《线性代数》

第五章 向量空间理论

§ 5.6 线性方程组的解理论 & 矩阵的四个基本子空间

2019秋

杨晶 主讲

回顾：线性方程组的不同表示形式

(1) 普通形式:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(2) 矩阵形式: $A\vec{X} = \vec{b}$, 其中 $A = (a_{ij})_{m\times n}, \vec{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$,

$\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$.

(3) 向量形式: $x_1\vec{\alpha}_1 + x_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + x_n\vec{\alpha}_n = \vec{b}$, 其中

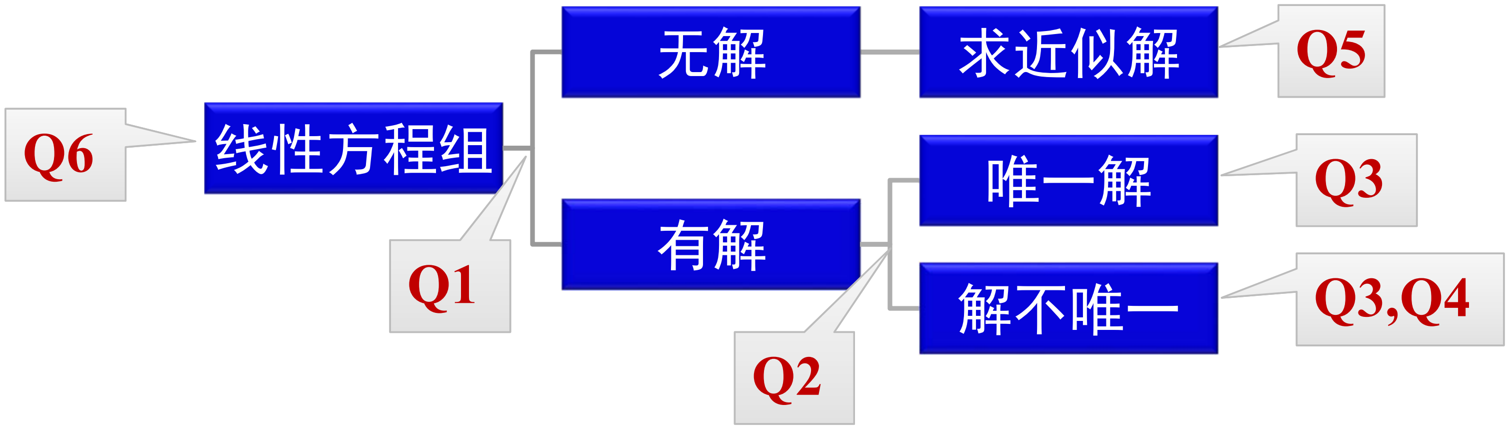
$\vec{\alpha}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T, \vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

回顾：线性方程组的几个基本问题

Q1. 解的存在问题
Q2. 解的个数问题
Q3. 解的求解问题

} Gauss消元法

Q4. 解的结构问题
Q5. 解的近似问题
Q6. 对应的几何问题



本章问题的引入：

$\left.\begin{array}{l}\text{Q1. 解的存在问题}\\ \text{Q2. 解的个数问题}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow$ 秩

$\left.\begin{array}{l}\text{Q3. 解的求解问题}\\ \text{Q4. 解的结构问题}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow$ 向量空间

- Gauss消元法只能对具体的每个系数矩阵展开计算，能否对前两个问题，给出更加本质的回答？
- 秩是向量组和矩阵的数量本质，而线性方程组与向量组的线性相关性，以及与矩阵都有密切联系，这启发我们用秩的观点来重新考虑线性方程组的前两个问题.
- 此外，利用向量空间的理论，我们还会详细分析线性方程组的解的结构，即给出Q4的回答；并进一步给出线性方程组清晰明确的一般求解方法，即对Q3给出明确的解答步骤.
- 我们将分别讨论齐次与非齐次线性方程组.

内容提要

- 齐次线性方程组的解(零)空间与基础解系
- 齐次线性方程组的求解步骤
- 非齐次线性方程组的解的结构
- 非齐次线性方程组的求解步骤
- 矩阵的四个子空间及其性质

一、齐次线性方程组解的判定法则

齐次线性方程组一定有(零)解, 下用线性方程组的**矩阵形式**和**向量形式**来表示，并加以考虑.

设 $A \in M_{m\times n}$, 且 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $\vec{\alpha}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^T$, $j=1,2,\cdots,n$.

则 $A\vec{X}=\vec{0}$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ $x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+\ldots+x_n\vec{\alpha}_n=\vec{0}$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ A 的列向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_n$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_n)<n$ (A不是列满秩矩阵)

判则: $A\vec{X}=\vec{0}$ 有非零解 (无穷多解) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(A)<n$ (非列满秩);

$A\vec{X}=\vec{0}$ 只有零解 (唯一解) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(A)=n$ (列满秩).

二、齐次线性方程组的解空间与基础解系

在齐次线性方程组有非零解的情况下，它的解集合有什么性质？

设齐次线性方程组 $A_{m\times n}\vec{X}=\vec{0}$ 的解集合为N(A), 下面来讨论N(A).

1. N(A)中每一个元素为齐次线性方程组的一个解，是一个n维向量,
   即 $\mathrm{N}(A)\subseteq \mathbb{R}^n$, 且$\vec{0}\in\mathrm{N}(A)$, 即$\mathrm{N}(A)\neq\Phi$.

$\mathbb{R}^n$非空子集

2. 设 $\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2\in\mathrm{N}(A)$, 即$\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2$是 $A\vec{X}=\vec{0}$的解，于是 $A\vec{\eta}_1=\vec{0}$, $A\vec{\eta}_2=\vec{0}$,
   $\Rightarrow\ A(\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2)=A\vec{\eta}_1+A\vec{\eta}_2=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$
   $\Rightarrow \vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2$ 也是 $A\vec{X}=\vec{0}$的解 $\Rightarrow\ \vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2\in\mathrm{N}(A)$.

