《线性代数》

第四章 矩 阵

§ 4.3 矩阵的其他运算

2019秋

杨晶 主讲

内容提要

- 方阵的方幂与多项式
- 矩阵的转置
- 方阵的行列式与方阵的运算

(一) 方阵的方幂与矩阵多项式

设 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，则由可乘条件知，

$$A\cdot A \text{ 有意义 } \iff m=n \iff A\text{为方阵}.$$

对于n阶方阵A，定义A的方幂为：$A^k=\underbrace{A\cdots A}_{k\text{次}},\quad (k\in\mathbb{Z}^+).$

另对A^0，我们规定 $A^0:=I_n$.

矩阵方幂的性质如下，设A为n阶方阵，k, l 为非负整数，则

- $A^kA^l=A^{k+l}=A^lA^k,$
- $(A^k)^l=A^{kl}.$

进而，对同一个n阶方阵A反复进行线性运算与乘法(方幂)运算，经过合并化简后，可得

$$a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$$

把上式记为 $f(A)$，称为关于矩阵A的m次多项式.

由于A^k与A^l乘法可交换，对任意多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，有矩阵多项式 $f(A)$ 与 $g(A)$ 乘法可交换，即

$$f(A)g(A) = g(A)f(A).$$

问题： 设A, B同为 n 阶方阵，则以下等式是否成立？

$$(AB)^2 = A^2B^2$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

正确推导如下：

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = ABAB$$

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &= A(A+B) + B(A+B) \\ &= A^2 + AB + BA + B^2\end{aligned}$$

特别地，当A与B乘法可交换时，即 $\underline{AB = BA}$ 时，有

$$(AB)^2 = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) = A^2B^2.$$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

例1 设 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$，求 $(XY)^{100}$.

分析：

$$XY = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix},$$

先求 XY，再求 $(XY)^{100}$ 的方法不可行. 但是，交换一下，有

$$YX = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

因此，应利用矩阵乘法的结合律来简化计算.

解：$(XY)^{100} = (XY)(XY)\cdots(XY)$

$$= X(YX)(YX)\cdots(YX)Y$$

$$= X(YX)^{99}Y$$

$$= (YX)^{99}XY$$

$$= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^{99}\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{pmatrix}.$$

单选题

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2017} = ?$$

A $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

B $2017\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 2^{2017} & 2^{2017} \\ 2^{2017} & 2^{2017} \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 2^{2016} & 2^{2016} \\ 2^{2016} & 2^{2016} \end{pmatrix}$

提交

(二) 矩阵的转置运算

第一章中，讨论行列式时，我们曾经把行列式的行与列互换. 对一般的$m\times n$阶矩阵来说，有同样的操作。

定义： 设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$, 将A的行与列互换得到的矩阵称为A的**转置**，记为A^{T}.

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

注： A^{T}为 $n\times m$ 阶矩阵，若记 $A^{\mathrm{T}}=(a'_{ij})_{n\times m}$，则有$a'_{ij}=a_{ji}$.

