《线性代数》

第七章 线性映射与线性变换

§7.1线性映射及其对应的矩阵

2019年秋

杨晶 主讲

本讲提要

线性映射及其对应的矩阵

一、线性映射的概念与基本性质

二、线性映射在一组基下的矩阵表示

三、线性映射与矩阵的一一对应关系

*四、线性映射集合与矩阵集合的对应

五、线性映射在不同基下的矩阵

一、线性映射的概念和基本性质

● 第5章讨论了线性空间及其内部结构和关系. 本章则讨论线性空间之间的关系.

● 实际上，同构就是线性空间之间的一种特殊关系，将同构的概念一般化，就得到线性映射的概念.

定义1 设$\sigma: V_1 \to V_2$ 是线性空间之间的一个映射, 如果 σ 保持加法及数乘运算, 即对任意 $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V_1$, 对任意常数 k, 都有

$$\sigma(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \sigma(\vec{\alpha})+\sigma(\vec{\beta}),$$

$$\sigma(k\vec{\alpha}) = k\sigma(\vec{\alpha}),$$

则称σ是线性空间 V_1到V_2 的一个线性映射(linear mapping), 特别, 当$V_1=V_2=V$时, 称σ是V的一个线性变换(linear transformation).

● 用 $L(V_1,V_2)$ 来表示$V_1 \to V_2$的全部线性映射所组成的集合，特别简记$L(V,V)=L(V)$表示V的全部线性变换所组成的集合.

例1 设 $\sigma: V\to V$, 定义为 $\sigma(\vec{\alpha}) = c\vec{\alpha}$, 其中 c 是一个固定常数,

$$\sigma(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = c(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = c\vec{\alpha}+c\vec{\beta} = \sigma(\vec{\alpha})+\sigma(\vec{\beta}),$$

$$\sigma(k\vec{\alpha}) = c(k\vec{\alpha}) = k(c\vec{\alpha}) = k\sigma(\vec{\alpha}).$$

所以 σ 是 V 的一个线性变换, 通常叫数乘变换或位似变换.

特别地, 如 $c = 0$, 线性变换把每个向量 $\vec{\alpha}$ 都映射成零向量,

这样的变换叫零变换, 记作 0, 即 $0(\vec{\alpha}) = \vec{0}$.

如 $c = 1$, 线性变换把每个 $\vec{\alpha}$ 都变成它自身, 这样的变换叫恒等变换, 记作ε, 即 $\varepsilon(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}$.

例2 设 σ 把平面上的向量绕坐标原点逆时针旋转 θ 角的变换. 设 $\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \sigma(\alpha) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, 则 $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$

令 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$,

则 $\sigma(\vec{\alpha}) = A\vec{\alpha}$, σ 是一个线性变换, 称为旋转变换.

多选题 2分

设置

例3 设 $\sigma_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$，设 $\vec{\alpha}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$，则 $\sigma(\vec{\alpha})=\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$，是否为线性变换?

是

不是

设 $\sigma_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，设 $\vec{\alpha}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$，则 $\sigma(\vec{\alpha})=\begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$，是否为线性变换?

是

不是

提交

单选题 1分

设置

例4 在 $\mathbb{R}^2$ 中，设 $\sigma\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^2 \\ 2y \end{bmatrix}$，请问：$\sigma$ 是否为线性变换.

是

不是

提交

例5 设$a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$, $\vec{X}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，定义

$$f(\vec{X})=a_1x_1+\dots+a_nx_n$$

则 f 是$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}$的线性映射(也叫作**线性函数**).

思考：一个多项式何时是线性的？

线性性质： 设 σ 是线性空间 V_1到V_2的线性映射, 则

(1) $\sigma(\vec{0})=\vec{0}$;

(2) $\sigma(-\vec{\alpha})=-\sigma(\vec{\alpha}),\ \forall\vec{\alpha}\in V$;

(3) $\sigma(k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\ldots+k_n\vec{\alpha}_n)=k_1\sigma(\vec{\alpha}_1)+k_2\sigma(\vec{\alpha}_2)+\ldots+k_n\sigma(\vec{\alpha}_n)$.

(4) 若 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_n$ 线性相关, 则存在不全为零的实数 $k_1, k_2,$ $\ldots, k_n$ 使得 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\ldots+k_n\vec{\alpha}_n=\vec{0}$,

因为$\sigma(k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\ldots+k_n\vec{\alpha}_n)=k_1\sigma(\vec{\alpha}_1)+k_2\sigma(\vec{\alpha}_2)+\ldots+k_n\sigma(\vec{\alpha}_\mathrm{n})=\vec{0}$.

说明 $\sigma(\vec{\alpha}_1), \sigma(\vec{\alpha}_2), \ldots, \sigma(\vec{\alpha}_n)$ 线性相关.

