《线性代数》

第六章 线性空间

2019年
秋

6-1 线性空间

杨晶 主讲

本讲提要 线性空间

一、线性空间的定义与例子

二、线性空间的基、维数和坐标

三、过渡矩阵与坐标变换

四、过渡矩阵与坐标变换

引: 数域及其被认知的历史

- 人们对数的认知过程.

$$\mathbb{N} \xRightarrow[\text{减法}]{} \mathbb{Z} \xRightarrow[\text{除法}]{} \mathbb{Q} \xRightarrow[\text{正数开根}]{} \mathbb{R} \Longrightarrow F \xRightarrow[\text{负数开根}]{} \mathbb{C}$$

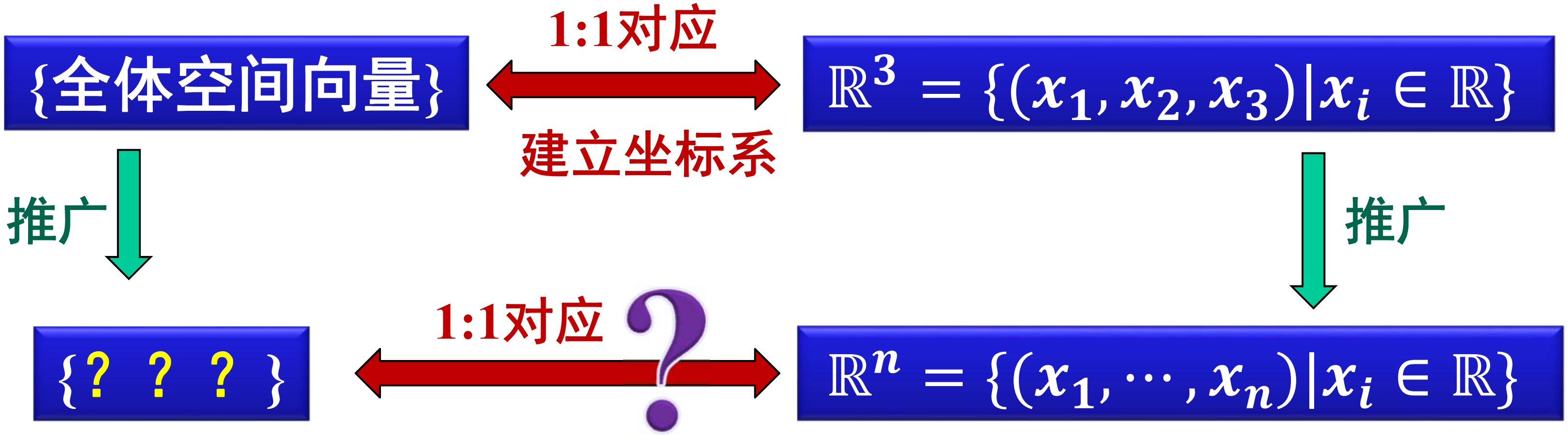
定义1 设 F 是一个数集. 如果 F 满足

(1) $1, 0 \in F$;

(2) F 对于加法、减法、乘法、除法(除数不为零)运算封闭;

则称 F 为一个**数域**.

- 通常如无特别说明, 大家可以理解域F就是**实数域**$\mathbb{R}$, 或**复数域**$\mathbb{C}$.



- 先把维数从2, 3推广到 n, 得到$\mathbb{R}^n$; 再把 n 元有序数组推广成抽象的元素. 把 n 维向量空间推广成了线性空间.

- 高度的抽象性是有广泛应用的前提.

- 回顾本课程前面讲的向量空间 $\mathbb{R}^n$, 线性方程组的解集合, 全体$m \times n$型矩阵集合等, 它们有共同之处: 一个非空集合, 一个数域, 两种运算(加法及数乘)满足八条运算性质.

- 把一般的规定了这样两种运算且满足这样八条运算性质的非空集合抽象起来, 就得到了线性空间.

回顾: $m\times n$型矩阵集合$M_{m\times n}(\mathbb{R})$，或$n$维向量空间$\mathbb{R}^n$ 中的加法和数乘运算满足八条运算律.

请把它们具体写出来——

一、线性空间的定义与例子

定义1 设 V 是一个非空集合, F 是一个数域, 如果定义了如下两种运算, 并且满足后面列举的八条性质, 则称 $V(F)$ 是数域 F 上的一个线性空间:

1. 加法运算: $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$, 有 $\vec{\alpha}+\vec{\beta} \in V$; (V 对加法运算封闭)

2. 数乘运算: $\forall \vec{\alpha} \in V, \forall k \in F$, 有 $k\vec{\alpha} \in V$; (V 对数乘运算封闭)

3. 八条运算性质: $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in V, \forall k, l \in F$:

(1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta} = \vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (交换律) (2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma} = \vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (结合律)

