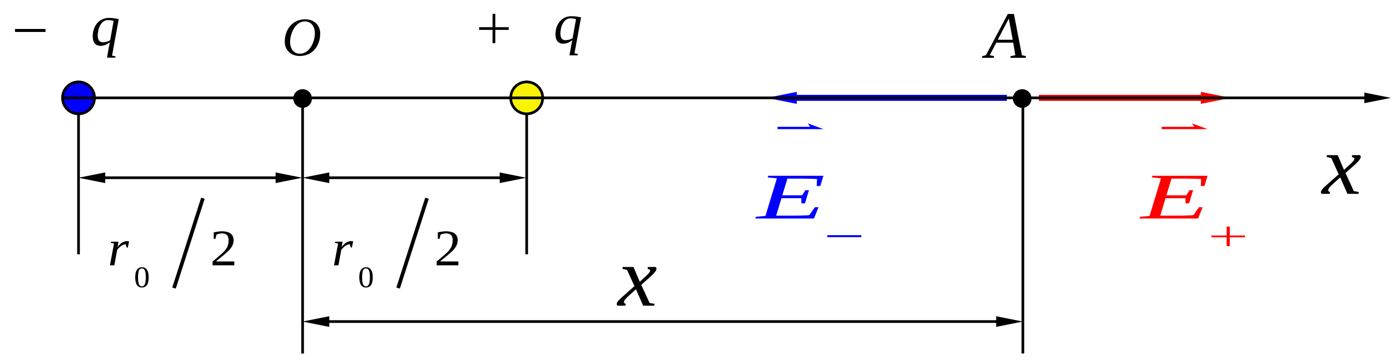
电偶极矩（电矩）$\vec{p} = q\vec{r}_0$

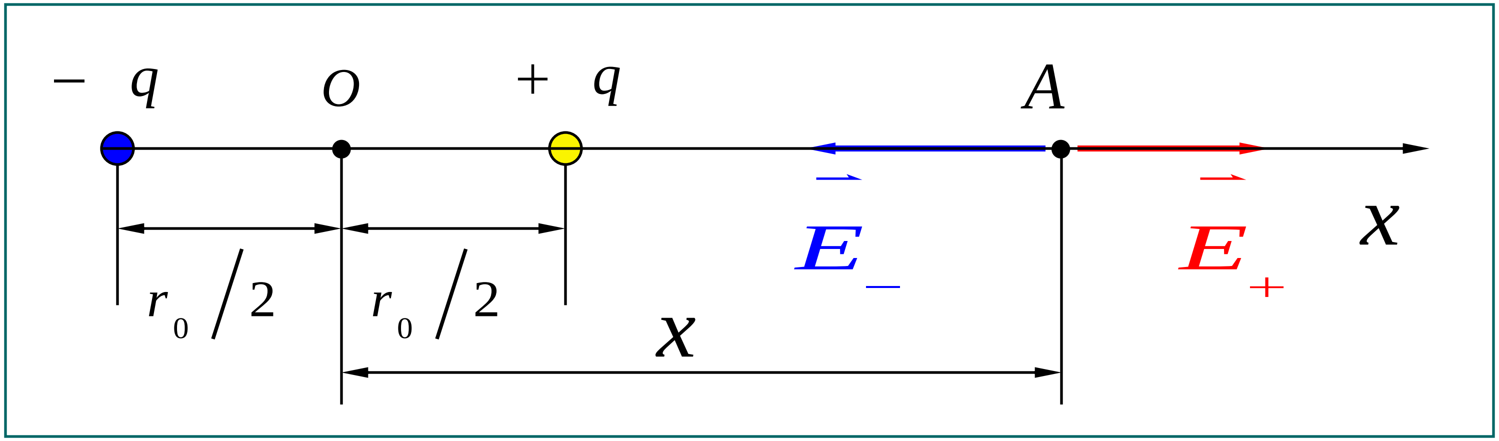


讨 论

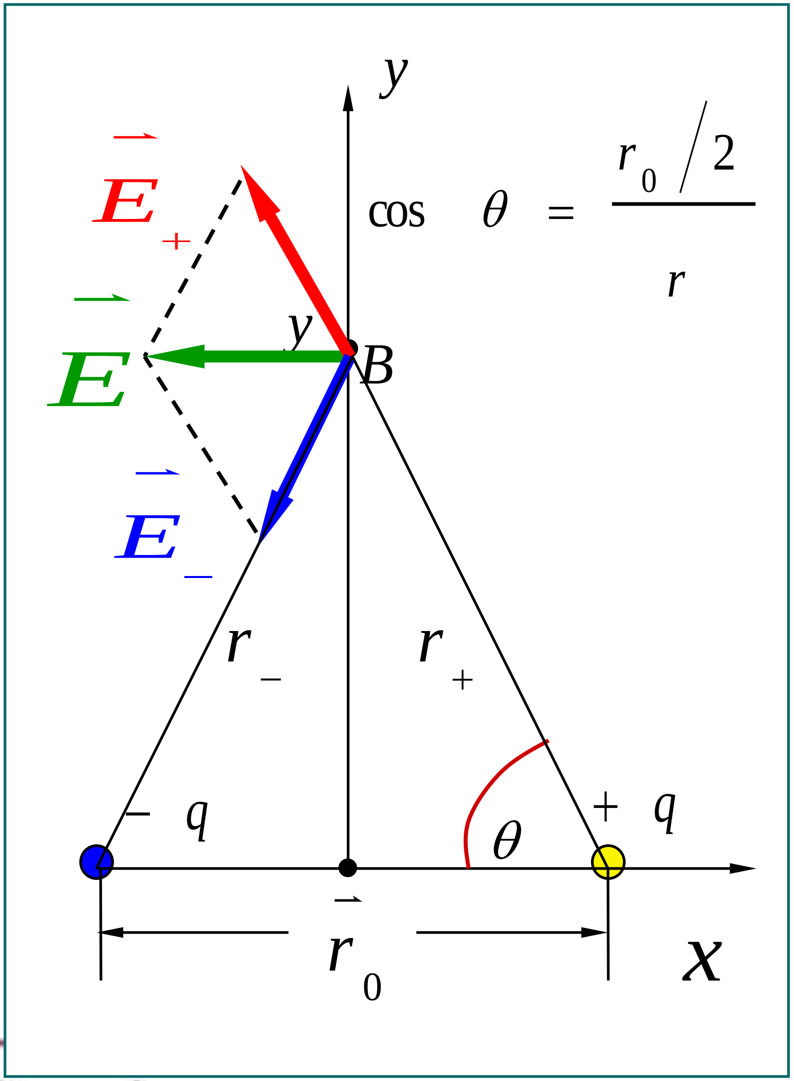
（1）电偶极子轴线延长线上一点的电场强度




$-q$
O
$+q$
A
$\vec{E}_-$
$\vec{E}_+$
x
$r_0/2$
$r_0/2$
x

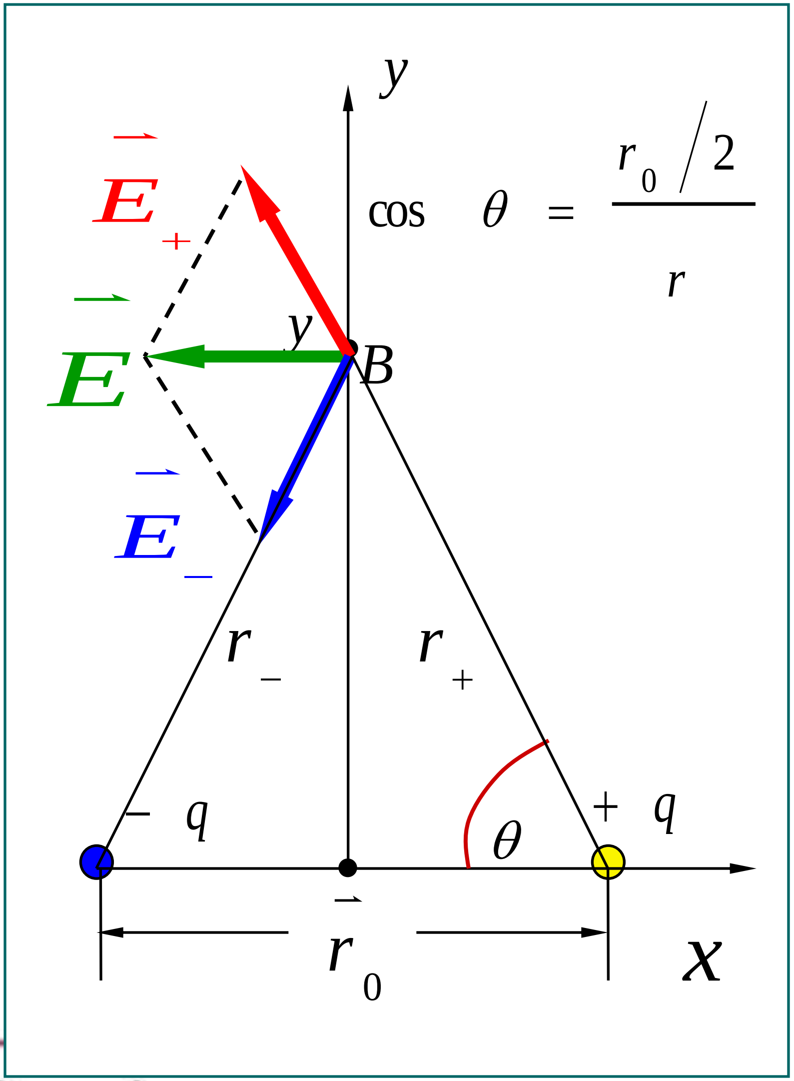

$-q$
O
$+q$
A
$\vec{E}_-$
$\vec{E}_+$
x
$r_0/2$
$r_0/2$
x

（2）电偶极子轴线的中垂线上一点的电场强度



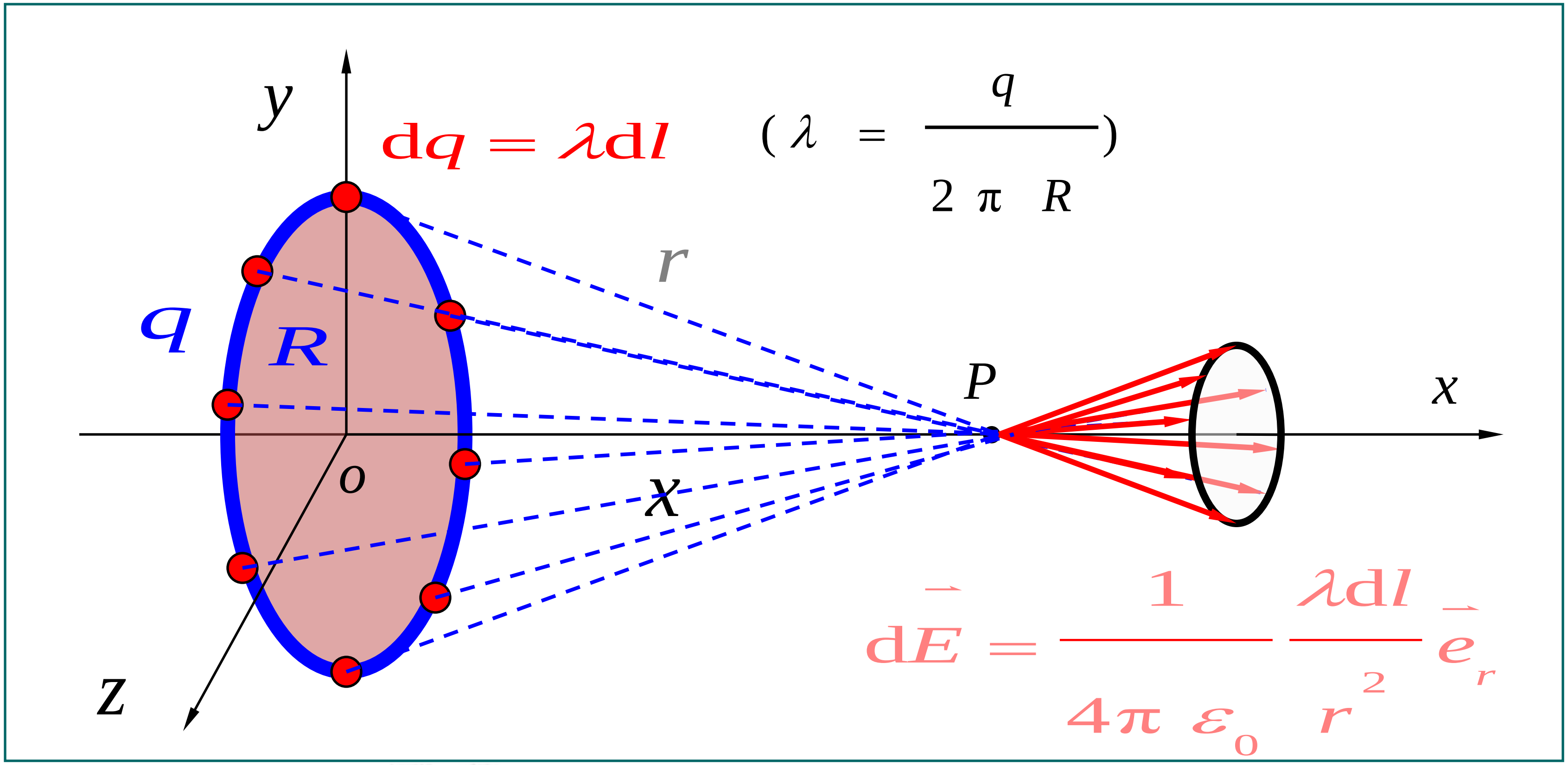
郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

（2）电偶极子轴线的中垂线上一点的电场强度



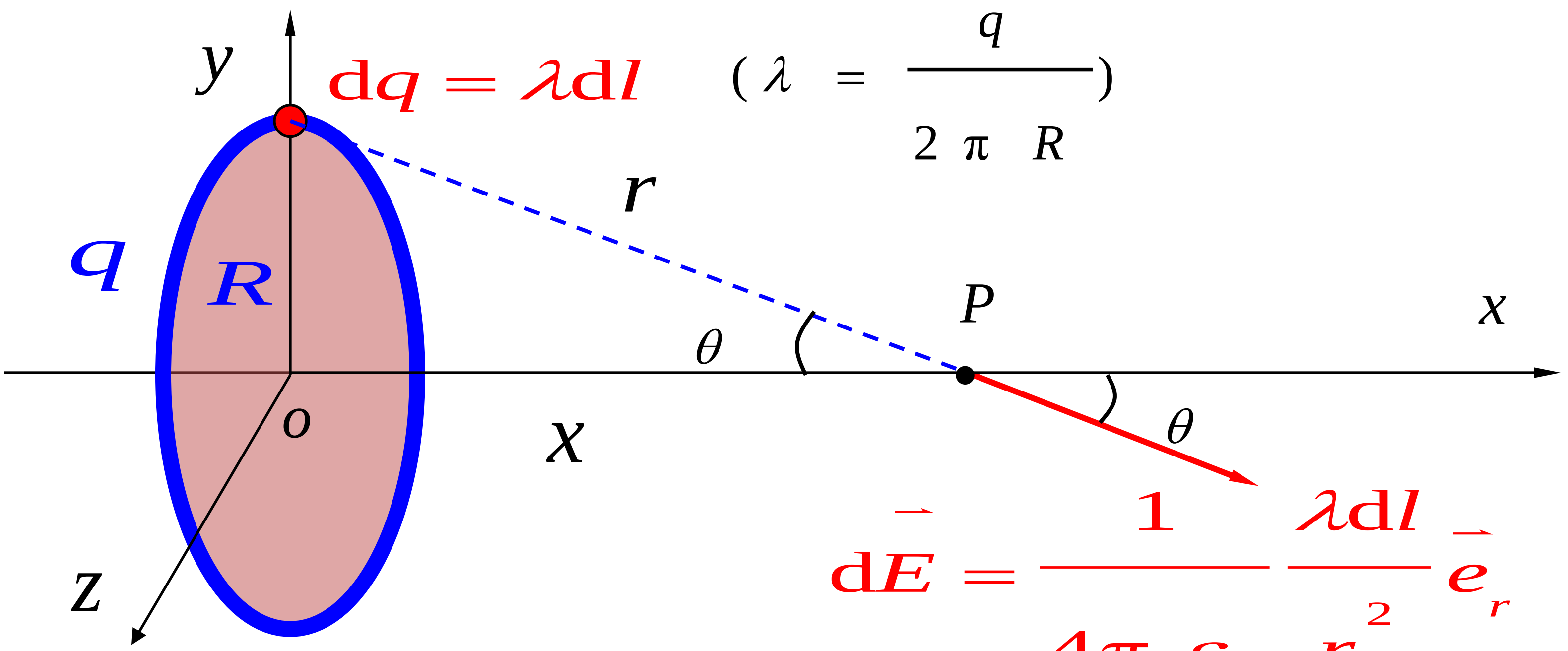
例2 正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的圆环上.
计算在环的轴线上任一点 P 的电场强度.

