《线性代数1》

2019秋

第一章 线性方程组的解法

§1.1 Gauss消元法

杨晶 主讲

万物皆数

以符“代”“数”相忘江湖

两个主人公：
- 矩阵
- 线性方程组

两种盖世武功：
- 矩阵乘法
- 初等变换

金戈铁马争“先”勇“行”

内容提要

- 初等变换与同解方程组
- Gauss消元法

一. 初等变换与同解方程组

引例.《孙子算经》中著名的数学问题，其内容是： “今有雉（鸡）兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问雉兔各几何。”

解：设鸡和兔的数量分别为 x, y, 则

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$$

因为94–35–35=24，故兔子数量 $y=24/2=12$,
则鸡的数量$x=35-12=23$

(实际上，就是用方程②–方程①×2，消去x，求出y后，代回求得x)

一般的线性方程组 (Linear Equations)

定义1 关于n个未知量$x_1, x_2, \ldots, x_n$的线性方程组，形式如下

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

其中

- $m\in\mathbb{N}$为方程组的个数，
- $a_{ij}\in\mathbb{R}$ $(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$称为**系数 (coefficient)**，
- $b_i\in\mathbb{R}$ $(1\le i\le m)$ 称为**常数项 (constant term)**.

📖 线性(一次)方程组的几个基本问题:

Q1. 解的存在问题：　判断方程组是否有解?

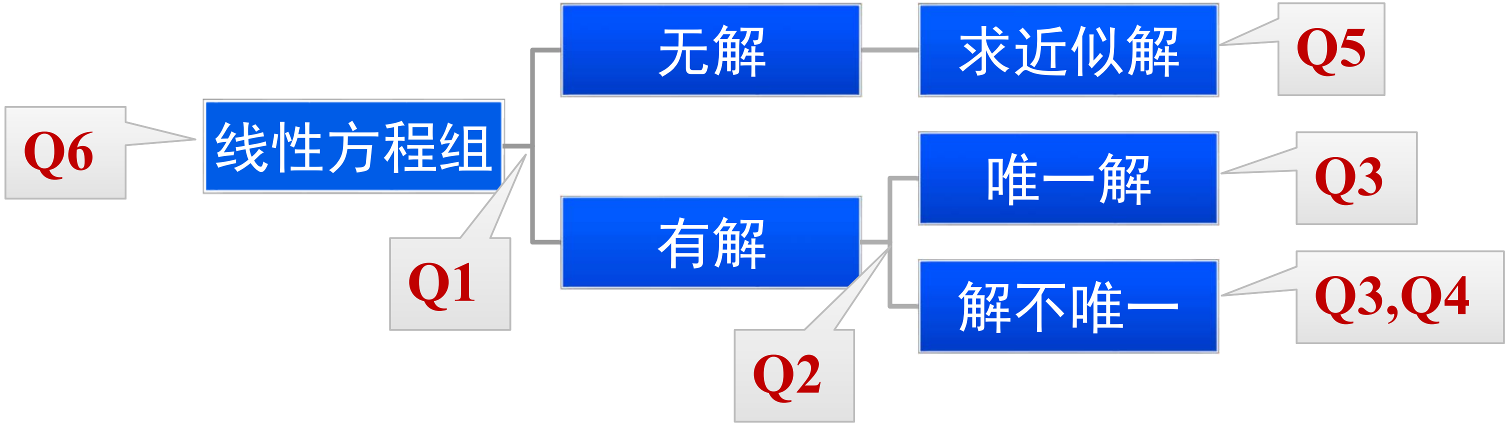
Q2. 解的个数问题：　如果有解，有多少个解?

Q3. 解的求解问题：　能否给出解的公式，或者给出一个算法求出所有的解?

Q4. 解的结构问题：　解不唯一时解集合结构如何?

Q5. 解的近似问题：　如果无解，能否求出一个近似解?

Q6. 对应的几何问题：　线性方程组对应的几何意义是什么?



