《线性代数》

第二章 行列式

§2.1 二阶, 三阶行列式

2019秋

杨晶 主讲

内容提要

- 二阶行列式
- 三阶行列式
- 二阶行列式的性质
- 三阶行列式的展开式
- 三阶行列式的性质

引(回顾). 《孙子算经》中著名的数学问题，其内容是：“今有雉（鸡）兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问雉兔各几何。”

解：设鸡和兔的数量分别为 x, y, 则

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$$

因为94–35–35=24，故兔子数量 $y=24/2=12$,

则鸡的数量$x=35-12=23$

(实际上，就是用方程②–方程①×2，消去x，求出y后，代回求得x)

一、二阶行列式的引入

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

$$(1)\times a_{22}: \quad a_{11}a_{22}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(2)\times a_{12}: \quad a_{12}a_{21}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_2a_{12},$$

两式相减消去 x_2 ,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \qquad (3)$$

由方程组的四个系数确定.

1. 二阶行列式的定义

由四个数排成二行二列（横排称行(row)、竖排称列(column))的数表

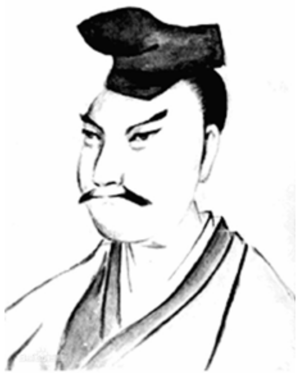
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \qquad (4)$$

构成的表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为数表(4)所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

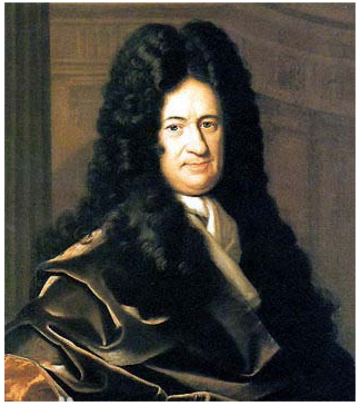
即

$$\boxed{D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.}$$



行列式的提出

（Determinant）



行列式的概念最初是伴随着方程组的求解而发展起来的。行列式的提出可以追溯到十七世纪，最初的雏形由日本数学家关孝和与德国数学家戈特弗里·莱布尼茨各自独立得出，时间大致相同。

- 日本数学家关孝和在1683年写了一部名为解伏题之法的著作，意思是“解行列式问题的方法”，书中对行列式的概念和它的展开已经有了清楚的叙述。
- 欧洲第一个提出行列式概念的是德国数学家，微积分学的奠基人之一莱布尼茨。

2. 二阶行列式的计算 —— 对角线法则

主对角线
(diagonal)

副对角线
(counter-diagonal)

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. 用行列式表示二元一次方程组的解

替换后的行列式

用消元法解二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$(2)\times a_{22}: a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(3)\times a_{12}: a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12},$$

两式相减消去 x_2，得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$

类似地，消去 x_1，得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得 $x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$，$x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

系数行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则当系数行列式 $D \neq 0$时，

二元线性方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注　分母都为原方程组的系数行列式.

分子分别为替换1,2列后的行列式

例1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 = 10, \\ 5x_1 + 7x_2 = 29. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 42 - (-20) = 62 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 29 & 7 \end{vmatrix} = 186, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 29 \end{vmatrix} = 124,$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{186}{62} = 3, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{124}{62} = 2.$$

二、三阶行列式的引入

对含参三元线性方程组：

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}} x_1 + \boxed{a_{12}} x_2 + \boxed{a_{13}} x_3 = b_1 \\ \boxed{a_{21}} x_1 + \boxed{a_{22}} x_2 + \boxed{a_{23}} x_3 = b_2 \\ \boxed{a_{31}} x_1 + \boxed{a_{32}} x_2 + \boxed{a_{33}} x_3 = b_3 \end{cases}$$

如何求未知量 x_1, x_2, x_3 ?

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - b_1 a_{23} a_{32} - a_{12} b_2 a_{33} - a_{13} a_{22} b_3}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11} b_2 a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} b_3 - a_{11} a_{23} b_3 - b_1 a_{21} a_{33} - a_{13} b_2 a_{31}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}} \\ x_3 = \dfrac{a_{11} a_{22} b_3 + a_{12} b_2 a_{31} + b_1 a_{21} a_{32} - a_{11} b_2 a_{32} - a_{12} a_{21} b_3 - b_1 a_{22} a_{31}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}} \end{cases}$$

1. 三阶行列式的定义

三项的分母相同，均为

$$\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned} \triangleq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D$$

1. 六项代数和，每一项都是三个元相乘；
2. 分析每项三个元素的下标，它们取自不同的行与列；
3. 行下标按升序排列后, 列下标恰好取遍1,2,3的所有全排列.

—— D称为三阶行列式

2. 三阶行列式的计算

(1) 对角线法则(沙路法)

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}
$$

$$
- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.
$$

注意　红线上三元素的乘积冠以正号,

蓝线上三元素的乘积冠以负号.

(2) 拓展对角线法 (Sarrus's rule)

$$D = \begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

思考:

对角线法则是否只适用于二阶与三阶行列式?

3. 利用三阶行列式求解三元线性方程组

三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为其系数行列式

若 $D \neq 0,$

则三元线性方程组的解为:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)$$

$$+1\times2\times1-1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1$$

$$= -5 \neq 0,$$

同理可得

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5,$$

故方程组的解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = 1.$$

本讲小结

- 引入二阶、三阶行列式的概念

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

- 给出一类二元、三元线性方程组的求解公式

$$\begin{cases} \text{方程个数} = \text{未知数个数} \\ \text{系数组成的行列式 } D \neq 0 \\ \text{所求出的解是唯一的} \end{cases}$$

进一步思考：

- 四阶、五阶, ⋯, n阶行列式的概念？

- 四元、五元,…,n元线性方程组有无类似的求解公式？