解 $\vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}$ 由对称性有 $\vec{E}=E_x\vec{i}$



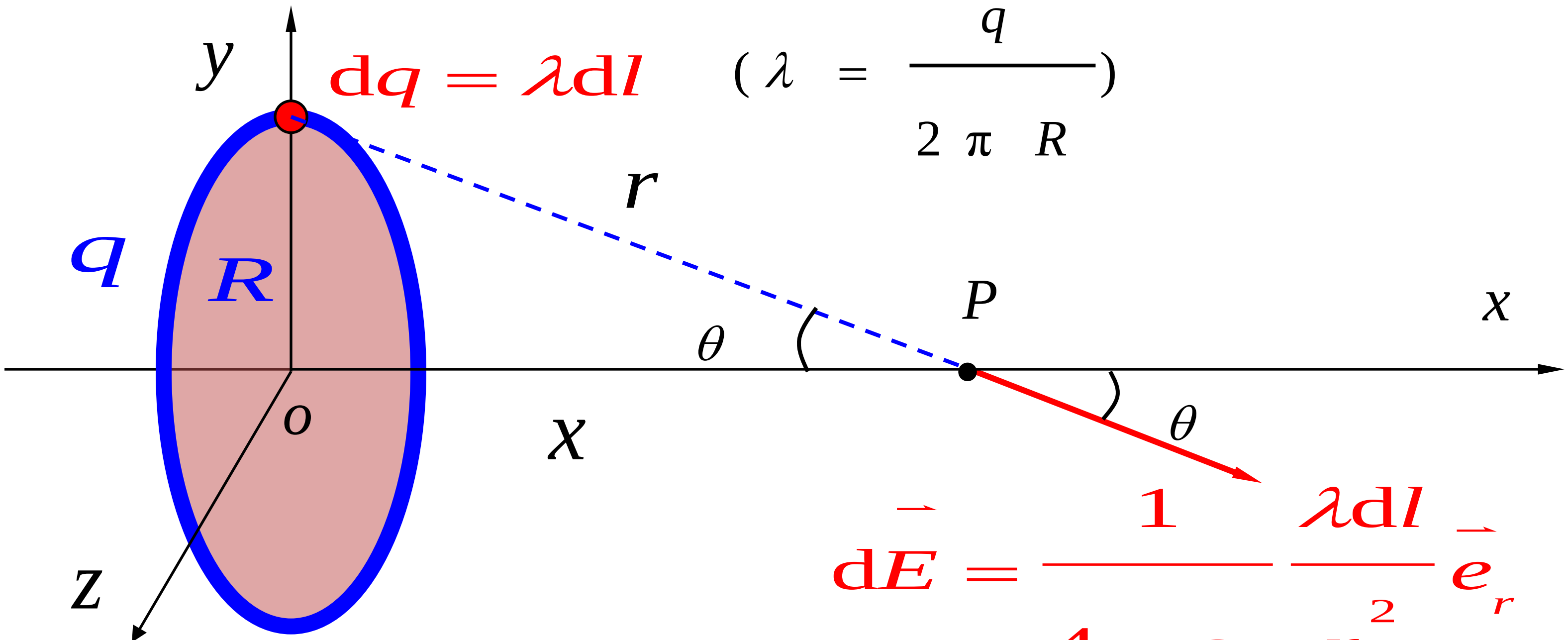
郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l \qquad \left(\lambda = \frac{q}{2\pi R}\right)$$



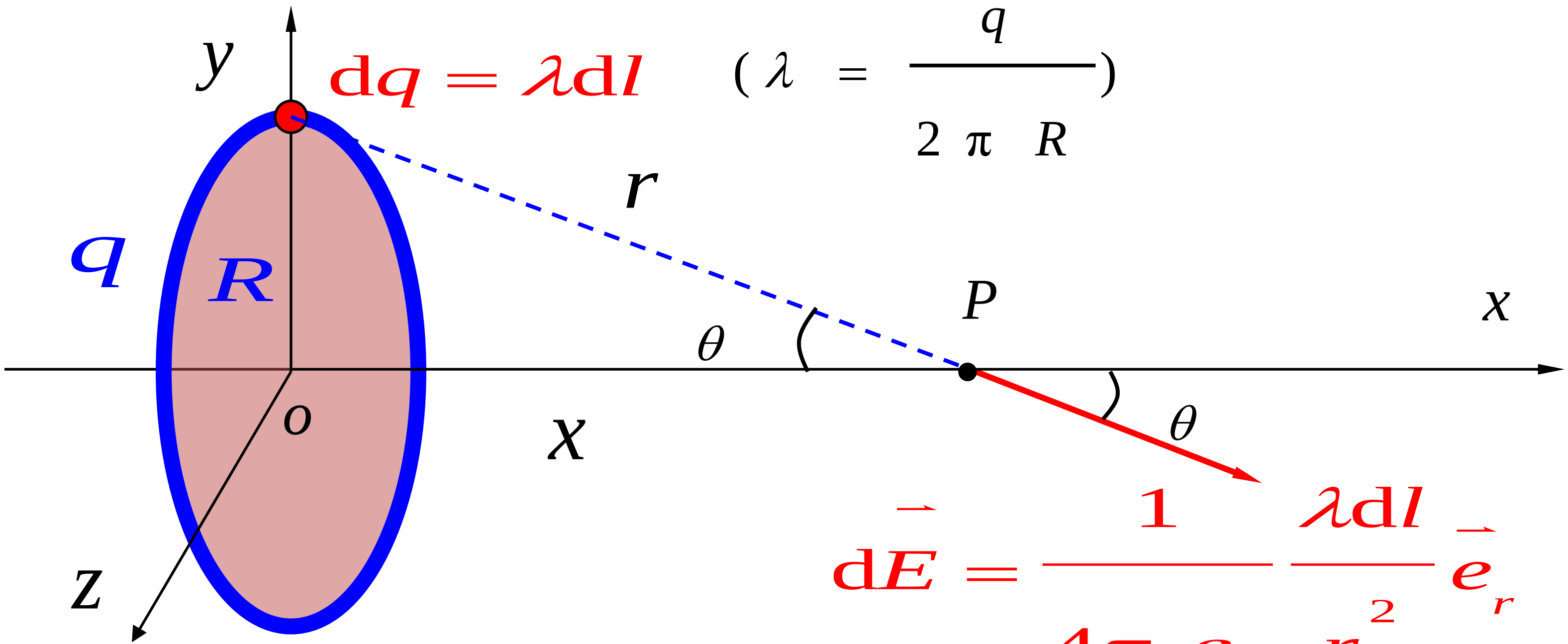
$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{r^2}\vec{e}_r$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn



$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l \qquad \left(\lambda = \frac{q}{2\pi R}\right)$$

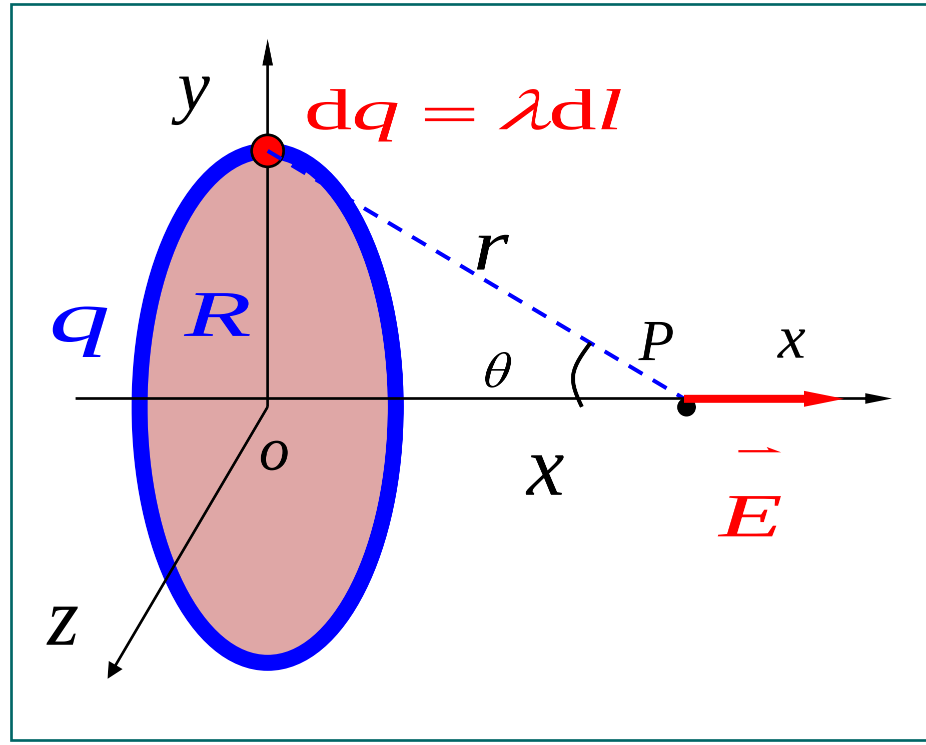
$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{r^2}\vec{e}_r$$



$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l \qquad \left(\lambda = \frac{q}{2\pi R}\right)$$

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{r^2}\vec{e}_r$$

$$E = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$



讨论

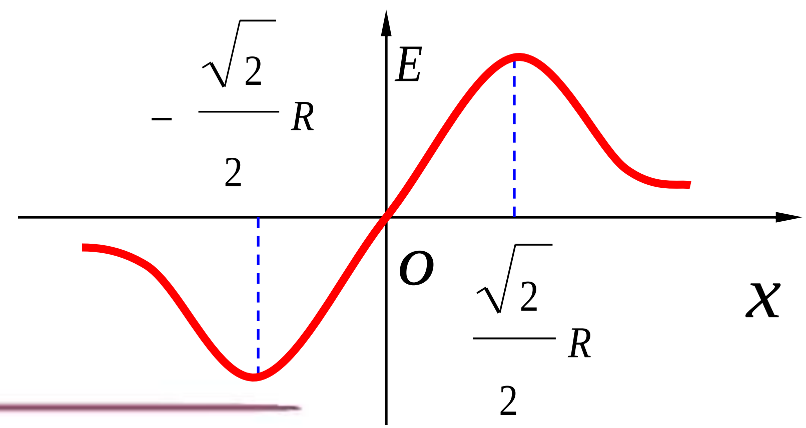
（1） $x \gg R$

$$E \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

（点电荷电场强度）

（2） $x \approx 0$， $E_0 \approx 0$

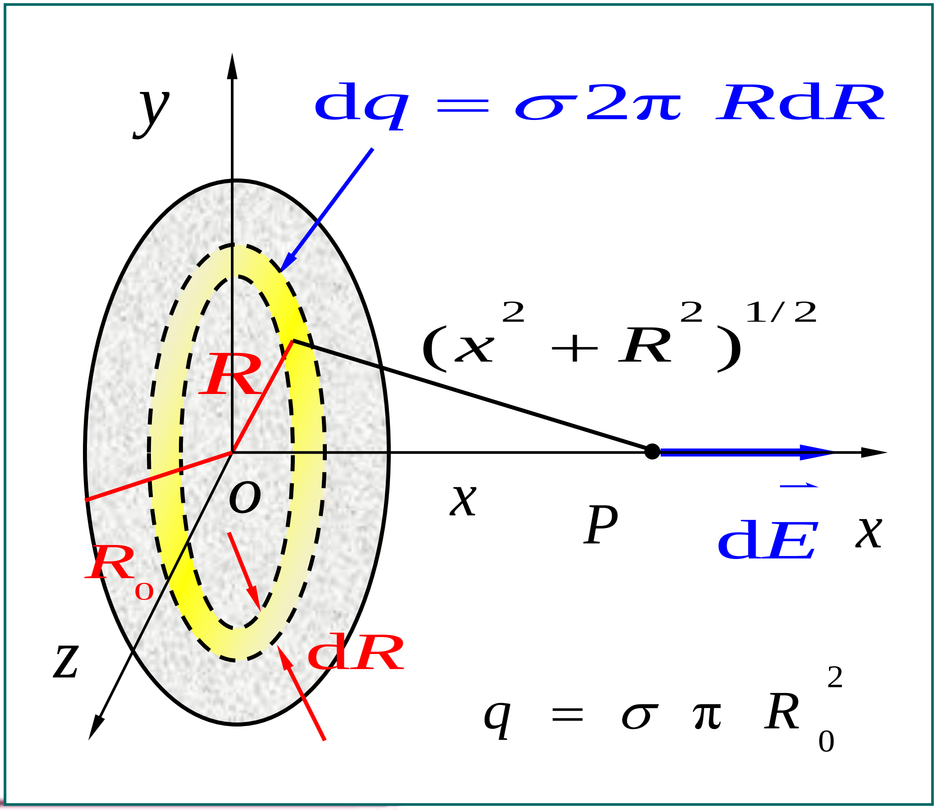
（3） $\frac{dE}{dx} = 0$， $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} R$



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

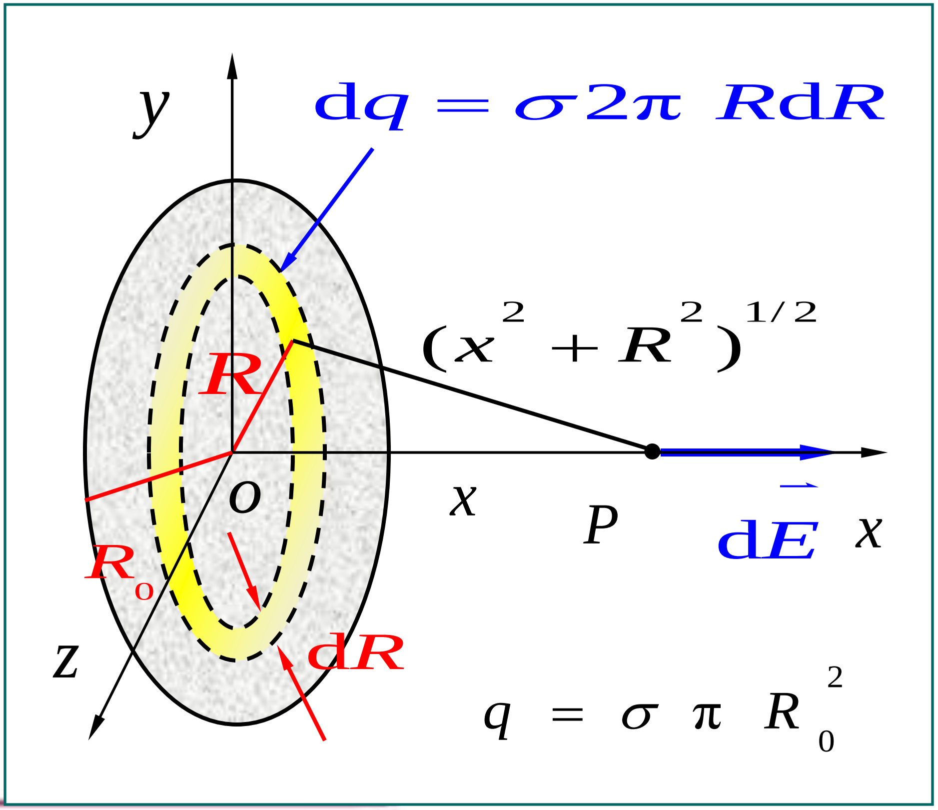
例3 均匀带电薄圆盘轴线上的电场强度.

有一半径为 R_0 ，电荷均匀分布的薄圆盘, 其电荷面密度为 σ . 求通过盘心且垂直盘面的轴线上任意一点处的电场强度.



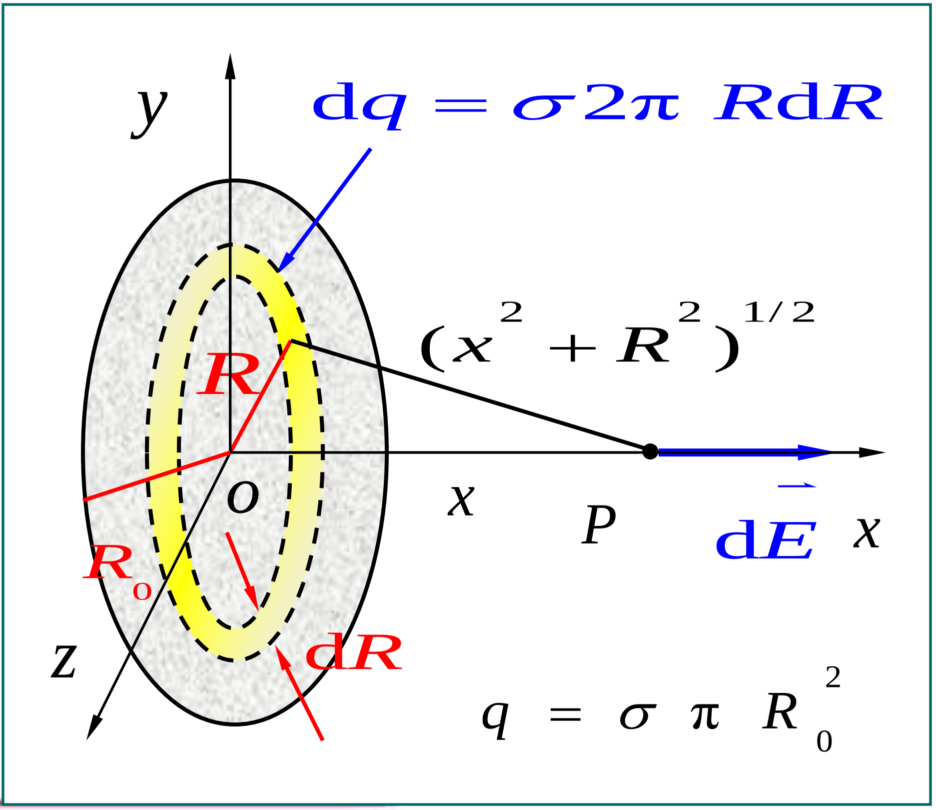
例3　均匀带电薄圆盘轴线上的电场强度.

有一半径为 R_0，电荷均匀分布的薄圆盘，其电荷面密度为 σ . 求通过盘心且垂直盘面的轴线上任意一点处的电场强度.



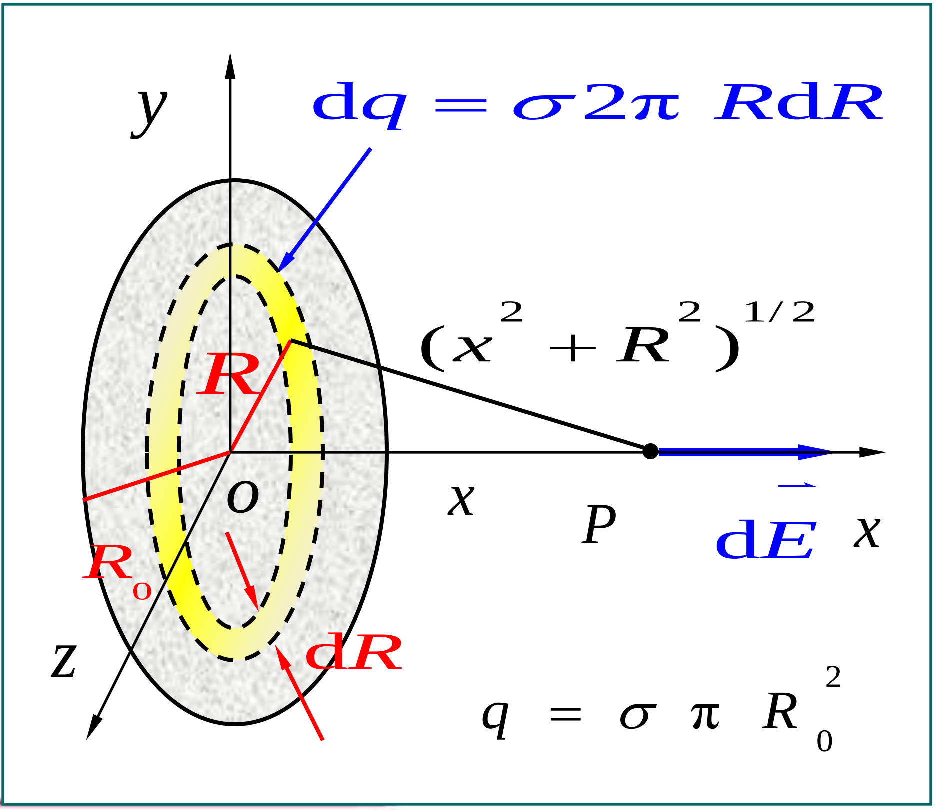
例3 均匀带电薄圆盘轴线上的电场强度.

有一半径为 R_0，电荷均匀分布的薄圆盘，其电荷面密度为 σ . 求通过盘心且垂直盘面的轴线上任意一点处的电场强度.



