《线性代数》

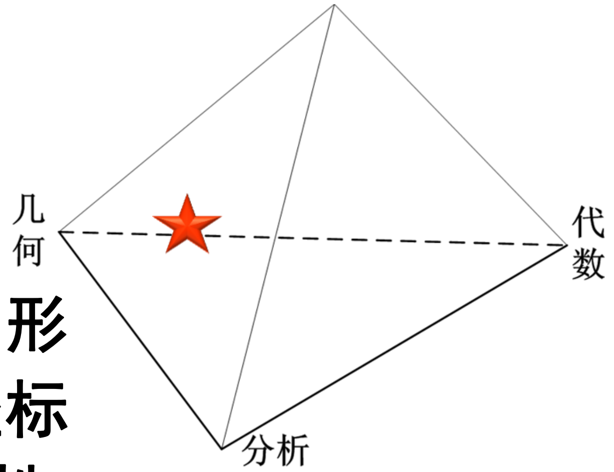
第三章 几何空间中的向量

§3.1 空间中的向量及其运算

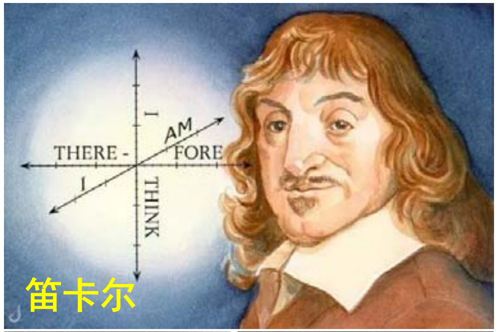
2019年秋

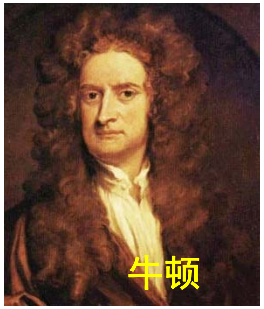
杨晶 主讲

➢ 解析几何&向量代数的发展历史



- 解析几何是利用代数方法来研究几何图形性质的一门学科：通过在空间中建立坐标系，将点用坐标表出，然后图形的几何性质可以用坐标之间的关系，特别是代数关系来表示.
  - 平面解析几何
  - 空间解析几何





- 主要是笛卡尔(René Descartes, 1596~1650)和费尔马(Pierre de Fermat, 1601~1665)共同创立
- 解析几何的出现为牛顿 (Issac Newton, 1643~1727) 创立微积分创造了条件.

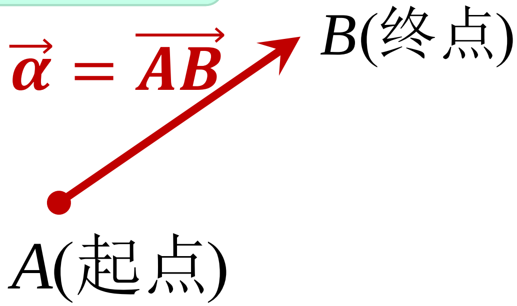
- 空间$\boxed{\text{向量}}$ (几何) 问题与作为它的一种表示的$\boxed{\text{坐标}}$ (代数) 问题的互化

内容提要

- 几何向量的基本概念
- 几何向量的线性运算
- 几何向量的位置关系
- 几何空间中的仿射坐标系
- 几何空间中的直角坐标系

(一) 向量的基本概念

定义1 既有大小又有方向的量称为**向量(vector)**.



向量的特征: 大小(长度length)和方向

向量的表示: 几何表示—用有向线段

代数表示—用坐标 (x, y, z)

向量的符号: $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \overrightarrow{AB}, \ldots$

向量的大小(模长): $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|, |\vec{\gamma}|, |\overrightarrow{AB}|, \ldots \in \mathbb{R}$

(自由)向量的相等: $\vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 的大小相等而且方向相同.

$\vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow$ 把起点平移在一起, 则完全重合.

几种特殊的向量

- **反向量:**

$\vec{\alpha}$的反向量是与$\vec{\alpha}$大小相等但方向相反的向量，记为 $-\vec{\alpha}$.

- **零向量:**

长度(即模)为零的向量叫零向量，记为$\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合，故可认为其方向任意或者说方向不确定.

- **单位向量:**

模为1的向量叫单位向量, 通常用$\vec{e}$表示.

