《线性代数》

第三章 几何空间中的向量

§3.3 几何向量与线性方程组

2019秋

杨晶 主讲

内容提要

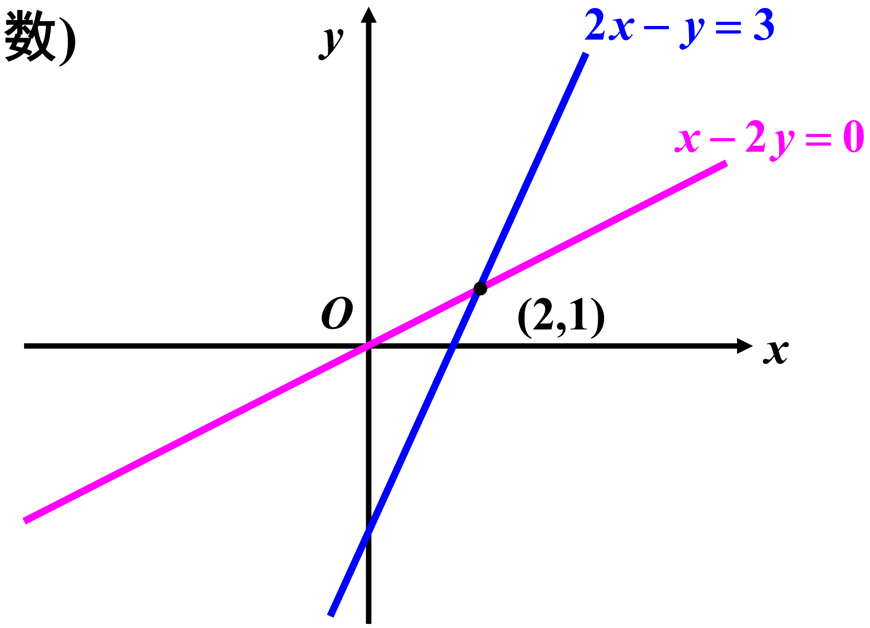
- 线性方程组行图与列图
- 线性方程组的不同表示形式

(一) 线性方程组的行图与列图

我们先讨论一个简单的例子，设有如下线性方程组

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$ (2个方程, 2个未知数)

- 方程组中的每一个方程，对应增广矩阵的一行，表示平面$\mathbb{R}^2$中的一条直线.
- 整个方程组的解，即为所有方程的公共解，对应了平面$\mathbb{R}^2$中上述直线的交点.



方程组的行图 (Row Picture)

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$ (2个方程, 2个未知数)

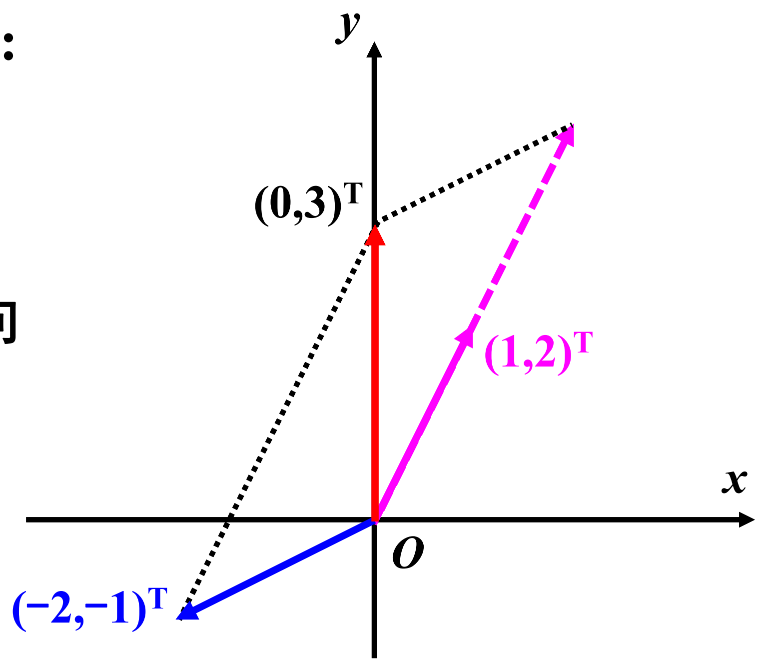
- 从列的角度看，方程组可写为向量形式:

$$x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}.$$

于是，求解方程组 $\Longleftrightarrow$ 求将 $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ 表为列向量 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ 的线性组合的系数.