可以结合刚才的讨论得到以下结论:

(a) $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_n$ 线性相关 $\Rightarrow$ $\sigma(\vec{\alpha}_1), \sigma(\vec{\alpha}_2),\ldots, \sigma(\vec{\alpha}_n)$ 线性相关.

(b) $\sigma(\vec{\alpha}_1), \sigma(\vec{\alpha}_2), \ldots, \sigma(\vec{\alpha}_n)$ 线性无关 $\Rightarrow$ $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_n$线性无关.

$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_n$ 线性无关 $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\sigma(\vec{\alpha}_1), \sigma(\vec{\alpha}_2), \ldots, \sigma(\vec{\alpha}_n)$ 线性无关.

$\sigma(\vec{\alpha}_1), \sigma(\vec{\alpha}_2), \ldots, \sigma(\vec{\alpha}_n)$ 线性相关 $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_n$线性相关.

二、线性映射在一组基下的矩阵表示

●问题 (1) 怎样决定一个线性映射?

(2) 抽象的线性映射是否有具体的对应对象?

● 设 $\sigma: V_1 \to V_2$是一个线性映射，它把 $\vec{\alpha}$ 变成 $\sigma(\vec{\alpha})$，由于线性空间 V_1, V_2中有无穷多个元素，要给出一个线性映射，必须给出线性空间V_1中每个元素 $\vec{\alpha}$ 的象 $\sigma(\vec{\alpha})$. 实际上可以利用线性映射的线性性质来简化这个问题.

● 设 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ 是 n 维线性空间 V_1 的一组基, $\sigma \in L(V_1, V_2)$, 对 V_1中任一向量 $\vec{\alpha}$，设 $\vec{\alpha} = x_1\vec{\alpha}_1 + x_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + x_n\vec{\alpha}_n$,

那么
$$\sigma(\vec{\alpha}) = \sigma(x_1\vec{\alpha}_1 + x_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + x_n\vec{\alpha}_n)$$
$$= x_1\sigma(\vec{\alpha}_1) + x_2\sigma(\vec{\alpha}_2) + \ldots + x_n\sigma(\vec{\alpha}_n).$$

可见，只要知道线性映射 σ 在一组基下的象
$$\sigma(\vec{\alpha}_1), \sigma(\vec{\alpha}_2), \ldots, \sigma(\vec{\alpha}_n),$$
就可以确定 V_1 中任一向量 $\vec{\alpha}$ 的象 $\sigma(\vec{\alpha})$ 了.

定义2 设 f 和 g 均为 A 到 B 的映射，若 A 中任意元素在 f 和 g 下的象均相等，则称 f 和 g 相等，记为 $f = g$.

若有两个线性映射 $\sigma, \tau: V_1 \to V_2$, 在 V_1 的一组基 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ 下,它们的象是一样的，即 $\sigma(\vec{\alpha}_1) = \tau(\vec{\alpha}_1), \sigma(\vec{\alpha}_2) = \tau(\vec{\alpha}_2), \ldots, \sigma(\vec{\alpha}_n) = \tau(\vec{\alpha}_n)$，那么, 按照前面的分析，对 V 中任一向量 $\vec{\alpha}$，都有 $\sigma(\vec{\alpha}) = \tau(\vec{\alpha})$. 也就是说，这两个线性映射是相同的．于是有以下定理.

定理1 设 $\sigma \in L(V_1, V_2)$, $\dim V_1 = n$, $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ 是 V_1 的一组基，则 V_1 中任一向量 $\vec{\alpha}$ 的象 $\sigma(\vec{\alpha})$ 由基的象 $\sigma(\vec{\alpha}_1), \sigma(\vec{\alpha}_2), \ldots, \sigma(\vec{\alpha}_n)$ 所完全确定.

● 取定V_1的一组基 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$， V_2的一组基 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \ldots, \vec{\beta}_m$.

设线性映射 σ: $V_1 \to V_2$ 的象有如下表示:

$$\begin{cases} \sigma(\vec{\alpha}_1) = a_{11}\vec{\beta}_1 + a_{21}\vec{\beta}_2 + \cdots + a_{m1}\vec{\beta}_m \\ \sigma(\vec{\alpha}_2) = a_{12}\vec{\beta}_1 + a_{22}\vec{\beta}_2 + \cdots + a_{m2}\vec{\beta}_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma(\vec{\alpha}_n) = a_{1n}\vec{\beta}_1 + a_{2n}\vec{\beta}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{\beta}_m \end{cases} \qquad (1)$$

● 记 $\sigma(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n) = (\sigma(\vec{\alpha}_1), \sigma(\vec{\alpha}_2), \ldots, \sigma(\vec{\alpha}_n))$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$,

则(1)式可以表示为

$$\sigma(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n) = (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \ldots, \vec{\beta}_m)A. \qquad (2)$$

矩阵 A 叫做线性映射 σ 在基 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ 与 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \ldots, \vec{\beta}_m$ 下的矩阵. 其中 A 的第 j 列就是基向量 $\vec{\alpha}_j$ 的象 $\sigma(\vec{\alpha}_j)$ 在这组基下的坐标 $(1 \le j \le n)$.