加法封闭

3. 设$\vec{\eta}\in\mathrm{N}(A)$, 即 $A\vec{\eta}=\vec{0}$, $\Rightarrow\forall k\in\mathbb{R}$, $A(k\vec{\eta})=k(A\vec{\eta})=\vec{0}$
   $\Rightarrow\forall k\in\mathbb{R}$, $k\vec{\eta}\in\mathrm{N}(A)$.

数乘封闭

回顾： 在$\mathbb{R}^n$中对于线性运算 (加法、数乘) 封闭的子集合 —— 子空间.

$\mathbb{R}^n$的子空间的极大线性无关组 —— 基.

$\mathbb{R}^n$的子空间的数量本质 —— 维数.

定理1 齐次线性方程组 $A_{m\times n}\vec{X}=\vec{0}$ 的解集合为N(A)是$\mathbb{R}^n$中的子空间.

定义1 解集N(A)称为齐次线性方程组 $A_{m\times n}\vec{X}=\vec{0}$ 的**解空间**或**零空间**(null space)；N(A)的一组基称为齐次线性方程组 $A_{m\times n}\vec{X}=\vec{0}$ 的一组**基础解系**(fundamental system of solutions).

设$\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\cdots,\vec{\eta}_t$是一组基础解系, 则$A_{m\times n}\vec{X}=\vec{0}$ 的任何一个解均可表为：

$$\vec{\eta}=c_1\vec{\eta}_1+c_2\vec{\eta}_2+\cdots+c_t\vec{\eta}_t,$$

其中$c_1, c_2, \ldots, c_t$为任意实数，上述形式的解称为齐次线性方程组$A_{m\times n}\vec{X}=\vec{0}$的**一般解**或**通解**.

由上讨论知：

- 齐次线性方程组的关键问题就是就是求通解， 而求通解的关键问题就是**求出基础解系**.
- 基础解系不是唯一的，但其包含向量个数是确定的. 于是，齐次线性方程组的另一个关键问题就是**决定N(A)的维数**，即**dim N(A).**

定理2 设A是 $m\times n$ 矩阵， $\mathrm{r}(A)=r\le n$, 则齐次线性方程组$A\vec{X}=\vec{0}$的基础解系含有 $n-r$ 个解向量，即dim N(A)= $n-r$.

分析： 第(1)步 求出$n-r$个线性无关的解；

第(2)步验证任意解均可由这$n-r$ 个解线性表出.

与此同时，希望得到求出一组较简单的基础解系的方法.

证明：在第三章中，我们已讨论了用Gauss消元法求解线性方程组的方法。下面把这一过程再明确化和严格化. 首先，用Gauss消元法把系数矩阵A化为简化阶梯形矩阵C (为方便表示，不妨设主元素在前r列)

主元

$$A \to C = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \boxed{1} & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{1} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{第}1\text{列} & \text{第}2\text{列} & \cdots & \text{第}r\text{列} & \text{第}r+1\text{列} & \cdots & \text{第}n\text{列} \end{array}$$

主变量　　取负号

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n \end{cases}$$

自由变量

上述解也可以表示为：

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{1n}k_n \\ x_2 = -c_{2,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{2n}k_n \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_r = -c_{r,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{rn}k_n \\ x_{r+1} = k_{r+1} \\ \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = k_n \end{cases}$$

其中, $k_{r+1}, k_{r+2}, \ldots, k_n$ 为 $n-r$ 个任意实数.

进一步表示为向量的形式：

$$\underline{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} = k_{r+1}\underline{\begin{bmatrix} -c_{1,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} + k_{r+2}\underline{\begin{bmatrix} -c_{1,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} + \cdots + k_n\underline{\begin{bmatrix} -c_{1n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}$$

简记为 $\boxed{\vec{\eta}} = k_{r+1}\boxed{\vec{\eta}_1} + k_{r+2}\boxed{\vec{\eta}_2} + \cdots + k_n\boxed{\vec{\eta}_{n-r}}$,

下面证明：$\{\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\cdots\vec{\eta}_{n-r}\}$为一组基础解系.

首先说明 $\vec{\eta}_i$ $(1\le i\le n\text{-}r)$ 均为齐次线性方程组的解. 在上述解

$$\vec{\eta}=k_{r+1}\vec{\eta}_1+k_{r+2}\vec{\eta}_2+\cdots+k_n\vec{\eta}_{n-r}$$

中，取$k_{r+i}=1$, 其余$k_j=0$, $(r+1\le j\le n, j\ne r+i)$，则$\vec{\eta}=\vec{\eta}_i$为解.

其次说明 $\{\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\cdots\vec{\eta}_{n-r}\}$线性无关. 由于

$$(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\cdots\vec{\eta}_{n-r})=\begin{pmatrix}-C_1\\ I_{n-r}\end{pmatrix},$$

其截短向量组(构成I_{n-r})线性无关，从而 $\{\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\cdots\vec{\eta}_{n-r}\}$ 线性无关.

最后说明，齐次线性方程组$A\vec{X}=\vec{0}$的任意解均可由$\{\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\cdots\vec{\eta}_{n-r}\}$ 线性表示. 若$\vec{\xi}\in \mathrm{N}(A)$，即$A\vec{\xi}=\vec{0}$, 设$\vec{\xi}=(b_1,\cdots,b_r,\underline{b_{r+1},\cdots,b_n})^{\mathrm{T}}$. 另一方面，取 $\vec{\eta}_0=\underline{b_{r+1}}\vec{\eta}_1+\underline{b_{r+2}}\vec{\eta}_2+\cdots+\underline{b_n}\vec{\eta}_{n-r}$, 则$\vec{\eta}_0\in \mathrm{N}(A)$. 下说明必有 $\vec{\xi}=\vec{\eta}_0$.