可以看出：$2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}.$

在平面 $\mathbb{R}^2$ 中画出来得到



方程组的列图 (Column Picture)

线性方程组(m,n=2,3时)的几何意义:

- 对于未知数个数n=2,3的线性方程组，方程组的每一行 (每一个方程) 表示一条直线(n=2), 或一张平面(n=3). 即得行图(row picture):

  求解线性方程组 $\Longleftrightarrow$ 求解对应直线或平面的交集.

- 对于方程个数m=2,3的线性方程组, 若将系数矩阵A按列分块，表示为 $A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n)$, 则得列图(column picture):

  求解线性方程组 $\Longleftrightarrow$ 求将$\vec{b}$表为A的列向量$\{\vec{\alpha}_i\}_{i=1}^n$的线性组合的系数.

- 问题: 对于一般的线性方程组, 即任意的方程个数m与未知数个数n, 线性方程组的行图与列图如何解释?

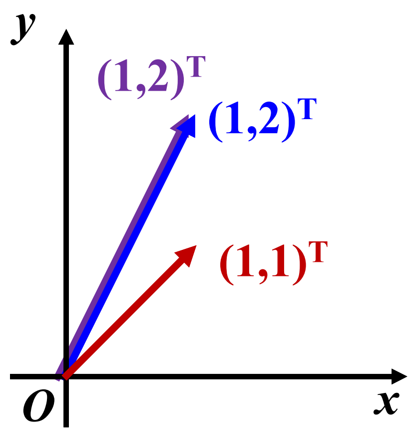
例1. 对于以下三个方程组，分别画出其行图，并思考三种情形代数与几何情形的对应关系.

(1). $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=1 \end{cases}$　　(2). $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$　　(3). $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$

作答

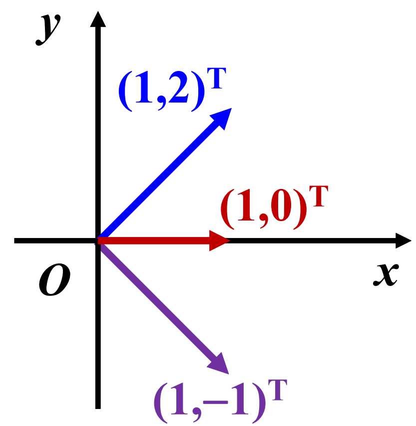
● 列图观点下: $x\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\end{pmatrix}=x\vec{\alpha}_1+y\vec{\alpha}_2=\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ $(m=n=2)$

(1). $\begin{cases}x+y=1\\2x+2y=1\end{cases}$ 无解



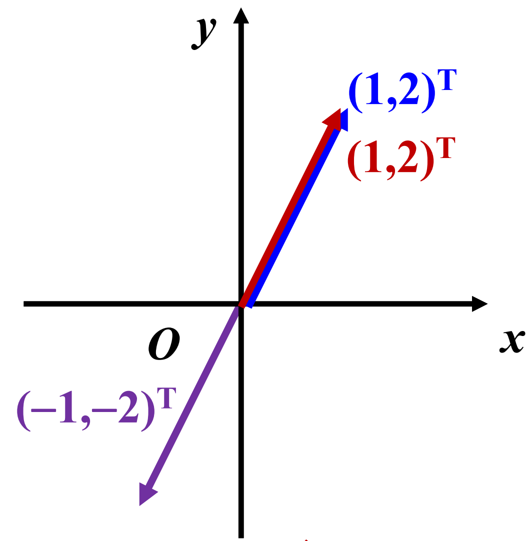
$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$共线, 但与$\vec{b}$不共线