矩阵(Matrix)的定义

定义2

由 mn 个数排成行列的矩形数表 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

称为类型为 $m\times n$ 的矩阵(matrix), 有时候也简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

当 $m=n$ 时叫 n 阶方阵 (square matrix).

- 特别地, 当$m=n=1$时, 一个1×1的矩阵就是一个数；反之，一个数可视为一个1×1的矩阵.
- 矩阵中的每个分量a_{ij}的下标 i 与 j, 分别表示其所在的行与列的位置.

线性方程组的矩阵表示

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

系数矩阵

(coefficient matrix)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

增广系数矩阵

(augmented matrix)

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)_{m\times(n+1)}$$

注：只有系数和常数项参与了运算，而未知量只起了标记位置的作用

例1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

为了简化运算过程的表达形式，可以只考虑增广矩阵.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_2 - x_3 = 2 & ② - ① \times 2 \\ x_2 - x_3 = 5 & ③ - ① \end{cases}$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_1 \to r_3]{r_2 - 2r_1 \to r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

交换第2, 3个方程组

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_3 = -18 & ③ - ② \times 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_3 - 4r_2 \to r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -18 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad\quad x_2 - x_3 = 5 \\ \quad\quad\quad\quad x_3 = -6 \end{cases} \qquad ③ \times 1/3$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \quad\quad = 19 \\ \quad\quad x_2 \quad\quad = -1 \\ \quad\quad\quad\quad x_3 = -6 \end{cases} \qquad \begin{matrix} ①\text{-}③\times 3 \\ ②+③ \\ \ \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad = 9 \\ \quad x_2 \quad = -1 \\ \quad\quad x_3 = -6. \end{cases} \qquad (①+②)/2$$

$$\frac{1}{3}r_3 \to r_3 \quad \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} r_1 - 3r_3 \to r_1 \\ r_2 + r_3 \to r_2 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$(r_1 + r_2)/2 \to r_1 \quad \left(\begin{array}{c:c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 9 \\ -1 \\ -6 \end{matrix} \end{array}\right)$$

问题1：上述过程使用了哪些操作？

总结一下，中学所用的消元法解方程组，只是对方程进行如下变形：

- 交换两个方程的位置
- 用一个非零数乘以某个方程
- 把一个方程的倍数加到另一个方程上

把上述操作简称为：

- 对换
- 倍乘
- 倍加

统称为方程组的初等变换

(elementary operation)

对应到(增广)系数矩阵的操作：

- 行对换
- 行倍乘
- 行倍加

统称为矩阵的初等行变换

(elementary row operation)

投票 最多可选1项 设置

对于例1中线性方程组的两种等价解法，你更愿意用哪一种?为什么?

A 前者——对方程的初等变换

B 后者——对增广系数矩阵的初等行变换

问题2： 为什么可以这样来求解线性方程组?

如此求解方法的理论保证是什么?

提交

定理1：线性方程组的初等变换不改变方程组的解.

证明： 显然，对换和倍乘变换不改变方程组的解。下面考虑倍加的情况。

设把原方程组(1)的第i个方程的k倍加到第j个方程上得到新的方程组，记为(2)式，则(1)与(2)只有第j个方程不同。方程组(2)的第j个方程为：

$$\left(ka_{i1}+a_{j1}\right)x_1+\left(ka_{i2}+a_{j2}\right)x_2+\cdots\left(ka_{in}+a_{jn}\right)x_n=kb_i+b_j \qquad (3)$$

设$(c_1,c_2,\ldots,c_n)$是方程组(1)的一个解，则由其第i、j个方程有

$$a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots a_{in}c_n=b_i$$

$$a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots a_{jn}c_n=b_j$$

所以 $$\left(ka_{i1}+a_{j1}\right)c_1+\left(ka_{i2}+a_{j2}\right)c_2+\cdots\left(ka_{in}+a_{jn}\right)c_n=kb_i+b_j$$

这表明$(c_1,c_2,\ldots,c_n)$也满足方程(3)，即新方程组(2)的第j个方程; 而(2)的其余方程与(1)一样，故$(c_1,c_2,\ldots,c_n)$也为方程组(2)的一个解.