● 特别, 当$V_1=V_2$, $\vec{\alpha}_i=\vec{\beta}_i$时, 线性变换$\sigma$的矩阵是个$n$阶方阵.

例6 对$\mathbb{R}^3$中投影变换$\sigma\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$，取自然基$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$，则

σ在基$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$下的矩阵为 $\boxed{?}$

作答

例6 对$\mathbb{R}^3$中投影变换$\sigma\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$，取自然基$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$，则

$$\sigma(\vec{e}_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{e}_1,\sigma(\vec{e}_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{e}_2,\sigma(\vec{e}_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0},$$

于是

$$(\sigma(\vec{e}_1),\sigma(\vec{e}_2),\sigma(\vec{e}_3))=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

σ在基$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.□

例7 在 $\mathbb{R}_n[x]$ 上定义变换微分 $\sigma(f(x)) = \mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}(x)$, 易验证 σ 是线性变换，取基 $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, 有

$$\sigma(1) = 0,\ \sigma(x) = 1,\ \sigma(x^2) = 2x,\ \ldots,\ \sigma(x^{n-1}) = (n-1)x^{n-2}$$

得到微分变换在基$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$下的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & n-1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

例8 已知线性变换 σ 在基 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 下的矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$，求 σ 在基 $\vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_1$ 下的矩阵.

解 由线性变换矩阵的定义，知

$$\sigma(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix},$$

得 $\sigma(\vec{\alpha}_1)=\vec{\alpha}_1+4\vec{\alpha}_2+7\vec{\alpha}_3=7\vec{\alpha}_3+4\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_1$，故 $\sigma(\vec{\alpha}_1)$ 在基 $\vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_1$ 下的坐标是 $(7, 4, 1)^T$. 同理 $\sigma(\vec{\alpha}_2), \sigma(\vec{\alpha}_3)$ 在基 $\vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_1$ 下的坐标分别是 $(8, 5, 2)^T$ 与 $(9, 6, 3)^T$. 所以

$$\sigma(\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_1)=(\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_1)\begin{bmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{bmatrix},$$

因此, σ 在基 $\vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_1$ 下的矩阵 $B=\begin{bmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{bmatrix}$.

- 利用线性映射在取定基下的矩阵就可以描述线性映射的象 $\sigma(\vec{\alpha})$ 与 $\vec{\alpha}$ 的坐标之间的联系.

- 设 $\vec{\alpha}$ 与 $\sigma(\vec{\alpha})$ 在基 $\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n$ 与 $\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_m$ 下的坐标分别是:

  $\vec{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}},\ \vec{Y}=(y_1,y_2,\ldots,y_{\mathrm{m}})^{\mathrm{T}}$,

  即 $\vec{\alpha}=x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+\ldots+x_n\vec{\alpha}_n=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_n)\,\vec{X}$,

  $\sigma(\vec{\alpha})=y_1\vec{\beta}_1+y_2\vec{\beta}_2+\ldots+y_m\vec{\beta}_m=(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\ldots,\vec{\beta}_m)\,\vec{Y}$,

  那么, 由线性映射的性质及等式

  $$\sigma(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_n)=(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\ldots,\vec{\beta}_m)A$$

  有 $\sigma(\vec{\alpha})=\sigma((\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_n)\vec{X})=(\sigma(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_n))\vec{X}$

  $$=(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\ldots,\vec{\beta}_m)A\vec{X},$$

- 由于向量在同一组基下的坐标是唯一确定的, 故 $\vec{Y}=A\vec{X}$.

  可将此结果写成定理.

定理2 设线性映射 σ 在基 $\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n$ 与 $\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_m$ 下的矩阵是 A，即，

$$\sigma(\vec{\alpha}) = (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2,\ldots,\vec{\beta}_m)A,$$

设向量 $\vec{\alpha}$, $\sigma(\vec{\alpha})$ 在这两组基下的坐标分别是

$$\vec{X} = (x_1, x_2,\ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\vec{Y} = (y_1, y_2,\ldots, y_m)^{\mathrm{T}},$$

则

$$\vec{Y} = A\vec{X} \tag{3}$$

- 各自取定 V_1,V_2 的一组 $\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n$ 与 $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\ldots,\vec{\beta}_m$，则任何 $\sigma\in \mathrm{L}(V_1,V_2)$ 在该基下有**唯一确定**的 $m\times n$ 矩阵 A. (为什么?)

问题 任给一个 $m\times n$ 矩阵 A，是否也有唯一的线性映射 σ 使得 σ 在上述两组基下的矩阵恰好是 A?