(2). $\begin{cases}x+y=1\\x-y=0\end{cases}$ 唯一解



$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$不共线

(3). $\begin{cases}x-y=1\\2x-2y=2\end{cases}$ 无穷多解



$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{b}$共线

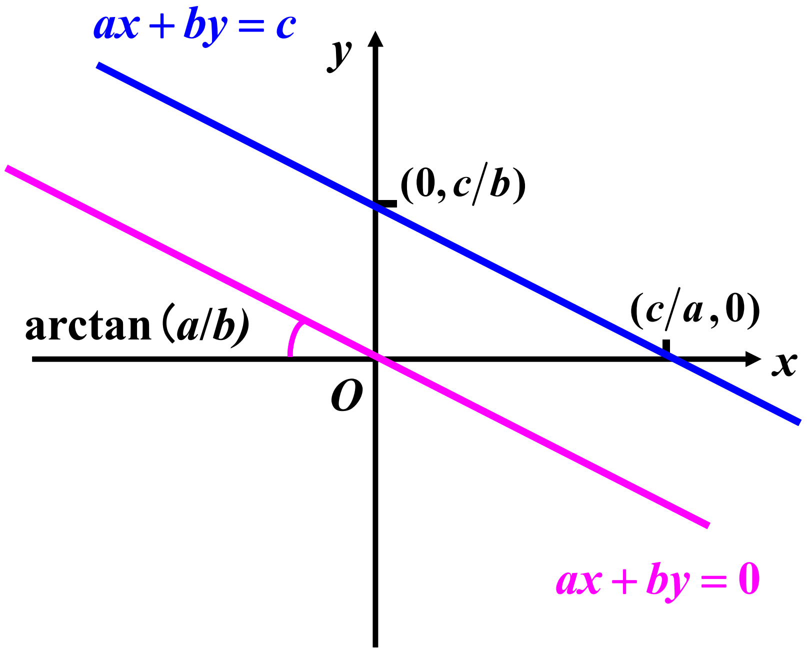
● 思考: m=2, n>2时, 情况如何? m=3时, 情况如何?

- 下面讨论行图:

当未知数的个数n=2时，对应了二维平面$\mathbb{R}^2$. 对于一个方程

$$ax + by = c$$

我们有如下的规定和结论



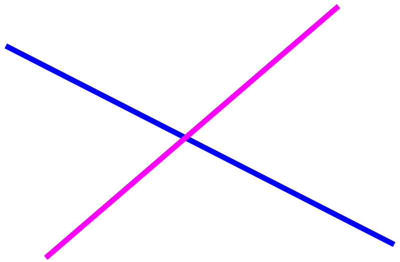
(1). 为使其几何上有意义，设a, b不全为0.

(2). 当c=0时，方程 $ax+by$=0 对应直线必然过原点O., 且斜率为: $-a/b$ (允许等于∞).

(3). 当$c\neq$0时，方程 $ax+by=c$ 对应直线为直线$ax+by$=0 的平移(平行)，其x,y轴截距分别为c/a 与 c/b.

● 平面上的两条直线 (n=2, m=2).

从几何上看：平面中两条直线的位置关系有三种：

平行	相交	重合
		
无交点	交于一点	交于一条直线
斜率相同, 截距不同.	斜率不同	斜率相同, 截距相同.

从代数上看：

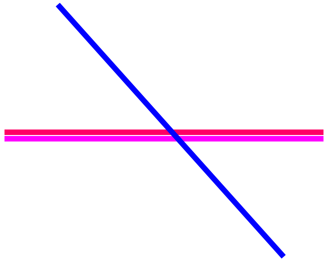
无解	有唯一解	有无穷多解
$(d_{r+1}\neq 0)$	$(d_{r+1}=0,\ r=n)$	$(d_{r+1}=0,\ r<n)$

● 其次,考虑平面上的m条直线 ($m\geq 2$).

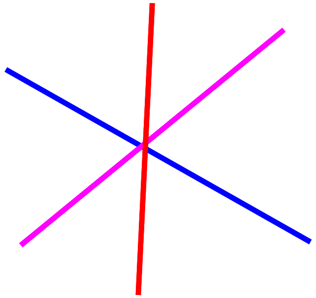
一般地，平面上m条直线的位置关系比较复杂，我们只讨论$m=3$的情况下，即平面中3条直线的位置关系，及其对应的线性方程组的代数条件.

有公共交点

情形①
斜率、截距均相同



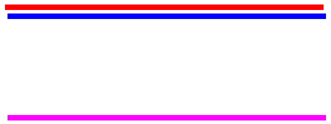
情形②
其中两条斜率与截距相同;另一条斜率不同



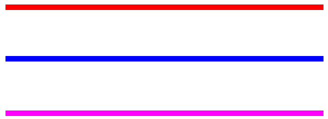
情形③
斜率不同

平面中3条直线的位置关系，及其对应的线性方程组的代数条件.

