谓词逻辑习题课

一、选择题

1. 谓词公式$\forall x(P(x)\vee\exists yR(y))\rightarrow Q(x)$中量词$\forall x$的辖域是（ ）C

A. $\forall x(P(x)\vee\exists yR(y))$　　B. $P(x)$

C. $(P(x)\vee\exists yR(y))$　　D. $P(x), Q(x)$

2. 谓词公式$\forall x(P(x)\vee\exists yR(y))\rightarrow Q(x)$中变元x是（ D ）

A. 自由变量　　B. 约束变量

C. 既不是自由变量也不是约束变量

D. 既是自由变量也是约束变量

3. 若个体域为整数域，下列公式中值为真的是（ A ）

A. $\forall x \exists y (x+y=0)$　　B. $\exists y \forall x (x+y=0)$

C. $\forall x \forall y (x+y=0)$　　D. $\neg \exists x \exists y (x+y=0)$

4. 设C(x):x是运动员，G(x):x是强壮的。命题“没有一个运动员不是强壮的”可符号化为（ C ）

A. $\neg \forall x (C(x) \wedge \neg G(x))$　　B. $\neg \forall x (C(x) \rightarrow \neg G(x))$

C. $\neg \exists x (C(x) \wedge \neg G(x))$　　D. $\neg \exists x (C(x) \rightarrow \neg G(x))$

5. 设A(x):x是人， B(x):x犯错误，命题“没有不犯错误的人”符号化为（ D ）

A. $\forall x(A(x) \wedge B(x))$

B. $\neg\exists x(A(x) \to \neg B(x))$

C. $\neg\exists x(A(x) \wedge B(x))$

D. $\neg\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$

6. 令F(x):x是火车， G(y):y是汽车，H(x, y):x比y快。则语句“某些汽车比所有的火车慢”可表示为（ B ）

A. $\exists y(G(y) \to \forall x(F(x) \wedge H(x, y)))$

B. $\exists y(G(y) \wedge \forall x(F(x) \to H(x, y)))$

C. $\forall x\exists y(G(y) \to (F(x) \wedge H(x, y)))$

D. $\exists y(G(y) \to \forall x(F(x) \to H(x, y)))$

7. 设个体域A={a, b}，公式$\forall xP(x)\wedge\exists xS(x)$在A中消去量词后应为（ B ）

A. $P(x)\wedge S(x)$　　B. $P(a)\wedge P(b)\wedge(S(a)\vee S(b))$

C. $P(a)\wedge S(b)$　　D. $P(a)\wedge P(b)\wedge S(a)\vee S(b)$

8. 在谓词演算中，下列各式（ B ）是正确的。

A. $\exists x\forall yA(x,y)\Leftrightarrow\forall y\exists xA(x,y)$

B. $\exists x\exists yA(x,y)\Leftrightarrow\exists y\exists xA(x,y)$

C. $\exists x\forall yA(x,y)\Leftrightarrow\forall x\exists yA(x,y)$

D. $\forall x\forall yA(x,y)\Leftrightarrow\forall y\forall xB(x,y)$

9. 下列各式不正确的是（ A ）

A. $\forall x(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$

B. $\forall x(P(x)\wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$

C. $\exists x(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x)\vee\exists xQ(x)$

D. $\forall x(P(x)\wedge Q)) \Leftrightarrow \forall xP(x)\wedge Q$

10. 下面谓词公式（ A ）是前束范式。

A. $\forall x\forall y\exists z(B(x,y)\rightarrow A(z))$

B. $\neg\forall x\exists yB(x,y)$

C. $\exists x\forall y\forall x(A(x,y)\wedge B(x,y))$

D. $\forall x(A(x,y)\rightarrow\exists yB(y))$

11. 公式$\forall xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)$ 的前束范式为（ C ）。

