一、选择题

1. 谓词公式$\forall x(P(x)\vee\exists yR(y))\rightarrow Q(x)$中量词$\forall x$的辖域是（ ）C

A. $\forall x(P(x)\vee\exists yR(y))$ B. $P(x)$

C. $(P(x)\vee\exists yR(y))$ D. $P(x), Q(x)$

2. 谓词公式$\forall x(P(x)\vee\exists yR(y))\rightarrow Q(x)$中变元x是（ D ）

A. 自由变量 B. 约束变量

C. 既不是自由变量也不是约束变量

D. 既是自由变量也是约束变量

3. 若个体域为整数域，下列公式中值为真的是（ A ）

A. $\forall x \exists y (x+y=0)$　　B. $\exists y \forall x (x+y=0)$

C. $\forall x \forall y (x+y=0)$　　D. $\neg \exists x \exists y (x+y=0)$

4. 设C(x):x是运动员，G(x):x是强壮的。命题“没有一个运动员不是强壮的”可符号化为（ C ）

A. $\neg \forall x (C(x) \wedge \neg G(x))$　　B. $\neg \forall x (C(x) \rightarrow \neg G(x))$

C. $\neg \exists x (C(x) \wedge \neg G(x))$　　D. $\neg \exists x (C(x) \rightarrow \neg G(x))$

5. 设A(x):x是人， B(x):x犯错误，命题“没有不犯错误的人”符号化为（ D ）

A. $\forall x(A(x) \land B(x))$　　B. $\neg\exists x(A(x) \to \neg B(x))$

C. $\neg\exists x(A(x) \land B(x))$　　D. $\neg\exists x(A(x) \land \neg B(x))$

6. 令F(x):x是火车， G(y):y是汽车，H(x,y):x比y快。则语句“某些汽车比所有的火车慢”可表示为（ B ）

A. $\exists y(G(y) \to \forall x(F(x) \land H(x,y)))$

B. $\exists y(G(y) \land \forall x(F(x) \to H(x,y)))$

C. $\forall x\exists y(G(y) \to (F(x) \land H(x,y)))$

D. $\exists y(G(y) \to \forall x(F(x) \to H(x,y)))$

7. 设个体域A={a, b}，公式$\forall xP(x)\wedge\exists xS(x)$在A中消去量词后应为（ B ）

A. $P(x)\wedge S(x)$ B. $P(a)\wedge P(b)\wedge(S(a)\vee S(b))$

C. $P(a)\wedge S(b)$ D. $P(a)\wedge P(b)\wedge S(a)\vee S(b)$

8. 在谓词演算中，下列各式（ B ）是正确的。

A. $\exists x\forall yA(x, y) \Leftrightarrow \forall y\exists xA(x, y)$

B. $\exists x\exists yA(x, y) \Leftrightarrow \exists y\exists xA(x, y)$

C. $\exists x\forall yA(x, y) \Leftrightarrow \forall x\exists yA(x, y)$

D. $\forall x\forall yA(x, y) \Leftrightarrow \forall y\forall xB(x, y)$

9. 下列各式不正确的是（ A ）

A. $\forall x(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$

B. $\forall x(P(x)\wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$

C. $\exists x(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x)\vee\exists xQ(x)$

D. $\forall x(P(x)\wedge Q)) \Leftrightarrow \forall xP(x)\wedge Q$

10. 下面谓词公式（ A ）是前束范式。

A. $\forall x\forall y\exists z(B(x, y)\rightarrow A(z))$

B. $\neg\forall x\exists yB(x, y)$

C. $\exists x\forall y\forall x(A(x, y)\wedge B(x, y))$

D. $\forall x(A(x, y)\rightarrow\exists yB(y))$

11. 公式$\forall xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)$ 的前束范式为（ C ）。

A. $\forall x\forall y(P(x)\rightarrow Q(y))$　　B. $\forall x\exists y(P(x)\rightarrow Q(y))$

C. $\exists x\forall y(P(x)\rightarrow Q(y))$　　D. $\exists x\exists y(P(x)\rightarrow Q(y))$

12. 在谓词演算中，$P(a)$是$\forall xP(x)$的有效结论，其理论根据是（ A ）

A. 全称指定规则（US）　　B. 全称推广规则（UG）

C. 存在指定规则（ES）　　D. 存在推广规则（EG）

13．若集合$A=\{a, b\}$，$B=\{a, b, \{a, b\}\}$，则（ A ）.