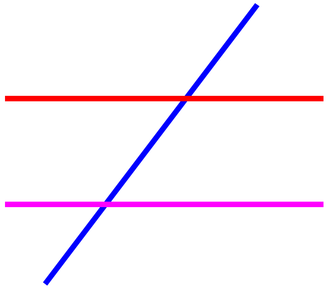
无公共交点



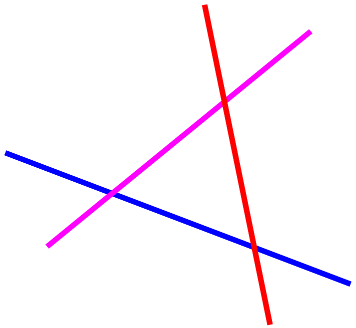
情形④
斜率相同，
截距有异有同



情形⑤
斜率相同，
截距两两不同

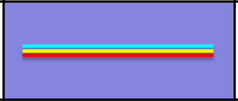
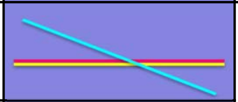
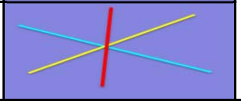
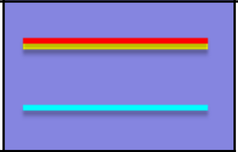
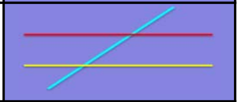
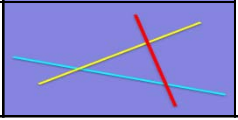


情形⑥
其中两条斜率相
同但截距不同；
另一条斜率不同



情形⑦
斜率两两不同

平面中3条直线位置关系的等价代数条件 (n=2, m=3)

序号	几何情形	交集情形	方程组解数	等价代数条件	
①		直线	无穷多解	$d_{r+1}=0$, r=1	
②		点	唯一解	$d_{r+1}=0$, r=2	?
③					?
④		空集	无解	$d_{r+1}\neq0$, r=2	?
⑤					?
⑥				$d_{r+1}\neq0$, r=3	?
⑦					?

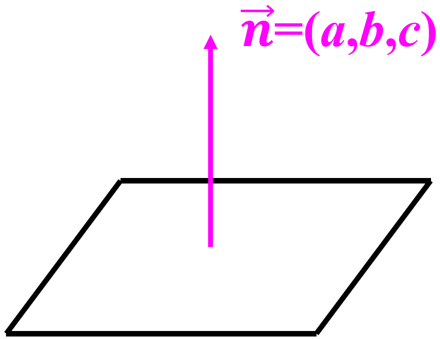
● 三维空间中平面的位置关系 (n=3)

当未知数的个数n=3时，对应了三维几何空间$\mathbb{R}^3$.

此时，对于一个方程

$$ax + by + cz = d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

我们有如下的规定和结论:



(1). 为使其几何上有意义，设a, b, c不全为0.

(2). 系数向量(a, b, c)对应了平面的法方向，记为$\vec{n}$.

(3). 在三个坐标轴上的截距分别为：$d/a, d/b, d/c$ (允许等于∞).

(4). 当c=0时，对应平面必然过原点O; 当$c\neq 0$时，相当于将平面
$ax+by+cz=0$做平移后所得的平行平面.

填空题 1.5分

设置

从几何上看：

三维几何空间中的两张平面的位置关系有三种，分别为：[填空1]，[填空2] 与 [填空3] .

试画出它们的简单图形(拍照投稿).

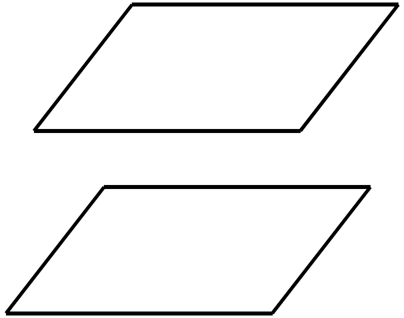
正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

- 首先，考虑几何空间上的两张平面.