主观题 3分

设置

讨论并回答如下问题

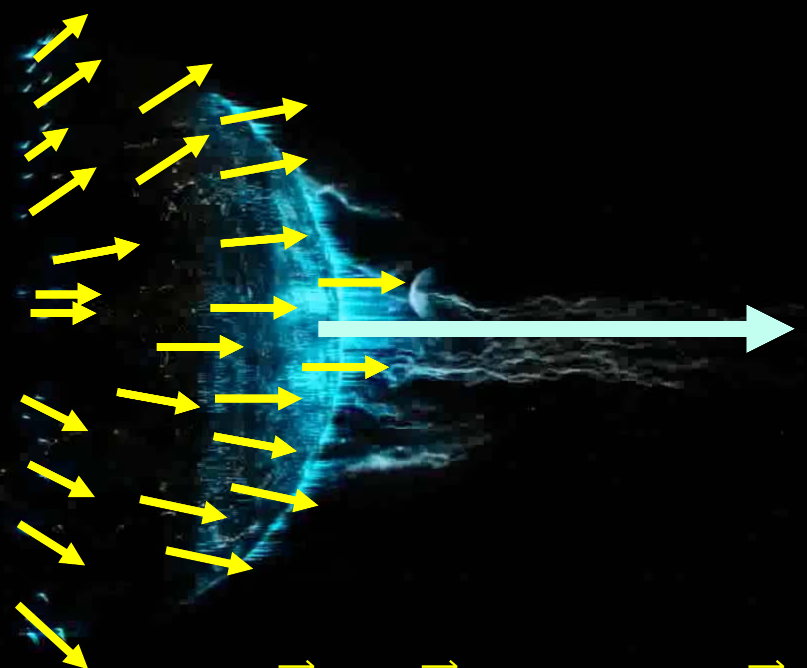
问题1 单位向量唯一吗? 零向量唯一吗?

问题2 如果把所有单位向量的起点都放在一处，终点构成一个什么几何图形?

问题3 实数与向量的区别?

作答

引：《流浪地球》中的行星发动机



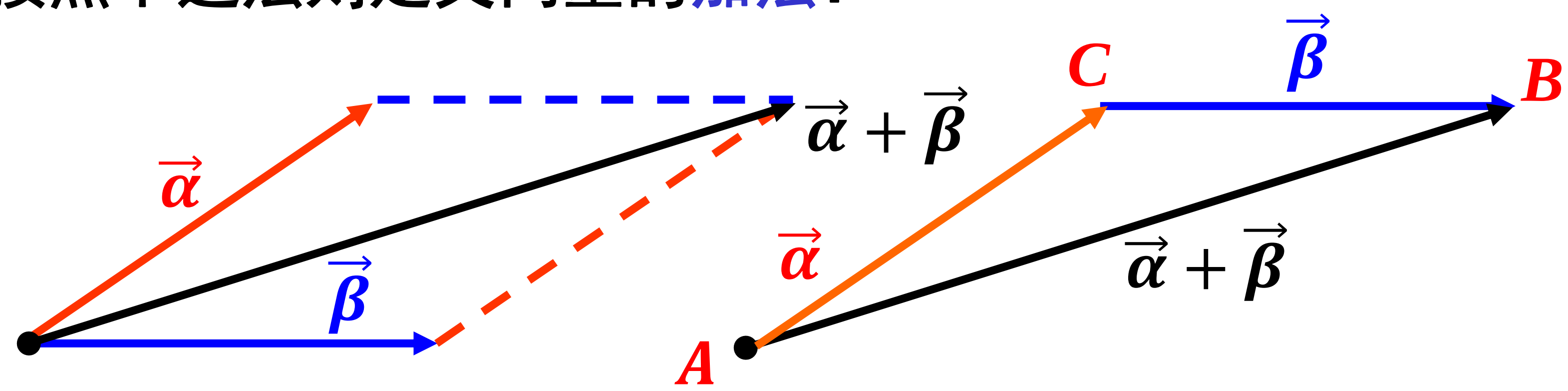
$$k_1\vec{F}_1+k_2\vec{F}_2+\cdots+k_{10000}\vec{F}_{10000}$$

(二) 向量的线性运算 (加法&数乘)

➢ 向量的加法

● 源自于物理中的两个有方向的量的合成，从而引入向量加法的概念.