矩阵转置的运算律

设矩阵 A, B 和实数 λ 使得下述相关运算有定义，则

(1) 两次还原： $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A,$

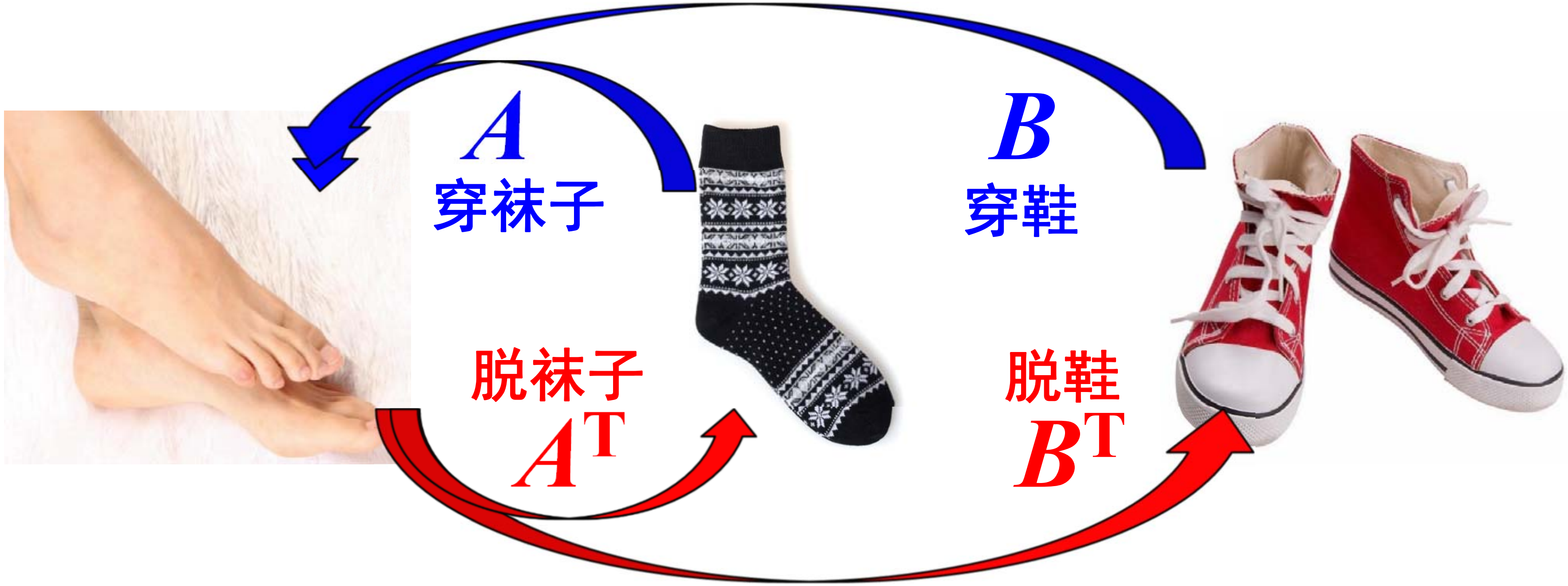
(2) 加法相容： $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}},$

(3) 数乘相容： $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}},$

(4) 乘法反序： $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

注：(1), (2), (3)可直接验证，下面只详细证明(4).

- 乘积矩阵求转置的“穿脱原则”：



整个蓝色的过程的反向过程，就是整个红色的过程，即：

$$(AB)^{\mathrm{T}}=[(\text{穿袜子})\cdot(\text{穿鞋})]^{\mathrm{T}}=(\text{脱鞋})\cdot(\text{脱袜子})=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$$

证明运算律(4)： 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times s}$，则 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 均为 $s\times m$ 阶的矩阵.

一方面，$(AB)^{\mathrm{T}}$ 第i 行第j 列的元素为AB第j 行第i 列的元素，即

$$\underline{\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki},} \quad (1\le i\le s, 1\le j\le m)$$

另一方面，设 $A^{\mathrm{T}}=(a'_{ij})_{n\times m}$, $B^{\mathrm{T}}=(b'_{kl})_{s\times n}$ 则有 $a'_{ij}=a_{ji}$, $b'_{kl}=b_{lk}$.

于是，$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 第i 行第j 列的元素为

$$\sum_{k=1}^{n} b'_{ik}a'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = \underline{\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}} \quad (1\le i\le s, 1\le j\le m)$$

从而 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 为同型矩阵，且对应元素相等，故$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$. ■

例2 已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$, 求 $(AB)^{\mathrm{T}}$.

解法1

$$\because AB=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$\therefore (AB)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{bmatrix}.$$

解法2

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 7 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{bmatrix}.$$

一般 $A^{\mathrm{T}} \neq A$, 例如 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \neq A.$

- 若 $A^{\mathrm{T}}=A$, 则 A 必为方阵, 此时称 A 为**对称阵**.

$$\boxed{A=A^{\mathrm{T}} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij}=a_{ji}\ (1 \leq i, j \leq n)}$$

例如, $A=\begin{bmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 为对称阵.