(3) $\exists \vec{\theta} \in V, \forall \vec{\alpha} \in V, \vec{\alpha}+\vec{\theta} = \vec{\alpha}$ ($\vec{\theta}$叫零元素, 也记为$\vec{0}$)

(4) $\forall \vec{\alpha} \in V, \exists \vec{\beta} \in V$使 $\vec{\alpha}+\vec{\beta} = \vec{0}$ ($\vec{\beta}$称为$\vec{\alpha}$的负元素, 记为$-\vec{\alpha}$)

(5) $1\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ (域的单位1) (6) $(kl)\vec{\alpha} = k(l\vec{\alpha})$ (数乘结合律)

(7) $k(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = k\vec{\alpha}+k\vec{\beta}$ (分配律1)

(8) $(k+l)\vec{\alpha} = k\vec{\alpha}+l\vec{\alpha}$ (分配律2)

"2+4+4" 法则

拓展：代数基本系统简介

- **群(Group)**：一个集合G及其中的一个二元运算(记为$*$)

  封闭性：$a*b\in G$

  结合律：$(a*b)*c=a*(b*c)$

  单位元(幺元)：$\exists e$, s.t. $e*a=a*e=a$ $(\forall a\in G)$

  逆元：$\forall a\in G$, $\exists b$, s.t. $b*a=a*b=e$，记 $b=a^{-1}$.

  交换群：二元运算还满足交换律的群.

  群的例子：$(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R},*)$, {偶整数,+}, $(M_n(\mathbb{R}),+)$.

  $(M_n(\mathbb{R}),*)$? {奇整数,+}?

群的口诀：“凤姐咬你”

交换群：“凤姐咬你脚”

- **环(Ring)**：一个集合R, 其中有两种运算，分别记为+和×

  +法构成交换群（凤姐咬你脚）

  ×法构成半群（封闭性&结合律：凤姐）例如：$(\mathbb{Z},+,\times)$

- **域(Filed)**：乘法也构成交换群的环（凤姐咬你双脚）

  如：$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.　$\mathbb{Z}$?　$M_n(\mathbb{R})$?

多选题 1分

设置

n 阶实方阵对于加法 $(M_n(\mathbb{R}),+)$ 满足以下哪些条件

封闭性

结合律

存在幺元

存在逆元

提交

多选题 1分

设置

n 阶实方阵对于乘法 $(M_n(\mathbb{R}), \cdot\,)$ 满足以下哪些条件

封闭性

结合律

存在幺元

存在逆元

提交

一、线性空间的定义与例子

定义1 设 V 是一个非空集合，F 是一个数域，如果定义了如下两种运算，并且满足后面列举的八条性质，则称$V(F)$是数域F上的一个线性空间：

1. 加法运算：$\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$，有$\vec{\alpha}+\vec{\beta} \in V$；（ V 对加法运算封闭） 封

2. 数乘运算：$\forall \vec{\alpha} \in V$，$\forall k \in F$，有$k\vec{\alpha} \in V$；（ V 对数乘运算封闭） 封

3. 八条运算性质：$\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in V$，$\forall k, l \in F$： 结

(1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta} = \vec{\beta}+\vec{\alpha}$ （交换律） 交 (2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma} = \vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ （结合律）

幺

(3) $\exists \vec{\theta} \in V$，$\forall \vec{\alpha} \in V$，$\vec{\alpha}+\vec{\theta} = \vec{\alpha}$ （$\vec{\theta}$叫零元素，也记为$\vec{0}$）

(4) $\forall \vec{\alpha} \in V$，$\exists \vec{\beta} \in V$使 $\vec{\alpha}+\vec{\beta} = \vec{0}$ （$\vec{\beta}$称为$\vec{\alpha}$的负元素，记为$-\vec{\alpha}$）

(5) $1\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ 幺 （域的单位1） (6) $(kl)\vec{\alpha} = k(l\vec{\alpha})$ 逆 （数乘结合律） 结

(7) $k(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = k\vec{\alpha}+k\vec{\beta}$ （分配律1）

(8) $(k+l)\vec{\alpha} = k\vec{\alpha}+l\vec{\alpha}$ （分配律2）

“5+3+2” 法则

多选题 2分

设置

➢ 线性空间的例子

例1 三维向量空间 $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)^{\mathrm{T}} \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$ 是否为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间?

是

否

例2 全体 $m\times n$ 实矩阵$M_{m,n}(\mathbb{R})$, 对矩阵的加法及数乘矩阵运算是否构成 $\mathbb{R}$ 上线性空间?

是

否

提交

多选题 2分

设置

例3 次数小于n的全体实系数多项式(含零多项式) 全体

$$\mathbb{R}_n[x]=\left\{f(x)\mid f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i,a_i\in\mathbb{R}\right\}$$

对于 $f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i+\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i=\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+b_i)x^i,$

$$kf(x)=k\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i=\sum_{i=0}^{n-1}(ka_i)x^i,$$

是否构成实数域$\mathbb{R}$上的线性空间?