● 按照下述法则定义向量的**加法**：



平行四边形法则　　　　三角形法则

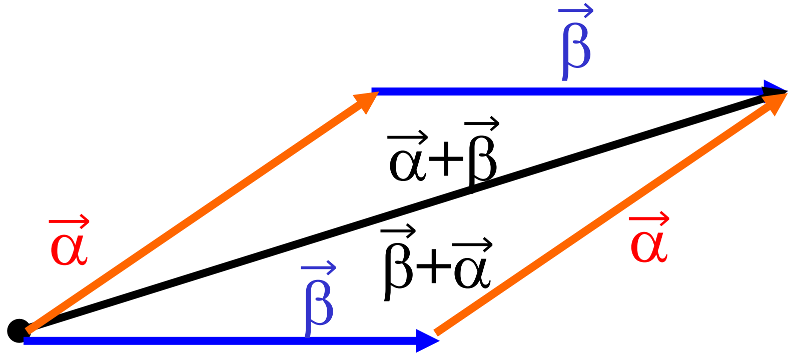
● 对于起点终点表示形式向量的**加法**：

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$$

增加中间点；
殊途同归

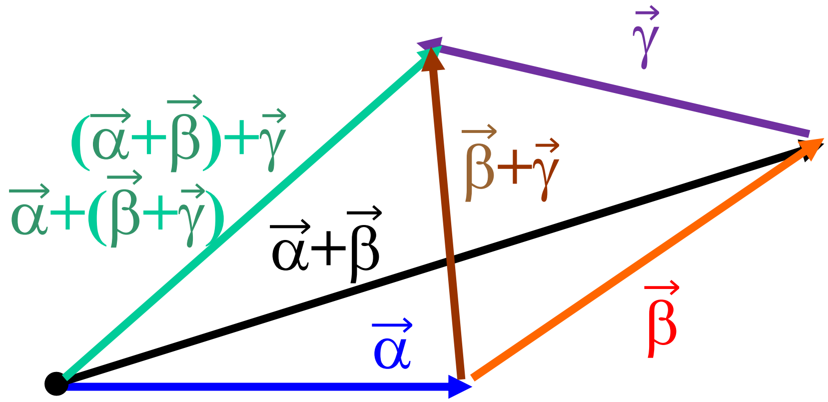
- **向量加法运算的性质:**

(1) 交换律: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$



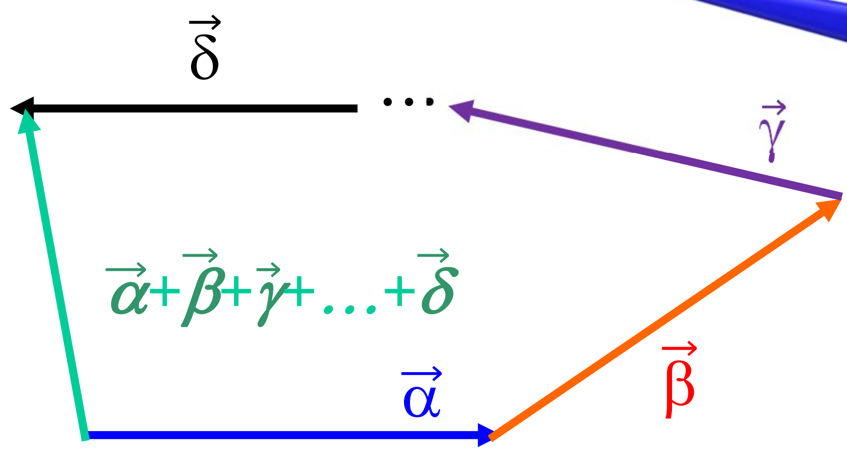
(2) 结合律:

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$$



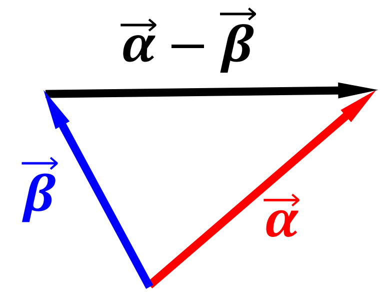
$\Rightarrow$ 多个向量相加的**折线法则**

为什么要有“平移等价”的规定



(3) 零向量: $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$

(4) 反向量: $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=(-\vec{\alpha})+\vec{\alpha}=\vec{0}$



- 利用加法和反向量(也叫负向量)可以定义减法:

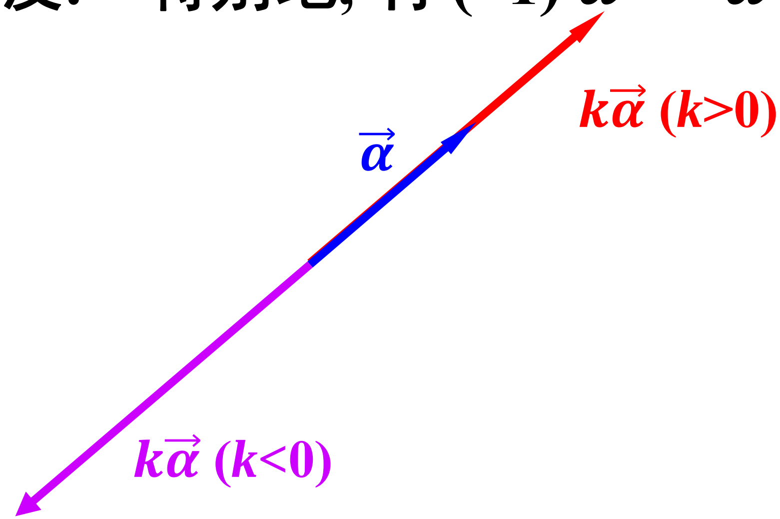
$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$$

对起点终点形式的向量
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{**}+\overrightarrow{**}$?