三、线性映射与矩阵的一一对应关系

定理3 设 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ 是 n 维线性空间 V_1 的一组基，对V_2中任意给定的 n 个向量 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \ldots, \vec{\beta}_n$，都存在线性映射 σ，使得

$$\sigma(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

证 设 $\vec{\gamma} \in V_1$ 是一向量，其坐标是 $(c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$，即 $\vec{\gamma} = c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + c_n\vec{\alpha}_n$，现在定义一个映射 σ，规定 $\vec{\gamma}$ 的象 $\sigma(\vec{\gamma})$ 为

$$\sigma(\vec{\gamma}) = c_1\vec{\beta}_1 + c_2\vec{\beta}_2 + \cdots + c_n\vec{\beta}_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\vec{\beta}_i \qquad (4)$$

显然这个映射满足条件 $\sigma(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i$，$i = 1, 2, \ldots, n$.

下面只要证明如此定义的 σ 是一个线性映射就可以了.

设 $\vec{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{\alpha}_i,\quad \vec{\beta}=\sum_{i=1}^{n}y_i\vec{\alpha}_i,$

那么按 σ 的定义和 (4)式，有

$$\sigma(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\sigma\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{\alpha}_i+\sum_{i=1}^{n}y_i\vec{\alpha}_i\right)=\sigma\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\vec{\alpha}_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\vec{\beta}_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{\beta}_i+\sum_{i=1}^{n}y_i\vec{\beta}_i=\sigma(\vec{\alpha})+\sigma(\vec{\beta}).$$

$$\sigma(k\vec{\alpha})=\sigma\left(k\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{\alpha}_i\right)=\sigma\left(\sum_{i=1}^{n}kx_i\vec{\alpha}_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}kx_i\vec{\beta}_i=k\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{\beta}_i=k\sigma(\vec{\alpha}).$$

所以，这样规定的 σ 是线性映射. 这就证明了确实存在满足条件的线性映射. ■

定理4 设 $\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n$是 V_1的一组基, $\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_m$是 V_2的一组基 $A=(a_{ij})$ 是任一 $m\times n$矩阵, 则有唯一的线性映射$\sigma: V_1\to V_2$ 满足

$$\sigma(\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n)=(\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_m)A.$$

证明 以矩阵 A 的第 j 列元素作为坐标构造向量 $\vec{\gamma}_j\in V_2$

$$\vec{\gamma}_j=a_{1j}\vec{\beta}_1+a_{2j}\vec{\beta}_2+\ldots+a_{mj}\vec{\beta}_m,\ (j=1,2,\ldots,n).$$

由定理4存在线性映射 σ 使 $\sigma(\vec{\alpha}_j)=\vec{\gamma}_j$.

于是 $\sigma(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_n)=(\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\ldots,\vec{\gamma}_n)=(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2\ldots,\vec{\beta}_m)A.$

即有线性映射 σ 在基 $\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n$与$\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_m$下的矩阵是 A.

如果 σ,τ 这两个线性映射换都在上述两组基下的矩阵都是 A,

那么 $\sigma(\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n)=(\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_m)A=\tau(\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n)$,

这就有 $\sigma(\vec{\alpha}_1)=\tau(\vec{\alpha}_1),\sigma(\vec{\alpha}_2)=\tau(\vec{\alpha}_2),\ldots,\sigma(\vec{\alpha}_n)=\tau(\vec{\alpha}_n)$. 根据前文结论知 $\sigma=\tau$, 所以满足要求的线性映射是唯一的. ■

● 通过上面的讨论，我们知道线性空间V_1与V_2内各自取定一组基之后，每个线性映射都对应着一个 $m\times n$矩阵. 反之，任给一个$m\times n$矩阵都可构造唯一的线性映射以此矩阵为这两组基下的矩阵.

● 这样， 线性映射的集合与$m\times n$阶矩阵的集合之间有着一一对应的关系. 即建立了一个双射

$$\varphi : L(V_1,V_2) \xleftrightarrow[\text{取定基}\beta_1,\cdots,\beta_m]{\text{取定基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n} M_{m\times n}.$$

● 从而，在取定两组基的情况下，我们可用具体的矩阵来代替抽象的线性映射. 但是，自然地，有以下两个问题：

(1) 除了元素的对应外，矩阵集合中的各种运算能否对应到线性映射的集合中来？

(2) 如果选用不同的基，线性映射σ的表示矩阵是否变化？如何变化？

*四、线性映射集合与矩阵集合的对应

- 设$\sigma(\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n)=(\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_m)A$; $\tau(\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n)=(\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_m)B$,

  由$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$, $kA=(ka_{ij})$得

  $$(\sigma+\tau)(\vec{\alpha}_j)=(\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_m)(a_{1j}+b_{1j},\ldots,a_{mj}+b_{mj})^{\mathrm{T}}$$

  $$=(\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_m)(a_{1j},\ldots,a_{mj})^{\mathrm{T}}+(\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_m)(b_{1j},\ldots,b_{mj})^{\mathrm{T}}$$

  $$=\sigma(\vec{\alpha}_j)+\tau(\vec{\alpha}_j)$$

  同理, $(k\sigma)(\vec{\alpha}_j)=\sigma(k\vec{\alpha}_j)=k\sigma(\vec{\alpha}_j)$.

