《线性代数1》

第五章 向量空间理论

§ 5.3 极大线性无关组

2019秋

杨晶 主讲

内容提要

- 两个向量组的线性关系
- 极大线性无关组的定义和性质
- 极大线性无关组的求法

五言绝句

叶落留枝干，
擒贼先擒王；
若论向量集，
去冗何物存？

$$\{\overrightarrow{\alpha}_1,\overrightarrow{\alpha}_2,\cdots,\overrightarrow{\alpha}_s\} \longrightarrow ?$$

(一)、两个向量组的线性关系

之前，我们已经给出了一个向量被一个向量组线性表出的概念. 下面，我们将其推广到一个向量组被另一个向量组线性表出的情形.

定义1. 设有两个向量组 ① $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 与 ② $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_t$. 如果向量组①中每个向量$\vec{\alpha}_i$ $(i=1, 2, 3,\ldots, s)$ 都可由向量组②中的向量$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_t$线性表出，则称**向量组①可由向量组②线性表出**.

如果同时向量组①,②可以相互线性表出，则称这两个**向量组等价**，记为：$(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_s) \sim (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2,\cdots, \vec{\beta}_t)$ 或 ① ~ ②.

例1. 设 $\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\vec{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\vec{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\vec{\beta}_3=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, 则

$$\vec{\beta}_1=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\quad \vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2,\ \vec{\beta}_3=2\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2;$$

$$\vec{\alpha}_1=2\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2,\ \vec{\alpha}_2=\vec{\beta}_2-\vec{\beta}_1.$$

因此，向量组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$与向量组$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3$等价.

● 向量组之间的等价具有下列简单性质:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(1) 自反性: ①} \sim \text{①}\\ \text{(2) 对称性: ①} \sim \text{②} \Rightarrow \text{②} \sim \text{①}\\ \text{(3) 传递性: ①} \sim \text{②, ②} \sim \text{③} \Rightarrow \text{①} \sim \text{③}\end{array}\right\}\ \boxed{\text{等价关系}}$$

当一个向量组可由另一个向量组线性表出时，它们的线性相关性和数量有何关系呢？

定理1. 设向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s$ 可由向量组 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_t$ 线性表出，

(1). 若 $s > t$，则 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s$ 线性相关.

(2). 若 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s$ 线性无关，则 $s \le t$.

对定理1，我们有如下注释:

- 结论(2)是结论(1)等价的逆否命题，故只须证明其一即可.
- 直观上看：以少生多，必线性相关；反之，线性无关的向量组不能由更少的向量生成.

定理1的证明： 设 $x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+\cdots+x_s\vec{\alpha}_s=\vec{0}$, 也可表示为

$$(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s)\vec{X}=\vec{0},$$

其中$\vec{X}=(x_1,x_2,\cdots x_s)^{\mathrm{T}}$. 因为$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$可由$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_t$线性表出, 可设

$$\begin{cases}\vec{\alpha}_1=c_{11}\vec{\beta}_1+c_{21}\vec{\beta}_2+\cdots+c_{t1}\vec{\beta}_t,\\ \vec{\alpha}_2=c_{12}\vec{\beta}_1+c_{22}\vec{\beta}_2+\cdots+c_{t2}\vec{\beta}_t,\\ \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \vec{\alpha}_s=c_{1s}\vec{\beta}_1+c_{2s}\vec{\beta}_2+\cdots+c_{ts}\vec{\beta}_t,\end{cases}$$

上式也可表示为如下矩阵与向量的乘积形式：

$$(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s)=(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_t)C,$$

其中 $$C=(c_{ij})_{t\times s}=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{t1} & \cdots & c_{ts} \end{pmatrix}.$$

第j列是$\vec{\alpha}_j$被表出的系数

于是，考察$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$的线性相关性，相当于考察如下方程组

$$(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s)\vec{X}=(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_t)C\vec{X}=\vec{0} \qquad (*)$$

由于矩阵C的行数 t 小于列数 s，则齐次线性方程组$C\vec{X}=\vec{0}$必有非零解，且该解也是上述方程组(*)的解，从而知$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性相关. ■

回到本节初的问题：对向量组来说，去冗为何物？具体地说，去掉一些向量，剩下一个部分组，使得该部分组与原向量组等价.