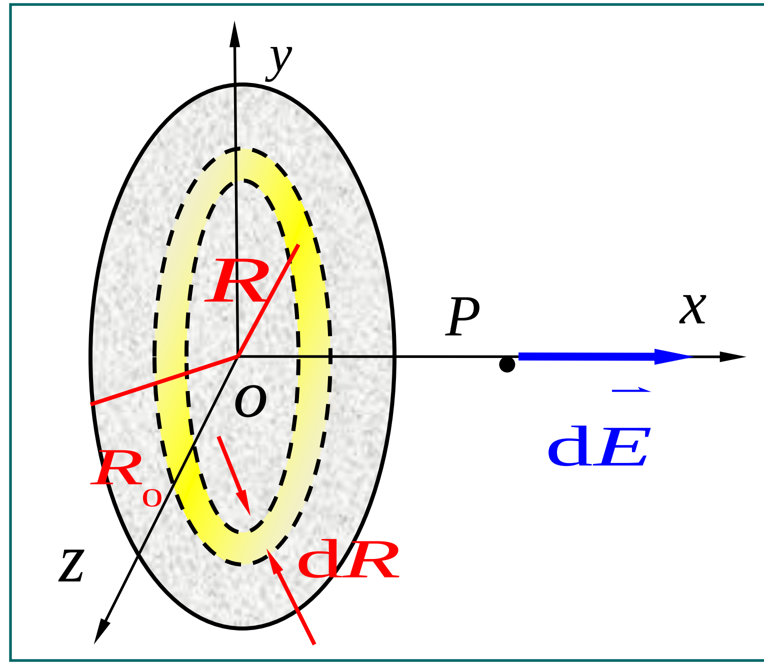
例3 均匀带电薄圆盘轴线上的电场强度.

有一半径为 R_0，电荷均匀分布的薄圆盘，其电荷面密度为 σ . 求通过盘心且垂直盘面的轴线上任意一点处的电场强度.



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

$$\mathrm{d}E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{xR\,\mathrm{d}R}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$



$$E = \int \mathrm{d}E_x$$

$$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^{R_0}\frac{R\,\mathrm{d}R}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R_0^2}}\right)$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

$$E=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+R_0^2}}\right)$$

讨论

$$x \ll R_0$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_0^2}}\right)$$

讨论

$$x \gg R_0$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

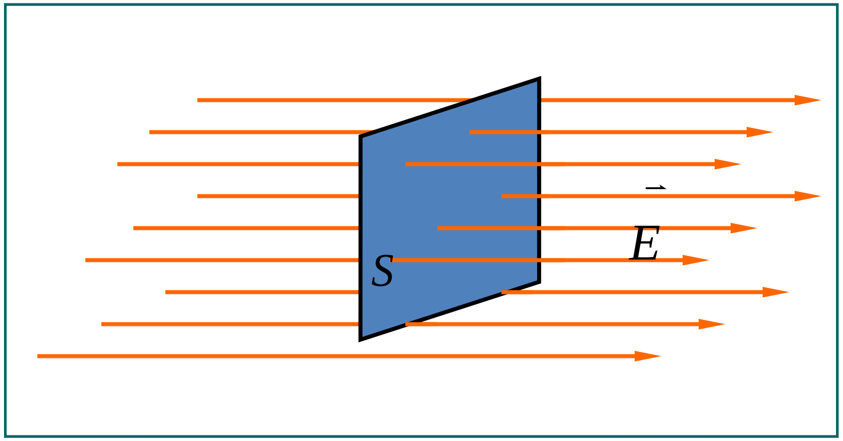
郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

§9-4　电场强度通量 高斯定理

一　电场线　（电场的图示法）

规 定　1）　曲线上每一点**切线**方向为该点电场方向，

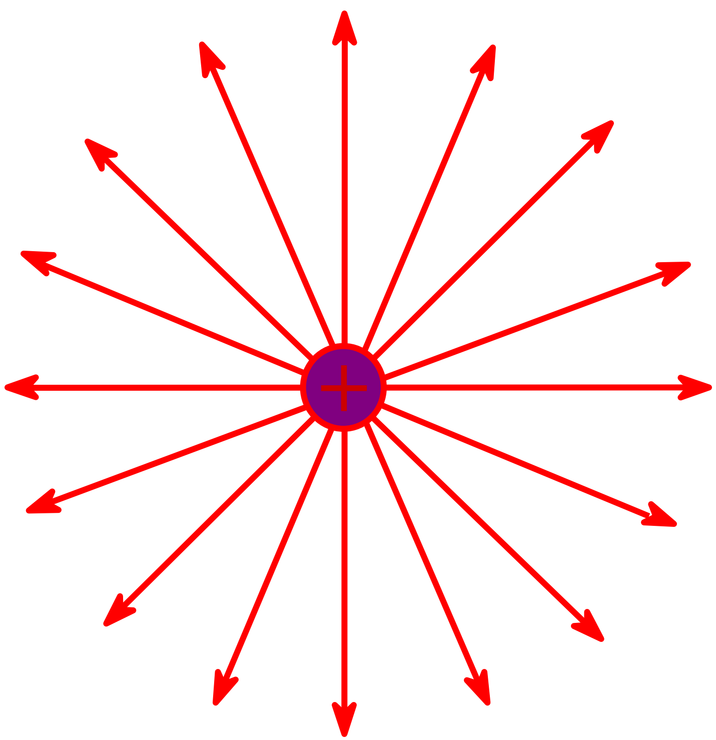
2）　通过垂直于电场方向单位面积电场线数为该点电场强度的大小.　$|\vec{E}| = E = \mathrm{d}N / \mathrm{d}S$



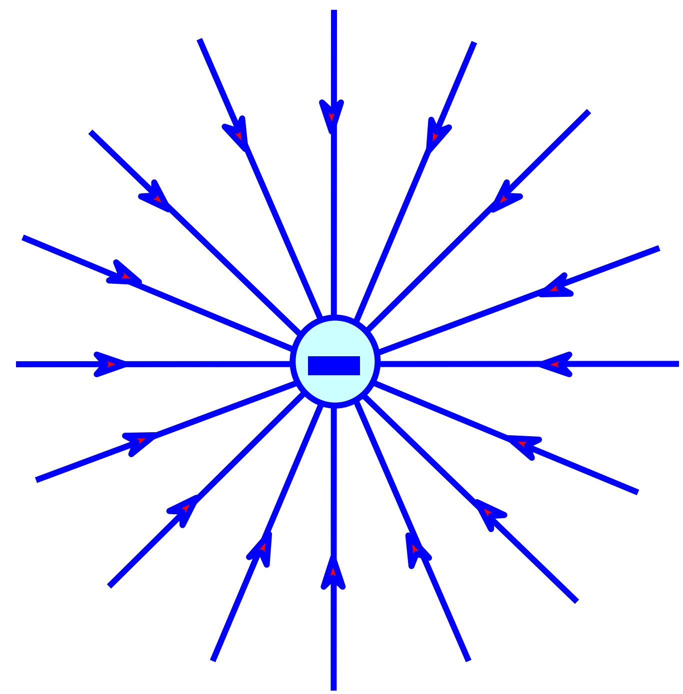
点电荷的电场线

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r$$

正 点 电 荷



负 点 电 荷

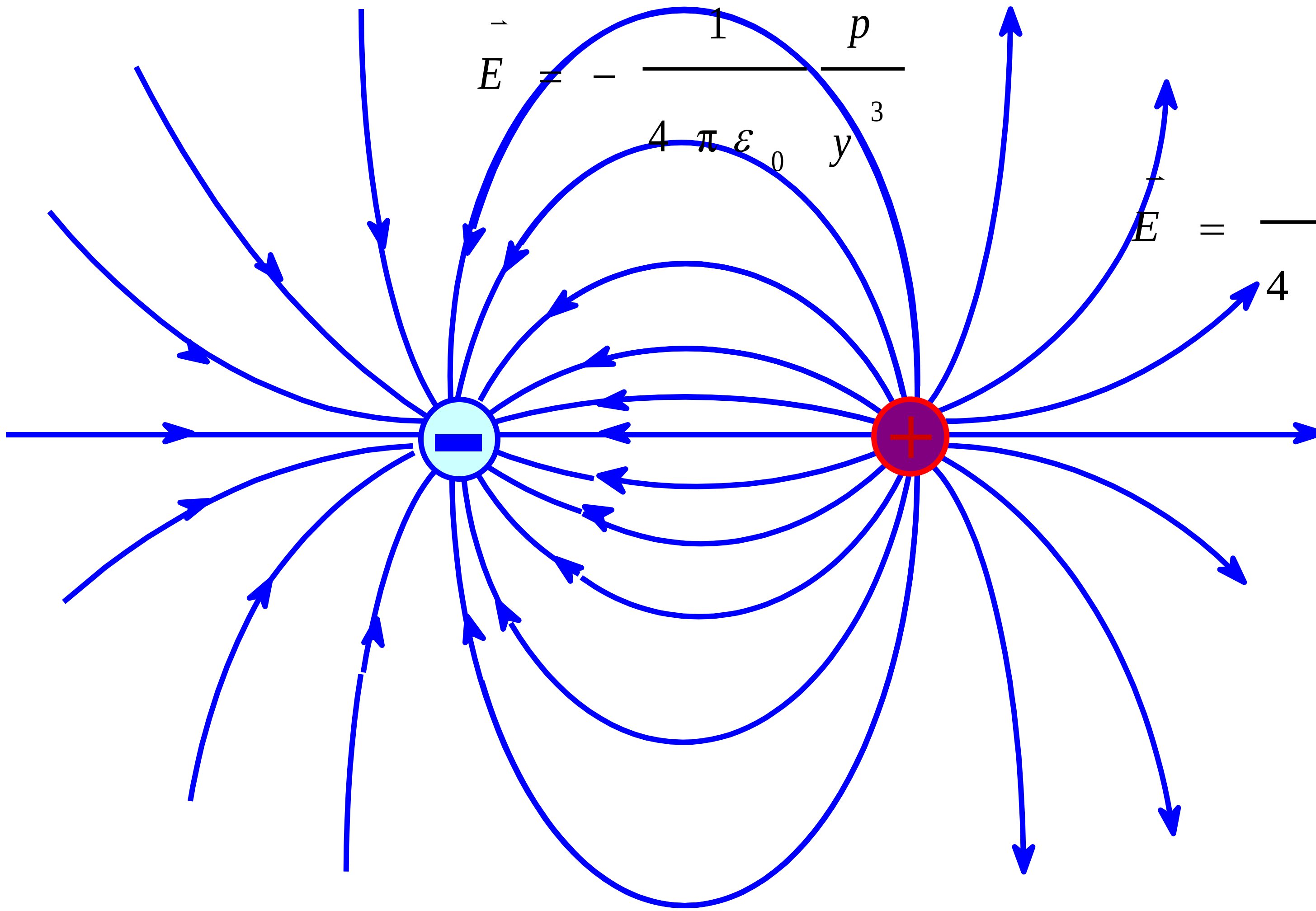


郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

一对等量异号点电荷的电场线

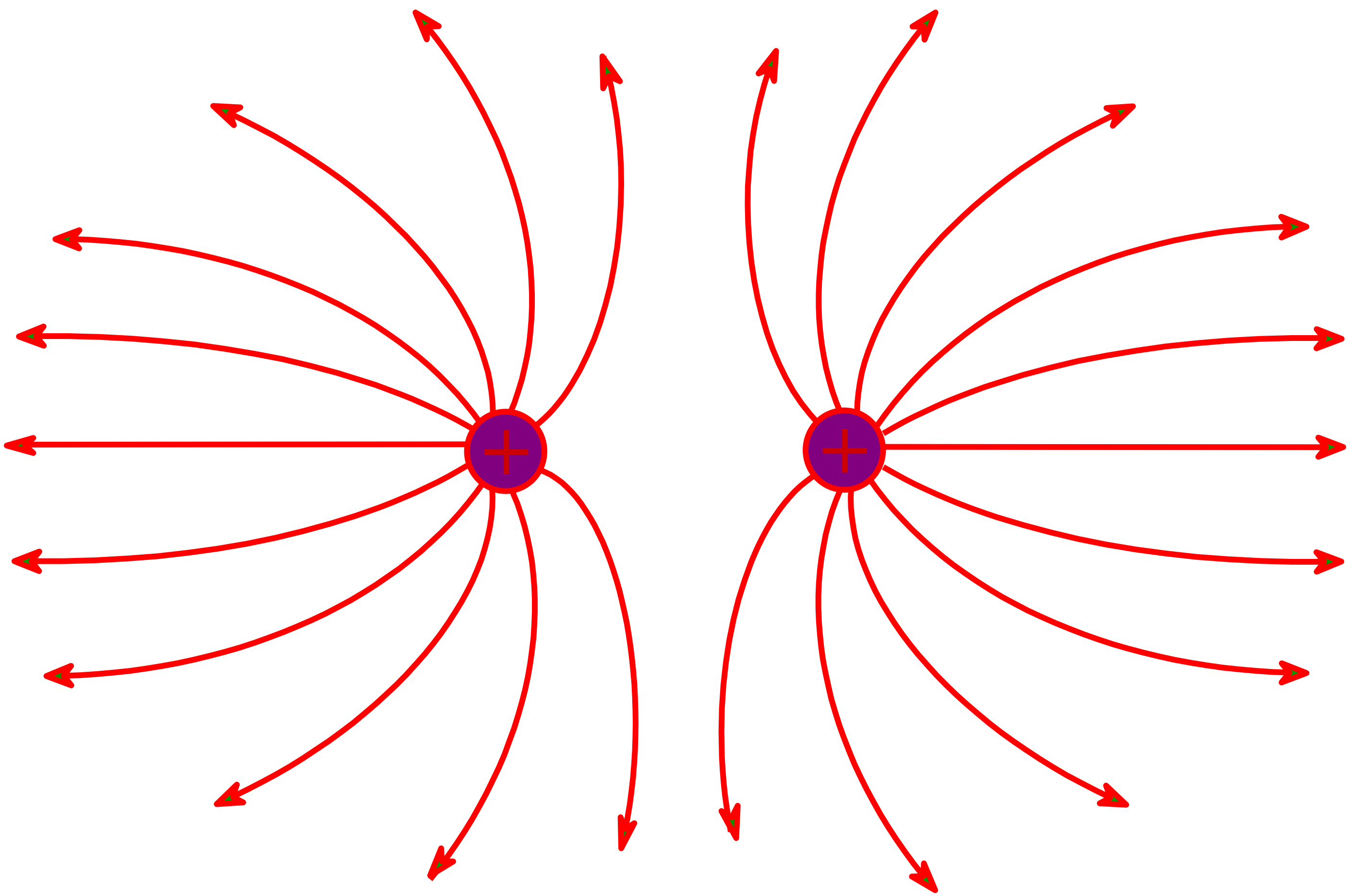
$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{y^3}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}}{x^3}$$



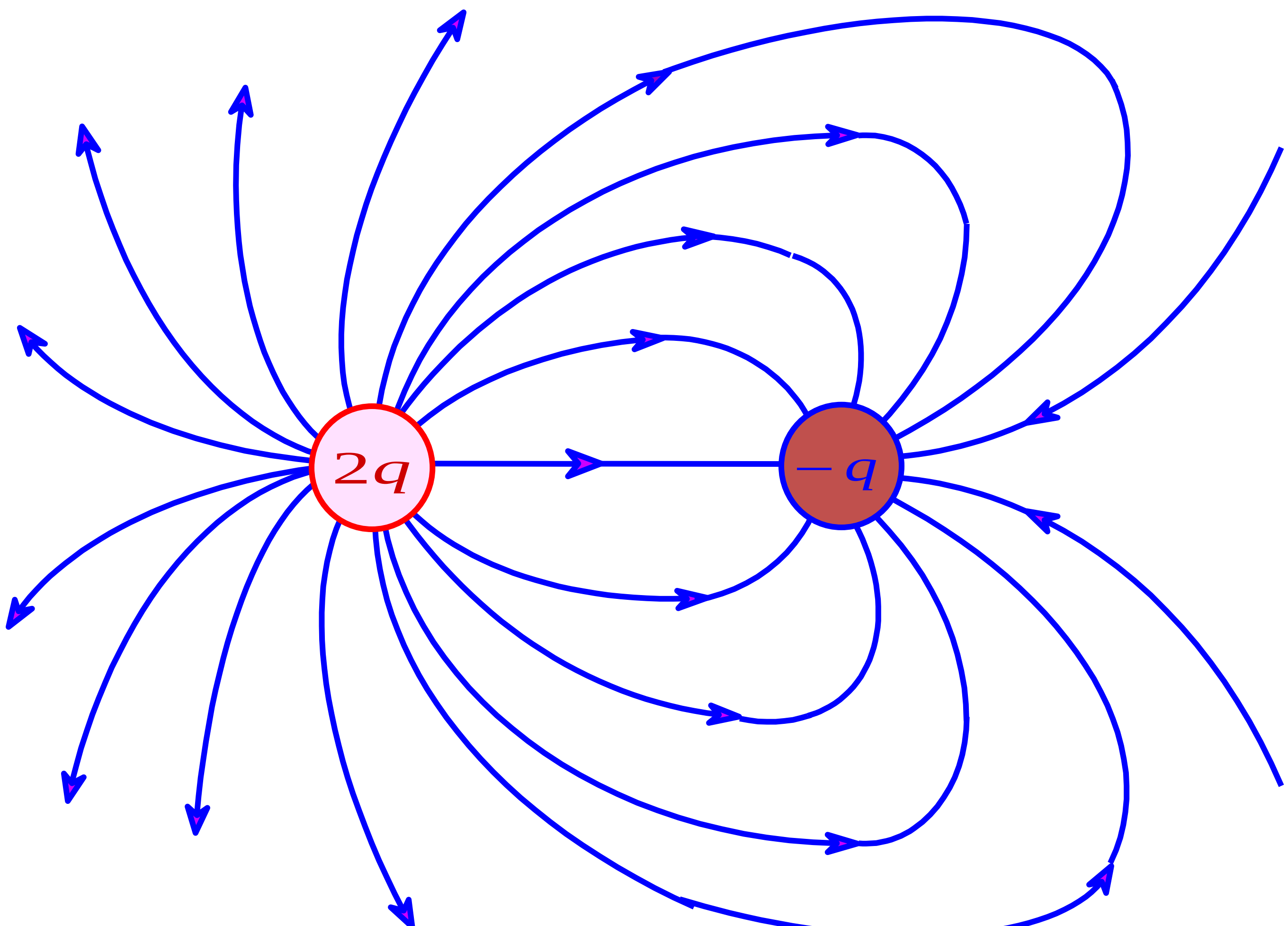
郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

一对等量正点电荷的电场线



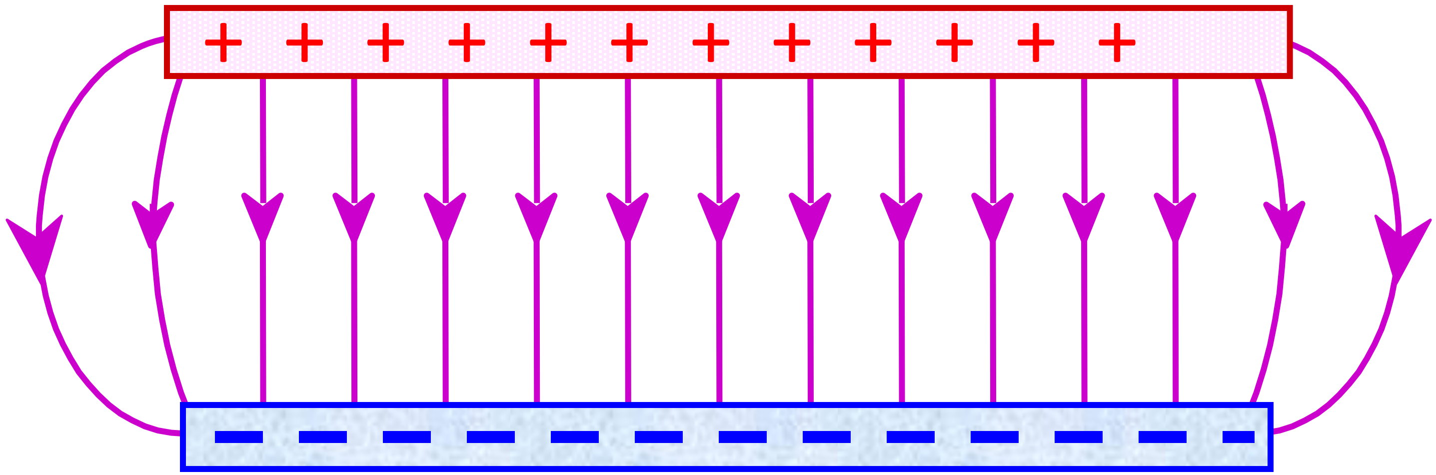
郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

一对不等量异号点电荷的电场线



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

带电平行板电容器的电场线



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

电场线特性

1） 始于正电荷，止于负电荷(或来自无穷远，去向无穷远).