定义3 设$\sigma,\tau\in\mathrm{L}(V_1,V_2)$, $k\in F$, 线性映射的**加法和数乘**定义为

$$(\sigma+\tau)(\vec{\alpha})=\sigma(\vec{\alpha})+\tau(\vec{\alpha});\ (k\sigma)(\vec{\alpha})=k\sigma(\vec{\alpha}),\quad \forall\vec{\alpha}\in V_1$$

- 可验证$\sigma+\tau$和$k\sigma$仍然是V_1到V_2的线性映射(课下自行验证).

定理5 $\mathrm{L}(V_1,V_2)$对于上述定义的加法和数乘构成数域 F 上的线性空间. (自行验证2+4+4条, 零映射, 恒等映射)

定义4 设 $\sigma\in L(V_1,V_2)$, $\tau\in L(V_2,V_3)$，且

$$\sigma: V_1\to V_2, \vec{\alpha}\mapsto\vec{\beta};\ \tau: V_2\to V_3, \vec{\beta}\mapsto\vec{\gamma}$$

定义 σ 和 τ 的**乘积(复合)**为 $\tau\sigma: V_1\to V_3, \vec{\alpha}\mapsto\vec{\gamma}.$

设 $\sigma\in L(V_1,V_2)$, $\tau\in L(V_2,V_1)$，若$\sigma\tau=\varepsilon_{V_2}$,$\tau\sigma=\varepsilon_{V_1}$, 则称$\tau$为$\sigma$的**逆映射**，记为$\tau=\sigma^{-1}$.

特别地，若$\sigma\in L(V)$，可定义$\sigma^k=\sigma\cdots\sigma$为$k$个$\sigma$乘积, 称为线性变换$\sigma$**的方幂**, 其中$\sigma^0=\varepsilon$. 从而可定义线性变换$\sigma$**的多项式** $f(\sigma)$, 其中$f(x)\in F[x]$.

定理6 线性映射的乘积(即复合映射)对应于矩阵的乘积.

证明概要 $\tau\sigma(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n)=\tau((\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_m)A)=\tau(\sum_{t=1}^{m}a_{t1}\vec{\beta}_t,\cdots,\sum_{t=1}^{m}a_{tm}\vec{\beta}_t)$

$$=(\sum_{t=1}^{m}a_{t1}\tau(\vec{\beta}_t),\cdots,\sum_{t=1}^{m}a_{tm}\tau(\vec{\beta}_t))=(\tau(\vec{\beta}_1),\cdots,\tau(\vec{\beta}_m))A$$

$$=((\vec{\gamma}_1,\cdots,\vec{\gamma}_l)B)A=(\vec{\gamma}_1,\cdots,\vec{\gamma}_l)BA$$

推论1 (1) 线性映射乘法一般不满足交换律.

(2) 非零线性映射的乘积可以是零映射.

(3) 线性映射的乘法一般不满足消去律.

证明 (1) 对应矩阵乘法一般不满足交换律.

(2) 对应非零矩阵的乘积可以是零矩阵.

(3) 对应矩阵的乘法一般不满足消去律.

推论2 $\sigma\in \mathrm{L}(V)$ 是双射 (同构)

$\Leftrightarrow \sigma\in \mathrm{L}(V)$ 是可逆

$\Leftrightarrow \sigma$ 对应的矩阵可逆.

（课下补齐证明）

我们已经建立了，线性空间$L(V_1,V_2)$到空间$M_{m\times n}(F)$的一个双射

$$\varphi: L(V_1,V_2) \xleftrightarrow[\text{取定基}\beta_1,\cdots,\beta_m]{\text{取定基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n} M_{m\times n}.$$

若$\sigma(\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_n)=(\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_m)A$，则令$\varphi(\sigma)=A$, 即在取定两组基的情况下，$\varphi$的将线性映射$\sigma$映为它的表示矩阵.

不仅如此, φ还是保线性运算的：从线性映射的加法和数乘定义可验证

$$\varphi(\sigma+\tau)=\varphi(\sigma)+\varphi(\tau);\ \varphi(k\sigma)=k\varphi(\sigma)$$

从而，我们得到如下定理

定理7 设V_1和V_2是数域F上的n维和m维的线性空间，则有线性空间同构 $\mathrm{L}(V_1,V_2)\cong M_{m\times n}(F)$. 特别地，$\mathrm{L}(V_1)\cong M_n(F)$.