- 向量的数乘(scalar-multiplication), 记作 $k\vec{\alpha}$, 是如下向量

长度为 $|k||\vec{\alpha}|$, 方向为: 当 $k>0$ 时, 与 $\vec{\alpha}$ 相同,

当 $k<0$ 时, 与 $\vec{\alpha}$ 相反. 特别地, 有 $(-1)\vec{\alpha}=-\vec{\alpha}$



➤ 数乘运算的性质:

(课下验证)

(5) $1\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$

(6) $k(h\vec{\alpha})=(kh)\vec{\alpha}$

加法 & 数乘 ⇒ 线性组合

定义2. 设 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 是s个空间向量，$k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbb{R}$，称

$$k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + k_s\vec{\alpha}_s$$

是向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 的**线性组合(linear combination)**.

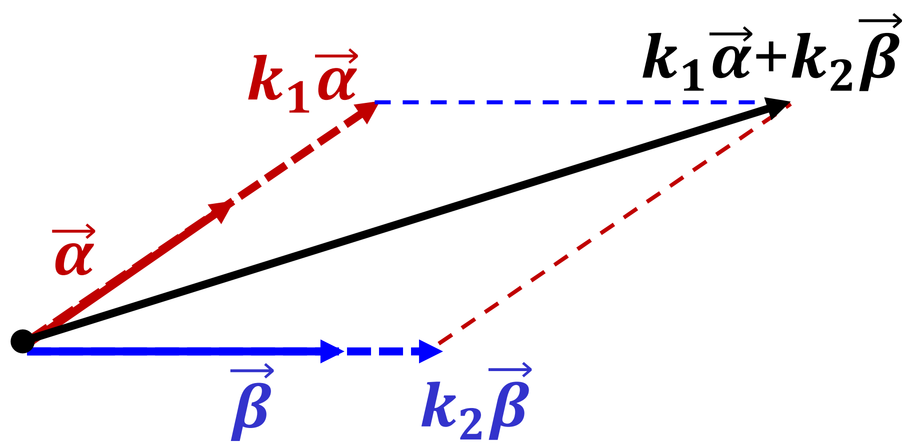
定义3. 给定空间向量 $\vec{\beta}$ 与向量组$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$，若存在一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbb{R}$，使得 $\vec{\beta} = k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + k_s\vec{\alpha}_s$，则称 $\vec{\beta}$可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ **线性表示** (**线性表出**).

- 加法与数乘混合运算的性质

(课下验证)

(7) $(k+h)\vec{\alpha} = k\vec{\alpha} + h\vec{\alpha}$

(8) $k(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = k\vec{\alpha} + k\vec{\beta}$



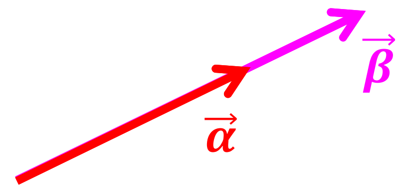
(三) 空间向量的位置关系

- **共线向量**： 两个方向相同或相反的向量, 或者说两个平行于同一直线的向量称为共线向量, 记为: $\vec{\alpha} \mathbin{/\!/} \vec{\beta}$
- **共面向量**： 平行于同一平面的向量称为共面向量.

- 两个向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 共线

$\Leftrightarrow$ 存在数k, 使 $\vec{\alpha} = k\vec{\beta}$ 或 $k\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

$\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 k_1, k_2, 使 $k_1\vec{\alpha} + k_2\vec{\beta} = \vec{0}$.

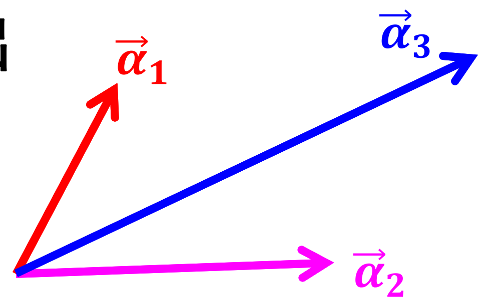


- 三个向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$共面

$\Leftrightarrow \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$中某一个可被另外两个线性表出

$\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3 使

$$k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + k_3\vec{\alpha}_3 = \vec{0}.$$



定理1 两个向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 x, y 使得 $x\vec{\alpha} + y\vec{\beta} = \vec{0}$.