是

否

例4 次数等于n的全体实系数多项式 $\{f(x)\mid f(x)\in\mathbb{R}[x],,\deg f=n\}$
对上述多项式的加法和数乘, 是否为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间?

是

否

提交

多选题 2分

设置

例5 齐次线性方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解集 $\mathrm{N}(A)$, 对于向量的加法与数乘, 是否构成线性空间?

是 否

非齐次线性方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$ 解集合$\mathrm{N}(A,\vec{b})$, 对于向量的加法与数乘, 是否构成线性空间?

是 否

提交

单选题 1分

设置

例6 设 $V=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$，定义 V 中两种运算如下 (注意它们不是二维向量空间中所定义的运算):

$$(x,y)\oplus(z,w)=(x+z,0)$$

$$k(x,y)=(kx,0)$$

则 V 对于上述运算是否构成线性空间?

是

否

提交

借助几何语言，把线性空间中的元素也称为**向量**.

➢ 线性空间 V 的简单性质

(1) V 中零向量唯一，记为 $\vec{\theta}$.

假若 $\vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2$ 都是 V 的零向量，那么由 $\vec{\theta}_1$ 是零向量，有 $\vec{\theta}_2+\vec{\theta}_1=\vec{\theta}_2$. 又因 $\vec{\theta}_2$ 是零向量，有 $\vec{\theta}_1+\vec{\theta}_2=\vec{\theta}_1$，于是

$$\vec{\theta}_1=\vec{\theta}_1+\vec{\theta}_2=\vec{\theta}_2+\vec{\theta}_1=\vec{\theta}_2.$$

(2) V 中每个向量 $\vec{\alpha}$ 的负向量唯一，记为 $-\vec{\alpha}$.

如果 $\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 都是 $\vec{\alpha}$ 的负向量，则

$$\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\theta}=\vec{\beta}+(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})=(\vec{\beta}+\vec{\alpha})+\vec{\gamma}=\vec{\theta}+\vec{\gamma}=\vec{\gamma}.$$

(3) $0\vec{\alpha}=\vec{\theta}$.

由$\vec{\alpha}+0\vec{\alpha}=1\vec{\alpha}+0\vec{\alpha}=(1+0)\vec{\alpha}=1\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$, 两边同时加$-\vec{\alpha}$, 有

$$0\vec{\alpha}=0\vec{\alpha}+\vec{\theta}=0\vec{\alpha}+(\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha}))=(0\vec{\alpha}+\vec{\alpha})+(-\vec{\alpha})=\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{\theta}.$$

(4) $(-1)\vec{\alpha}=-\vec{\alpha}$.

由$\vec{\alpha}+(-1)\vec{\alpha}=1\vec{\alpha}+(-1)\vec{\alpha}=(1-1)\vec{\alpha}=0\vec{\alpha}=0$,

所以由(2)有 $(-1)\vec{\alpha}=-\vec{\alpha}$.

通常$\vec{\theta}$,也记为$\vec{0}$

(5) $k\vec{\theta}=\vec{\theta}$.

由(3)和定义1(6)有 $k\vec{\theta}=k(0\vec{\alpha})=(k0)\vec{\alpha}=0\vec{\alpha}=\vec{\theta}$.

(6) 若 $k\vec{\alpha}=\vec{\theta}$，则 $k=0$ 或 $\vec{\alpha}=\vec{\theta}$.

若 $k\neq 0$, 则 $\vec{\alpha}=(k^{-1}k)\vec{\alpha}=k^{-1}(k\vec{\alpha})=k^{-1}\vec{\theta}=\vec{\theta}$.

➢ 线性空间定义要注意的地方

1. 线性空间空间的元素是一个抽象符号，不同空间中元素可能表示很不相同.
2. 线性空间的运算只是借用了“加法”、“数乘”的名称和符号，并不一定与通常的加法和数乘有什么关系.
3. 在推证给定运算的集合是线性空间时，运算封闭性和运算性质的验证只能使用当时的定义.
4. $F=\mathbb{R}$ (或$\mathbb{C}$) 时$V(F)$称为实(复)线性空间
5. 对我们而言，$V(F)$是抽象的线性空间，而F^n是形象的向量空间.

问题：是否可以将F^n中向量间的各种关系推广到$V(F)$中来？

是否有方法将$V(F)$直接转化为F^n，并保持上述关系？

二、线性空间的线性关系、基、维数和坐标

定义3 设 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 是数域 F 上的线性空间 V 中的 s 个向量，$k_1, k_2, \ldots, k_s \in F$，称 $k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + k_s\vec{\alpha}_s$ 是 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 的**线性组合(linear combination).**

若 $\vec{\beta} = k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + k_s\vec{\alpha}_s$，则称 $\vec{\beta}$ 是 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 的一个**线性组合**，也称 $\vec{\beta}$ 可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ **线性表出**.