推论 $\dim \mathrm{L}(V_1,V_2)=\dim V_1\cdot\dim V_2$

思考：如何给出$\mathrm{L}(V_1,V_2)$的一组基？
(由$M_{m\times n}(F)$的一组基构造)

多选题 1分

设置

以下对象哪些与实线性空间基的选取有关?

坐标

维数公式①

线性映射的矩阵表示

内积的定义

提交

五、线性映射在不同基下的矩阵

设$\sigma\in \mathrm{L}(V_1,V_2)$, $\vec\alpha_1,\ldots,\vec\alpha_n$ 和 $\vec\beta_1,\ldots,\vec\beta_m$ 分别是V_1和V_2的一组基，分别再取V_1和V_2的另一组基为$\vec\alpha'_1,\ldots,\vec\alpha'_n$ 和$\vec\beta'_1,\ldots,\vec\beta'_m$, 过渡矩阵分别记为$P$和$Q$，即

$$(\vec\alpha_1',\cdots,\vec\alpha_n')=(\vec\alpha_1,\cdots,\vec\alpha_n)P;\quad (\vec\beta_1',\cdots,\vec\beta_m')=(\vec\beta_1,\cdots,\vec\beta_m)Q \qquad (1)$$

又设σ在两组旧基和两组新基下的矩阵分别是 A 和 B，即

$$\sigma(\vec\alpha_1,\cdots,\vec\alpha_n)=(\vec\beta_1,\cdots,\vec\beta_m)A \qquad (2)$$

$$\sigma(\vec\alpha_1',\cdots,\vec\alpha_n')=(\vec\beta_1',\cdots,\vec\beta_m')B \qquad (3)$$

由(1), (2)和(3)式，有

$$\sigma(\vec\alpha_1',\cdots,\vec\alpha_n')=\sigma((\vec\alpha_1,\cdots,\vec\alpha_n)P)$$

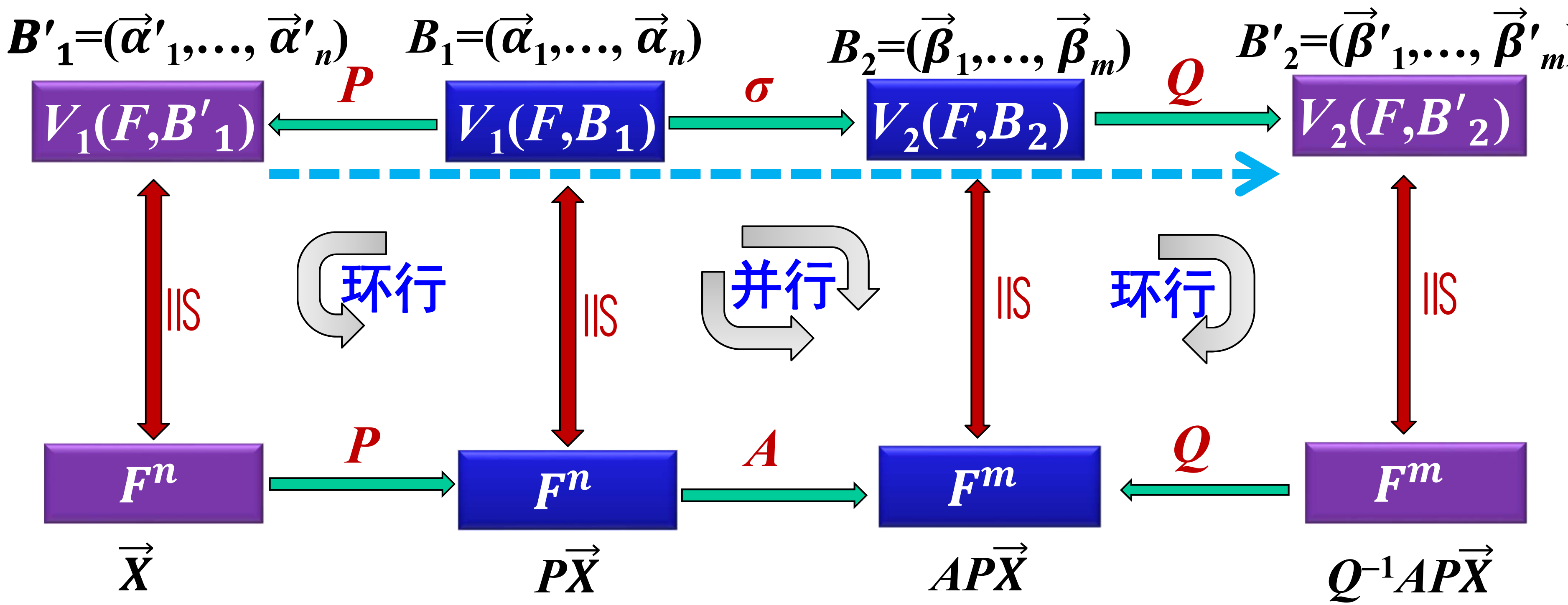
$$=\sigma(\vec\alpha_1,\cdots,\vec\alpha_n)P=(\vec\beta_1,\cdots,\vec\beta_m)AP,$$

$$\sigma(\vec\alpha_1',\cdots,\vec\alpha_n')=(\vec\beta_1',\cdots,\vec\beta_m')B=(\vec\beta_1,\cdots,\vec\beta_m)QB,$$