A．$A\subset B$，且$A\in B$　　B．$A\in B$，但$A\not\subset B$

C．$A\subset B$，但$A\notin B$　　D．$A\not\subset B$，且$A\notin B$

14．若集合$A=\{2, a, \{a\}, 4\}$，则下列表述正确的是(B).

A．$\{a, \{a\}\}\in A$　　B．$\{a\}\subseteq A$

C．$\{2\}\in A$　　D．$\varnothing\in A$

15．若集合$A=\{a, \{a\}, \{1, 2\}\}$，则下列表述正确的是(C)
.

A．$\{a, \{a\}\}\in A$　　B．$\{2\}\subseteq A$

C．$\{a\}\subseteq A$　　D．$\varnothing\in A$

16．设集合$A = \{1, a\}$，则$P(A) = ($ C $)$.

A．$\{\{1\}, \{a\}\}$　　B．$\{\varnothing, \{1\}, \{a\}\}$

C．$\{\varnothing, \{1\}, \{a\}, \{1, a\}\}$　　D．$\{\{1\}, \{a\}, \{1, a\}\}$

17．若集合A的元素个数为10，则其幂集的元素个数为（ A ）.

A．1024　　B．10　　C．100　　D．1

二、填空题

1. 设O(x):x奇数， Z(x):x是整数，则语句“不是所有整数都是奇数”可符号化为（ $\neg\forall x((Z(x)\rightarrow O(x))$ ）

2. 设个体域为自然数集， P(x):x是奇数， Q(x):x是偶数，则命题“不存在既是奇数又是偶数的自然数”可符号化为（ $\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ ）

3. $\forall x\forall y(P(x,y)\wedge Q(y,z))\wedge\exists xP(x,y)$中$\forall x$的辖域为（ $\forall y(P(x,y)\wedge Q(y,z))$ ），$\forall y$的辖域为（ $(P(x,y)\wedge Q(y,z))$ ），$\exists x$的辖域为（ $P(x,y)$ ）

4. 公式$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x,y)\vee\exists zR(y,z))\rightarrow S(x)$中的自由变元为（ x,y ），约束变元为（ x,z ）。

5. 个体域为{1, 2}，命题$\forall x\exists y(x+y=4)$的真值为（ 0 ）。

6. 设个体域为A={a, b, c}，消去公式$\forall xP(x)\wedge\exists xQ(x)$中的量词，可得（）。$P(a)\wedge P(b)\wedge P(c)\wedge(Q(a)\vee Q(b)\vee Q(c))$

7. 下列谓词公式中，（ (1),(3) ）是等价的。

(1) $\neg(\exists xA(x))$与$\forall x\neg A(x)$

(2) $\forall x(A(x)\vee B(x))$与 $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$

(3) $\forall x(A(x)\wedge B(x))$与 $\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

(4) $\exists x\forall yD(x,y)$ 与$\forall y\exists xD(x,y)$

8. 给定下列公式：

(1) $(\neg\exists xF(x)\vee\forall yG(y))\wedge(F(u)\rightarrow\forall zH(z))$

(2) $\exists xF(y,x)\rightarrow\forall yG(y)$

(3) $\forall x(F(x,y)\rightarrow\forall yG(x,y))$

则（　　　）是（1）的前束范式，

（　　　）是（2）的前束范式；

（　　　）是（3）的前束范式。

供选择的答案见下页

供选择的答案有：

① $\exists x \forall y \forall z((\neg F(x) \vee G(y)) \wedge (F(u) \rightarrow H(z)))$；

② $\forall x \forall y \forall z((\neg F(x) \vee G(y)) \wedge (F(u) \rightarrow H(z)))$；

③ $\exists x \forall y(F(y, x) \rightarrow G(y))$；

④ $\forall x \forall y(F(z, x) \rightarrow G(y))$；

⑤ $\forall x \forall y(\neg F(z, x) \vee G(y))$；

⑥ $\forall x \exists y(F(x, z) \rightarrow G(x, y))$；

⑦ $\forall x \forall y(F(x, z) \rightarrow G(x, y))$；

⑧ $\forall y \forall x(F(x, z) \rightarrow G(x, y))$；

⑨ $\forall y \forall x(\neg F(x, z) \vee G(y))$；

（ 2 ）是（1）的前束范式，

（4,5,9）是（2）的前束范式；

（7,8）是（3）的前束范式

9. 设集合 $A=\{a, b, c, d, e\}$，$B=\{b, d, e\}$，$C=\{a, b, d\}$，$(A-B)\oplus(B\cup C)=$ $\underline{\{b, c, d, e\}}$ 。