由于 $\vec{\eta}_0=[\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\cdots,\vec{\eta}_r]\begin{bmatrix} b_{r+1}\\ b_{r+2}\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -C_1\\ \boxed{I_{n-r}}\end{bmatrix}_{n\times(n-r)}\begin{bmatrix} b_{r+1}\\ b_{r+2}\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} *\\ \vdots\\ *\\ b_{r+1}\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$, 即

$$\begin{array}{l} \text{主变量} \\ \\ \text{自由变量} \end{array}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1\\ \vdots\\ x_r\end{matrix}}\\ \boxed{\begin{matrix} x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{matrix}}\end{bmatrix}=\vec{\eta}_0=\begin{bmatrix} *\\ \vdots\\ *\\ \boxed{\begin{matrix} b_{r+1}\\ \vdots\\ b_n\end{matrix}}\end{bmatrix},$$

均为方程组的解，它们的自由变量部分相同，而当自由变量取定后，主变量也随之唯一地确定，从而有$\vec{\xi}=\vec{\eta}_0$, 因此$\vec{\xi}$可由$\{\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\cdots,\vec{\eta}_{n-r}\}$线性表出.

综上，$\{\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\cdots,\vec{\eta}_{n-r}\}$ 为$A\vec{X}=\vec{0}$的一组基础解系, 故$\dim \mathrm{N}(A)=n-r$. ■

三、齐次线性方程组的求解步骤

由定理2的证明，我们可得齐次线性方程组 $A_{m\times n}\vec{X}=\vec{0}$ 的一般求解步骤.

Step1. 用初等行变换化A为简化阶梯形矩阵C，其非零行的行数为r(A)=r.

Setp2. 若$r=n$，则只有零解，停止；若$r<n$，则r个主元素所在列对应的r个变量为主变量，其余的 $n-r$ 个变量为自由变量.

Step3. 对$1\le i\le n-r$, 如下取定一组基础解系$\{\vec{\eta}_i\}$：$\vec{\eta}_i$的自由变量部分取为$\vec{e}_i=(0,\ldots,1,\ldots,0)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n-r}$，而$\vec{\eta}_i$的主变量部分取$C$中第$i$个非主元素列的前$r$个元素再乘(−1).

Step4. 方程组的通解为: $\vec{\eta}=k_1\vec{\eta}_1+k_2\vec{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\vec{\eta}_{n-r}$ $(\forall\, k_i\in\mathbb{R})$.

例1 求解下列方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\qquad - 5x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

解 系数矩阵为

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix}-5\\1\end{matrix}} \\ 0 & & 1 & \end{bmatrix},$$

已是简化阶梯形矩阵，故x_1，x_3为主变量，而x_2，x_4为自由未知量 (可取任意实数). 于是，取基础解系和通解分别为：

$$\vec{\eta}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \vec{\eta}_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}; \quad \Rightarrow \quad \vec{\eta} = k_1\vec{\eta}_1 + k_2\vec{\eta}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 + 5k_2 \\ k_1 \\ -k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$(k_1, k_2 \in \mathbb{R})$$

例2 求下列方程组的基础解系: $\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3-x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+6x_2-8x_3+5x_4+3x_5=0 \\ x_1+3x_2-3x_3+6x_4+x_5=0 \end{cases}$

解 用初等行变换化系数矩阵为简化阶梯形矩阵:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -8 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \underline{1} & 3 & 0 & 33/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 7/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

r=2个主变量为x_1, x_3, $n-r=5-2=3$个自由未知量为 x_2, x_4, x_5. 基础解系如下取定:

$(x_2, x_4, x_5)^T$分别取为 $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$ 和 $(0, 0, 1)^T$,

$(x_1, x_3)^T$分别取为$\underline{(-3, 0)}^T$, $\underline{(-33/2, -7/2)}^T$ 和 $\underline{(1/2, 1/2)}^T$.

即基础解系取为: $\vec{\eta}_1=\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\vec{\eta}_2=\begin{bmatrix}-33/2\\0\\-7/2\\1\\0\end{bmatrix},\vec{\eta}_3=\begin{bmatrix}1/2\\0\\1/2\\0\\1\end{bmatrix}$

方程组的通解是: $\vec{X}=k_1\vec{\eta}_1+k_2\vec{\eta}_2+k_3\vec{\eta}_3=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3k_1-\frac{33}{2}k_2+\frac{1}{2}k_3\\k_1\\-\frac{7}{2}k_2+\frac{1}{2}k_3\\k_2\\k_3\end{bmatrix}$,

其中 k_1, k_2, k_3 可取任意实数.

思考题: 能否取 x_3, x_4, x_5 为自由变量? 能否取 x_2, x_3, x_4 为自由变量?

例3(5.7节的结论1) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，如果 $AB=O$，证明

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\le n.$$

分析 之前我们是用分块矩阵来证明的. 利用矩阵的秩与齐次线性方程组的解空间维数之间的关系，只须证： $\mathrm{r}(B)\le \dim \mathrm{N}(A)=n-\mathrm{r}(A)$.

证明 记 $B=(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_s)$ ($\vec{\beta}_i$ 为 B 的第 i 列). 由 $AB=O$ 得

$$A\vec{\beta}_i=\vec{0}\ (\ i=1,\cdots,s).$$

所以, $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_s$ 都是 $A_{m\times n}\vec{X}=\vec{0}$ 的解，又 $A\vec{X}=\vec{0}$ 只有 $n-\mathrm{r}(A)$ 个线性无关的解，故有,

$$\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_s)\le n-\mathrm{r}(A),$$

即 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\le n.$ ■

★例4 设A为$m\times n$ 型实矩阵，则 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)=\mathrm{r}(AA^{\mathrm{T}})$.

分析：只须证 $n-\mathrm{r}(A)=n-\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)$, 而由$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)$为$n\times n$型方阵，则等价地，

只须证：方程组(I): $A\vec{X}=\vec{0}$, 和 方程组(II): $A^{\mathrm{T}}A\vec{X}=\vec{0}$ 为同解方程组.