由于$\vec\beta_1,\ldots,\vec\beta_m$线性无关，所以$AP=QB$, 或 $\boxed{Q^{-1}AP=B \qquad (4)}$

其中, P,Q分别为n阶和m阶的可逆方阵.

由此可见，同一个线性映射在不同基下的矩阵具有相抵关系，且相抵关系中的可逆矩阵与两组基替换的过渡矩阵相关.



● 特别地，当$V_1=V_2=V$, $\{\vec{\alpha}_i\}=\{\vec{\beta}_i\}$, $\{\vec{\alpha}'_i\}=\{\vec{\beta}'_i\}$时, $Q=P$, 则同一个线性变换σ在不同基下的矩阵A,B满足 $P^{-1}AP=B$.

我们把方阵间的这种关系叫做相似关系.

● 矩阵相抵与相似的几何意义

——同一个线性映射在不同基下的矩阵具有相抵(等价)关系

● 对于给定的线性映射$\sigma\in \mathrm{L}(V_1,V_2)$

(1) 如何选择合适的基, 使给定的线性映射在该基下的矩阵 A尽可能简单?

(2) 如何选择合适可逆矩阵P,Q, 使给定方阵 A相抵于尽可能简单的矩阵$Q^{-1}AP$.

● 上述两个问题是等价的，并且回答是肯定的：

只需取$Q^{-1}AP$ 为A的相抵标准形$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中$r=\mathrm{r}(A)$.

而过渡矩阵P, Q可由对应的初等变换 (初等矩阵) 得到.

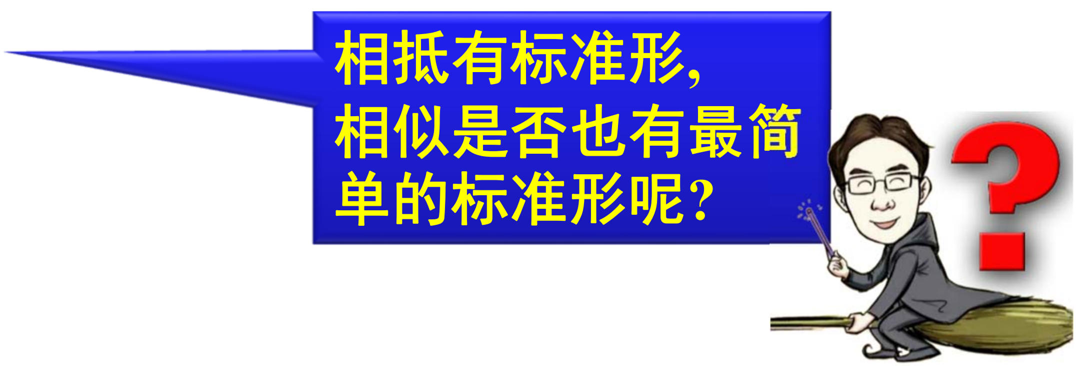
●在上页讨论中, 令$V_1=V_2$, 基B_1=基B_2, 基B_1'=基B_2', 于是有:

——n维线性空间V上的同一个线性变换在的不同基下的矩阵是相似的矩阵.

● 对于给定的线性变换$\sigma \in \mathrm{L}(V)$

(1) 如何选择合适的基, 使给定线性变换在该基下的矩阵A尽可能简单?

(2) 如何选择合适可逆矩阵P, 使给定方阵 A相似于与尽可能简单的矩阵$P^{-1}AP$?



- 我们先提出一个化简的标准，然后讨论什么样的线性变换(矩阵)可以化简成这个标准的简单形式.
- 我们的标准就是对角矩阵.

于是, 我们把线性变换的化简问题与矩阵的对角化问题统一起来了:

(1) 对于给定的线性变换σ, 如果存在一组基 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \ldots, \vec{\beta}_n$ 使得σ在这组基下的矩阵D是一个对角矩阵, 则称线性变换σ可对角化. 中心问题: σ可对角化的条件?

(2) 对于给定方阵A, 如果存在可逆矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角矩阵, 则称矩阵A可对角化. 中心问题: A可对角化的条件?