定义4 给定 F 上的线性空间 V 中 s 个向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 若存在**不全为零**的常数 $k_1, k_2, \ldots, k_s$ 使得

$$k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + k_s\vec{\alpha}_s = \vec{0}$$

则称这个向量组**线性相关(linearly dependent)**，否则称这个向量组**线性无关(linearly independent).**

注： 向量空间中有关向量线性关系方面的概念和性质都可以推广到一般线性空间．证明方法完全类似，就不一一重复.

定义5 如果在线性空间 V 中存在 n 个线性无关的向量，但任意 $n+1$ 个向量都线性相关，则称任意 n 个线性无关的向量为线性空间 V 的一组基(basis)，称 n 为线性空间 V 的维数(dimension)，记作 $\dim_F V = n$.

基的概念是极大无关组和坐标系概念的推广.

- 当一个线性空间有无穷多个线性无关的向量时，称其是无限维线性空间. 在线性代数中一般只讨论有限维线性空间.
- 设 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，按定义5它们是线性无关的，且对任意的 $\vec{\alpha} \in V$, $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n, \vec{\alpha}$ 是线性相关的. 根据临界情形, $\vec{\alpha}$ 可由 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ 线性表出，且表示法唯一. 由此引入坐标的概念.

定义6 设 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ 是 F 的线性空间 V 的一组基, $\vec{\alpha}$ 是 V 中任一向量，若 $\vec{\alpha} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + x_2\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + x_n\vec{\varepsilon}_n$,

记 $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in F^n$，则可把向量 $\vec{\alpha}$ 写成

$$\vec{\alpha} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)\vec{X}, \tag{1}$$

称 $\vec{X}$ 是向量 $\vec{\alpha}$ 在基 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ 下的坐标(coordinate).

$$\begin{tikzcd}
\{\text{全体空间向量}\} \arrow[rr, leftrightarrow, "1:1\text{对应}", "\text{建立坐标系}"'] \arrow[d, "\text{推广}"'] & & \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\} \arrow[d, "\text{推广}"] \\
\{\text{线性空间}\} \arrow[rr, leftrightarrow, "1:1\text{对应}", "\text{取一组基}"'] & & F^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in F\}
\end{tikzcd}$$

问题: 同一个向量在不同基下的坐标有什么关系?或者说基改变如何影响坐标的改变．这就是基变换与坐标变换的问题.

例7：$\vec{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\vec{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\vec{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$是$\mathbb{R}^3$的一组基，称为自然基. 任意向量$\vec{\alpha}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$在这组基下的坐标为$(x,y,z)^{\mathrm{T}}$.

例8：所有2阶实矩阵构成的集合$M_2(\mathbb{R})$，在矩阵加法及数乘矩阵运算下构成线性空间，

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

是$M_2(\mathbb{R})$的一组基，$\dim(M_2(\mathbb{R}))=4$.任意矩阵$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$在这组基下的坐标为$(a,b,c,d)^{\mathrm{T}}$.

例9：线性空间$\mathbb{R}_3[x]$中，有$k_1+k_2x+k_3x^2=0\Leftrightarrow k_1=k_2=k_3=0$故$1,x,x^2$线性无关，且任意次数$<3$的多项式可由它们表出，所以$\{1,x,x^2\}$是一组基. ax^2+bx+c在该基下的坐标为$(c,b,a)^T$.

四、过渡矩阵与坐标变换

定义7 设 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ 和 $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_n$ 是 n 维线性空间 V 的两组基，它们可以互相线性表出，假若

$$\begin{cases} \vec{\eta}_1 = c_{11}\vec{\varepsilon}_1 + c_{21}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + c_{n1}\vec{\varepsilon}_n \\ \vec{\eta}_2 = c_{12}\vec{\varepsilon}_1 + c_{22}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + c_{n2}\vec{\varepsilon}_n \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{\eta}_n = c_{1n}\vec{\varepsilon}_1 + c_{2n}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + c_{nn}\vec{\varepsilon}_n \end{cases} \tag{2}$$

记 $C = (c_{ij})_{n\times n}$，将上式用矩阵形式表示成

$$(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \cdots, \vec{\eta}_n) = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n)C \tag{3}$$

称 C 是由基 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ 到 $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_n$ 的过渡矩阵(**transition matrix**).

- 由后文同构的性质, 可知过渡矩阵一定是可逆矩阵.
- C 的第 j 列就是第 j 个新基在原基下的坐标.
- “由基 A (旧) 到基 B (新)” 是指由 A 经过若干线性组合得到 B, 即用旧基表示新基 (以旧表新).