从几何上看：三维几何空间中的两张平面的位置关系有三种：

平行

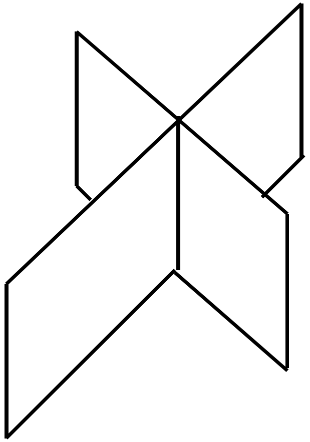


无交点

方程组无解

$(d_2 \neq 0)$

相交



交于一条线

方程组有解

$(d_2=0, r=2)$

重合

交于一个平面

方程组有解

$(d_2=0, r=1)$

- 从平面的法向量看

设两个平面： $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1$
$\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ $\quad (a_i,b_i,c_i,d_i\in\mathbb{R}, i=1,2)$

平面π_i的法向量为： $\vec{n}_i=(a_i,b_i,c_i)\quad (i=1,2).$

(1). π_1与π_2相交 $\Longleftrightarrow$ $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$ $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{a_1}{a_2},\dfrac{b_1}{b_2},\dfrac{c_1}{c_2}$ 三者不全相等； $\Longleftrightarrow$ $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ 不共线

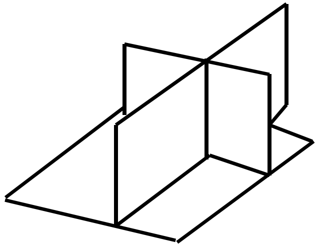
(2). π_1与π_2平行 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}}\neq\dfrac{d_1}{d_2}$

(3). π_1与π_2重合 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}}=\dfrac{d_1}{d_2}$

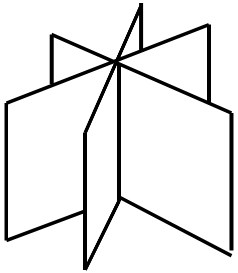
$\rightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1,\vec{n}_2$ 共线

- 下面讨论空间中三张平面的位置关系 (n=3, m=3)

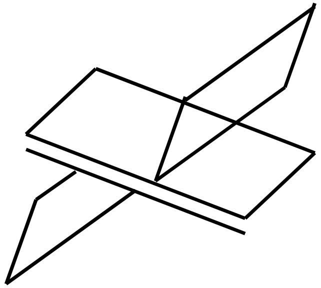
从几何上看：



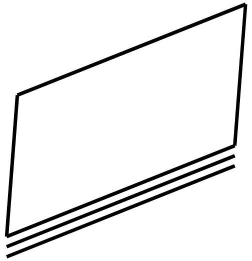
①



②



③

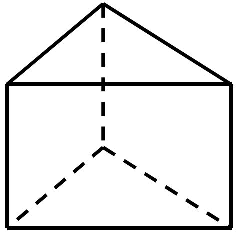


④

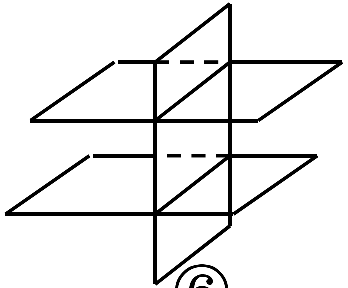
交于一点

交于一线

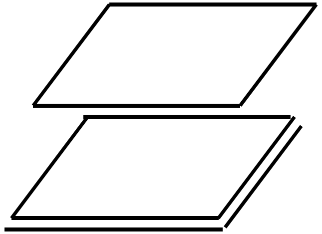
交于一面



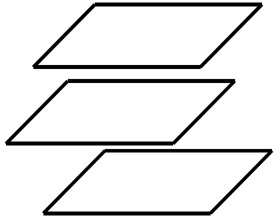
⑤



⑥



⑦



⑧

无交点

从代数上看：

设三个平面方程 为 $\pi_i : a_i x + b_i y + c_i z = d_i,$

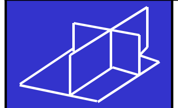
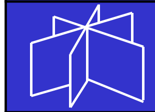
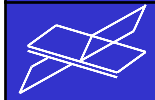
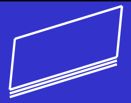
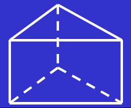
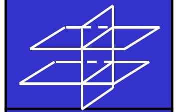
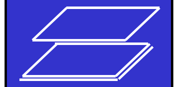
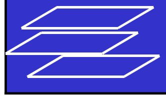
$$(a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}, a_i^{\ 2} + b_i^{\ 2} + c_i^{\ 2} \neq 0, i = 1, 2, 3)$$

设此三个平面构成线性方程组的系数矩阵A，增广系数矩阵$\overline{A}$为

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \\ \vec{\alpha}_3 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right) := \begin{pmatrix} \vec{\beta}_1 \\ \vec{\beta}_2 \\ \vec{\beta}_3 \end{pmatrix}$$