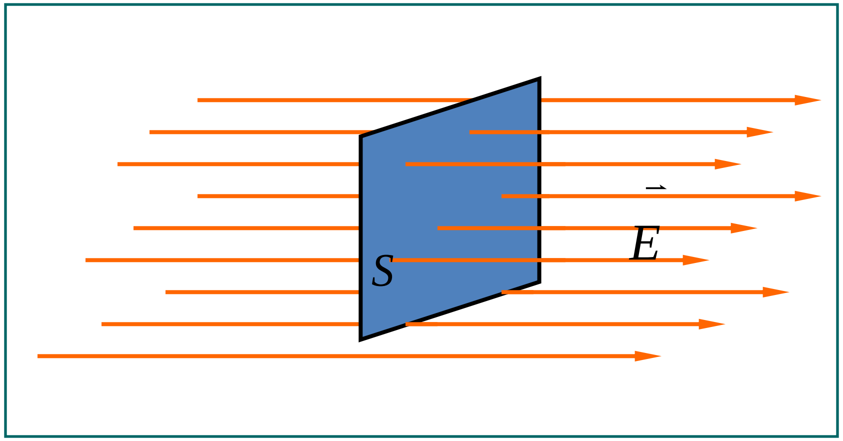
2） 电场线不相交.

3） 静电场电场线不闭合.

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

二 电场强度通量

通过电场中某一个面的电场线数叫做通过这个面的电场强度通量.

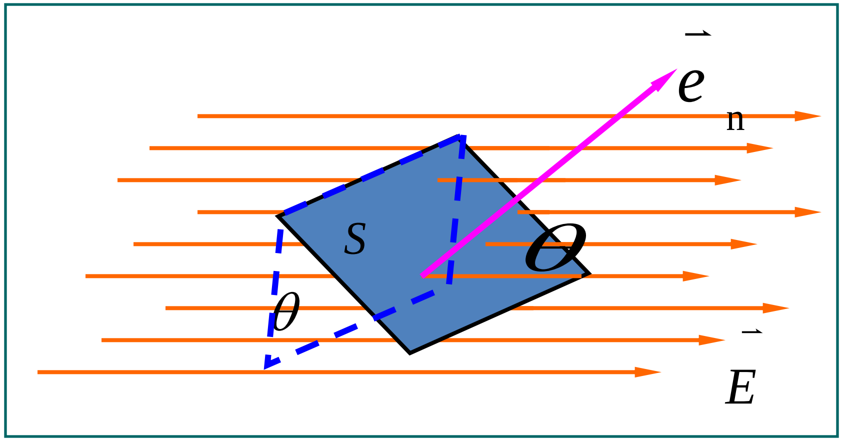


◆ 均匀电场，$\vec{E}$ 垂直平面

1. E=dN/dS

$$\Phi_e = ES$$

2. Phi=N=ES



◆ 均匀电场，$\vec{E}$ 与平面夹角 θ

$$\Phi_e = ES\cos\theta$$

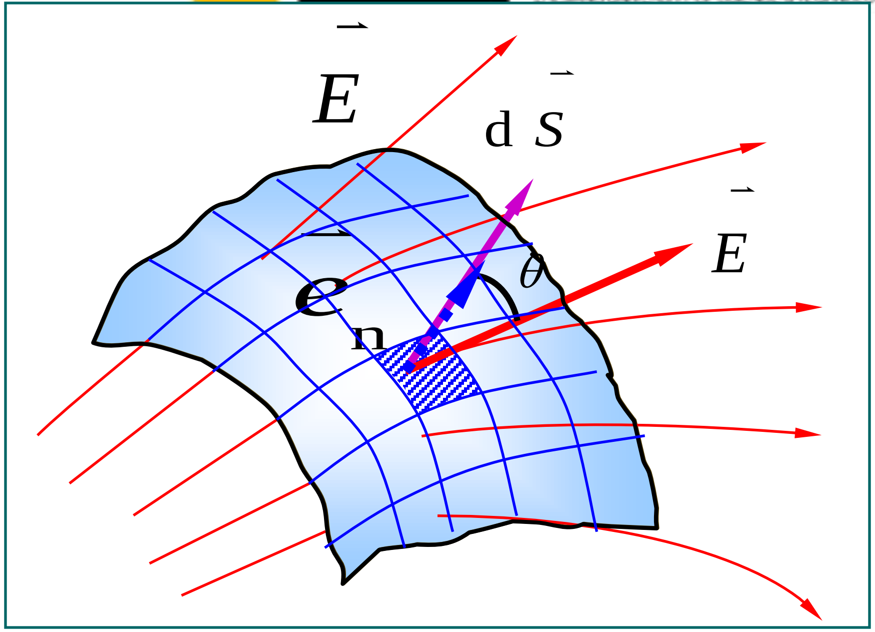
$$\Phi_e = \vec{E}\cdot\vec{S}$$

◆ 非均匀电场强度电通量

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S \cdot \vec{e}_{\mathrm{n}}$$

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \int_{S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

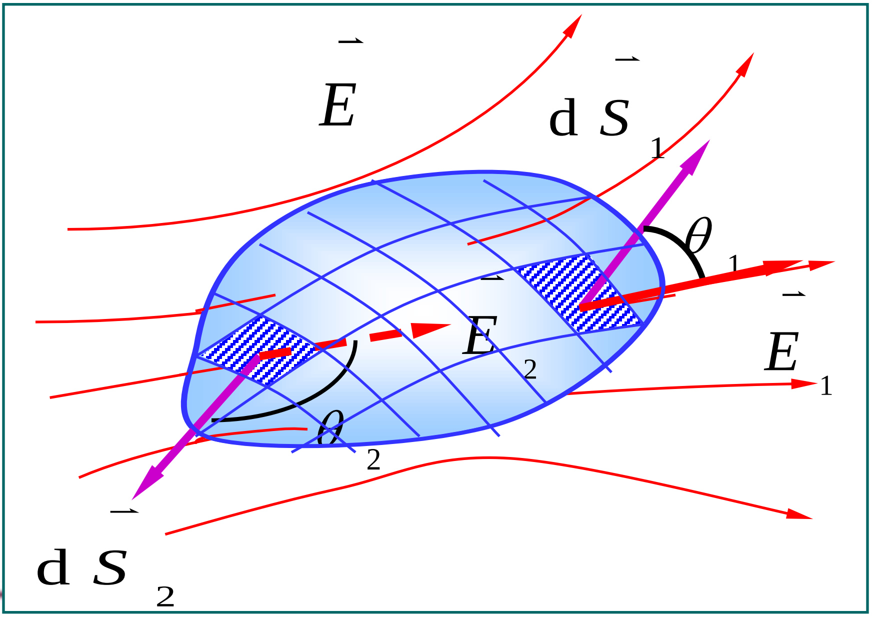


◆ S 为封闭曲面，$\mathrm{d}\vec{S}$ 方向为外法线方向

$$\theta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e1}} > 0$$

$$\theta_2 > \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e2}} < 0$$

电场线**穿入**，电通量**为负**；
电场线**穿出**，电通量**为正**。

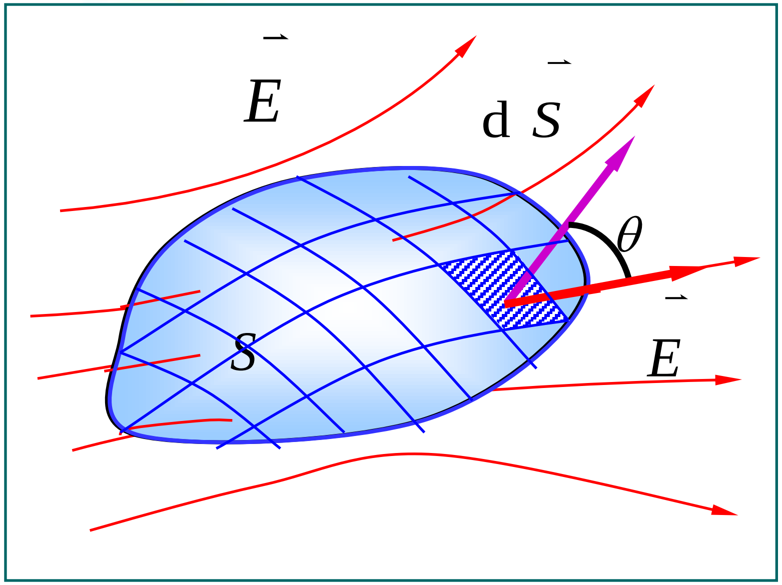


郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

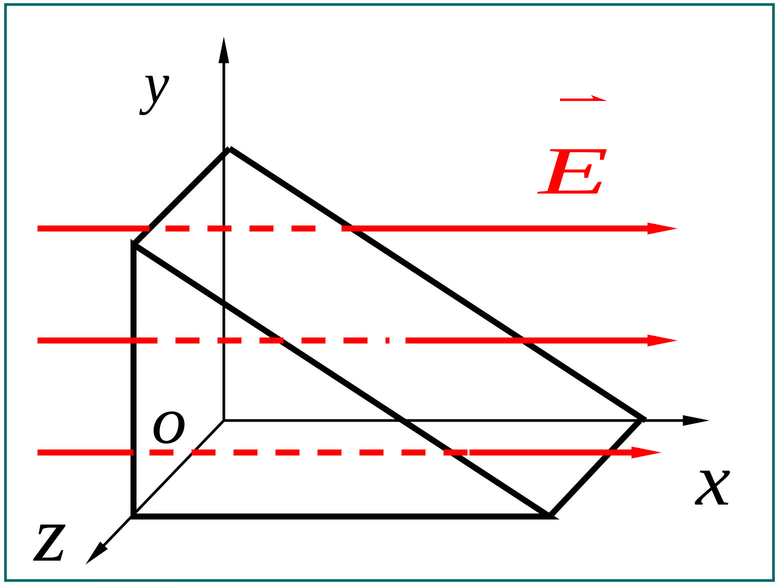
◆ 闭合曲面的电场强度通量

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\cos\theta \,\mathrm{d}S$$



例1 如图所示，有一个三棱柱体放置在电场强度 $\vec{E} = 200\vec{i}\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$ 的匀强电场中．求通过此三棱柱体的电场强度通量．



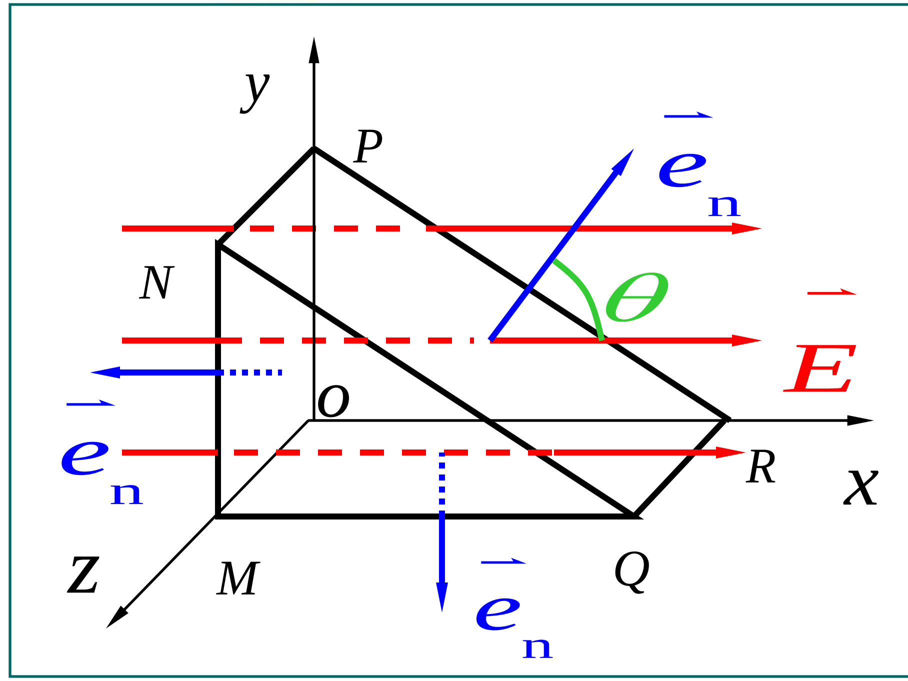
外法线方向，进去为负，出来为正，进去3条，出来3条，所以为0.

什么时候闭合曲面 上的电通量不为0，里面有正电荷时，电场线出来，电通量为正，里面有负电荷时，电场线进来，电通量为负;

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

解

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \Phi_{\mathrm{e}前} + \Phi_{\mathrm{e}后} + \Phi_{\mathrm{e}左} + \Phi_{\mathrm{e}右} + \Phi_{\mathrm{e}下}$$



$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_{\mathrm{e}前} = \Phi_{\mathrm{e}后} = \Phi_{\mathrm{e}下} \\ \quad = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\ \Phi_{\mathrm{e}左} = \int_{S左} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = ES_{左} \cos \pi = -ES_{左} \\ \Phi_{\mathrm{e}右} = \int_{S右} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = ES_{右} \cos \theta = ES_{左} \end{array}\right.$$

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \Phi_{\mathrm{e}前} + \Phi_{\mathrm{e}后} + \Phi_{\mathrm{e}左} + \Phi_{\mathrm{e}右} + \Phi_{\mathrm{e}下} = 0$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

三　高斯定理

在真空中，通过任一闭合曲面的电场强度通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以 ε_0 .

（与面外电荷无关，闭合曲面称为高斯面）

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

请思考：1）高斯面上的 $\vec{E}$ 与那些电荷有关 ？

2）哪些电荷对闭合曲面 s 的 Φ_{e} 有贡献 ？

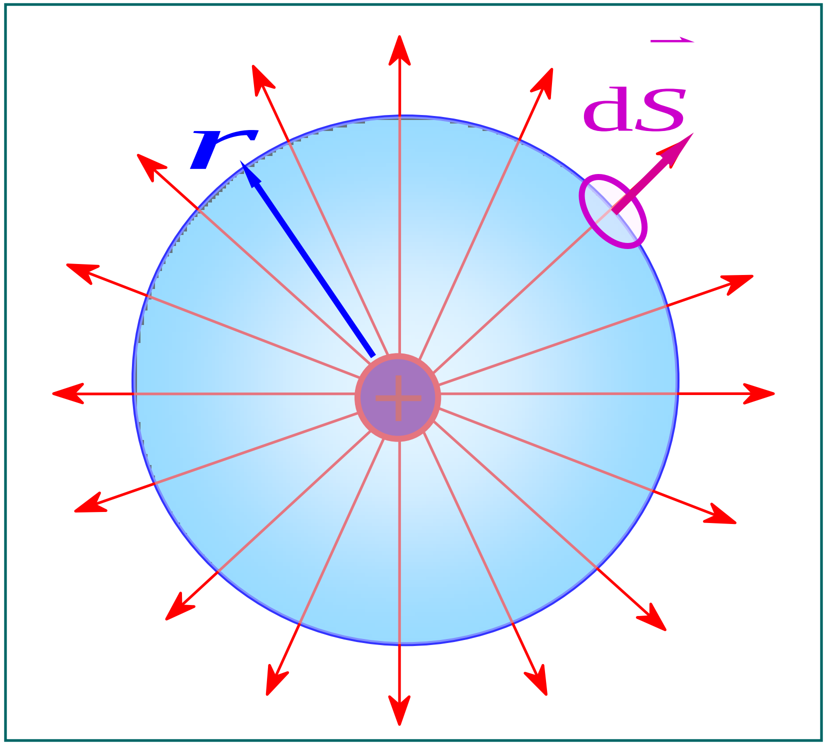
高斯定理的导出 $\begin{cases} \text{库仑定律} \\ \text{电场强度叠加原理} \end{cases}$ ⇒ 高斯定理

1. 点电荷位于球面中心

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dS$$

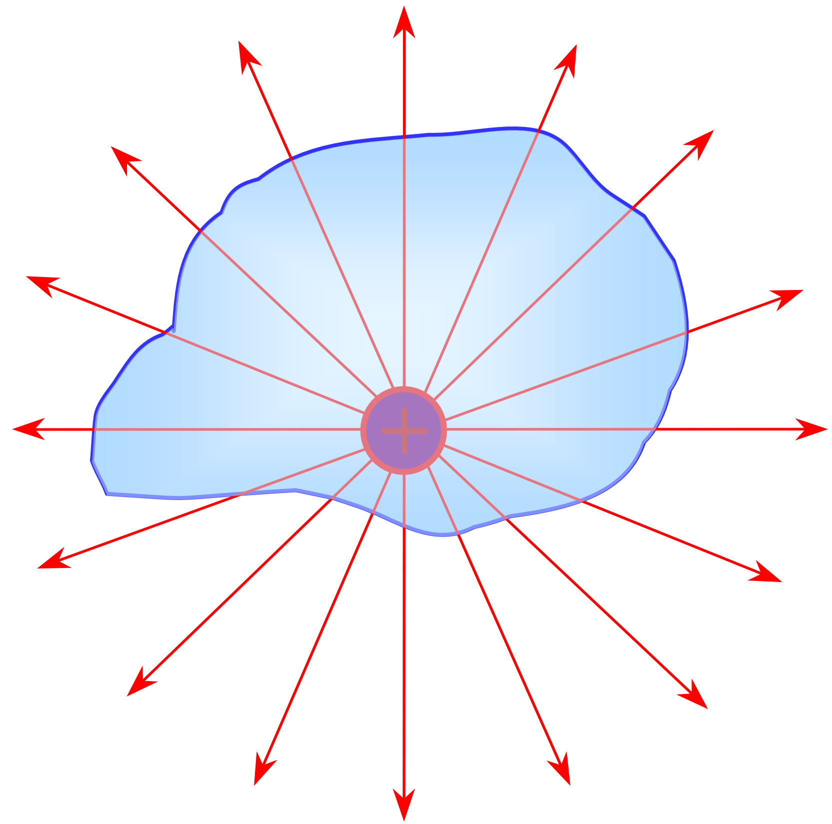
$$\Phi_e = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