- 设向量$\vec{\alpha}$关于两组基的坐标分别为 $\vec{X}, \vec{Y}$，即

$$\vec{\alpha} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + x_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + x_n\vec{\varepsilon}_n = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n)\vec{X} \quad (4)$$

$$\vec{\alpha} = y_1\vec{\eta}_1 + y_2\vec{\eta}_2 + \cdots + y_n\vec{\eta}_n = (\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \cdots, \vec{\eta}_n)\vec{Y} \quad (5)$$

将 $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_n) = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)C$ 代入(5)有

$$\vec{\alpha} = (\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \cdots, \vec{\eta}_n)\vec{Y} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n)C\vec{Y} \quad (6)$$

比较(4)与(6)的右端，可以得到 $\vec{X} = C\vec{Y}$，由 C 可逆，可得

$$\vec{Y} = C^{-1}\vec{X}.$$

我们把这个结论叙述成一个定理，称为坐标变换公式

定理1 设 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$和 $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_n$是 n 维线性空间 V 的两个基，由 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$到 $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_n$的过渡矩阵是 C，则 C 是可逆矩阵. 如果向量 $\vec{\alpha}$ 在两组基下的坐标分别是 $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\vec{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$\vec{X} = C\vec{Y} \text{ 或 } \vec{Y} = C^{-1}\vec{X}.$$

$V(F)_A$ $\xleftrightarrow[\text{基}A]{1:1\text{对应}}$ $F^n=\{(x_1,\cdots,x_n)|x_i\in\mathbb{R}\}$

过渡矩阵C

过渡矩阵C

$\vec{X}=C\vec{Y}$

$V(F)_B$ $\xleftrightarrow[\text{基}B]{1:1\text{对应}}$ $F^n=\{(y_1,\cdots,y_n)|y_i\in F\}$

同一空间内换基
形成循环图

方法小结: 求不同基之间的过渡矩阵(自学)

方法1. 根据**定义**通过把一组基用另一组表示出来得到过渡矩阵

方法2. 中介法: 求A=?

$$(\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\cdots,\vec{\gamma}_n)=(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\cdots,\vec{\eta}_n)A.$$

$$(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\cdots,\vec{\eta}_n)=(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)B,$$

$$(\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\cdots,\vec{\gamma}_n)=(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)C,$$

$$(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\cdots,\vec{\eta}_n)B^{-1},$$

$$(\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\cdots,\vec{\gamma}_n)=(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\cdots,\vec{\eta}_n)B^{-1}C.$$

例7 设 $\vec{\alpha}_1=(0\quad 1\quad -1)^T, \vec{\alpha}_2=(2\quad 1\quad -1)^T, \vec{\alpha}_3=(-1\quad 2\quad -1)^T,$

$\vec{\beta}_1=(1\quad 1\quad 1)^T, \vec{\beta}_2=(0\quad 1\quad 1)^T, \vec{\beta}_3=(0\quad 0\quad 1)^T,$

求 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 到 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

解

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -9/2 & -4 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

过渡矩阵

方法3. 初等变换法: 适用于向量空间F^n

$$(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\cdots,\vec{\eta}_n)=(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)P,$$

$$B=(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\cdots,\vec{\eta}_n), A=(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\cdots,\vec{\varepsilon}_n),$$

则, $B=AP$, $P=A^{-1}B$,

$$[A,B]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[I,A^{-1}B]=[I,P].$$

方法4. 待定法 (尤其对于不是向量空间的线性空间的情况), 设$P=(x_{ij})_{n\times n}$

$$(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_n)=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n)P.$$

方法小结: 求向量在指定基下的坐标(自学)

方法1. 解方程组法

$$\vec{\alpha} = x_1\vec{\alpha}_1 + x_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + x_n\vec{\alpha}_n,$$

方法2. 初等变换法(适用于向量空间):

求n维列向量$\vec{\alpha}$在基$\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_n$的坐标.

$$\vec{\alpha} = (\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \cdots, \vec{\eta}_n)\vec{X},$$

$$\vec{\alpha} = A\vec{X}, \ \vec{X} = A^{-1}\vec{\alpha}.$$

$$[A, \vec{\alpha}] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [I, A^{-1}\vec{\alpha}] = [I, \vec{X}].$$

方法3. 利用基变换与坐标变换公式:

$$(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_n)=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n)P,$$

如果向量$\vec{\alpha}$在两组基下的坐标分别是

$\overrightarrow{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\overrightarrow{Y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^{\mathrm{T}}$:

$$\vec{\alpha}=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n)\vec{X}$$
$$=(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_n)\vec{Y},$$

则 $\overrightarrow{X}=P\overrightarrow{Y}$ 或 $\overrightarrow{Y}=P^{-1}\overrightarrow{X}$.