10. 化简集合表达式

$(((A\cup B)\cap B)-(C\cup B))\cup(((A\cup B)\cap\sim B)\cup A)$ = A

三、计算题

1. 设解释T为：个体域为D={-2, 3, 6}，谓词F(x)：$x \leqslant 3$，G(x)：$x>5$，R(x)：$x \leqslant 7$。根据解释T求下列各式的真值：

（1）$\forall x(F(x) \land G(x))$

（2）$\forall x(R(x) \to F(x)) \lor G(5)$

（3）$\exists x(F(x) \lor G(x))$

解

(1) 假。

(2) 假。

(3) 真。

2. 求谓词公式$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\rightarrow(\exists xF(x)\rightarrow\exists xG(x))$的前束范式

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\rightarrow(\exists xF(x)\rightarrow\exists xG(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg F(x)\vee G(x))\rightarrow(\neg\exists xF(x)\vee\exists xG(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg\forall x(\neg F(x)\vee G(x))\vee(\neg\exists xF(x)\vee\exists xG(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x(F(x)\wedge\neg G(x))\vee\neg\exists xF(x)\vee\exists xG(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(F(x)\vee G(x))\vee\forall x\neg F(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(F(x)\vee G(x))\vee\forall y\neg F(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\forall y(F(x)\vee G(x)\vee\neg F(y))$$

3．设集合A＝{a, b, c}，B={b, d, e}，求

（1）B∩A；（2）A∪B；（3）A－B；（4）B⊕A.

解：（1）B∩A={a, b, c}∩{b, d, e}={ b }

（2）A∪B={a, b, c}∪{b, d, e}={a, b, c, d, e }

（3）A－B={a, b, c}－{b, d, e}={a, c}

（4）B⊕A= A∪B－B∩A={a, b, c, d, e }－{ b }={a, c, d, e }

4. 设A={{a, b}, 1, 2}, B={ a, b, {1}, 1}, 试计算

(1) (A–B) (2) (A∪B) (3) (A∪B) – (A∩B).

解: (1) (A–B) ={{a, b}, 2}

(2) (A∪B) ={{a, b}, 1, 2, a, b, {1}}

(3) (A∪B) – (A∩B) ={{a, b}, 2, a, b, {1}}

5．设集合A={{1},{2},1,2}，B={1,2,{1,2}}，试计算

（1）（A−B）；（2）（A∩B）；（3）A×B.

解：（1）A−B ={{1},{2}}

（2）A∩B ={1,2}

（3）$A\times B=\{\langle\{1\},1\rangle, \langle\{1\},2\rangle, \langle\{1\},\{1,2\}\rangle, \langle\{2\},1\rangle, \langle\{2\},2\rangle, \langle\{2\},\{1,2\}\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,\{1,2\}\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,\{1,2\}\rangle\}$

6. 写出下列集合的子集：

(1) $A=\{a, \{b\}, c\}$；

(2) $B=\{\varnothing\}$；

(3) $C=\varnothing$

解 (1) $P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{\{b\}\}, \{c\}, \{a, \{b\}\}, \{\{b\},c\}, \{a, c\}, \{a, \{b\}, c\}\}$

(2) $P(B)=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

(3) $P(C)=\{\varnothing\}$

四、判断题

已知S＝{2, a, {3}, 4}，R={{a}, 3, 4, 1}，判断下列各题是否正确：.

(1) $\{a\} \in S$; ×

(2) $\{a\} \in R$; √

(3) $\{a, 4, \{3\}\} \subseteq S$; √

(4) $\{\{a\}, 1, 3, 4\} \subseteq R$; √

(5) $R=S$; ×

(6) $\{a\} \subseteq S$ √

(7) $\{a\} \subseteq R$ ×

(8) $\varnothing \subset R$ √

(9) $\varnothing \subseteq \{\{a\}\} \subseteq R$ √

(10) $\{\varnothing\} \subseteq S$ ×

(11) $\varnothing \in R$ ×

(12) $\varnothing \subseteq \{\{3\}, 4\}$ √

五、证明题

1. 证明$\forall x\forall y(P(x)\rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow \exists xP(x)\rightarrow\forall yQ(y)$

证：$\forall x\forall y(P(x)\rightarrow Q(y))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(\neg P(x)\vee Q(y))$

$\Leftrightarrow\forall x(\neg P(x)\vee\forall yQ(y))$

$\Leftrightarrow\forall x\neg P(x)\vee\forall yQ(y))$

$\Leftrightarrow\neg\exists xP(x)\vee\forall yQ(y)$

$\Leftrightarrow\exists xP(x)\rightarrow\forall yQ(y)$

2. 指出下列推理中的错误：

1).