A. $\forall x\forall y(P(x)\rightarrow Q(y))$ B. $\forall x\exists y(P(x)\rightarrow Q(y))$

C. $\exists x\forall y(P(x)\rightarrow Q(y))$ D. $\exists x\exists y(P(x)\rightarrow Q(y))$

12. 在谓词演算中，$P(a)$是$\forall xP(x)$的有效结论，其理论根据是（ A ）

A. 全称指定规则（US） B. 全称推广规则（UG）

C. 存在指定规则（ES） D. 存在推广规则（EG）

13．若集合A的元素个数为10，则其幂集的元素个数为（ A ）．

A．1024　　B．10　　C．100　　D．1

二、填空题

1. 设O(x):x奇数， Z(x):x是整数，则语句“不是所有整数都是奇数”可符号化为（ $\neg\forall x((Z(x) \to O(x))$ ）

2. 设个体域为自然数集， P(x):x是奇数， Q(x):x是偶数，则命题“不存在既是奇数又是偶数的自然数”可符号化为（ $\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ ）

3. $\forall x\forall y(P(x,y)\wedge Q(y,z))\wedge\exists xP(x,y)$中$\forall x$的辖域为（ $\forall y(P(x,y)\wedge Q(y,z))$ ），$\forall y$的辖域为（ $(P(x,y)\wedge Q(y,z))$ ），$\exists x$的辖域为（ $P(x,y)$ ）

4. 公式$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x,y)\vee\exists zR(y,z))\rightarrow S(x)$中的自由变元为（ x,y ），约束变元为（ x,z ）。

5. 个体域为{1, 2}，命题$\forall x\exists y(x+y=4)$的真值为（ 0 ）。

6. 设个体域为A={a, b, c}，消去公式$\forall xP(x)\wedge\exists xQ(x)$中的量词，可得（）。$P(a)\wedge P(b)\wedge P(c)\wedge(Q(a)\vee Q(b)\vee Q(c))$

7. 下列谓词公式中，（ (1),(3) ）是等价的。

（1） $\neg(\exists xA(x))$与$\forall x\neg A(x)$

（2） $\forall x(A(x)\vee B(x))$与 $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$

（3） $\forall x(A(x)\wedge B(x))$与 $\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

（4） $\exists x\forall yD(x,y)$ 与$\forall y\exists xD(x,y)$

8. 给定下列公式：

(1) $(\neg\exists xF(x)\vee\forall yG(y))\wedge(F(u)\to\forall zH(z))$

(2) $\exists xF(y,x)\to\forall yG(y)$

(3) $\forall x(F(x,y)\to\forall yG(x,y))$

则（　　　　）是（1）的前束范式，

（　　　　）是（2）的前束范式；

（　　　　）是（3）的前束范式。

供选择的答案见下页

谓词逻辑习题课

供选择的答案有：

① $\exists x\forall y\forall z((\neg F(x)\vee G(y))\wedge(F(u)\rightarrow H(z)))$；

② $\forall x\forall y\forall z((\neg F(x)\vee G(y))\wedge(F(u)\rightarrow H(z)))$；

③ $\exists x\forall y(F(y,x)\rightarrow G(y))$；

④ $\forall x\forall y(F(z,x)\rightarrow G(y))$；

⑤ $\forall x\forall y(\neg F(z,x)\vee G(y))$；

⑥ $\forall x\exists y(F(x,z)\rightarrow G(x,y))$；

⑦ $\forall x\forall y(F(x,z)\rightarrow G(x,y))$；

⑧ $\forall y\forall x(F(x,z)\rightarrow G(x,y))$；

⑨ $\forall y\forall x(\neg F(x,z)\vee G(y))$；

（ 2 ）是（1）的前束范式，

（4,5,9）是（2）的前束范式；

（7,8）是（3）的前束范式

三、计算题

1. 设解释T为：个体域为D={-2, 3, 6}，谓词$F(x)$: $x \leqslant 3$，$G(x)$: $x>5$，$R(x)$: $x \leqslant 7$。根据解释T求下列各式的真值：

（1）$\forall x(F(x) \wedge G(x))$

（2）$\forall x(R(x) \rightarrow F(x)) \vee G(5)$

（3）$\exists x(F(x) \vee G(x))$

解

(1) 假。

(2) 假。

(3) 真。

2. 求谓词公式$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\rightarrow(\exists xF(x)\rightarrow\exists xG(x))$的前束范式

$$
\begin{aligned}
&\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\rightarrow(\exists xF(x)\rightarrow\exists xG(x))\\
\Leftrightarrow\ &\forall x(\neg F(x)\vee G(x))\rightarrow(\neg\exists xF(x)\vee\exists xG(x))\\
\Leftrightarrow\ &\neg\forall x(\neg F(x)\vee G(x))\vee(\neg\exists xF(x)\vee\exists xG(x))\\
\Leftrightarrow\ &\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))\vee\neg\exists xF(x)\vee\exists xG(x)\\
\Leftrightarrow\ &\exists x(F(x)\vee G(x))\vee\forall x\neg F(x)\\
\Leftrightarrow\ &\exists x(F(x)\vee G(x))\vee\forall y\neg F(y)\\
\Leftrightarrow\ &\exists x\forall y(F(x)\vee G(x)\vee\neg F(y))
\end{aligned}
$$