证明 因为，如果 $A\vec{X}=\vec{0}$, 则 $A^{\mathrm{T}}(A\vec{X})=\vec{0}$, 所以(I)的解都是(II)的解.

反之，若 $\vec{X}$ 是 $A^{\mathrm{T}}A\vec{X}=\vec{0}$的任一解，则两边左乘$\vec{X}^{\mathrm{T}}$, 有

$$\vec{X}^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}A\vec{X}\right)=\left(A\vec{X}\right)^{\mathrm{T}}A\vec{X}=\vec{X}^{\mathrm{T}}\vec{0}=0,$$

设列向量 $A\vec{X}=(b_1,b_2,\ldots,b_m)^{\mathrm{T}}$, 则上式可化为：

$$\left(A\vec{X}\right)^{\mathrm{T}}A\vec{X}=b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+\cdots+b_m^{\,2}=0,$$

得 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$, 所以 $A\vec{X}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}=\vec{0}$, 即(II)的解也是(I)的解.

综上，有 $\mathrm{N}(A)=\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A)$, 从而有$n-\mathrm{r}(A)=n-\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)$, 故$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)$.

同理，考虑A^{T}, 有 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(AA^{\mathrm{T}})$. 再由$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})$, 即得结论. ■

补充说明：例4的结论很重要，在后续课程中我们将用到。另外，若A为$m\times n$ 型实矩阵，则 A^TA与AA^T分别为n阶、m阶方阵，并且

$$(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA;$$
$$(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T.$$

即A^TA与AA^T分别为n阶、m阶实对称阵.

重要结论：$\mathrm{N}(A)\subseteq \mathrm{N}(BA)$, $\mathrm{N}(A)=\mathrm{N}(A^TA)$.

辨析: 是否有$\mathrm{N}(A)=\mathrm{N}(AA^T)$?

回答: 上式不成立!!!

$$\mathrm{N}(A)\subseteq \mathbb{R}^n,\qquad \dim \mathrm{N}(A)=n-\mathrm{r}(A)=n-r.$$
$$\mathrm{N}(AA^T)\subseteq \mathbb{R}^m,\quad \dim \mathrm{N}(AA^T)=m-\mathrm{r}(AA^T)=m-r.$$

(四)、非齐次线性方程组解的判定法则

回顾： Gauss消元法给出线性方程组有解的条件. 对线性方程组$A\vec{X}=\vec{b}$, 利用初等行变换将增广系数矩阵$\overline{A}=(A,\vec{b})$化为阶梯形矩阵，若有主元在最后一列，则方程组无解；否则有解.

新观点： 用向量组的秩与线性相关性的观点, 重新来看上述判断过程.

记 $A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\vec{\alpha}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^T$, $j=1,2,\cdots,n.$

$A\vec{X}=\vec{b}$ 有解 $\Rightarrow x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+\ldots+x_n\vec{\alpha}_n=\vec{b}$ 有解

$\Rightarrow \vec{b}$ 可由 A 的列向量 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_n$ 线性表出

$\Rightarrow$向量组$\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_n\}$与$\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_n,\vec{b}\}$ 等价

$\Rightarrow \mathrm{r}(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_n,\vec{b})=\mathrm{r}(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_n)$

$\Rightarrow \mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,\vec{b})$

$\Rightarrow$ 增广系数矩阵$(A,\vec{b})$化为阶梯形后主元不在最后一列

进一步，当非齐次线性方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$, 有解时,

- 若$\mathrm{r}(A,\vec{b})=\mathrm{r}(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_n,\vec{b})=\mathrm{r}(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_n)=\mathrm{r}(A)=n$，则由线性相关性的临界关系知，$\vec{b}$的表出系数唯一，即方程组有唯一解. 反之亦然.
- 若$\mathrm{r}(A,\vec{b})=\mathrm{r}(A)<n$，则$(A,\vec{b})$经Gauss消元法化为阶梯形矩阵后，必有自由未定元，从而有方程组有无多个穷解. 反之亦然.

定理3. $\begin{cases} \underline{\mathrm{r}(A,\vec{b})\neq \mathrm{r}(A)} & \Leftrightarrow A_{m\times n}\vec{X}=\vec{b} \text{ 无解;} \\ \mathrm{r}(A,\vec{b})=\mathrm{r}(A)=n \text{ (列数)} & \Leftrightarrow A_{m\times n}\vec{X}=\vec{b} \text{ 有唯一解;} \\ \mathrm{r}(A,\vec{b})=\mathrm{r}(A)<n \text{ (列数)} & \Leftrightarrow A_{m\times n}\vec{X}=\vec{b} \text{ 有无穷多个解.} \end{cases}$

注：若 $\mathrm{r}(A,\vec{b})\neq \mathrm{r}(A)$, 则只有 $\underline{\mathrm{r}(A,\vec{b})=\mathrm{r}(A)+1}$.

(五)、非齐次线性方程组解的结构

问题：1. 若$A\vec{X}=\vec{b}$解不唯一，这些解具有哪些性质？

2. 解集合的整体结构如何？

下面，先来讨论非齐次线性方程组$A\vec{X}=\vec{b}$的解与对应的齐次线性方程组$A\vec{X}=\vec{0}$ 的解之间的关系. 为了方便，先给出如下符号和定义.

- 导出组：系数矩阵相同的齐次线性方程组
- $\mathrm{N}(A)=\{A\vec{X}=\vec{0}$ 的全体解$\}$ (A的零空间 或 解空间)
- $\mathrm{N}(A,\vec{b})=\{A\vec{X}=\vec{b}$ 的全体解$\}$

也就是说，我们接下来讨论 $\mathrm{N}(A,\vec{b})$ 与 $\mathrm{N}(A)$ 的关系.