于是，对于空间中3张平面的上述8种的位置关系，那么其等价的代数条件应该是什么呢？

空间中3张平面位置关系的等价代数条件 ($n=m=3$)

几何情形	方程组的解数	解的集合	等价代数条件
	有唯一解	一点	
	有无穷多解	一直线	
			
		一平面	
	无解	空集	
			
			
			

(二). 线性方程组的几种表示形式

(1) 普通形式:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

代数上线性方程组的普通形式 $\longleftrightarrow$ 几何上 ($\mathbb{R}^n$中) 线性方程组的行图

(2) 向量形式: $x_1\vec{\alpha}_1 + x_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + x_n\vec{\alpha}_n = \vec{b}$, 其中

$\vec{\alpha}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T, \vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$, $j = 1, 2, \cdots, n.$

代数上线性方程组的向量形式 $\longleftrightarrow$ 几何上 ($\mathbb{R}^m$中) 线性方程组的列图

(3) 内积形式:

第3.2节中介绍过, 在3维空间中建立直角坐标系后, 向量的内积可表为:

$$(a_1, a_2, a_3)\cdot(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\sum_{i=1}^{3} a_ix_i.$$

形式上可推广到n维空间中向量的内积表达式, 即:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\cdot(x_1, x_2, \ldots, x_n) := a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\sum_{i=1}^{n} a_ix_i.$$

代入到线性方程组的一般形式中, 得:

$$\begin{pmatrix} (a_{11},\cdots,a_{1n})\cdot(x_1,\cdots,x_n) \\ (a_{21},\cdots,a_{2n})\cdot(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ (a_{m1},\cdots,a_{mn})\cdot(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

把上式称为: 线性方程组的内积形式.

- 从几何上看, 当n=2, 3时, 对齐次线性方程组, 有

$$\begin{pmatrix} (a_{11},\cdots,a_{1n})\cdot(x_1,\cdots,x_n) \\ (a_{21},\cdots,a_{2n})\cdot(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ (a_{m1},\cdots,a_{mn})\cdot(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1\cdot\vec{x} \\ \vec{\alpha}_2\cdot\vec{x} \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_m\cdot\vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

知: 求解齐次线性方程组 $\Longleftrightarrow$ 求与系数矩阵A的m个行向量均正交的向量.

- 当n=2, 3时, 对非齐次线性方程组, 适当倍乘后有

$$\begin{pmatrix} \frac{\vec{\alpha}_1}{|\vec{\alpha}_1|}\cdot\vec{x} \\ \frac{\vec{\alpha}_2}{|\vec{\alpha}_2|}\cdot\vec{x} \\ \vdots \\ \frac{\vec{\alpha}_m}{|\vec{\alpha}_m|}\cdot\vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_m' \end{pmatrix}$$

求解齐次线性方程组

$\Longleftarrow\!=\!=\!=\!=\!=\!\Longrightarrow$

求向量$\vec{x}$, s.t. $\vec{x}$对系数矩阵A的每个行向量$\vec{\alpha}_i$投影截距为指定值b_i' $(1\le i\le m)$.

代数上
线性方程组的内积形式

几何上 ($\mathbb{R}^n$中)
特定的(正交)投影问题

(4) 矩阵形式: $A\vec{X}=\vec{b}$, 其中 $A=(a_{ij})_{m\times n}, \vec{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, \vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$.

代数上
线性方程组的矩阵形式
$A\vec{X}=\vec{b}$

几何上
? ? ?

回答: “线性映射问题”，将在今后详细介绍.

本讲小结

- 线性方程组行图与列图
- 线性方程组的四种表达形式
  - 普通形式 $\Longleftrightarrow$ 行图 (n=2,3时可做图像);
  - 向量形式 $\Longleftrightarrow$ 列图 (m=2,3时可做图像);
  - 内积形式 $\Longleftrightarrow$ 指定投影问题 (n=2,3时可做图像);
  - 矩阵形式 $\Longleftrightarrow$ 线性映射问题 (待讲).

思考: 1. 有多种表达形式, 意味着什么? ——多种理解, 灵活处理.

2. 不同的几何解释, 有何内在的联系? ——请听后文分解.

3. $n,m>3$时, 高维一般情况如何?