五、证明题

1. 证明$\forall x \forall y (P(x) \to Q(y)) \Leftrightarrow \exists x P(x) \to \forall y Q(y)$

证：$\forall x \forall y (P(x) \to Q(y))$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg P(x) \vee Q(y))$

$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \forall y Q(y))$

$\Leftrightarrow \forall x \neg P(x) \vee \forall y Q(y))$

$\Leftrightarrow \neg \exists x P(x) \vee \forall y Q(y)$

$\Leftrightarrow \exists x P(x) \to \forall y Q(y)$

2. 指出下列推理中的错误：

1).

(1) $\forall x F(x) \rightarrow G(x)$　　前提引入

(2) $F(y) \rightarrow G(y)$　　(1) US

(2) 错。使用US, UG, ES, EG规则应针对前速范式。

2).

(1) $\forall x(F(x) \vee G(x))$　　前提引入

(2) $F(a) \vee G(b)$　　(1) US

(2) 错。使用US规则时应替换成同一个体常元。

谓词逻辑习题课

3).

(1) $F(x)\rightarrow G(c)$ 前提引入

(2) $\exists x(F(x)\rightarrow G(x))$ (1)EG

(2)错。(1)公式含个体变元x，不能使用EG规则

4).

(1) $F(a)\rightarrow G(b)$ 前提引入

(2) $\exists x(F(x)\rightarrow G(x))$ (1)EG

(2)错。(1)公式含有两个不同的个体常元，不能使用EG规则

5).

(1) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$　　P

(2) $\exists y(H(y)\wedge R(y))$　　P

(3) $F(c)\wedge G(c)$　　T（1）ES

(4) $F(c)$　　T（3）化简

(5) $H(c)\wedge R(c)$　　T（2）ES

(6) $H(c)$　　T（5）化简

(7) $F(c)\wedge H(c)$　　T（4）（6）合取

(8) $\exists x(F(x)\wedge H(x))$　　T（7）EG

(5) 错。对 (1) 公式使用ES规则得$F(c)\wedge G(c)$，此c应使$F(c)\wedge G(c)$为真，但不一定使$H(c)\wedge R(c)$ 为真。

3. 设A(x)，B(x)均为含有自由变元x的任意谓词公式，

证明： $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

证： $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \rightarrow(\forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x))$

$\Leftrightarrow\forall x(\neg A(x)\vee B(x)) \rightarrow(\neg\forall xA(x)\vee\forall xB(x))$

$\Leftrightarrow\neg\forall x(\neg A(x)\vee B(x)) \vee(\neg\forall xA(x)\vee\forall xB(x))$

$\Leftrightarrow(\neg\forall x(\neg A(x)\vee B(x)) \vee\neg\forall xA(x))\vee\forall xB(x)$ 结合律

$\Leftrightarrow\neg(\forall x(\neg A(x)\vee B(x)) \wedge \forall xA(x))\vee\forall xB(x)$ 德摩根

$\Leftrightarrow\neg(\forall x((\neg A(x)\vee B(x)) \wedge A(x)))\vee\forall xB(x)$ 量词分配律

$\Leftrightarrow\neg(\forall x((\neg A(x)\wedge A(x))\vee(A(x)\wedge B(x))))\vee\forall xB(x)$ 分配律

$\Leftrightarrow\neg(\forall x(A(x)\wedge B(x)))\vee\forall xB(x)$ 分配律

$\Leftrightarrow\neg(\forall xA(x)\wedge\forall xB(x))\vee\forall xB(x)$

$\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\neg\forall xB(x)\vee\forall xB(x)$ 德摩根

$\Leftrightarrow 1$