● $\mathrm{N}(A, \vec{b})$ 与 $\mathrm{N}(A)$ 的关系.

(1) 若 $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2 \in \mathrm{N}(A, \vec{b}) \Rightarrow A\vec{\xi}_1 = \vec{b}, A\vec{\xi}_2 = \vec{b}$

$\Rightarrow A(\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2) = A\vec{\xi}_1 - A\vec{\xi}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2 \in \mathrm{N}(A)$.

(2) 取定一个$\vec{\xi}_0 \in \mathrm{N}(A, \vec{b})$, $\forall \vec{\eta} \in \mathrm{N}(A) \Rightarrow A(\vec{\xi}_0 + \vec{\eta}) = A\vec{\xi}_0 + A\vec{\eta} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{\gamma} = \vec{\xi}_0 + \vec{\eta} \in \mathrm{N}(A, \vec{b}) \Rightarrow$ 由$\vec{\eta}$的任意性有 $\underline{\vec{\xi}_0 + \mathrm{N}(A) \subseteq \mathrm{N}(A, \vec{b})}$.

其中 $\vec{\xi}_0 + \mathrm{N}(A) \triangleq \left\{ \vec{\xi}_0 + \vec{x} \,\middle|\, \vec{x} \in \mathrm{N}(A) \right\}$.

(3) 同上取定 $\vec{\xi}_0 \in \mathrm{N}(A, \vec{b})$, $\forall \vec{\gamma} \in \mathrm{N}(A, \vec{b})$, 由(1)得, $\vec{\gamma} - \vec{\xi}_0 \in \mathrm{N}(A)$,

$\Rightarrow \exists \vec{\eta} \in \mathrm{N}(A)$, 使得 $\vec{\gamma} = \vec{\xi}_0 + \vec{\eta} \in \vec{\xi}_0 + \mathrm{N}(A)$

$\Rightarrow$ 由$\vec{\gamma}$的任意性有 $\underline{\mathrm{N}(A, \vec{b}) \subseteq \vec{\xi}_0 + \mathrm{N}(A)}$.

定理4 对非齐次线性方程组 $A_{m\times n}\vec{X}=\vec{b}$, 设 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,\vec{b})=r\le n$, 且$\vec{\xi}_0\in \mathrm{N}(A,\vec{b})$是一个特解, 则

$$\mathrm{N}(A,\vec{b})=\vec{\xi}_0+\mathrm{N}(A).$$

进一步，设$\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\ldots,\vec{\eta}_{n-r}$是导出组$A\vec{X}=\vec{0}$的一组基础解系, 则$A\vec{X}=\vec{b}$的通解(一般解)为:

$$\vec{\gamma}=\vec{\xi}_0+k_1\vec{\eta}_1+k_2\vec{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\vec{\eta}_{n-r}\quad(\forall\, k_1,k_2,\ldots,k_{n-r}\in\mathbb{R}).$$

注: (1) 求解的两个关键：特解 $\vec{\xi}_0$ 与基础解系 $\{\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\ldots,\vec{\eta}_{n-r}\}$.

(2) 非齐次方程组$A\vec{X}=\vec{b}$的解集合需由对应齐次方程组$A\vec{X}=\vec{0}$的解集合导出，因此称$A\vec{X}=\vec{0}$是$A\vec{X}=\vec{b}$的导出组.

(3) 从几何上看: $\mathrm{N}(A,\vec{b})$是解空间$\mathrm{N}(A)$的平移，特解$\vec{\xi}_0$为平移的向量.

(4) 特解与基础解系的选取均不唯一, 生成的通解集合 $\vec{\xi}_0+\mathrm{N}(A)$ 为何是确定的?

即$A\vec{X}=\vec{b}$有解时,
即$\mathrm{r}(A,\vec{b})=\mathrm{r}(A)$时.

推论： 当$\mathrm{N}(A,\vec{b})\neq\Phi$ (空集) 时, 有

$$\#\,\mathrm{N}(A,\vec{b}) = \#\,\mathrm{N}(A),$$

其中$\#S$表示集合S的元素个数，允许等于无穷.

证明概要： 定义映射σ: $\mathrm{N}(A,\vec{b})\to\mathrm{N}(A)$, $\sigma(\vec{x})=\vec{x}-\vec{\xi}_0$. 验证$\sigma$为双射(既是单射又是满射)，从而得结论.

关键问题： 如何求$A\vec{X}=\vec{b}$的一个特解$\vec{\xi}_0$？如何求$A\vec{X}=\vec{0}$的一组基础解系？

第二个问题，在前文中已解决，下面讨论第一个问题：对于非齐次线性方程组$A_{m\times n}\vec{X}=\vec{b}$，当r($A$)=r($A,\vec{b}$)=$r\le n$时，对增广系数矩阵$(A,\vec{b})$用初等行变换化为如下简化阶梯形矩阵$C$ (不妨设主元位于前r列)：

$$C=\left(\begin{array}{ccccccc|c}
\boxed{1} & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1\\
0 & \boxed{1} & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & \boxed{1} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1=-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n+d_1\\
x_2=-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n+d_2\\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
x_r=-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n+d_r
\end{cases}$$

主变量　　自由变量　　特解

于是，自由变量全取0，主变量等于C的最后一列的前r个值，即得特解.

(六)、非齐次线性方程组 $A_{m\times n}\vec{X}=\vec{b}$ 的求解步骤

Step1. 用初等行变换将增广系数矩阵$(A,\vec{b})$化为简化阶梯形矩阵C, 其非零行数为r.

Setp2. 若有主元在最后一列，则方程组无解，停止；否则, r个主元素所在列对应的r个变量为主变量, 其余的 $n-r$ 个变量为自由变量.

Setp3. 如下求得一个特解$\vec{\xi}_0$：将$\vec{\xi}_0$中的自由变量部分全取为0，而(r个)主变量部分取为C的最后一列的前r个值. 进一步，若$r=n$，则上述所得特解$\vec{\xi}_0$就是唯一的解，停止; 否则，即$r<n$, 则进入下一步.