定理2 三个向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3 使 $k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + k_3\vec{\alpha}_3 = \vec{0}$

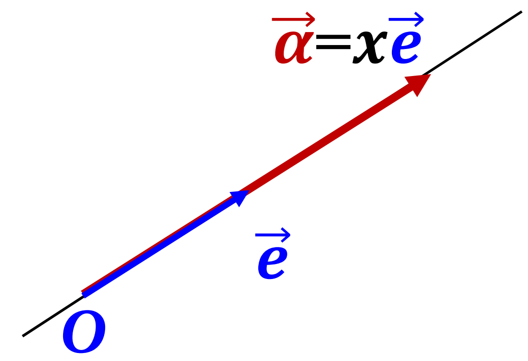
✓ 零向量与一般向量的位置关系如何? 答: $\vec{0} \,//\, \vec{\alpha}$ $(\forall \vec{\alpha})$.

✓ $k\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\alpha}$ 的位置关系如何? 答: $k\vec{\alpha} \,//\, \vec{\alpha}$ $(\forall \vec{\alpha}, \forall k)$

(四) 几何空间的仿射坐标系

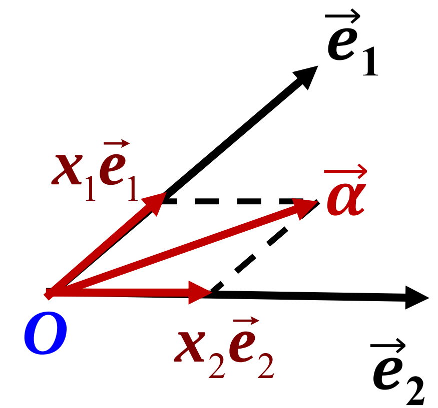
■ **直线上** 取定一非零向量 $\vec{e}$, 则该直线上任何向量都可以唯一表示为

$$\vec{\alpha}=x\vec{e},\quad \vec{\alpha}\leftrightarrow x,\ x\in\mathbb{R}.$$



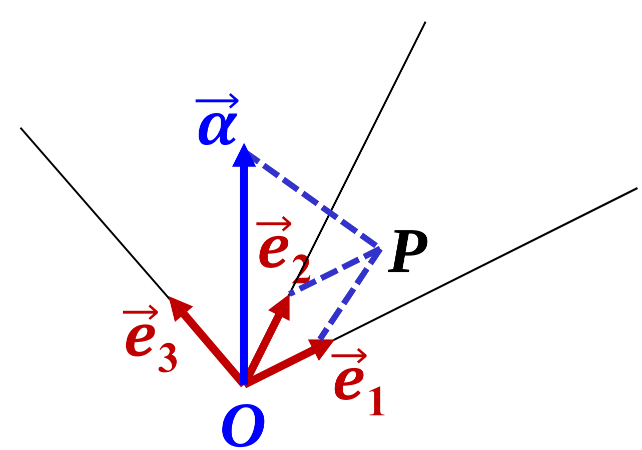
■ **平面上** 取定两个不共线的向量 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, 平面上任何向量都可表示为

$$\vec{\alpha}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2,\quad \vec{\alpha}\leftrightarrow(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$



■ **空间中** 任取三个不共面的向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, 空间中任何一个向量可唯一表为: $\vec{\alpha}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$,

$$\vec{\alpha}\leftrightarrow(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3.$$