反之，由倍加变换是可逆的过程，可证明(2)的每个解也是(1)的解。具体来说，设$(d_1,d_2,\ldots,d_n)$为新方程组(2)的一个解，则由其第i、j个方程，有

$$a_{i1}d_1+a_{i2}d_2+\cdots a_{in}d_n=b_i$$

$$\left(ka_{i1}+a_{j1}\right)d_1+\left(ka_{i2}+a_{j2}\right)d_2+\cdots\left(ka_{in}+a_{jn}\right)d_n=kb_i+b_j$$

这说明

$$a_{j1}d_1+a_{j2}d_2+\cdots a_{jn}d_n=b_j$$

而(1)的其余方程与(2)一样，所以$(d_1,d_2,\ldots,d_n)$也为方程组(2)的一个解. ■

二. Gauss消元法

由定理知, 对一个线性方程组做初等变换，得到一个新的方程组，则这两个线性方程组是同解的.

具体地，设方程组(1)中x_1的系数不全为零，总可以通过对换，使得 $a_{11}\neq 0$, 于是，把第一个方程的$-\dfrac{a_{j1}}{a_{11}}$倍加到第j个方程上 $(2\leq j\leq m)$，即可在第2～m个方程中消去未知量 x_1. 按类似的步骤，考察第2～m个方程，对其他未知量继续做下去。以此类推，便可求解线性方程组.

这样的计算方法就称为<u>Gauss消元法</u>.

(德, C. F. Gauss, 1777 ~1855)

注：在具体求解方程组时,只需对增广系数矩阵$(A, \vec{b})$做初等变换即可.
但, 只能做矩阵的行变换, 不能做列变换! 为什么？

例2 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$

解:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -3 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 45 & -30 & -10 \\ 0 & 0 & 70 & -15 & -20 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -48 \end{array}\right) \to \underline{\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

单选题 1分

设置

当Gauss消元法进行过程中，出现如下的情况，说明什么？

$$\cdots\cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{d} \end{array}\right) \quad (d \neq 0)$$

A 说明方程组有唯一解

B 说明方程组有无穷多个解

C 说明方程组无解

D 与方程组的解的情况无关

提交

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases} \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \cdots \to \underline{\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

上面的矩阵的最后一行对应的方程是

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1$$

不管x_1, x_2, x_3, x_4取何值，上式均不可能成立，所以原方程组无解.

例3 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 - 11x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

解:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & -2 & 10 \\ 2 & -2 & -11 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

这时方程组化为 $\begin{cases} x_1 - x_2 - \frac{1}{5}x_4 = \frac{11}{5} \\ x_3 - \frac{2}{5}x_4 = \frac{2}{5} \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ 或写为 $\begin{cases} x_1 = x_2 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{11}{5} \\ x_3 = \frac{2}{5}x_4 + \frac{2}{5} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + \dfrac{1}{5}x_4 + \dfrac{11}{5} \\ x_3 = \dfrac{2}{5}x_4 + \dfrac{2}{5} \end{cases} \qquad (4)$$

可以看出，对于未知量x_2, x_4的任一组取值， 都可以唯一决定出x_1, x_3的值。称x_1, x_3为主变量，x_2, x_4为自由未知量。用自由未知量表示主变量的(4)式称为方程组的一般解，或者把(4)式表示为如下形式

$$\begin{cases} x_1 = s + \dfrac{1}{5}t + \dfrac{11}{5} \\ x_2 = s \\ x_3 = \dfrac{2}{5}t + \dfrac{2}{5} \\ x_4 = t \end{cases} \quad (\forall s, t \in \mathbb{R})$$

（有无穷多个解）

本讲小结

- 线性方程组的三种初等变换：对换，倍乘，倍加
- 初等变换不改变方程组的解
- 增广矩阵的初等行变换：Gauss消元法

思考问题：

Gauss消元法何时停止？

Gauss消元法可否判断线性方程组解的情况?(无解，唯一解，很多解)

Gauss消元的过程是不是唯一的？