Step4. 对于$1\le i\le n-r$, 如下取定导出组的基础解系$\{\vec{\eta}_i\}_{i=1}^{n-r}$： $\vec{\eta}_i$的自由变量部分取为$\vec{e}_i\in\mathbb{R}^{n-r}$，而$\vec{\eta}_i$的主变量部分取$C$中第$i$个非主元素列的前$r$个元素乘(−1).

Step5. 方程组的通解为: $\vec{\eta}=\vec{\xi}_0+k_1\vec{\eta}_1+k_2\vec{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\vec{\eta}_{n-r}\ \ (\forall k_i\in\mathbb{R})$.

例8 求下列方程组的通解: $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 2 \end{cases}$

解 ① 用初等行变换将增广矩阵$(A, \vec{b})$化为简化阶梯形矩阵:

$$(A,\vec{b}) = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccccc:c} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = C$$

② 由于主元素位于第1,3,4列，不在最后一列，知$r(A) = r(A, \vec{b}) = 3$，所以方程组有解. 且 x_1, x_3, x_4为主变量，而x_2, x_5为自由变量.

③ 令$(x_2, x_5)=(0,0)$，由C的最后一列, 得特解为:

$$\vec{\xi}_0 = (\ \ , 0, \ \ , \ \ , 0)^T.$$

$$(A,\vec{b})=\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]=C$$

④ 令自由变量(x_2, x_5)=(1,0)与(0,1)，并由C的第2,5列, 得导出组的一组基础解系为:

$$\vec{\eta}_1=\begin{bmatrix} \\ 1 \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\eta}_2=\begin{bmatrix} \\ 0 \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

⑤ 方程组的通解为：$\vec{\eta}=\vec{\xi}_0+k_1\vec{\eta}_1+k_2\vec{\eta}_2=(1+k_1-7k_2,\ k_1,\ 2-4k_2,\ -1+3k_2,\ k_2)^{\mathrm{T}}$

$(k_1, k_2\in\mathbb{R})$.

例9 设方程组$A\vec{X}=\vec{b}$的增广系数矩阵为 $(A,\vec{b})=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & a & t & t-3 \\ 1 & 1 & 2 & t-2 & t+3 \end{array}\right]$

问: a, t取何值时，方程组无解, 有唯一解, 无穷多解? 有无穷多解时，求通解.

解 用初等行变换将增广系数矩阵化为阶梯形:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & a & t & t-3 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & t+2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{a-2} & t-3 & t-2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{t-1} & \boxed{t+2} \end{array}\right]$$

(1) 当 $a \neq 2, t \neq 1$ 时, $\mathrm{r}(A,\vec{b})=\mathrm{r}(A)=4=n$，方程组解唯一；

(2) 当 $t=1$ 时，$\mathrm{r}(A,\vec{b})=4 \neq 3=\mathrm{r}(A)$，方程组无解;

(3) 当a=2, $t \neq 1$时, 可进一步进行初等行变换

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & t-3 & t-2 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & t+2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & t+2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{t-4} \end{array}\right]$$

(3-1) 当a=2, $t \neq 4$时，方程组无解；

(3-2) 当a=2, t =4时，方程组有无穷多解, 此时,

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} 10 \\ -7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中k_1为任意实数.

(六)、矩阵的四个基本子空间

设A是一个$m\times n$型矩阵, 则以下称为矩阵A的四个基本子空间:

- 列空间 (column space): $C(A)=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^m \mid \vec{y}=A\vec{x}, \vec{x}\in\mathbb{R}^n\}$ → $\mathbb{R}^m$的子空间
- 行空间 (row space): $C(A^{\mathrm{T}})=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^n \mid \vec{y}=A^{\mathrm{T}}\vec{x}, \vec{x}\in\mathbb{R}^m\}$ → $\mathbb{R}^n$的子空间
- 零空间 (null space): $N(A)=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\vec{x}=\vec{0}\right\}$ → $\mathbb{R}^n$的子空间
- 左零空间 (left null space): $N(A^{\mathrm{T}})=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^m \mid A^{\mathrm{T}}\vec{x}=\vec{0}\right\}$ → $\mathbb{R}^m$的子空间

$$=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^m \mid \vec{x}^{\mathrm{T}}A=\vec{0}\right\}$$

目标: 1. 四个基本空间的基本性质与关系.

2. 求四个基本空间的基和维数.

定理5. A是$m\times n$型矩阵, $\mathrm{r}(A)=r$. 则

(i). $\dim C(A)=\dim C(A^T)=r$; $\dim N(A)=n-r$, $\dim N(A^T)=m-r$.

(ii). $N(A)\subseteq N(BA)$, 特别当B列满秩时, 等号成立.

$C(A)\supseteq C(AB)$, 特别当B行满秩时, 等号成立.

(iii). $N(A) = N(A^TA)$, $N(A^T) = N(AA^T)$, $C(A) = C(AA^T)$, $C(A^T) = C(AA^T)$.

左零升, 右列降

需要引用的相关结论:

1. $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}_r(A) = \mathrm{r}_c(A) = r_U$.
2. $\dim C(A)=\mathrm{r}_c(A)$, $\dim C(A^T)=\mathrm{r}_r(A)$; $\dim N(A)=n-\mathrm{r}(A)$, $\dim N(A^T)=m-\mathrm{r}(A^T)$.
3. $\mathrm{r}(A)\geq \mathrm{r}(BA)$, 且当$B$列满秩时, 等号成立. $\mathrm{r}(A)\geq \mathrm{r}(AB)$, 且当$B$行满秩时, 等号成立.
   (见习题课).
4. $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^TA) = \mathrm{r}(AA^T)$

利用上述相关结论, 即可证明定理5, 请课后补齐证明.

下讨论: 如何求四个基本子空间的基.