2. 点电荷在任意封闭曲面内

$+q$ 发出的 q/ε_0 条电场线仍全部穿出封闭曲面 S，即：

$$\phi_e = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



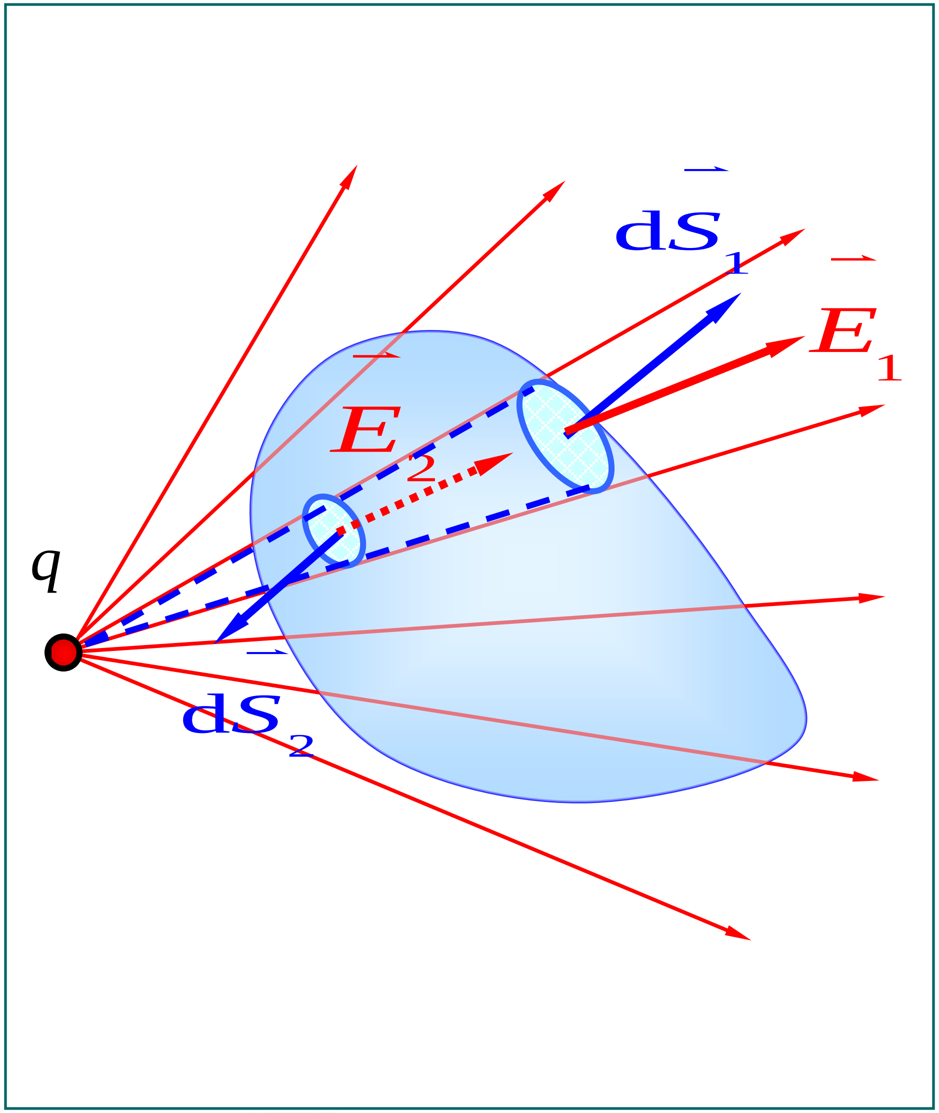
点电荷位于球面中心

$$\Phi_e = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

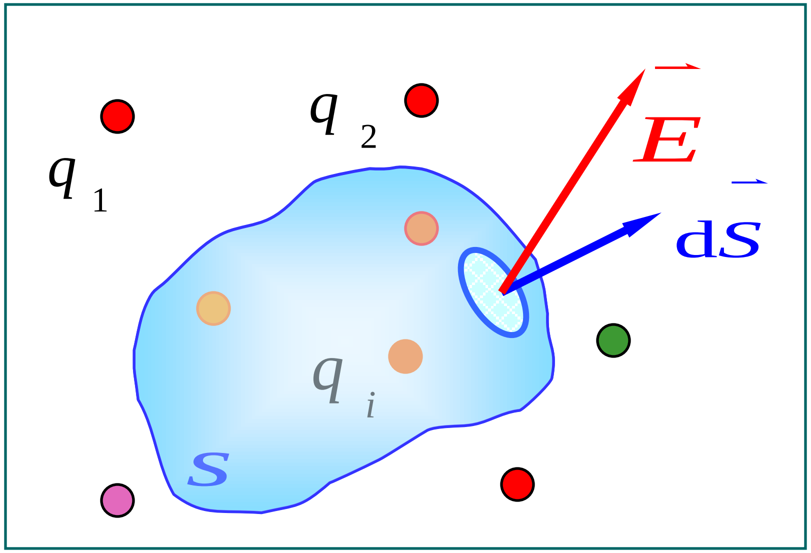
3. 点电荷在封闭曲面之外

$+q$ 发出的 q/ε_0 条电场线中，有多少条进入闭合曲面S，就有多少条传出闭合曲面 S，即：

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$



4. 由多个点电荷产生的电场



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots$$

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \sum_i \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \sum_{i(内)} \oint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \sum_{i(外)} \oint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\because \sum_{i(外)} \oint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\therefore \Phi_{\mathrm{e}} = \sum_{i(内)} \oint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i(内)} q_i$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

高斯定理 $\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$

1. 源为电荷。

总 结

1）高斯面为封闭曲面.

2）高斯面上的电场强度为**所有内外**电荷的总电场强度.

3）电场线**穿入**，电通量**为负**；
电场线**穿出**，电通量**为正**。

4）仅高斯面内的电荷对高斯面的电场强度通量有贡献.

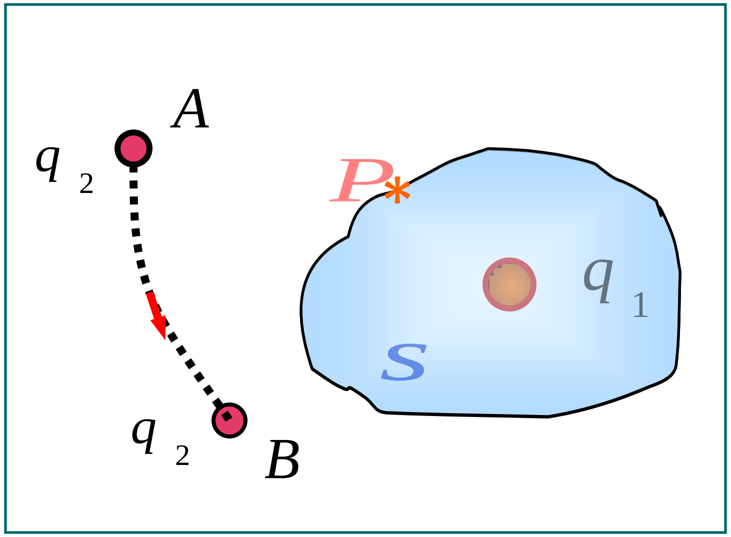
5）静电场是有源场.

讨论

◆ 将 q_2 从 A 移到 B

点 P 电场强度是否变化？

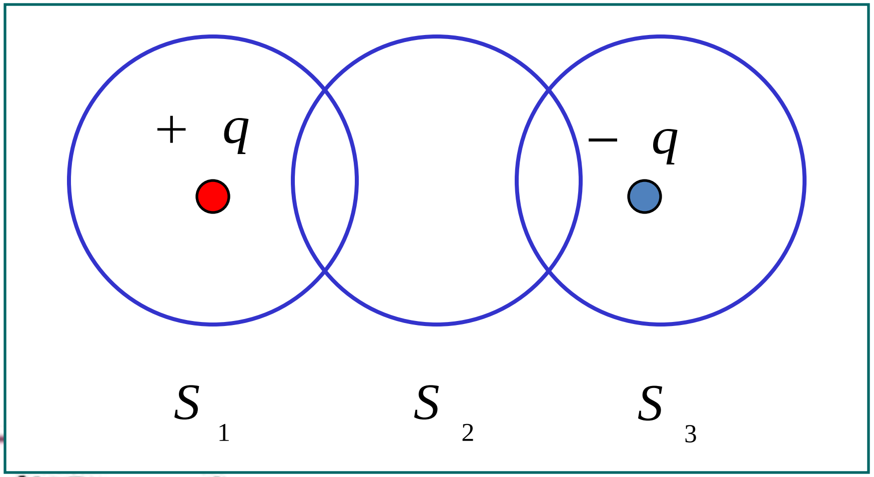
穿过高斯面 S 的 Φ_e 有否变化？



◆ 在点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的静电场中，做如下的三个闭合面 S_1，S_2，S_3，求通过各闭合面的电通量．

$$\Phi_{e1} = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{e2} = 0 \qquad \Phi_{e3} = \frac{-q}{\varepsilon_0}$$



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

四　高斯定理的应用

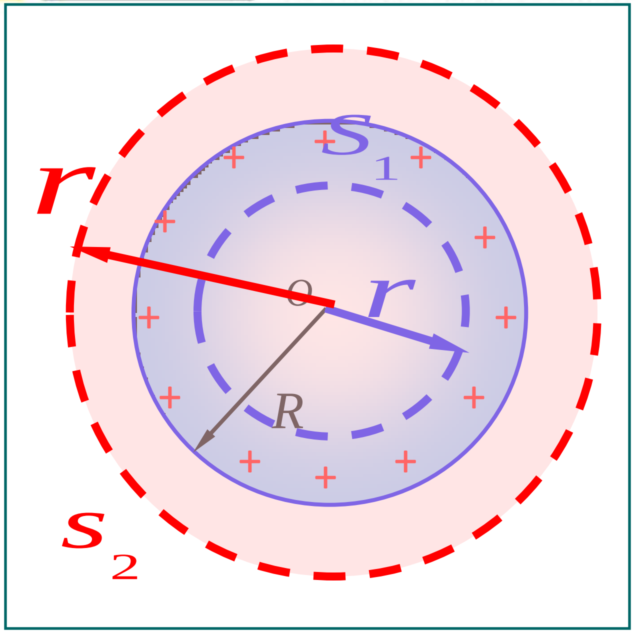
（用高斯定理求解的静电场必须具有一定的对称性）

其步骤为

- 对称性分析；
- 根据对称性选择合适的高斯面；
- 应用高斯定理计算.

例2　均匀带电球面的电场强度

一半径为 R，均匀带电 Q 的球面．求球面内外任意点的电场强度．



解（1）$0 < r < R$

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

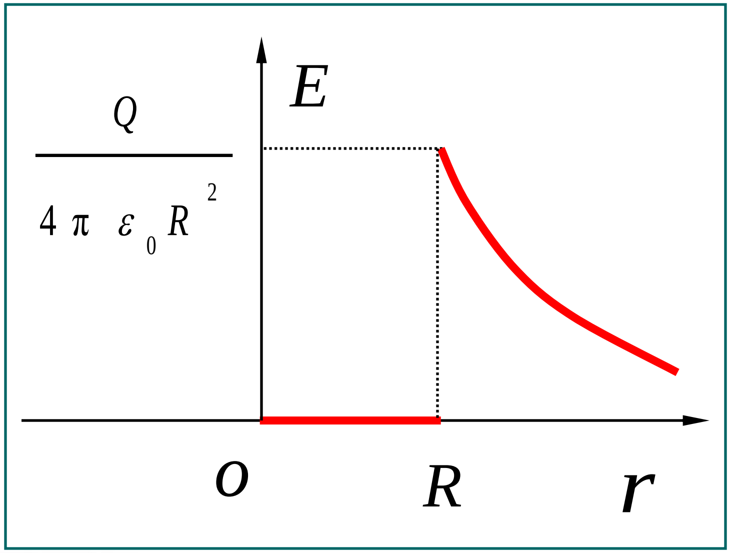
$$\vec{E} = 0$$

（2）$r > R$

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



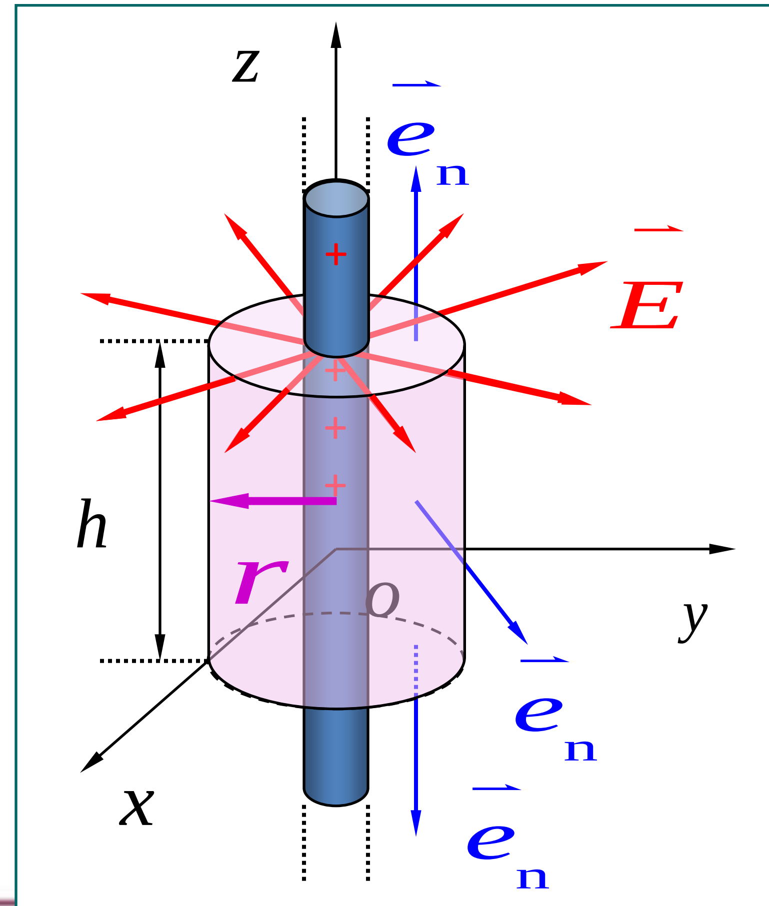
郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn

例3 无限长均匀带电直线的电场强度

无限长均匀带电直线，单位长度上的电荷，即电荷线密度为 λ ，求距直线为 r 处的电场强度.

解 对称性分析：轴对称

选取闭合的柱形高斯面



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} =$$

$$\int_{s(柱面)} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{s(上底)} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{s(下底)} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

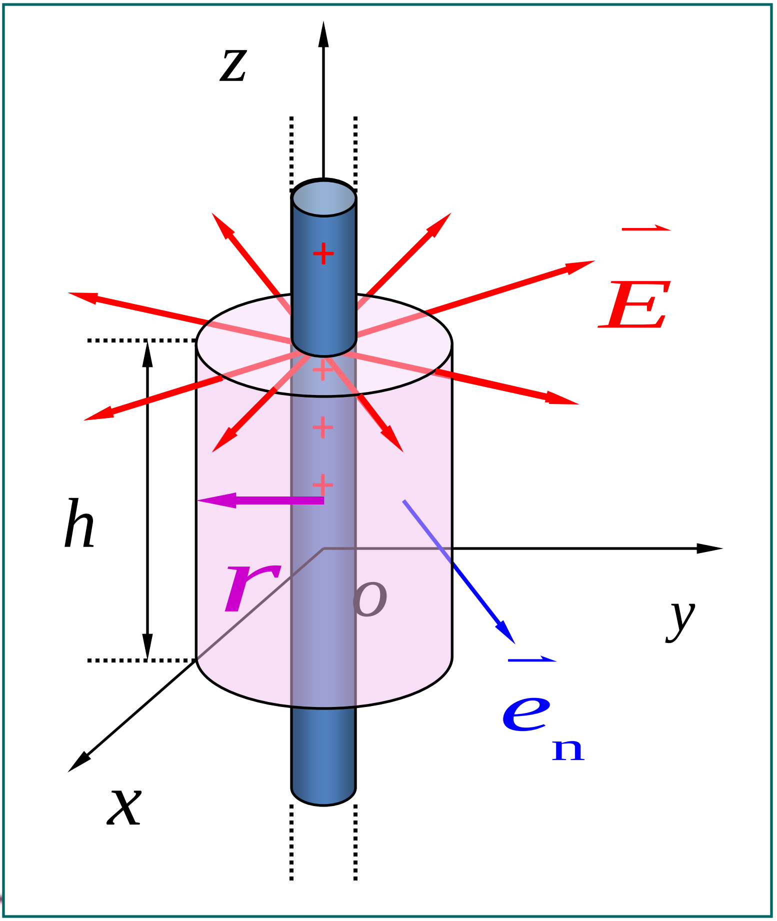
$$= \int_{s(柱面)} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

$$\oint_{S} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{s(\text{柱面})} E\,\mathrm{d}S = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$2\pi rhE = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



例4 无限大均匀带电平面的电场强度

无限大均匀带电平面，单位面积上的电荷，即电荷面密度为 σ ，求距平面为 r 处的电场强度.