(1) $\forall xF(x) \rightarrow G(x)$　　前提引入

(2) $F(y) \rightarrow G(y)$　　(1) US

(2) 错。使用US, UG, ES, EG规则应针对前速范式。

2).

(1) $\forall x(F(x) \vee G(x))$　　前提引入

(2) $F(a) \vee G(b)$　　(1) US

(2) 错。使用US规则时应替换成同一个体常元。

3).

(1) $F(x) \rightarrow G(c)$ 前提引入

(2) $\exists x(F(x) \rightarrow G(x))$ (1) EG

(2)错。(1)公式含个体变元x，不能使用EG规则

4).

(1) $F(a) \rightarrow G(b)$ 前提引入

(2) $\exists x(F(x) \rightarrow G(x))$ (1) EG

(2)错。(1)公式含有两个不同的个体常元，不能使用EG规则

5).

(1) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$	P
(2) $\exists y(H(y)\wedge R(y))$	P
(3) $F(c)\wedge G(c)$	T（1）ES
(4) $F(c)$	T（3）化简
(5) $H(c)\wedge R(c)$	T（2）ES
(6) $H(c)$	T（5）化简
(7) $F(c)\wedge H(c)$	T（4）（6）合取
(8) $\exists x(F(x)\wedge H(x))$	T（7）EG

(5)错。对(1)公式使用ES规则得$F(c)\wedge G(c)$，此c应使$F(c)\wedge G(c)$为真，但不一定使$H(c)\wedge R(c)$为真。

3．试证明集合等式：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

证明：对于任意的x,

$$x\in A\cup(B\cap C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A \vee x\in(B\cap C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B) \wedge (x\in A \vee x\in C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A \cup B) \wedge (x\in A\cup C)$$

$$\Leftrightarrow x\in(A \cup B) \cap (A\cup C)$$

$$\therefore A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

4.证明等式：$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$.

证明：对于任意的$<x, y>$,

$$<x, y>\in (B\cup C)\times A$$
$$\Leftrightarrow x\in B\cup C \wedge y\in A$$
$$\Leftrightarrow (x\in B \vee x\in C) \wedge y\in A$$
$$\Leftrightarrow (x\in B \wedge y\in A) \vee (x\in C \wedge y\in A)$$
$$\Leftrightarrow <x, y>\in B\times A \vee <x, y>\in C\times A$$
$$\Leftrightarrow <x, y>\in (B\times A)\cup(C\times A)$$
$$\therefore (B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

5. 设A(x)，B(x)均为含有自由变元x的任意谓词公式，

证明：$\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

证： $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \rightarrow(\forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x))$

$\Leftrightarrow\forall x(\neg A(x)\vee B(x)) \rightarrow(\neg\forall xA(x)\vee\forall xB(x))$

$\Leftrightarrow\neg\forall x(\neg A(x)\vee B(x)) \vee(\neg\forall xA(x)\vee\forall xB(x))$

$\Leftrightarrow(\neg\forall x(\neg A(x)\vee B(x)) \vee\neg\forall xA(x))\vee\forall xB(x)$ 结合律

$\Leftrightarrow\neg(\forall x(\neg A(x)\vee B(x)) \wedge \forall xA(x))\vee\forall xB(x)$ 德摩根

$\Leftrightarrow\neg(\forall x((\neg A(x)\vee B(x)) \wedge A(x)))\vee\forall xB(x)$ 量词分配律

$\Leftrightarrow\neg(\forall x((\neg A(x)\wedge A(x))\vee(A(x)\wedge B(x))))\vee\forall xB(x)$ 分配律

$\Leftrightarrow\neg(\forall x(A(x)\wedge B(x)))\vee\forall xB(x)$ 分配律

$\Leftrightarrow\neg(\forall xA(x)\wedge\forall xB(x))\vee\forall xB(x)$

$\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\neg\forall xB(x)\vee\forall xB(x)$ 德摩根

$\Leftrightarrow 1$