实际上, 我们已掌握求C(A)与N(A)的基的方法. 具体地:

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{行变换}} \boldsymbol{U_0} \in \mathbf{rref}(\boldsymbol{A})$$

则, 通过简化阶梯形U_0, 可得$A\vec{x}=\vec{0}$的基础解系, 即N(A)的一组基;

另一方面, U_0主元所在列对应的A的列, 就是A的列向量极大无关组, 即C(A)的一组基.

那么, 如何求C(A^T)的基呢?

由于$PA=U_0$ ($\exists P$可逆), 有$A^TP^T=U_0^T$, 根据上页定理5, 得 C(A^T)=C(A^TP^T)=C(U_0^T), 而C(U_0^T)的基是易知的, 即主元所在的行的转置. 例如:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow U_0=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}\right\}$$为C(A^T)的一组基.

注意到, U_0的主元行, 并非A的行, 如何用A的行向量给出C(A^T)的基呢?

实际上, 这相当于求A的行向量组的极大无关组, 已学过两种方法:

方法①: 行变换 $A^T \to U_0'$, 主元列对应的A^T的列.

方法②: 行变换 $A \to U_0$, 并记录行变换的过程. 例如:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_5^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T + \alpha_1^T \\ \alpha_3^T + \alpha_1^T \\ \alpha_4^T + \alpha_1^T \\ \alpha_5^T + 2\alpha_1^T \end{array}$$

$$\to \cdots \to \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T + \alpha_1^T \\ \alpha_3^T - \alpha_2^T - \alpha_1^T = \mathbf{0} \\ \alpha_4^T - \alpha_2^T - 2\alpha_2^T \\ \alpha_5^T - 2\alpha_1^T - 4\alpha_2^T - \left(\alpha_4^T - \alpha_1^T - 2\alpha_2^T\right) = \mathbf{0} \end{array}$$

由于r(A^T)=3, 可以看出:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$是C($A^T$)的一组基.

下讨论$N(A^T)$的基的求法, 有两种方法:

方法①: 行变换 $A^T \to U_0'$, 求A^T的零空间的基础解系.

方法②: 行变换 $A \to U_0 = \begin{pmatrix} U_1 \\ O \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim 前r行为非零行 \\ \sim 后m-r行为零行 \end{matrix}$, 即存在可逆阵$P$, 使得: $PA=U_0$.

将P与U_0都按行分块表示, 得: $\begin{pmatrix} \vec{p}_1^T \\ \vdots \\ \vec{p}_r^T \\ \vec{p}_{r+1}^T \\ \vdots \\ \vec{p}_m^T \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_r^T \\ \vec{0}^T \\ \vdots \\ \vec{0}^T \end{pmatrix}$, 从而有 $\vec{p}_{r+1}^T A = \vec{0}^T, \cdots, \vec{p}_m^T A = \vec{0}^T$

即矩阵P的后$m-r$行的转置$\vec{p}_{r+1}, \cdots, \vec{p}_m$是$N(A^T)$的一组基 (线性无关, 且$\dim N(A^T)=m-r$).

例如:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&5&0&7\\0&0&0&1&2\\1&3&5&1&9\end{pmatrix}_{3\times5}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&3&5&0&7\\0&0&0&1&2\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&3&5&0&7\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=U_0$$

于是, 得可逆阵P为: $$P=E_{2,3}(-1)E_{1,3}(-1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

由r(A)=2知, P的后(3–2)=1行的转置$\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$为N($A^{\mathrm{T}}$)的一组基.

问题: 是否可避开计算若干初等矩阵的乘积, 而得到P?

回答: $(A, I_m)\rightarrow(U_0, P)$, 即 $P(A, I_m)=(PA, PI_m)=(U_0, P)$.

最后, 我们再从分块矩阵的角度, 给出矩阵A的四个基本空间的基的求法.

设A是$m\times n$型矩阵, r(A)=r, 于是存在可逆阵$P_{m\times m}$, $Q_{n\times n}$, 化A为标准形

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

对P的行按“r+(m−r)”分块 $P=\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$; 对$Q$的列按“$r$+($n$−$r$)”分块 $Q=(Q_1,Q_2)$. 故

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}AQ=\begin{pmatrix} \underline{P_1AQ} \\ \underline{P_2AQ} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \underline{(I_r,O)} \\ \underline{(O,O)} \end{pmatrix}; PA(Q_1,Q_2)=(\underline{PAQ_1},\underline{PAQ_2})=\left(\underline{\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}},\underline{\begin{pmatrix} O \\ O \end{pmatrix}}\right).$$

- 由P_2AQ=O, 有P_2A=O, 因此P的后m−r行的转置是N(A^{T})的一组基;
- 由PAQ_2=O, 有AQ_2=O, 因此Q的后n−r列是N(A)的一组基;
- 由PAQ_1=$\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}$, 有r($PAQ_1$)=r($AQ_1$)=$r$, 又因C($A$)⊇C($AQ_1$), 故得C($A$)=C($AQ_1$), 且$(AQ_1)_{m\times r}$列满秩, 因此$AQ_1$的$r$个列是C($A$)的一组基;
- 由P_1AQ=(I_r,O), 有r(P_1AQ)=r(P_1A)=r, 又因C(A^{T})⊇C($A^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}$), 故得C($A^{\mathrm{T}}$) =C($A^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}$), 且$(P_1A)_{r\times n}$行满秩, 因此$P_1A$的$r$个行的转置是C($A^{\mathrm{T}}$)的一组基.

例如: $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&0\end{pmatrix}_{2\times3}$ 考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix}A&I_2\\I_3&0\end{pmatrix}$, 将其左上角化为标准形,

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&1&1&0\\3&4&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&1&1&0\\0&-2&-3&-3&1\\\hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-2&-2&1\\0&1&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\\hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&-2&1\\0&1&0&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\\hline 1&0&2&0&0\\0&1&-\frac{3}{2}&0&0\\0&0&1&0&0\end{array}\right)$$

U_0 P

右上角为可逆阵$P=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, 左下角为可逆阵$Q=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-\frac{3}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$, 使得$PAQ=(I_2, O)$.