解 对称性分析：$\vec{E}$ 垂直平面

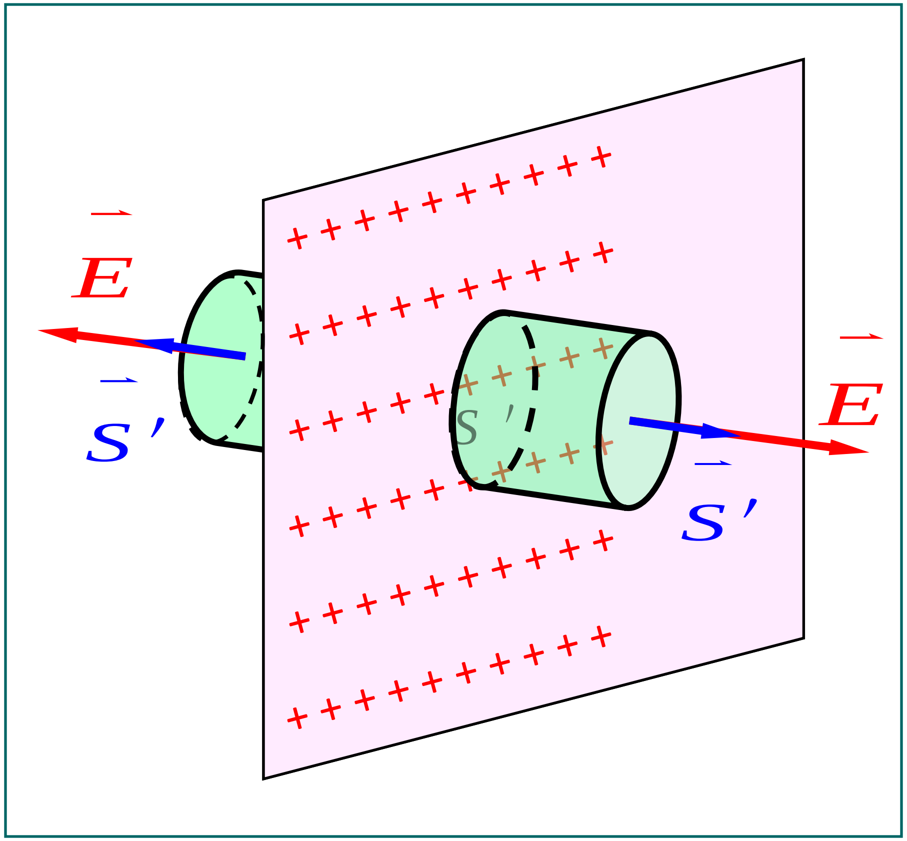
选取闭合的柱形高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

底面积

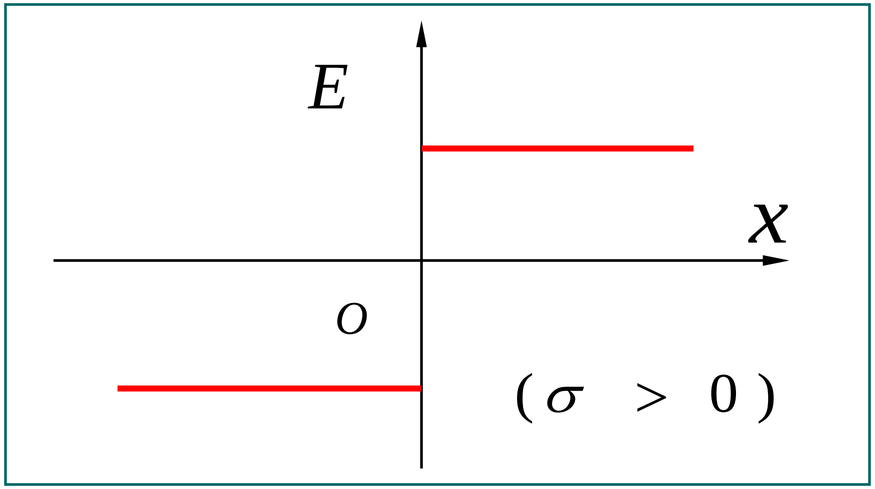
$$2S'E = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

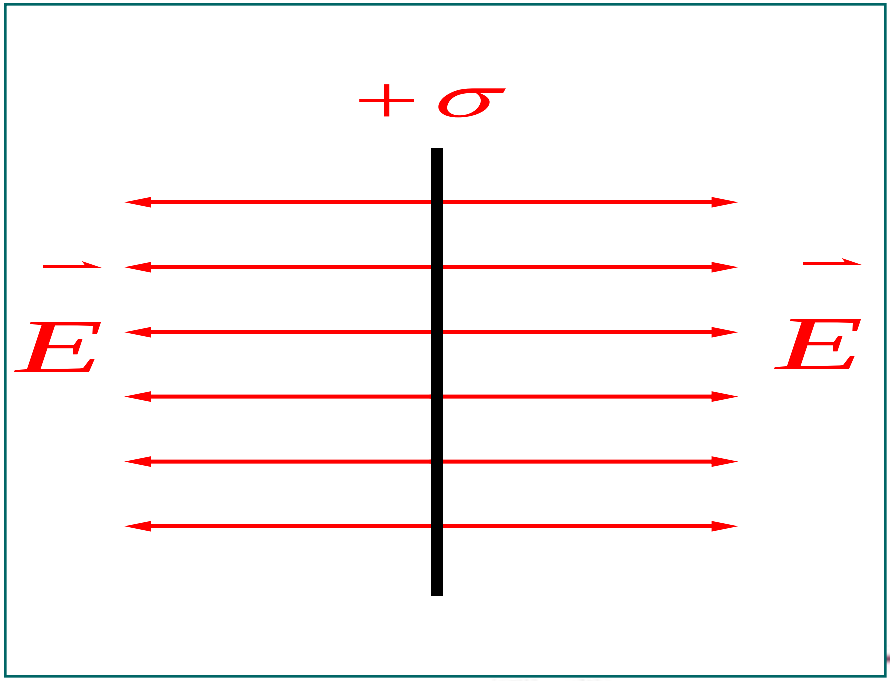
$$\boxed{E = \sigma / 2\varepsilon_0}$$

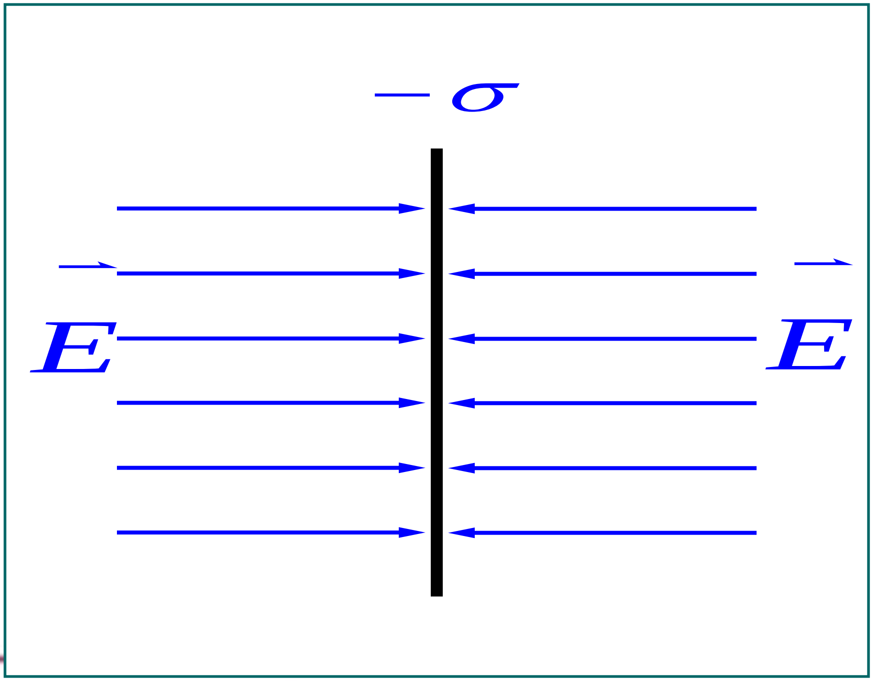


郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



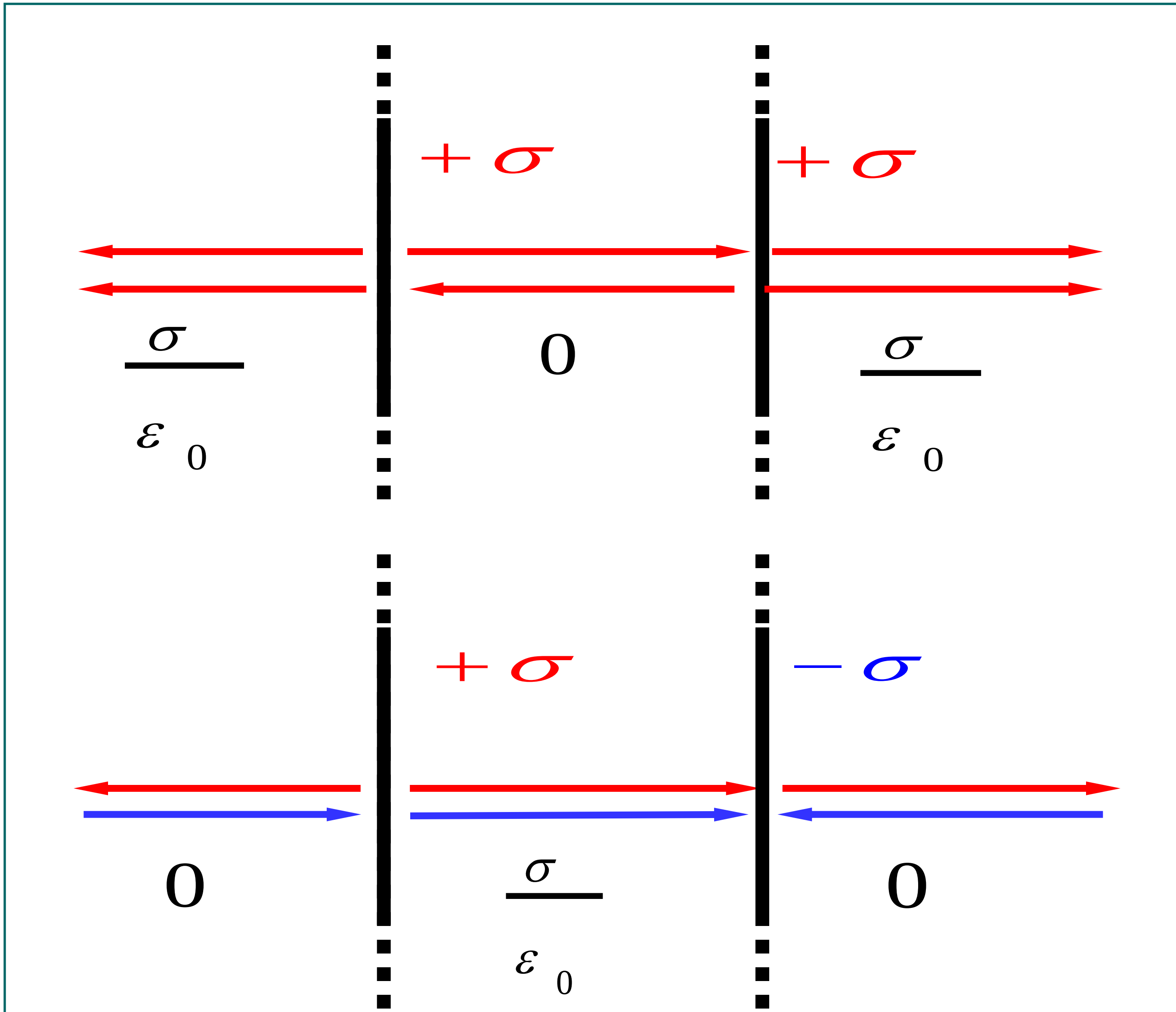




郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

讨论

无限大带电平面的电场叠加问题



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

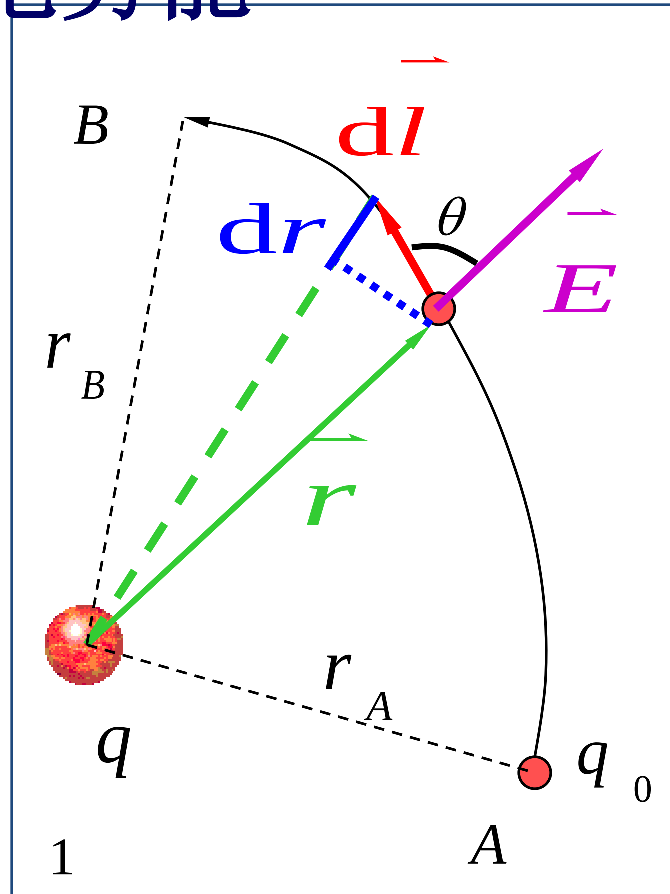
作业:

1. 9-1，9-2；
2. 9-11，9-12，9-14，9-15。

§9-5 静电场的环路定理 电势能

一 静电场力所做的功

◆ 点电荷的电场



$$\mathrm{d}W = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = r\,\mathrm{d}l\cos\theta = r\,\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}W = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$W = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

结果: W 仅与 q_0 的始末位置有关，与路径无关.

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

◆ 任意电荷的电场（视为点电荷的组合）

$$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i \qquad W=q_0\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=\sum_i q_0\int_l \vec{E}_i\cdot d\vec{l}$$

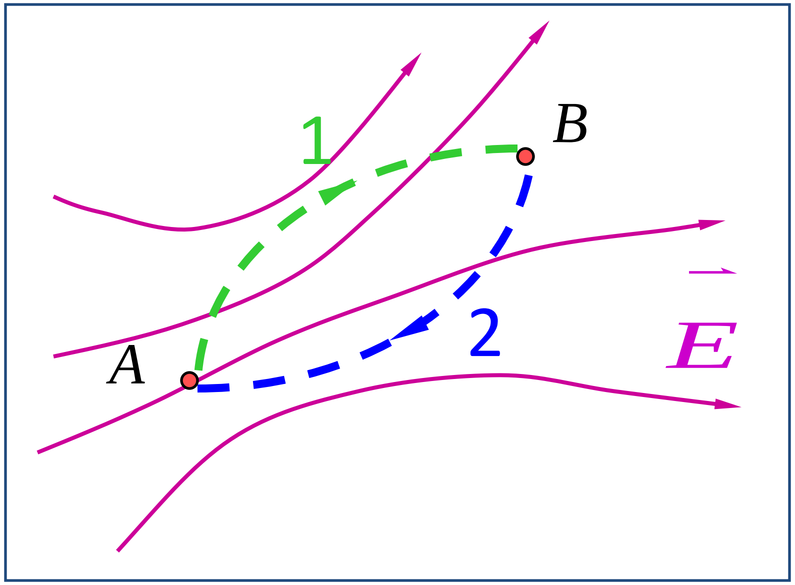
结论：静电场力做功与路径无关.

二 静电场的环路定理

$$q_0\int_{A1B}\vec{E}\cdot d\vec{l}=q_0\int_{A2B}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$q_0\left(\int_{A1B}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{B2A}\vec{E}\cdot d\vec{l}\right)=0$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$



静电场是保守场

三　电势能

静电场是保守场，静电场力是保守力. 静电场力所做的功就等于电荷电势能的减量.

$$W_{A\to B}=\int_A^B q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=E_{\mathrm{p}A}-E_{\mathrm{p}B}$$

$$W_{AB}\begin{cases}>0, & E_{\mathrm{p}A}>E_{\mathrm{p}B}\\ <0, & E_{\mathrm{p}A}<E_{\mathrm{p}B}\end{cases}$$

令 $E_{\mathrm{p}B}=0$　　　$E_{\mathrm{p}A}=\int_A^B q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

试验电荷 q_0 在电场中某点的电势能，在数值上就等于把它从该点移到零势能处静电场力所作的功.

电势能的大小是相对的，电势能的差是绝对的.

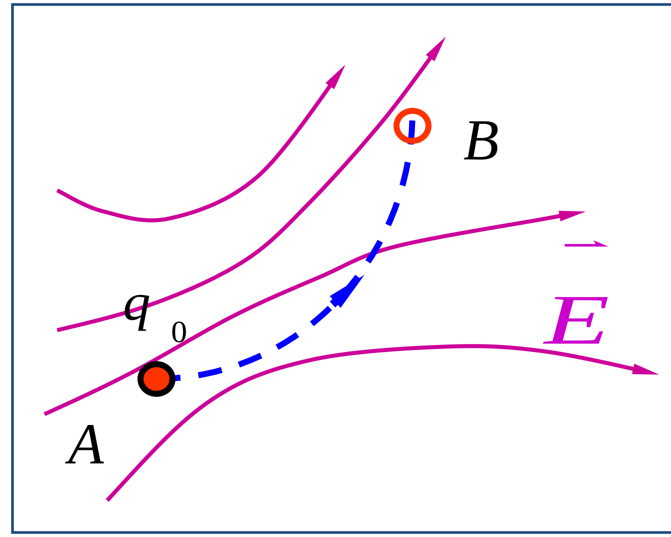
§ 9-6 电势

一 电势

$$\int_A^B q_0 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = E_{pA} - E_{pB}$$

$$\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \boxed{\frac{E_{pA}}{q_0}} - \boxed{\frac{E_{pB}}{q_0}}$$

$$\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = V_A - V_B$$



此标量函数（电势）在 A、B 两点的数值之差等于从A到B移动单位正电荷时静电场力所做的功.

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

$$\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = V_A - V_B \qquad V_A = \int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + V_B$$

令 $V_B = 0$ $\quad V_A = \int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

$$\boxed{V_A = \int_A^{V=0\,\text{点}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

- **电势零点选择方法：** 有限带电体以无穷远为电势零点，实际问题中常选择地球电势为零.

$$V_A = \int_A^{\infty} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

- **物理意义** 把单位正试验电荷从点 A 移到无穷远时，静电场力所作的功.

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

◆ 电势差 $U_{AB} = V_A - V_B = \int_{AB} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

(将单位正电荷从 A 移到 B 电场力作的功.)

注意 电势差是绝对的，与电势零点的选择无关；电势大小是相对的，与电势零点的选择有关.