问题：这样的部分组是否存在？若存在，它有何性质？又应该怎么求?

(二)、极大无关组及其性质

定义2 如果向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 中

(1) 存在 r 个线性无关的向量 $\vec{\alpha}_{i_1}, \vec{\alpha}_{i_2}, \cdots, \vec{\alpha}_{i_r}$；

(2) 再加入任意一个向量 $\vec{\alpha}_i\ (i = 1, 2, \ldots, s)$ 都线性相关；

那么向量组 $\vec{\alpha}_{i_1}, \vec{\alpha}_{i_2}, \cdots, \vec{\alpha}_{i_r}$，称为向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 的极大线性无关组，简称为**极大无关组**.

无关性

极大性

- 关于向量组极大无关组的问题：
  - 一个向量组的极大无关组与原向量组有什么关系?
  - 向量组极大无关组的几个基本问题：存在、唯一、所含向量的个数、判断、求法.

例2. 考虑向量组$\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

- 由于$\vec{\alpha}_1$与$\vec{\alpha}_2$不成比例，故$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$线性无关，且

$$\vec{\alpha}_3=\frac{1}{2}\vec{\alpha}_1+\frac{3}{2}\vec{\alpha}_2,$$

  则再添加$\vec{\alpha}_3$后就线性相关了，由定义2知，$\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\}$是一个极大线性无关组.
- 实际上，容易验证$\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_3\}$与$\{\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3\}$也都是原向量组的极大线性无关组.

单选题 1分

设置

例3. 设$\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s\}$是线性无关的向量组, 则其极大无关组为__________.

A $\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s\}$ 自身

B $\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s\}$ 中的任意部分向量组

C 不存在极大无关组

提交

单选题 1分

设置

第i位

例4 (自然基). 设 $\vec{e}_i=(0,\cdots 0,\underbrace{1}_{\text{第}i\text{位}},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}(1\le i\le n)$, 则向量组$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ 是否$\mathbb{R}^n$中全体列向量集的极大无关组?

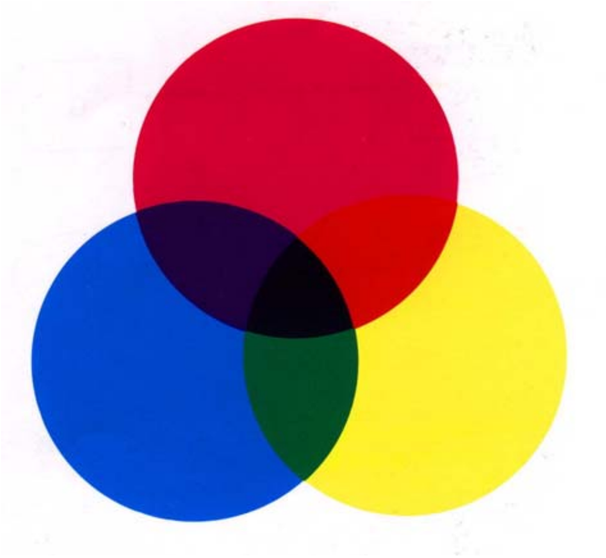
A 是

B 不是

C 无法确定

提交

红黄蓝三原色，构成颜色集合的“极大无关组”



性质1 (存在性) 向量组存在极大线性无关组 $\Leftrightarrow$ 向量组含非零向量.

证明 “$\Rightarrow$” 若只有零向量，则任何部分组均线性相关. 从而零向量组没有极大无关组.