故N(A^{T})的基为$\vec{0}$, Q的最后一列: $(2, -3/2,1)^{\mathrm{T}}$ 为N(A)的一组基.

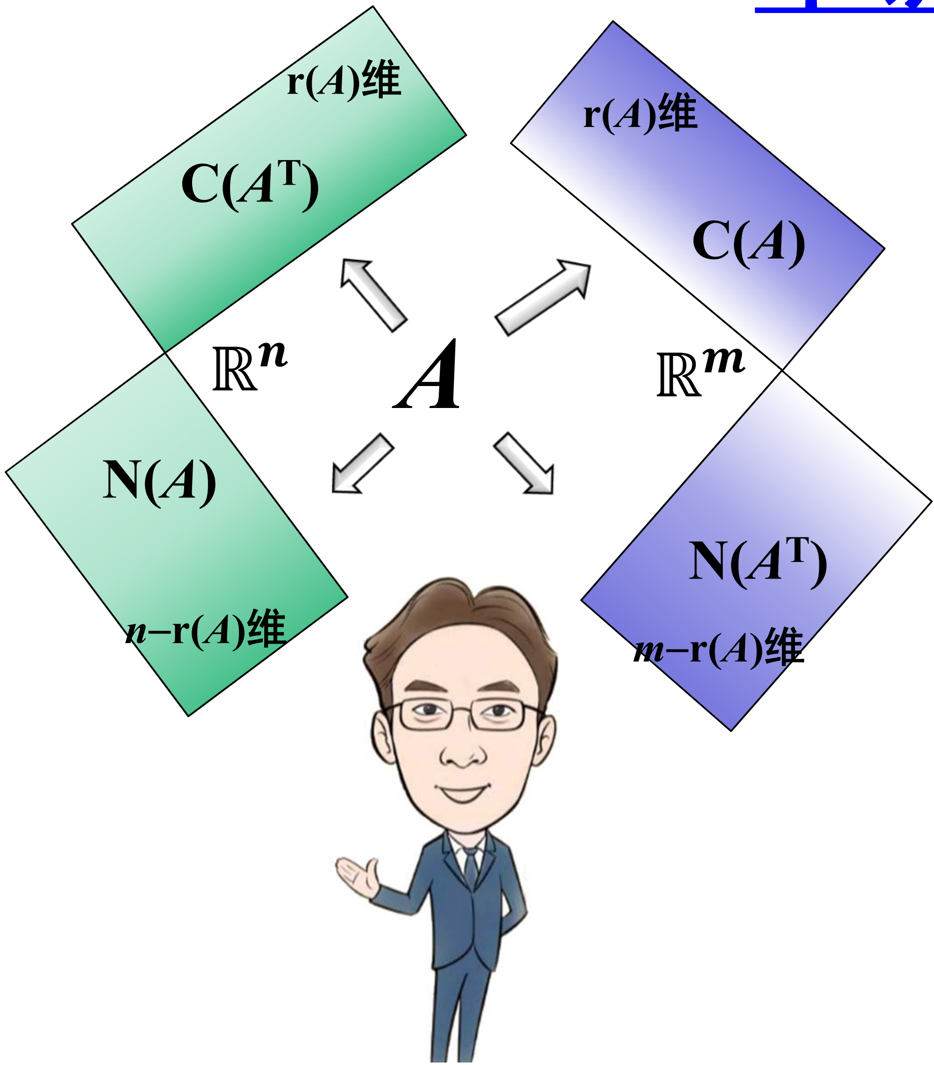
$PA=U_0$(的非零行): $(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$, $(0,1,3/2)^{\mathrm{T}}$为C(A^{T})的一组基.

AQ_1的两列 (即A的前两列): $(1,3)^{\mathrm{T}}$, $(2,4)^{\mathrm{T}}$为C(A)的一组基.

本讲小结

- 齐次线性方程组解的判定判则
  —— $\mathrm{r}(A)=n$ 或 $<n$
- 非齐次线性方程组解的判定法则
  ——由$\mathrm{r}(A)$, $\mathrm{r}(A, \vec{b})$ 及列数n的关系决定.
- 齐次线性方程组解的结构:
  —— 零空间$\mathrm{N}(A)$，基础解系
- 非齐次线性方程组解的结构
  ——$\mathrm{N}(\mathrm{A}, \vec{b}) = \vec{\xi}_0 + \mathrm{N}(\mathrm{A})$.
- 齐次线性方程组的求解步骤:
  —— Gauss消元法化为简化阶梯形矩阵
- 非齐次线性方程组的求解步骤
  ——特解、基础解系等所有信息均含在简化阶梯形矩阵中.

本讲小结



➢ 矩阵乘法与基本子空间

- $\mathrm{N}(A) \subseteq \mathrm{N}(BA)$, $\mathrm{C}(A) \supseteq \mathrm{C}(AB)$ (左零升,右列降)
- $\mathrm{N}(A) = \mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A)$, $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{N}(AA^{\mathrm{T}})$,
- $\mathrm{C}(A) = \mathrm{C}(AA^{\mathrm{T}})$, $\mathrm{C}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{C}(AA^{\mathrm{T}})$.

➢ 基本子空间的基的求法

$$A \xrightarrow{\text{行变换}} U_0 \in \mathbf{rref}(A)$$

- U_0给出的基础解系 $\Rightarrow$ $\mathrm{N}(A)$的基
- U_0的主元列对应的A的列 $\Rightarrow$ $\mathrm{C}(A)$的基
- U_0的主元行 $\Rightarrow$ $\mathrm{C}(A^{\mathrm{T}})$的基
- 行变换可逆阵P的后$m-r$行 $\Rightarrow$ $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})$的基