◆ 静电场力的功 $W_{AB} = q_0 V_A - q_0 V_B = q_0 U_{AB}$

◆ 单位：伏特 V）

原子物理中能量单位 $1\,\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$

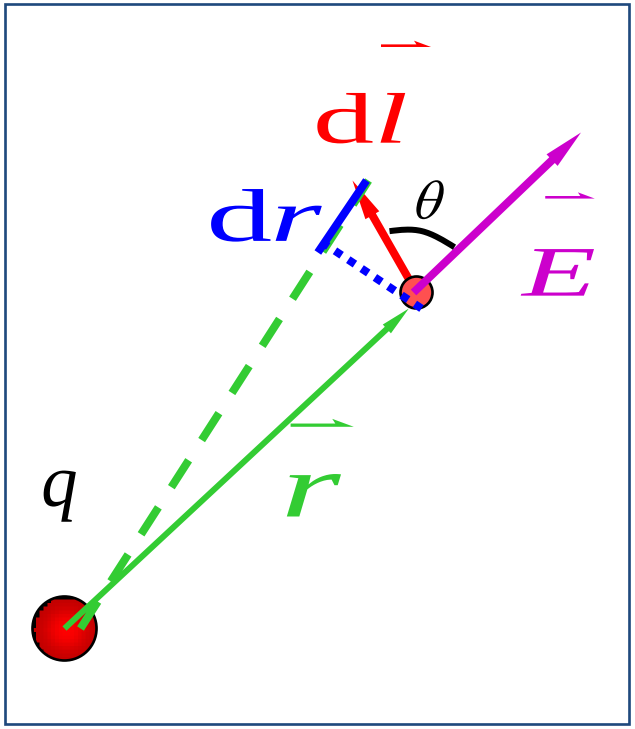
二　点电荷的电势

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

令 $V_\infty = 0$

$$V=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_r^\infty \frac{qr\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$



$$\boxed{V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

$$\begin{cases} q>0, & V>0 \\ q<0, & V<0 \end{cases}$$

问：电势和电场线的关系如何？

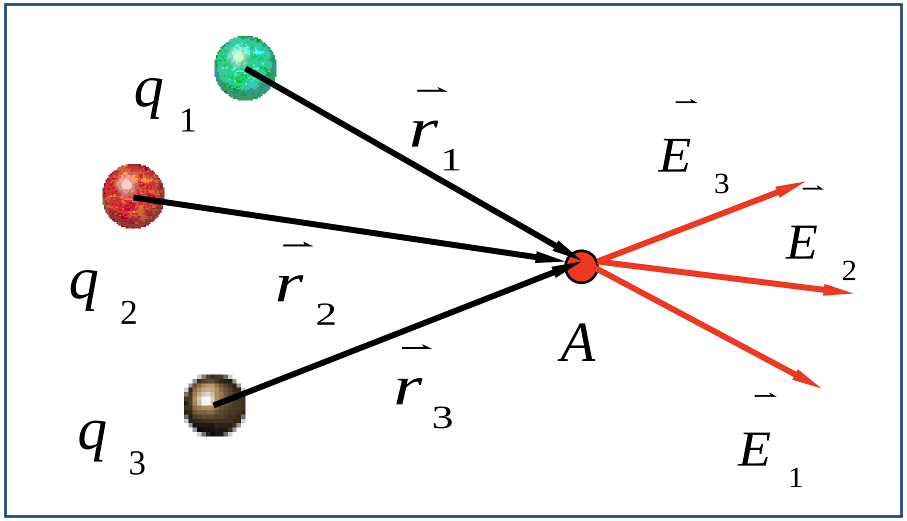
郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn

三　电势的叠加原理

- 点电荷系 $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$

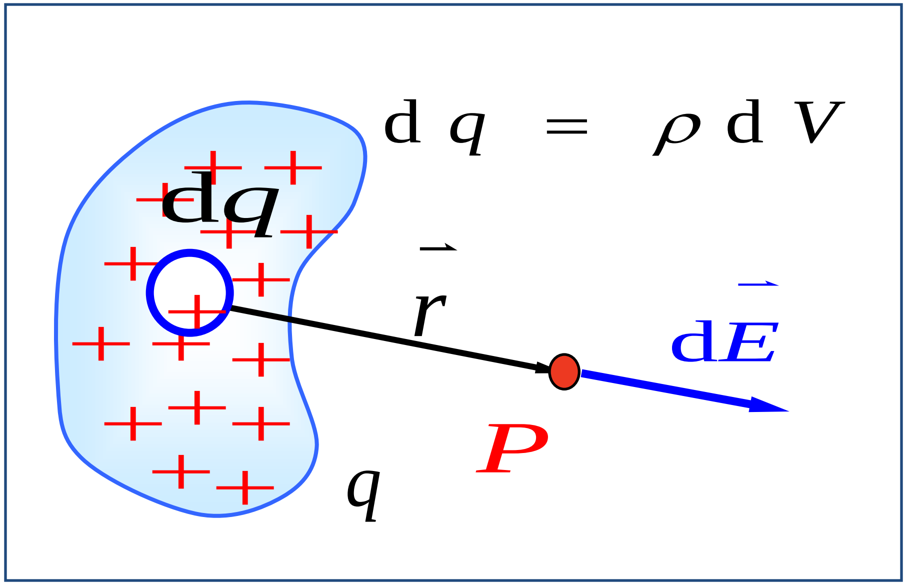
$$V_A=\int_A^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum_i \int_A^{\infty}\vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$V_A=\sum_i V_{Ai}=\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$



- 电荷连续分布

$$V_P=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn

讨论

求电势的方法

1. 若已知在积分路径上 $\vec{E}$ 的函数表达式，则

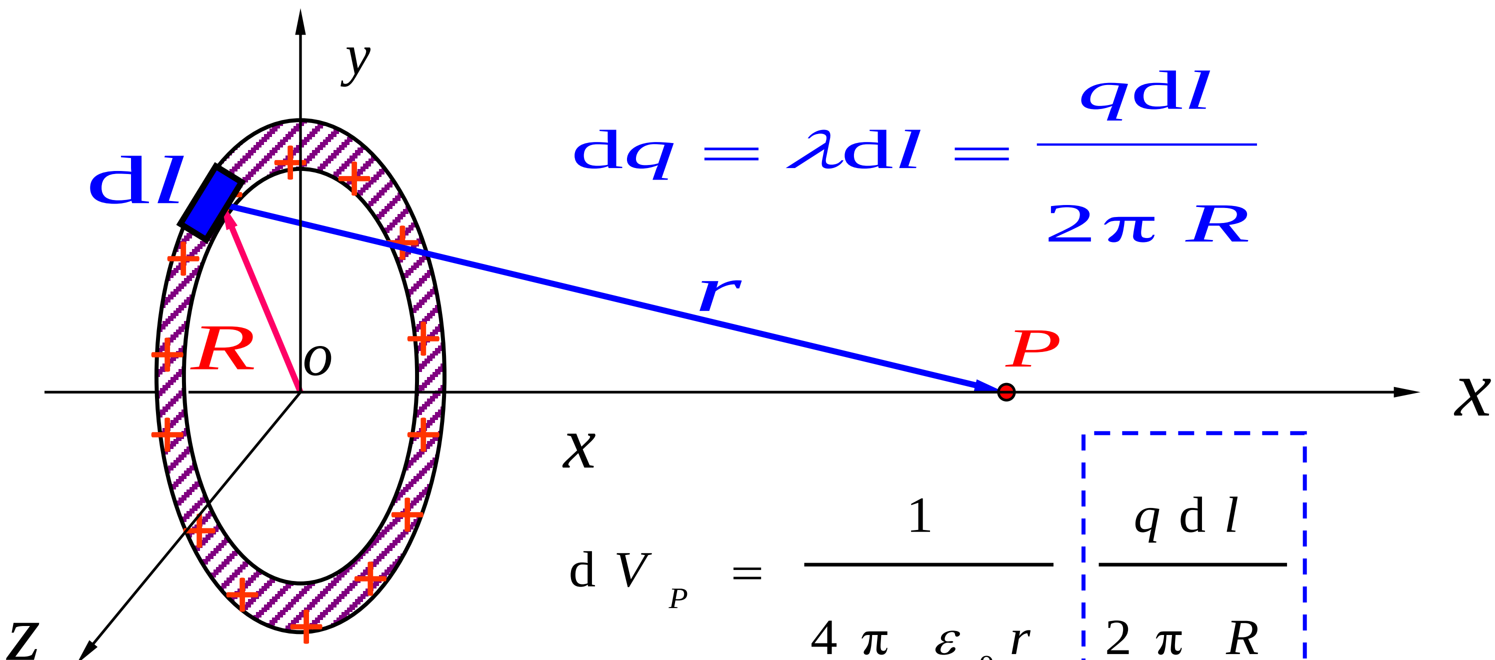
$$V_A = \int_A^{V=0\text{点}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

2. 叠加法 $V_P = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

（利用了点电荷电势 $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，这一结果已选无限远处为电势零点，即使用此公式的前提条件为有限大带电体且选无限远处为电势零点.）

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

例1 正电荷q 均匀分布在半径为R 的细圆环上. 求圆环轴线上距环心为x 处点P 的电势.



$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \frac{q\mathrm{d}l}{2\pi R}$$

$$\mathrm{d}V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\boxed{\frac{q\,\mathrm{d}l}{2\pi R}}$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int\frac{q\,\mathrm{d}l}{2\pi R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

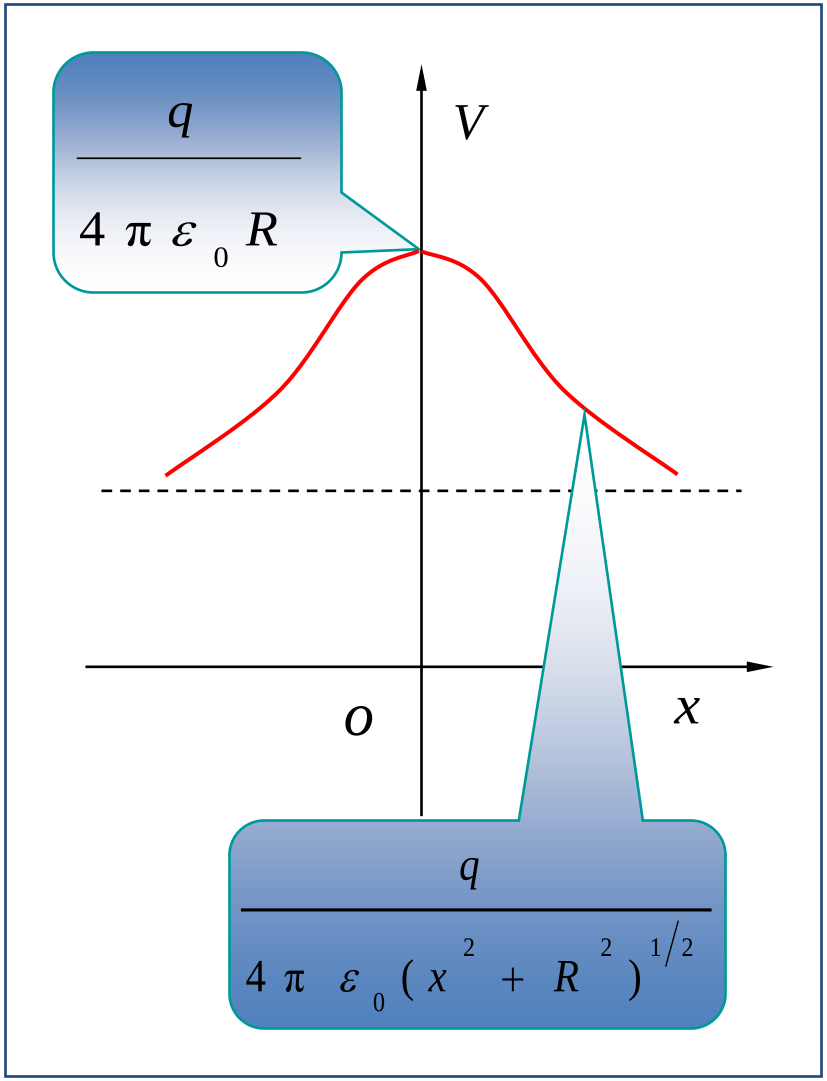
郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

$$V_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

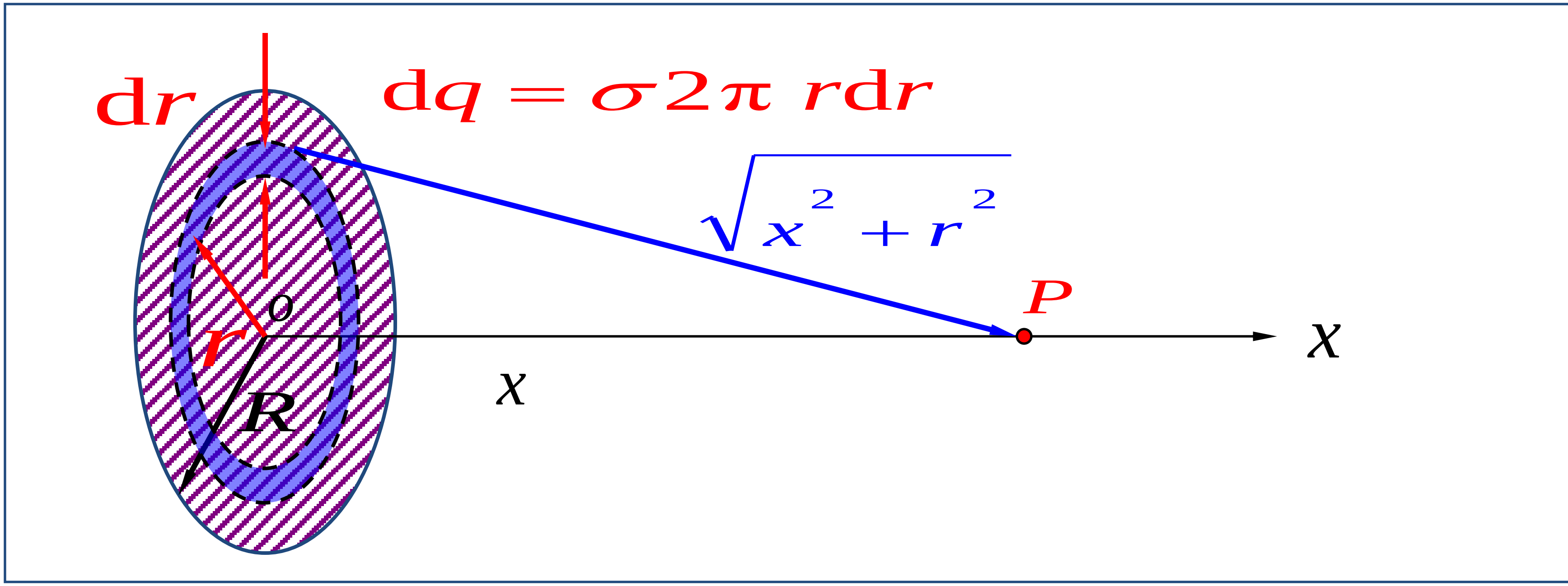
讨论

$x = 0,\quad V_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$x \gg R,\quad V_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$



◆ 均匀带电薄圆盘轴线上的电势



$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma 2\pi\, r\, dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2 + R^2} - x\right)$$

$x \gg R \quad \sqrt{x^2 + R^2} \approx x + \dfrac{R^2}{2x}$ $\quad V \approx Q/4\pi\varepsilon_0 x$

（点电荷电势）

郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

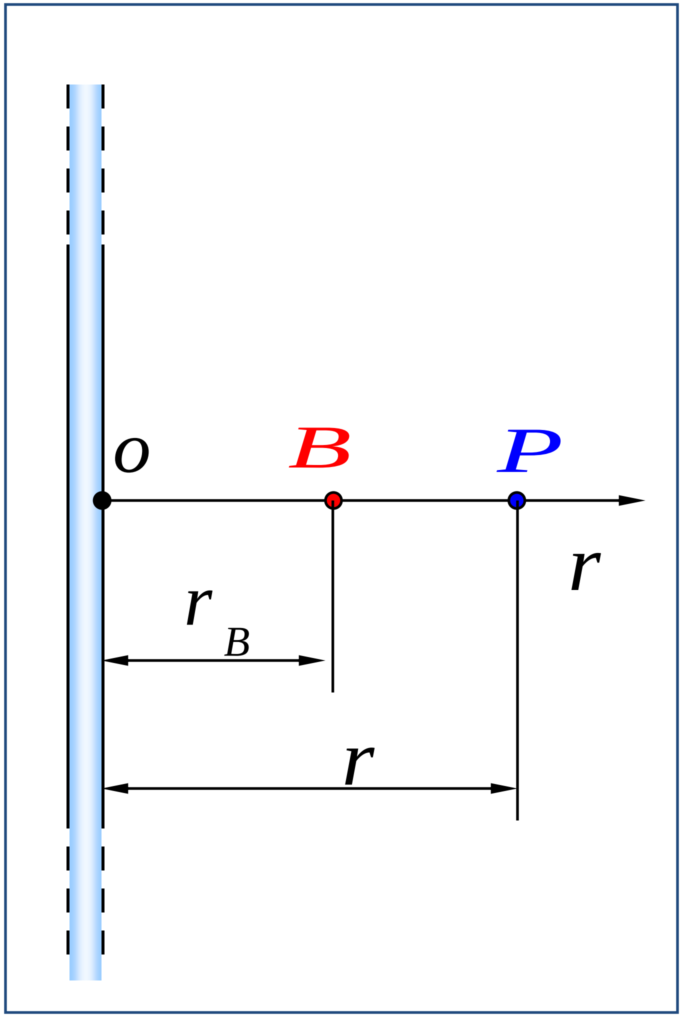
例2 “无限长”带电直导线的电势

解 $$V_P = \int_{AB} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + V_B$$

令 $$V_B = 0$$

$$V_P = \int_r^{r_B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{r_B} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_B}{r}$$

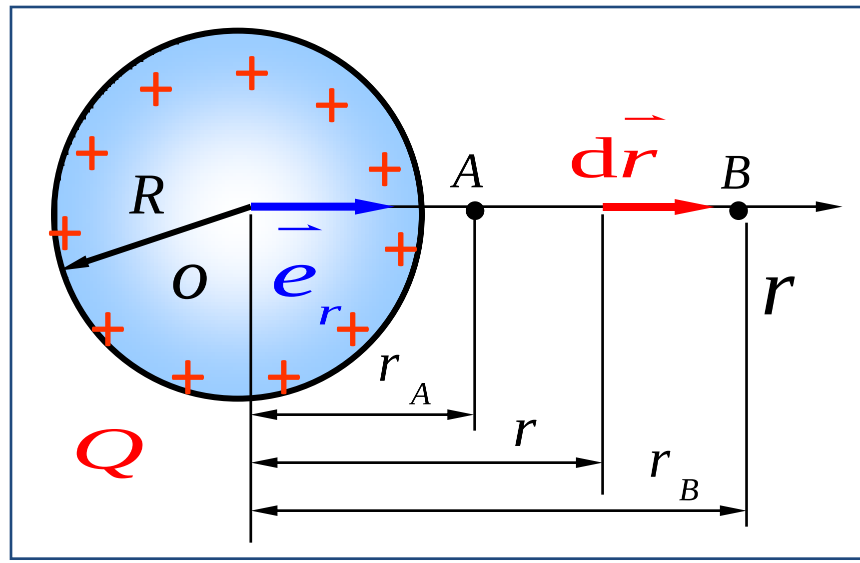


问：能否选 $V_\infty = 0$ ？

例3　均匀带电球壳的电势.

真空中，有一带电为 Q ，半径为 R 的带电球壳.