例8 设 $\vec{\alpha}_1=(0,1,-1)^T, \vec{\alpha}_2=(2,1,-1)^T, \vec{\alpha}_3=(-1,2,-1)^T, \vec{\beta}=(1,1,1)^T$,

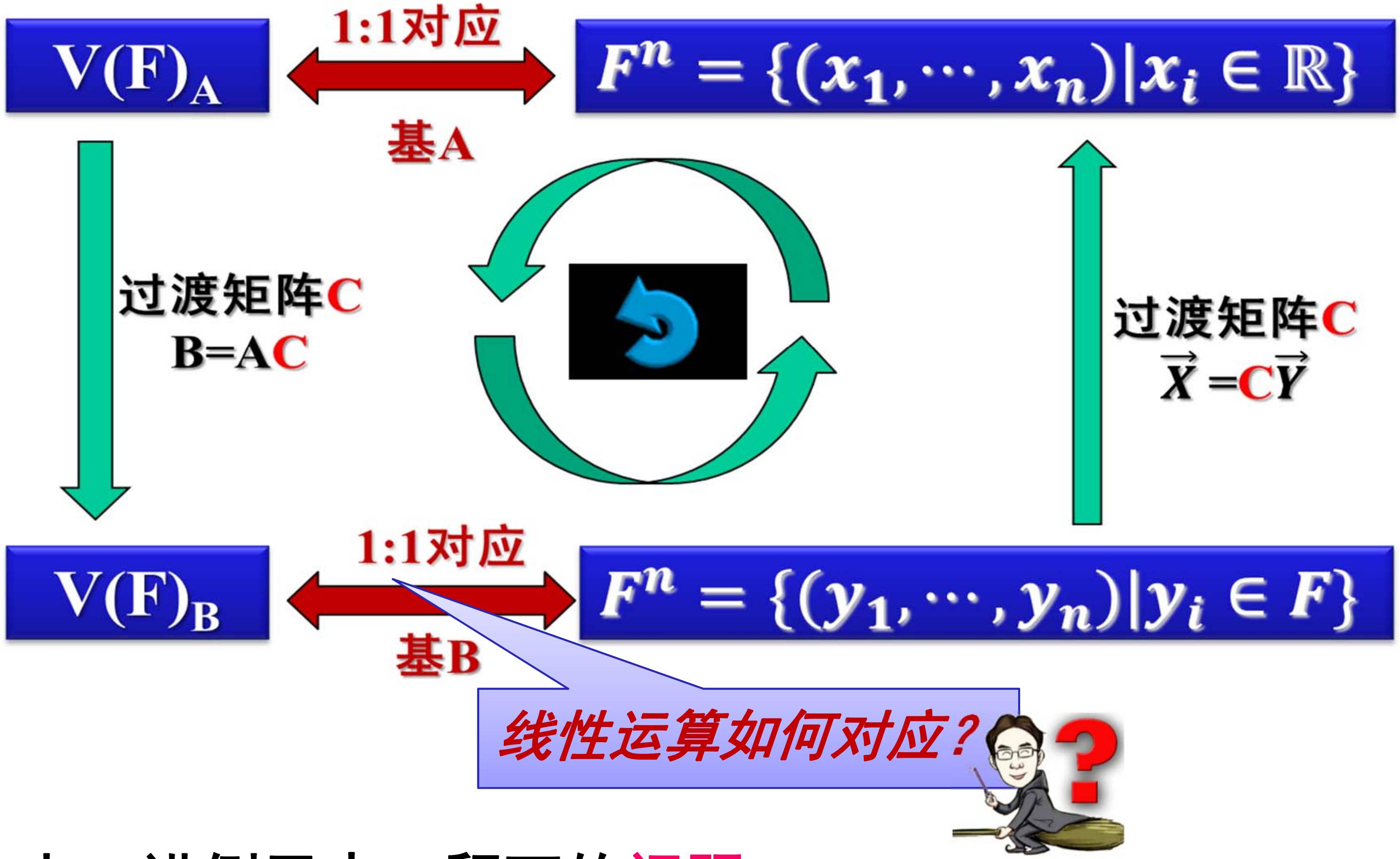
求 $\vec{\beta}$ 在 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 下的坐标 $\vec{X}$.

解

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1.5 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1.5 \\ 1 & 0 & 0 & -4.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore \vec{X}=\begin{bmatrix} -4.5 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$, **验算** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4.5 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



- 上一讲例子中，留下的问题：

$V=M_n(\mathbb{R})$中的矩阵之间的线性关系为何可以完全等价于坐标列向量($\in \mathbb{R}^{n^2}$)之间的线性关系？

四、线性空间与坐标向量空间的同构 ($V(F)\cong F^n$)

定义8 设 V_1 与 V_2 是数域 F 上的两个线性空间，如果存在从 V_1 到 V_2 的一个双射满足：

$$(1)\forall \vec{\alpha},\vec{\beta}\in V_1,\ \text{then}\ \varphi(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\varphi(\vec{\alpha})+\varphi(\vec{\beta}),$$

$$(2)\forall \vec{\alpha}\in V_1,\ k\in F,\ \text{then}\ \varphi(k\vec{\alpha})=k\varphi(\vec{\alpha}),$$

则称φ是线性空间的**同构**(isomorphism)，称V_1同构于(isomorphic to) V_2，记为$V_1\cong V_2$.