“$\Leftarrow$” 设向量组不全为零, 采用无关组扩充+遍历检测方法:

设向量组为 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$, 不妨设$\vec{\alpha}_1$非零, 故$\{\vec{\alpha}_1\}$线性无关,

在剩下的向量中任取一个, 检验它加入现有无关部分组$\{\vec{\alpha}_1\}$后的相关性,

- 若线性相关, 则扔掉,
- 若线性无关, 则把它加入无关部分组(扩充)

. ...继续这个过程, 最终可得到一个无关部分组, 经遍历检测有, 再任意添加任意一个向量后均线性相关, 即得原向量组的一个极大线性无关组. ■

性质2 (非唯一性) 向量组的极大线性无关组不唯一.

性质3 (等价性) 向量组与它的极大无关组等价.

证明: 一方面，由于极大无关组是向量组的部分组(子集)，故可被向量组线性表出.

另一方面，设$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r$为一个极大无关组，对于向量组中任意向量$\vec{\alpha}$, 若$\vec{\alpha} \in \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r\}$, 则$\vec{\alpha}$可由该极大无关组线性表出；

若$\vec{\alpha} \notin \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r\}$, 由极大无关组的极大性可知，添加$\vec{\alpha}$后，$\{\vec{\alpha}, \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r\}$线性相关，再由线性相关性理论中的临界关系知，$\vec{\alpha}$可由$\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r\}$(唯一地)线性表出.

综上，向量组与它的极大无关组可相互线性表出，即它们等价. ■

推论 向量组的任意两个极大无关组等价.

证明: 极大无关组1 ～ 原向量组 ～ 极大无关组2

性质4 (表出性). 部分组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_r$ 是一个极大线性无关组 $\Leftrightarrow$ $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_r$ 线性无关，且向量组中每个向量$\vec{\alpha}$都可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_r$ 线性表出.

注：该性质给出了极大无关组的等价定义，即, 在“无关性”的前提下,

“极大性” $\Leftrightarrow$ “表出性”.

证明 “$\Rightarrow$” 由极大性知，对任意向量$\vec{\alpha}$, 均有$\{\vec{\alpha}, \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_r\}$线性相关，再由线性相关性理论的临界关系知，$\vec{\alpha}$可由$\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_r\}$ (唯一地) 线性表出.

“$\Leftarrow$” 若$\vec{\alpha}$可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_r$线性表出，则$\{\vec{\alpha}, \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_r\}$必线性相关，再由$\vec{\alpha}$的任意性即得极大性，从而$\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_r\}$是极大无关组. ■

(三)、极大无关组的求法

- 用定义去求极大无关组，并不是一个有效的办法，特别是在验证极大性的时候，需要遍历并添加已选定的向量组之外的每一个向量，再分析其线性相关性.
- 是否有一种更有效的方法，可求出一组极大无关组，并进一步将每一个向量表示为极大无关组的线性组合？

- 回答是肯定的. 需要矩阵, 初等变换, 以及齐次线性方程组相关理论和方法.

定理1 如果矩阵 A 经过初等行变换化为 B, 则 A 与 B 的列向量组的任何对应部分组有相同的线性相关性.

分析: 用数学的语言来说，即若

$$A=\left(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_n\right)=B$$

设$\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$, 则

$$\vec{\alpha}_{i_1},\vec{\alpha}_{i_2},\cdots,\vec{\alpha}_{i_r}\text{ 线性相(无)关}\Longleftrightarrow\vec{\beta}_{i_1},\vec{\beta}_{i_2},\cdots,\vec{\beta}_{i_r}\text{ 线性相(无)关.}$$

证明: 符号规定如上，可知存在可逆矩阵 P 使得 $PA=B$

$$\Rightarrow P(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n)=(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_n),\ \Rightarrow P\vec{\alpha}_i=\vec{\beta}_i\ \ (\forall i)$$