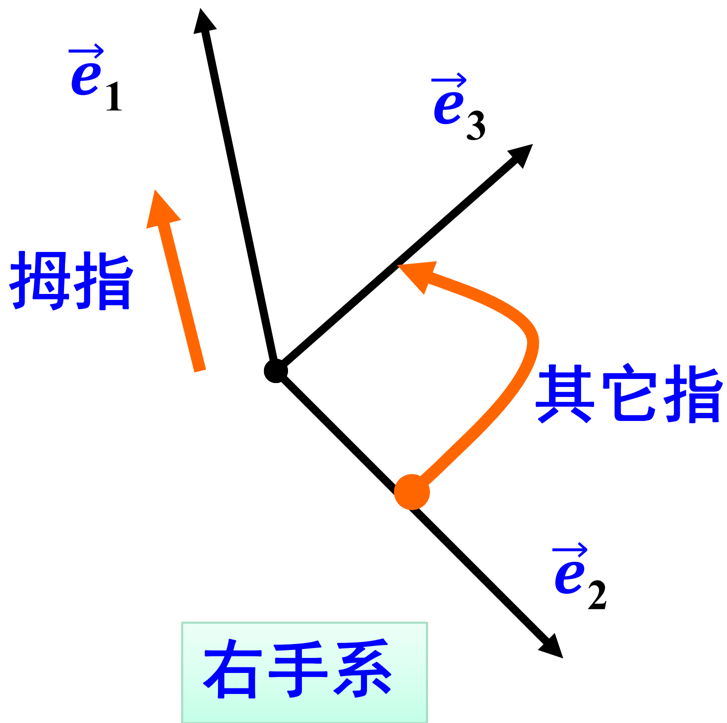


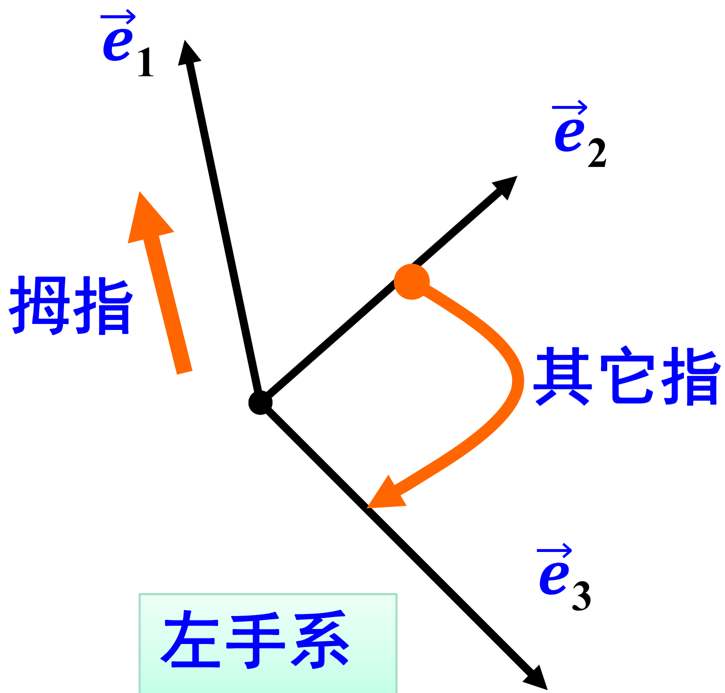
定义4 在空间中：选定一个固定点 O, 选定三个不共面向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, 则它们可以构成一个仿射坐标系(coordinate frame), 记作: $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$.

- O: 原点(origin)
- $\vec{e}_i$: 坐标向量or基向量
- $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$: 基(bases),
- (x_1, x_2, x_3): 坐标(coordinate)

> 注意基向量的有序性

> 根据 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 的相互位置关系分左手系和右手系两种





- 类似有坐标轴、卦限等概念
- 在仿射坐标系下：向量↔坐标
- 向量用基向量表示的矩阵形式

$$\vec{\alpha} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- 向量 $\vec{\alpha}$ 可简记为：$\vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

➢ 向量运算的坐标化

引进仿射坐标系一个很重要的目的是把几何向量的运算化为坐标的代数运算. 这正是解析几何思想的核心.

定理3 设 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 为一个空间仿射坐标系, 在这个空间仿射坐标系下有 $\vec{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},\vec{\beta}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$, 则有

$\vec{\alpha}\pm\vec{\beta}=(x_1\pm y_1,x_2\pm y_2,x_3\pm y_3)^{\mathrm{T}},\forall k\in\mathbb{R},k\vec{\alpha}=(kx_1,kx_2,kx_3)^{\mathrm{T}}$.

证明 把 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 写成 $\vec{\alpha}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3,\vec{\beta}=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+y_3\vec{e}_3$, 由向量加法的交换律、结合律和分配律可得

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}\pm\vec{\beta}&=(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3)\pm(y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+y_3\vec{e}_3)\\&=(x_1\vec{e}_1\pm y_1\vec{e}_1)+(x_2\vec{e}_2\pm y_2\vec{e}_2)+(x_3\vec{e}_3\pm y_3\vec{e}_3)\\&=(x_1\pm y_1)\vec{e}_1+(x_2\pm y_2)\vec{e}_2+(x_3\pm y_3)\vec{e}_3\end{aligned}$$

$$\therefore\vec{\alpha}\pm\vec{\beta}=(x_1\pm y_1,x_2\pm y_2,x_3\pm y_3)$$

同理有 $\forall k\in\mathbb{R},k\vec{\alpha}=(kx_1,kx_2,kx_3)$

填空题 1分

设置

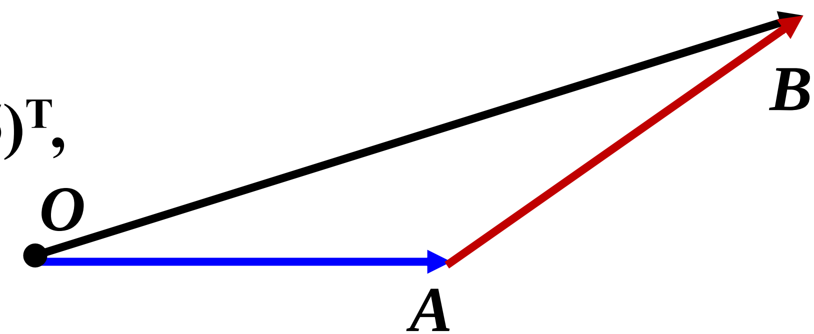
体会**点的坐标**和**向量坐标**的区别.