例9 设矩阵 A 经过一系列初等行变换变为 B，即：

$$A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n)\xrightarrow{r}(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_n)=B$$

则存在可逆矩阵 P 使得 $PA=B$，故

$$P\vec{\alpha}_1=\vec{\beta}_1,P\vec{\alpha}_2=\vec{\beta}_2,\cdots,P\vec{\alpha}_n=\vec{\beta}_n,\ \therefore P\sum_{i=1}^{n}k_i\vec{\alpha}_i=\sum_{i=1}^{n}k_i\vec{\beta}_i$$

因为P可逆，所以可定义同构映射φ: Col(A)→Col(B).

如何定义？

线性空间同构的性质

性质 (1) $\varphi(\vec{0})=\vec{0}$ (保零元)

$\varphi(-\vec{\alpha})=-\varphi(\vec{\alpha})$ (保负元)

证明 $\varphi(\vec{0})=\varphi(0\vec{\alpha})=0\varphi(\vec{\alpha})=\vec{0}$

$$\varphi(-\vec{\alpha})=\varphi((-1)\vec{\alpha})=(-1)\varphi(\vec{\alpha})=-\varphi(\vec{\alpha})$$

性质(2) $\forall \vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n\in V, k_1,k_2,\cdots,k_n\in F$, (保线性组合)

有 $\varphi(k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_n\vec{\alpha}_n)=k_1\varphi(\vec{\alpha}_1)+k_2\varphi(\vec{\alpha}_2)+\cdots+k_n\varphi(\vec{\alpha}_n)$

证明 对 n 归纳. 当 $n=2$ 时, 即定义2(2). 由定义2和归纳假

设有 $\varphi(k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_n\vec{\alpha}_n)$

$$=\varphi(k_1\vec{\alpha}_1+\cdots+k_{n-1}\vec{\alpha}_{n-1})+k_n\varphi(\vec{\alpha}_n)$$

$$=k_1\varphi(\vec{\alpha}_1)+\cdots+k_{n-1}\varphi(\vec{\alpha}_{n-1})+k_n\varphi(\vec{\alpha}_n)$$

性质 (3) (保线性相关性)

设 $\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n$ 是 V_1 中向量，则 V_2 中向量

$\varphi(\vec{\alpha}_1),\ldots,\varphi(\vec{\alpha}_n)$ 线性相(无)关 $\Leftrightarrow \vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n$ 线性相(无)关.

证明 因为 φ 是双射，所以$\forall\vec{\alpha}\in V_1$, $\varphi(\vec{\alpha})=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\vec{0}$，所以

$$\therefore k_1\vec{\alpha}_1+\cdots+k_n\vec{\alpha}_n=\vec{0}\Leftrightarrow \underline{\varphi(k_1\vec{\alpha}_1+\cdots+k_n\vec{\alpha}_n)}=\vec{0}$$

$$k_1\varphi(\vec{\alpha}_1)+\cdots+k_n\varphi(\vec{\alpha}_n)$$

由线性相(无)关的定义得证.

性质(4) 同构的线性空间有相同的维数. (保维数)

证明 由(3) $\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow\varphi(\vec{\alpha}_1),\ldots,\varphi(\vec{\alpha}_n)$ 线性无关，而 $\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n,\vec{\beta}$ 线性相关 $\Leftrightarrow\varphi(\vec{\alpha}_1),\ldots,\varphi(\vec{\alpha}_n),\varphi(\vec{\beta})$ 线性相关，所以 $\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n$ 是 V_1 的基 $\Leftrightarrow\varphi(\vec{\alpha}_1),\ldots,\varphi(\vec{\alpha}_n)$ 是 V_2 的基.

定义9 设 A, B 是两个非空集合，φ 是 A 到 B 的一个双射，则对每个 $b \in B$，都有唯一的一个 $a \in A$，使得 $\varphi(a) = b$，故可定义映射 φ^{-1}：$B \to A$，$\varphi^{-1}(b) = a$，并称 φ^{1} 为 φ 的逆映射.

性质(5) 同构的逆映射还是同构映射.　(同构对称性)

证明 设 φ 是 V_1 到 V_2 的同构映射，$\forall \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 \in V_2$,

有 $\varphi(\varphi^{-1}(\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2)) = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 = \varphi(\varphi^{-1}(\vec{\beta}_1)) + \varphi(\varphi^{-1}(\vec{\beta}_2))$

$$= \varphi(\varphi^{-1}(\vec{\beta}_1) + \varphi^{-1}(\vec{\beta}_2))$$

$$\therefore \varphi^{-1}(\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2) = \varphi^{-1}(\vec{\beta}_1) + \varphi^{-1}(\vec{\beta}_2)$$

同理 $\forall \vec{\beta} \in V_2, \forall k \in F, \varphi^{-1}(k\vec{\beta}) = k\varphi^{-1}(\vec{\beta})$.

由 φ 是双射可知 φ^{-1} 是双射，所以 φ^{-1} 为同构映射.