记 $A_1=\left(\vec{\alpha}_{i_1},\vec{\alpha}_{i_2},\cdots,\vec{\alpha}_{i_r}\right)$, $B_1=\left(\vec{\beta}_{i_1},\vec{\beta}_{i_2},\cdots,\vec{\beta}_{i_r}\right)$, 则由 $P\vec{\alpha}_i=\vec{\beta}_i\ (\forall i)$ 知

$$PA_1=B_1.$$

因 P 可逆，齐次方程组 $A_1\vec{X}=\vec{0}$ 与 $B_1\vec{X}=PA_1\vec{X}=\vec{0}$ 同解，从而两个向量组线性关系必然相同. 即

$$\vec{\alpha}_{i_1},\vec{\alpha}_{i_2},\cdots,\vec{\alpha}_{i_r}\ \text{线性相(无)关} \Longleftrightarrow \vec{\beta}_{i_1},\vec{\beta}_{i_2},\cdots,\vec{\beta}_{i_r}\ \text{线性相(无)关.}$$ ■

由子集$\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$ 选取的任意性，可证 (留作课后思考题)

$$\boxed{\vec{\alpha}_{i_1},\vec{\alpha}_{i_2},\cdots,\vec{\alpha}_{i_r}\ \text{为}A\text{的极大无关组} \Longleftrightarrow \vec{\beta}_{i_1},\vec{\beta}_{i_2},\cdots,\vec{\beta}_{i_r}\ \text{为}B\text{的极大无关组.}}$$

也就是说，矩阵的初等行变换不改变矩阵列向量组的线性相关性.

又因为所有矩阵经初等行变换总可以化为(简化)阶梯形矩阵, 于是问题就归结为：

(简化) 阶梯形矩阵的列极大无关组为何？

例5. 对如下简化阶梯形矩阵，$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

(组合系数)

(极大无关组)

- 主元素所在的列 (1~r列) 是线性无关的 (自然基的无关性).
- 其它列 (r+1 ~ n列)，可表示为前r列的线性组合，并且线性组合的系数就是该列的前r个元素; (表出性).

⇒ 主元素所在的列 (1~r列) 就是C的列向量集的一个极大无关组.

向量组极大无关组的求法（列向量，初等行变换）

Step 1. 将n维向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 按列排成矩阵 $A = (\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s)_{n\times s}$;

Step 2. 用初等行变换将 A 化为简化的阶梯形矩阵 C;

Step 3. C 的主元素所在列所对应的 A 的列向量即是其列向量组的极大无关组;

Step 4. A中任意列可唯一地表为上述极大无关组的线性组合, 其组合系数为C中对应列的前r个分量上的数 (r = 主元个数).

问题: 对行向量组求极大无关组，应该如何操作？

方法1： 转置+行变换

方法2： 列变换

例3 设 $A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵 A 列向量组的一个极大无关组，并把其余列向量用所求出的极大无关组表示出来.

解 通过初等行变换把 A 化为简化的阶梯形矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 0 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & & c3 & c4\end{array}\\ \begin{bmatrix}\boxed{1} & 0 & \boxed{-3} & \boxed{-4}\\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}=C$$

从而， $c1$与$c2$是A 的列向量组的极大无关组; 且

$$c3=(-3)\times c1+c2;$$

$$c4=(-4)\times c1+2\times c2.$$

本讲小结

- 两个向量组的线性关系
  - 向量组之间的表出，向量组等价，数量关系
- 极大线性无关组的定义
  - 无关性 + 极大性
- 极大线性无关组的性质
  - 存在性；非唯一性；等价性；无关性+表出性
- 极大线性无关组的求法
  - 列向量组+初等行变换 ⇒ 简化阶梯形矩阵

极大线性无关组是向量组的本质!!!

正因为如此，研究向量组时，我们往往剔除冗余的向量，紧紧抓住极大线性无关组来说事. 正所谓——

五言绝句

(佚名)

叶落留枝干，擒贼先擒王；
若论向量集，极大且无关.

问题：极大线性无关组并不是唯一的，不同的极大无关组之间，会存在什么样的本质联系呢？