例2 定义点 A 的坐标为**向量** $\overrightarrow{OA}$ 的坐标，已知点的坐标 $A(3, 1, 2)$，$B(1, -1, 5)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标= [填空1]

解 由 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}=(1,-1,5)^{T}$,

$\overrightarrow{OA}=(3,1,2)^{T}$,

所以向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 $(-2,-2,3)^{T}$.



结论: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)^{T}$, 可验证平移不变性.

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

➢ 几何向量共线、共面的坐标条件

(1) $\vec{\alpha} \,/\!/\, \vec{\beta} \Leftrightarrow$ 对应坐标分量成比例

证明 由定理1两个向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 λ, μ 使得 $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\vec{0}$, 把 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 写成

$$\vec{\alpha}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}, \vec{\beta}=y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k},$$

则存在不全为零的数 λ, μ 使得 $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\vec{0}$, 而

$$\vec{0}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\lambda(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k})+\mu(y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k})$$

$$=(\lambda x_1+\mu y_1)\vec{i}+(\lambda x_2+\mu y_2)\vec{j}+(\lambda x_3+\mu y_3)\vec{k}$$

$$\Leftrightarrow \vec{0}=\lambda x_1+\mu y_1=\lambda x_2+\mu y_2=\lambda x_3+\mu y_3$$

$$\Leftrightarrow x_1:y_1=x_2:y_2=x_3:y_3.$$

(2) $\vec{\alpha}_1=(x_1,x_2,x_3),\vec{\alpha}_2=(y_1,y_2,y_3),\vec{\alpha}_3=(z_1,z_2,z_3)$ 共面

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

证明 三个向量 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 共面 $\Leftrightarrow \exists$ 不全为零的数 k_1,k_2,k_3 使

$$k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+k_3\vec{\alpha}_3=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad k_1(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+k_2(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}+k_3(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\vec{i},\vec{j},\vec{k})\left(k_1\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}\right)=\vec{0}$$

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 有非零解. $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$

填空题 1分

设置

例. 已知向量$(4,6,2),(6,-9,3),(6,-3,a)$共面，求$a$.= [填空1]

解. 向量$(4,6,2),(6,-9,3),(6,-3,a)$共面，则

$$0=\begin{vmatrix}4&6&2\\6&-9&3\\6&-3&a\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}2&3&1\\2&-3&1\\6&-3&a\end{vmatrix}=36\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\3&-1&a\end{vmatrix}$$

$$=36\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&2\\4&0&a+1\end{vmatrix}=72\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\4&0&a+1\end{vmatrix}=-72\begin{vmatrix}1&1\\4&a+1\end{vmatrix}$$

$$=-72(a-3).$$

因此$a=3.\square$

作答

(五) 几何空间的直角坐标系

- 空间直角坐标系是特殊的仿射坐标系:

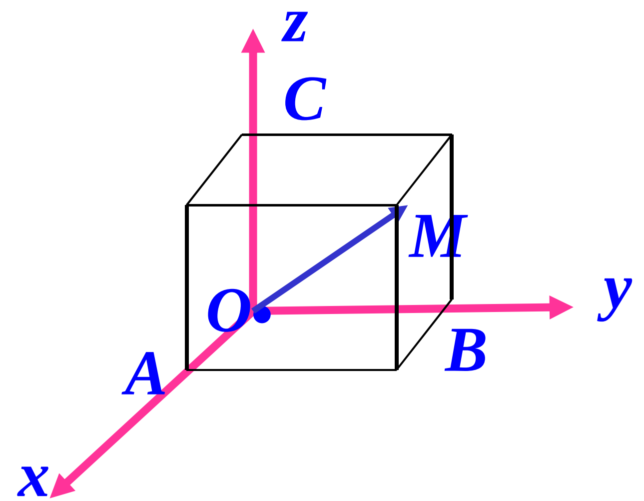
  (1) 坐标向量两两垂直

  (2) 每个坐标向量都是单位向量

  (3) 习惯上把 x, y, z 轴上的坐标向量分别表示为: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