性质(6) 设 φ_1 是 V_1 到 V_2 的同构映射, φ_2 是 V_2 到 V_3 的同构映射,

$$\varphi_1: V_1 \to V_2, \vec{\alpha} \mapsto \vec{\beta}; \quad \varphi_2: V_2 \to V_3, \vec{\beta} \mapsto \vec{\gamma};$$

定义 φ_1 和 φ_2 的复合映射为 V_1 到 V_3 的映射

$$\varphi = \varphi_2 \cdot \varphi_1: V_1 \to V_3, \vec{\alpha} \mapsto \vec{\gamma};$$

则 φ 是 V_1 到 V_3 的同构映射，即

两个同构映射的复合映射还是同构映射．(同构的传递性)

证明 $\forall \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \in V_1$, 有

$$\varphi(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) = \varphi_2(\varphi_1(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)) = \varphi_2(\varphi_1(\vec{\alpha}_1) + \varphi_1(\vec{\alpha}_2))$$
$$= \varphi_2(\varphi_1(\vec{\alpha}_1)) + \varphi_2(\varphi_1(\vec{\alpha}_2)) = \varphi(\vec{\alpha}_1) + \varphi(\vec{\alpha}_2)$$

$\forall \vec{\alpha} \in V_1$, $k \in F$, 有 $\varphi(k\vec{\alpha}) = \varphi_2(\varphi_1(k\vec{\alpha})) = \varphi_2(k\varphi_1(\vec{\alpha}))$

$$= k\varphi_2\varphi_1(\vec{\alpha}) = k\varphi(\vec{\alpha}).$$

又因为 $(\varphi_2 \cdot \varphi_1) \cdot (\varphi_1^{-1} \cdot \varphi_2^{-1}) = I_{V_3}, (\varphi_1^{-1} \cdot \varphi_2^{-1}) \cdot (\varphi_2 \cdot \varphi_1) = I_{V_1}$,

$\therefore \varphi = \varphi_2 \cdot \varphi_1$ 是 V_1 到 V_3 的双射, 故 φ 是 V_1 到 V_3 的同构映射.

线性空间与(坐标)向量空间同构的结论:

定理2 F 上的 n 维线性空间 V 同构于 F^n, 即$V(F)\cong F^n$

$V(F)_A$ $\xleftrightarrow[\text{1:1对应}]{\text{一组基}A}$ $F^n=\{(x_1,\cdots,x_n)|x_i\in F\}$

同构?

推论 F 上的两个线性空间同构 $\Leftrightarrow$ 它们的维数相同.
同构是线性空间集合上的等价关系.

(1) 自反性; (2) 对称性; (3) 传递性.

$V_1\cong F^n\cong V_2$

取定一组基
——构建同构的关键

定理证明:

设 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 为 V 的一组基, $\forall\vec{\alpha}\in V$, $\vec{\alpha}$ 在 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 下的坐标 $\vec{X}$ 是唯一确定的, 所以可定义 V 到 F^n 的映射 φ 使得 $\varphi(\vec{\alpha})=\vec{X}$, 显然 φ 是双射, 且若 $\varphi(\vec{\alpha})=\vec{X}=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $\varphi(\vec{\beta})=\vec{Y}=(y_1,\cdots,y_n)^T$. 则

$$\varphi(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\vec{\varepsilon}_i\right)=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)^T$$
$$=\vec{X}+\vec{Y}=\varphi(\vec{\alpha})+\varphi(\vec{\beta})$$

$$\varphi(k\vec{\alpha})=\varphi\left(k\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{\varepsilon}_i\right)=(kx_1,\cdots,kx_n)^T=k\vec{X}=k\varphi(\vec{\alpha}).$$

所以 V 同构于 F^n. ■

本讲小结

1、概念

- 线性空间的定义：“2+4+4法则, 5+3+2法则”
- 线性空间的基和维数：对应极大无关组和秩
- 基之间的过渡矩阵：

$$(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2,\ldots, \vec{\eta}_n) = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2,\ldots, \vec{\varepsilon}_n)P$$ （当$V=F^n$时，$A=BP$）

形式行向量

- 向量在指定基下的坐标

$$\vec{\alpha} = (\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \cdots, \vec{\eta}_n)\vec{Y} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n)\vec{X} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = P\vec{Y} \text{ 或 } \vec{Y} = P^{-1}\vec{X}.$$

2、计算问题

- <u>求基和维数</u>：Gauss消去法
- <u>求过渡矩阵</u>：定义法, 中介法, 初等变换法, 待定系数法
- <u>求向量坐标</u>：解向量方程, 初等变换法, 变换公式

本讲小结

线性空间的同构

- 同构(≅)的概念：双射+保运算
- 同构(≅)的性质

  1. 保零元保负元; 2. 保线性组合
  3. 保线性相关性; 4. 保维数
  5. 同构逆映射; 6. 同构复合

- 同构(≅)的结论

$$n\text{维}V(F) \xleftrightarrow[\cong]{\text{一组基}A} F^n = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_i \in F\}$$

同构是线性空间的等价关系.