试求（1）球壳外两点间的电势差；（2）球壳内两点间的电势差；



解

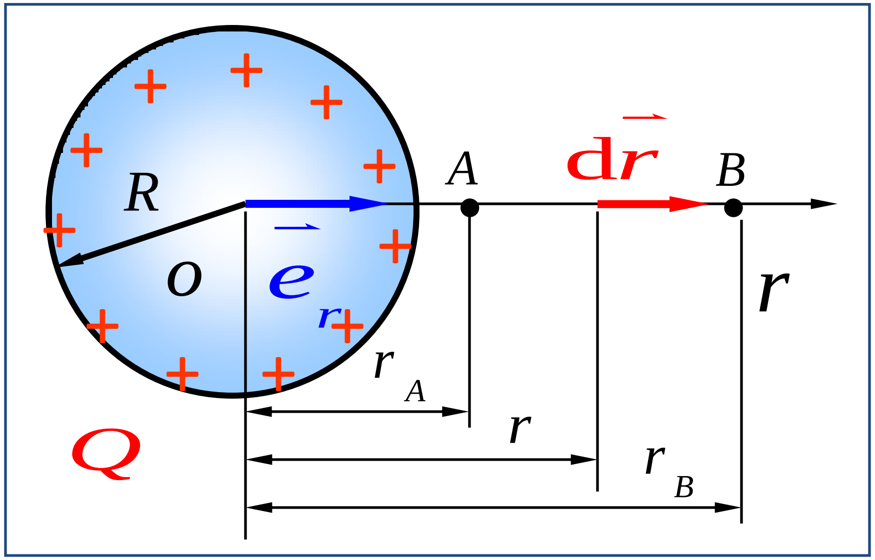
$$\begin{cases} r < R, & \vec{E}_1 = 0 \\ r > R, & \vec{E}_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \end{cases}$$

（1）$$V_A - V_B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn

求：（2）球壳内两点间的电势差；（3）球壳外任意点的电势；



（2） $r < R$

$$V_A - V_B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

（3） $r > R$

令 $r_B \to \infty$， $V_\infty = 0$

- 由 $V_A - V_B = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_A} - \dfrac{1}{r_B}\right)$ 可得 $V_{外}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

- 或 $V_{外}(r) = \int_r^\infty \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^\infty \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

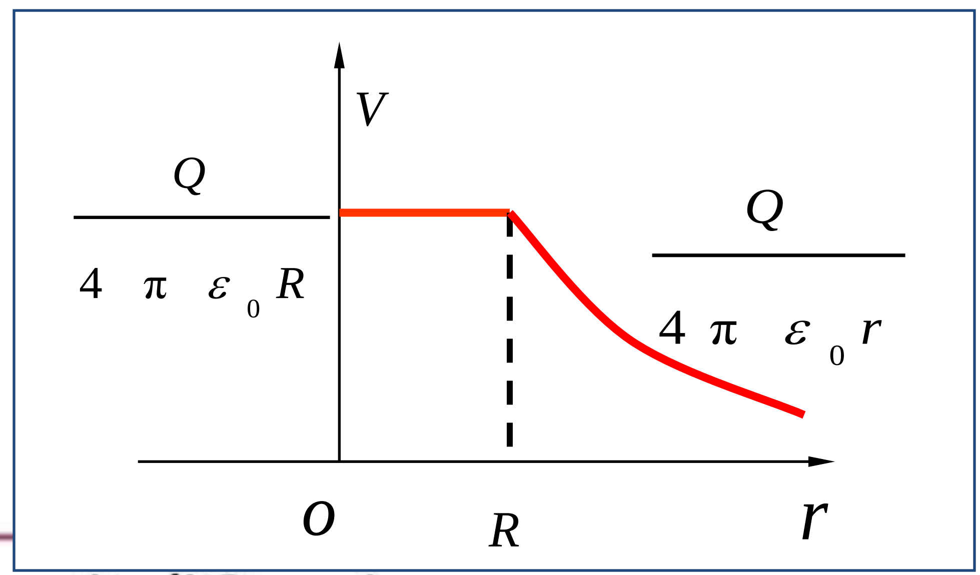
求：（4）球壳内任意点的电势.

（4）　$r < R$

◆ 由 $V_{外}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 可得 $V(R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = V_{内}$

◆ 或 $V_{内}(r) = \int_r^R \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$\begin{cases} V_{外}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ V_{内}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \end{cases}$$



郎晓丽　langxiaoli@semi.ac.cn

§9-7 电场强度和电势梯度

一 等势面（电势图示法）

空间电势相等的点连接起来所形成的面称为等势面．为了描述空间电势的分布，规定任意两相邻等势面间的电势差相等．

1. 在静电场中，电荷沿等势面移动时，电场力做功为0；

$$W_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0(V_a-V_b)=0$$

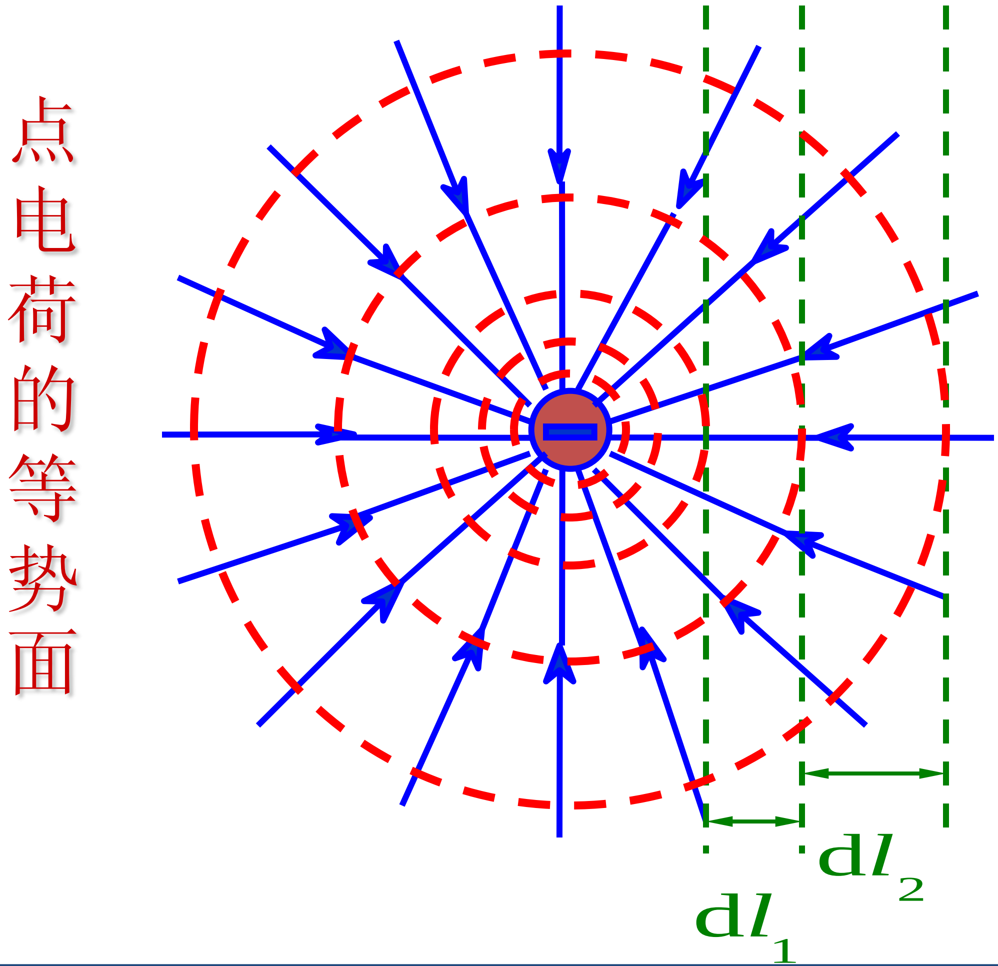
2. 在静电场中，电场强度 $\vec{E}$ 总是与等势面垂直的，即电场线是和等势面正交的曲线簇．

$$W_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

$$q_0\neq 0\qquad \vec{E}\neq 0\qquad \mathrm{d}\vec{l}\neq 0$$

$$\therefore\quad \vec{E}\perp\mathrm{d}\vec{l}$$

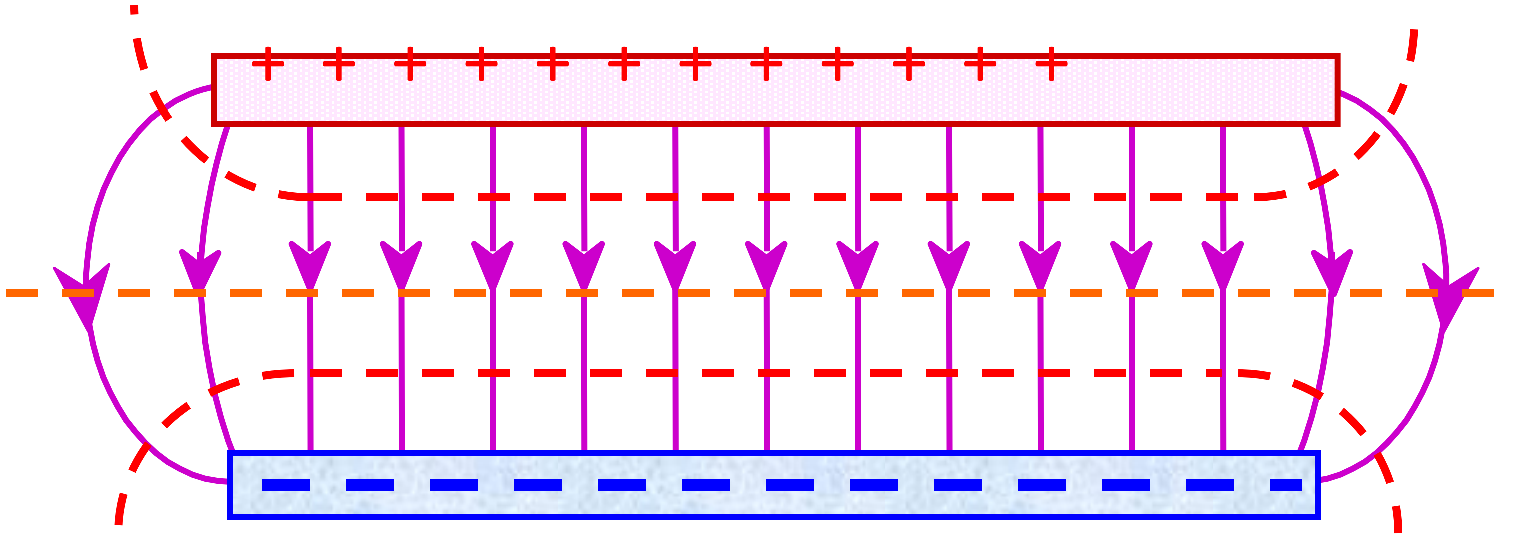
◈ 按规定，电场中任意两相邻等势面之间的电势差相等，即等势面的疏密程度同样可以表示场强的大小.



$$dl_2 > dl_1$$

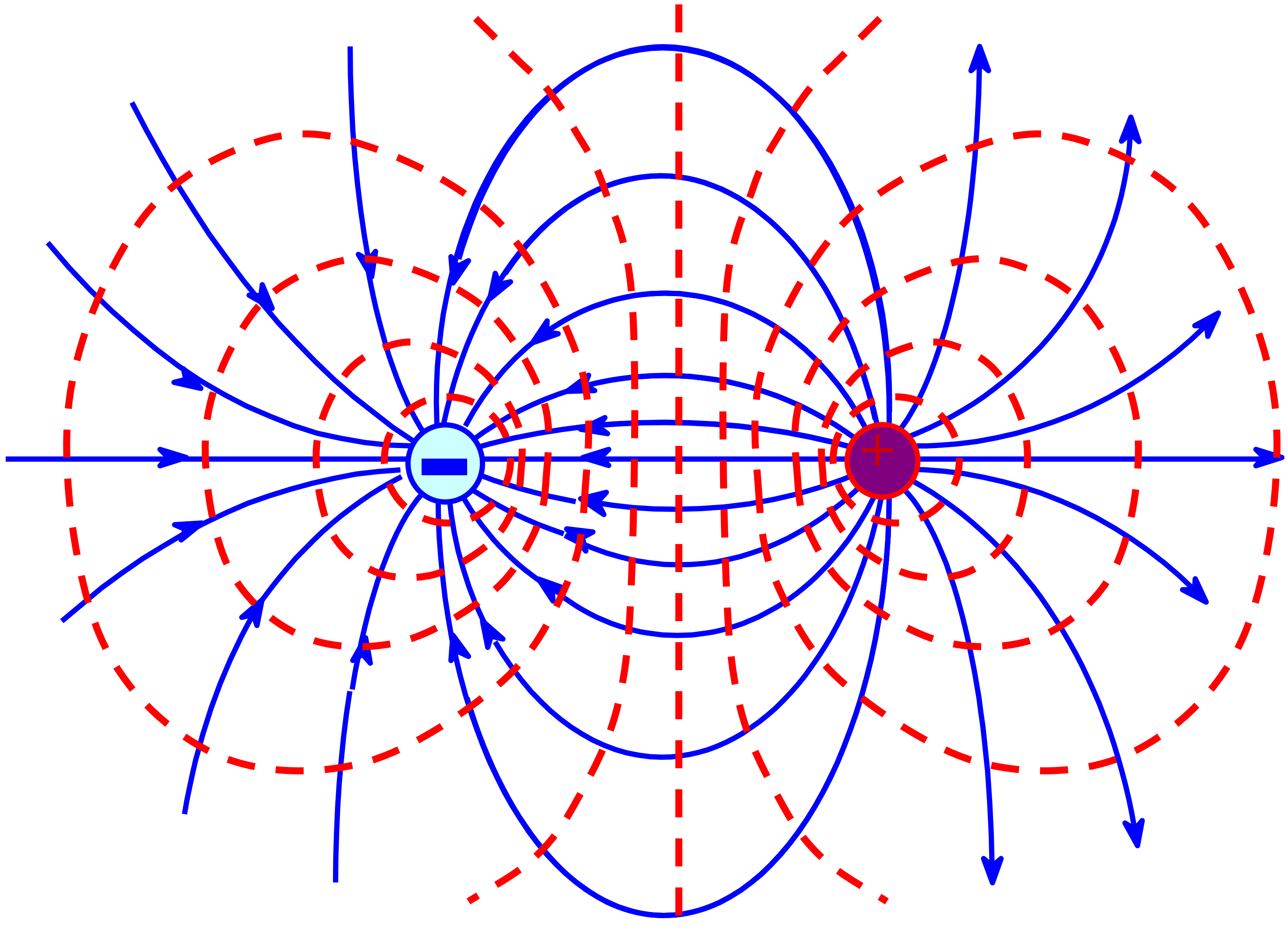
$$E_2 < E_1$$

两平行带电平板的电场线和等势面



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

一对等量异号点电荷的电场线和等势面



郎晓丽 langxiaoli@semi.ac.cn

二　电场强度与电势梯度

从A到B电场力所作的功：

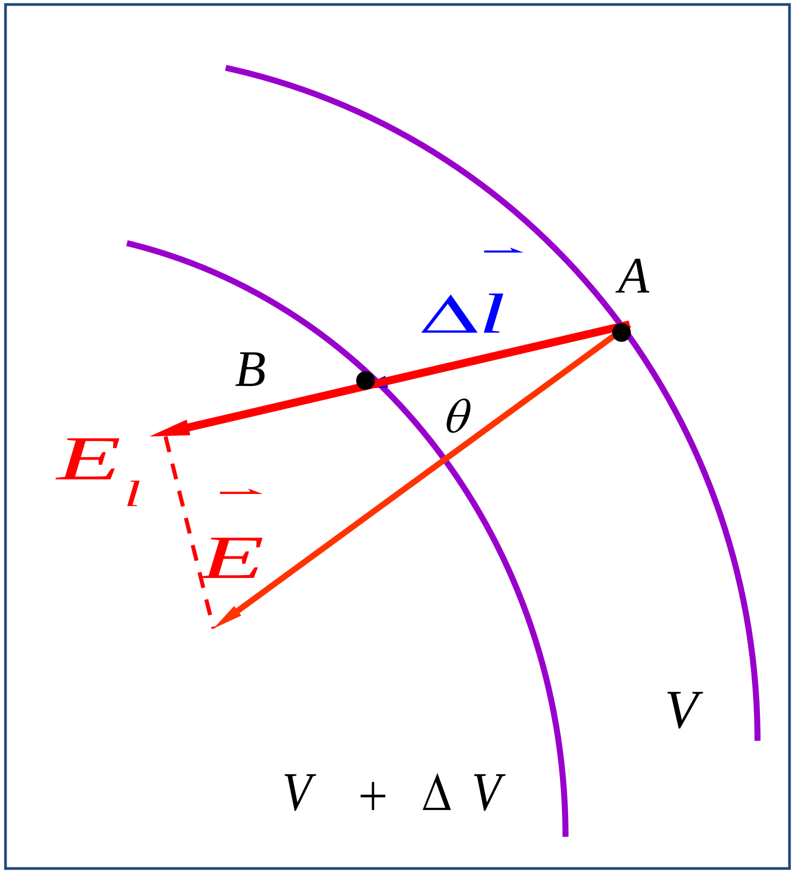
$$q\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}=qV_A-qV_B=q(-\Delta V)$$

$$\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}=-\Delta V$$

$$E\Delta l\cos\theta=-\Delta V$$

$$E\cos\theta=E_l$$

$$E_l=-\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta l}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}$$



电场中某一点的电场强度沿某一方向的分量，等于这一点的电势沿该方向单位长度上电势变化率的负值.

三　电场线和等势面的关系

1）电场线与等势面处处正交.

（等势面上移动电荷，电场力不做功.）

2）等势面密处电场强度大；等势面疏处电场强度小.

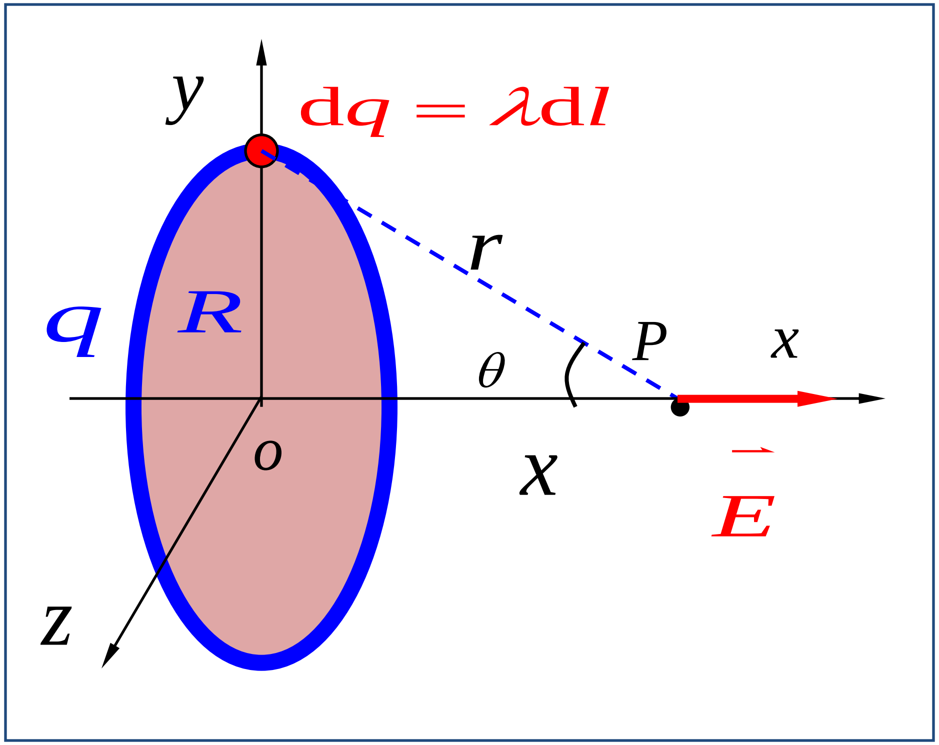
讨论

1）电场弱的地方电势低；电场强的地方电势高吗？

2）$V=0$ 的地方，$\vec{E}=0$ 吗？

3）$\vec{E}$ 相等的地方，V 一定相等吗？等势面上 $\vec{E}$ 一定相等吗？

例 求一均匀带电细圆环轴线上任一点的电场强度.



解 $\vec{E} = -\nabla V$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{1/2}}$$

$$E = E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{1/2}}\right] = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

作业:

1. 9-3;
2. 9-20，9-21，9-25。