- 下面是直角坐标系下一些重要公式

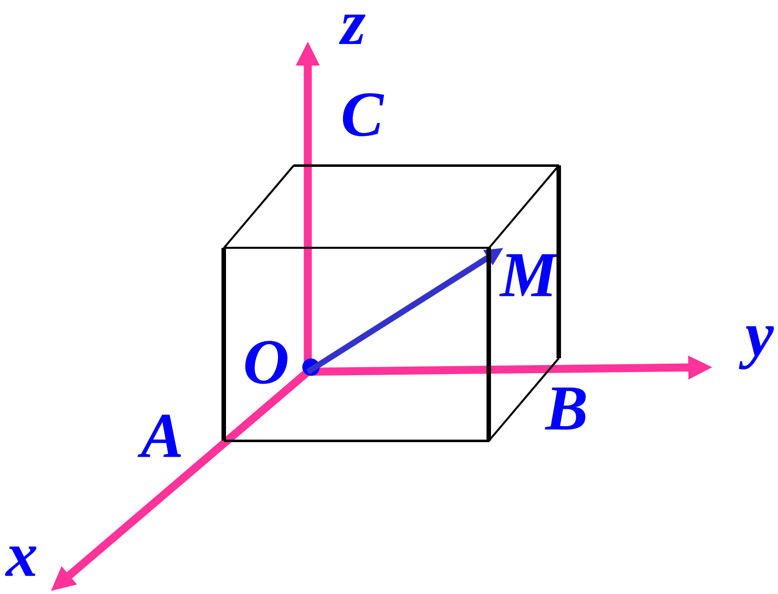
1. 直角坐标系下两点间距离公式



$$P=(x_1,y_1,z_1), Q=(x_2,y_2,z_2)$$

$$M=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)^T,$$

$$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$



2. 在空间中选定一个直角坐标系$\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$，设向量 $\overrightarrow{OM}\neq\vec{0}$ 与 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 的夹角分别为α,β,γ，则称 α,β,γ，为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的方向角，而称 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为 $\overrightarrow{OM}$ 的方向余弦.

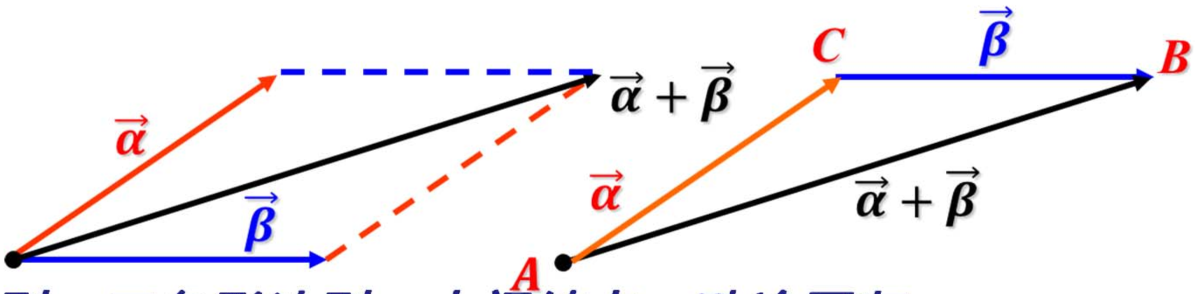
$$\because \cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OM}|},\cos\beta=\frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OM}|},\cos\gamma=\frac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OM}|},$$

所以 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

本讲小结

1、向量定义：$\begin{cases}\text{数量}(scalar)\text{：面积、温度、时间等}\\ \text{向量}(vector)\text{：速度、力、位移等}\end{cases}$ → 几何

- 大小
- 方向
- 平移不变性



2、向量的线性运算

- 加法：*平行四边形法则，三角形法则，中间结点，殊途同归*
- 数乘：

$$k\vec{\alpha}\begin{cases}\text{长度: } |k\vec{\alpha}|=|k||\vec{\alpha}|;\\ \text{方向: }\begin{cases}k>0\text{时},k\vec{\alpha}\text{与}\vec{\alpha}\text{的方向相同};\\ k<0\text{时},k\vec{\alpha}\text{与}\vec{\alpha}\text{的方向相反}.\end{cases}\end{cases}$$

- 减法：*以被减向量为终点；化为加法*

(1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$　　(2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$

(3) $\vec{0}+\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$　　(4) $(-\vec{\alpha})+\vec{\alpha}=\vec{0}$

(5) $1\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$,　　(6) $k(h\vec{\alpha})=(kh)\vec{\alpha}$

(7) $(k+h)\vec{\alpha}=k\vec{\alpha}+h\vec{\alpha}$　　(8) $k(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=k\vec{\alpha}+k\vec{\beta}$

本讲小结

解析几何：用代数的方法解决几何问题.

3、空间向量的坐标化→仿射坐标系

- O: 原点,
- $\vec{e}_i$: 基向量
- (x_1, x_2, x_3): 坐标

$$\vec{\alpha} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\alpha} \in \{\text{空间向量}\} \xleftrightarrow{1:1} (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

解析几何核心思想

→直角坐标系：距离&角度公式

4、空间向量的共线与共面条件：

(1) $\vec{\alpha} \,/\!/\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow$ 对应坐标分量成比例

(2) $\vec{\alpha}_1 = (x_1, x_2, x_3), \vec{\alpha}_2 = (y_1, y_2, y_3), \vec{\alpha}_3 = (z_1, z_2, z_3)$ 共面

$\Leftrightarrow$ $k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + k_3\vec{\alpha}_3 = \vec{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$