本讲小结

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
V_1(F,B_1) \arrow[r, "\sigma\in L(V_1,V_2)"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & V_2(F,B_2) \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\
F^n \arrow[r, "A\ \in M_{m\times n}(F)"] & F^m
\end{tikzcd}$$

$B_1=(\vec{\alpha}_1,\dots,\vec{\alpha}_n)$ $\quad$ $B_2=(\vec{\beta}_1,\dots,\vec{\beta}_m)$

$\sigma \overset{1:1}{\longleftrightarrow} A$ $\quad$ $\cong$

并行式交换图

- $\sigma(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\dots,\vec{\alpha}_n)=(\sigma(\vec{\alpha}_1),\sigma(\vec{\alpha}_2),\dots,\sigma(\vec{\alpha}_n))=(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\dots,\vec{\beta}_m)A$
- A的第j列就是基向量 $\vec{\alpha}_j$ 的象 $\sigma(\vec{\alpha}_j)$ 在这组基下的坐标 $(1\le j\le n)$
- 映射加法: $(\sigma+\tau)(\vec{\alpha})=\sigma(\vec{\alpha})+\tau(\vec{\alpha})$; $\Longleftrightarrow$ 矩阵加法: $A+B$

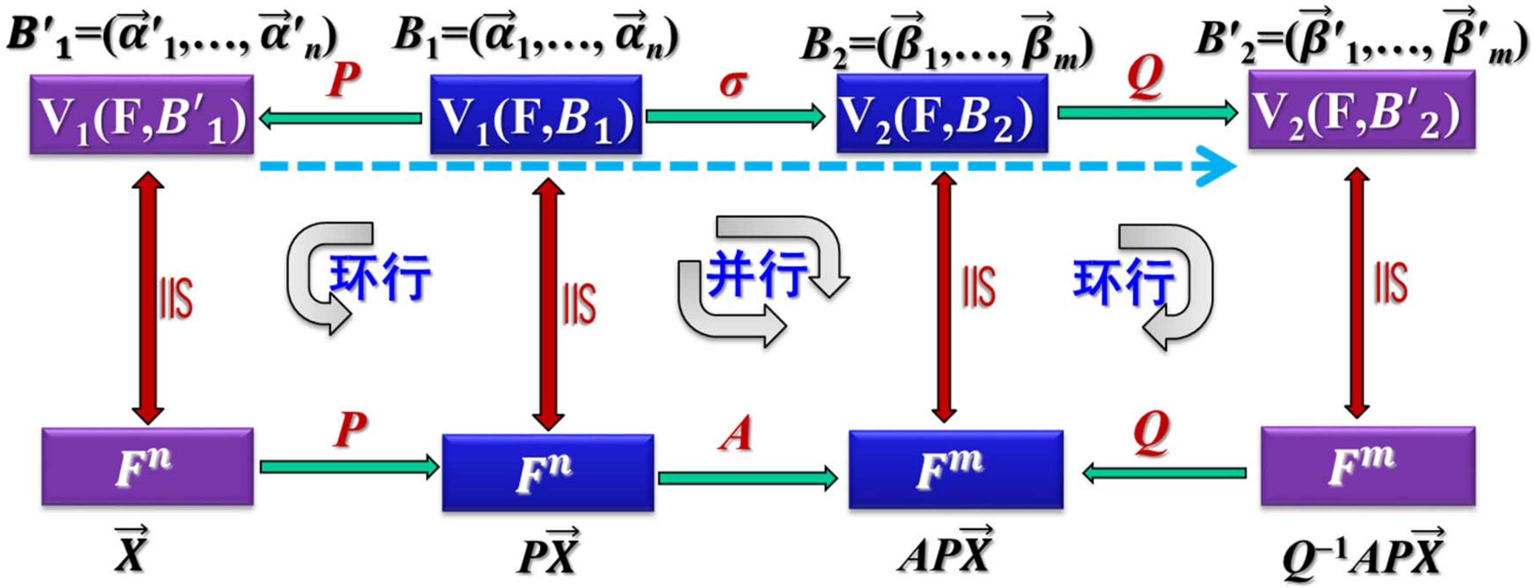
  映射数乘: $(k\sigma)(\vec{\alpha})=k\sigma(\vec{\alpha})$ $\Longleftrightarrow$ 矩阵数乘: kA

  映射乘法: $(\sigma\tau)(\vec{\alpha})=\sigma(\tau(\vec{\alpha}))$ --复合 $\Longleftrightarrow$ 矩阵乘法: AB
- $L(V_1,V_2)\cong M_{m\times n}(F)$. 特别地, $L(V_1)\cong M_n(F)$

  $\dim L(V_1,V_2)=\dim V_1\cdot\dim V_2$

本讲小结

- 基变换下的映射与矩阵



- 给定线性映射$\sigma\in L(V_1,V_2)$, 存在两组合适的基, 使得σ在该基下的矩阵为标准形$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 如何寻找这组基?
- 给定线性变换$\sigma\in L(V)$, 是否存在一组合适的基, 使得σ在该基下的矩阵为对角阵? 如何寻找这组基?