以主对角线为轴,
对称位置相等.

再如：对角阵 $\operatorname{diag}(a_1,\cdots,a_n)=\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}$ 是对称阵.

● 若 $A^{\mathrm{T}}=-A$, 则 A 必为方阵, 此时称 A 为反对称阵.

$$A=-A^{\mathrm{T}} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij}=-a_{ji}\ (1\le i,j\le n) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{ij}=-a_{ji}\ (1\le i\ne j\le n) \\ a_{ii}=0 \quad (1\le i\le n) \end{cases}$$

即

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

例如：若对角阵A=diag(a_1, …, a_n)是反对称阵，则 $A=O$.

对称阵与反对称阵的运算律

(1) 如果A, B是同阶对称矩阵，则$A+B, kA$也是对称矩阵.

(2) 如果A, B是同阶反对称矩阵，则$A+B, kA$也是反对称矩阵.

—— 即线性运算保持矩阵的(反)对称性.

证明：只证(1)，而(2)同理.

$$(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}} = A + B, \quad (kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}} = kA. \qquad \blacksquare$$

问题：两个(反)对称阵的乘积是不是(反)对称矩阵?

回答: 乘法运算不一定保持(反)对称性.

例如 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 均为对称阵, 但

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=$$ 不是对称阵.

又如 $A=B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 均为反对称矩阵, 但

$$AB=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=$$ 不是反对称矩阵.

(三) 方阵的行列式与方阵的运算

对于n阶方阵A，我们用 $|A|$ 或 $\det(A)$ 表示对应的n阶行列式. 故行列式也可视为方阵的一种运算.

以下结论说明：行列式运算与乘法运算是相容的；或者行列式为关于方阵的积性函数.

定理 设$A,B\in M_n$, 则 $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$ 或 $|AB|=|A|\cdot|B|$

推论 设$A_1,\ldots,A_s$为s个n阶方阵, 则

$$\det(A_1A_2\cdots A_s)=\det A_1\det A_2\cdots\det A_s.$$

定理证明： 设 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=AB=(c_{ij})$，则

$$\det A\cdot\det B=\begin{vmatrix}A & 0\\ -I & B\end{vmatrix}=\left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0\\ \hline -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{array}\right|$$

$\times a_{11}$ $\times a_{12}$ $\times a_{1n}$

将第n+1行的a_{11}倍，第n+2行的a_{12}倍，……第2n行的a_{1n}倍，依次加到第1行，则第1行前n个位置化零，而第1行后n个位置化为：

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1},\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k2},\cdots,\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{kn}\right)=(c_{11},c_{12},\cdots,c_{1n})$$

即得

$$\det A\cdot\det B=\left|\begin{array}{ccc:ccc}0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0\\ \hdashline -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{array}\right|$$

$\times a_{21}$ $\times a_{22}$ $\times a_{2n}$

将第$n+1$行的a_{21}倍，第$n+2$行的a_{22}倍，……第$2n$行的a_{2n}倍，依次加到第2行，则第2行前n个位置化零，后n个位置化为：$c_{21},c_{22},\cdots,c_{2n}$.

以此类推，直到将第n行的前n位置化零，此时右上角恰为C，因此

$$\det A \cdot \det B = \begin{vmatrix} 0 & C \\ -I & B \end{vmatrix} = (-1)^{n^2} \det(-I) \det C$$

$$= (-1)^{n(n+1)} \det C \quad = \det AB. \qquad \blacksquare$$

此外，易知方阵的行列式运算与其他运算有如下关系：

$$\boxed{\begin{aligned} &\det A^{\mathrm{T}} = \det A, \\ &\det(kA) = k^n \det A. \end{aligned}}$$

问题：是否有 $\det(A+B) \overset{?}{=} \det A + \det B$

例3 试证：奇数阶反对称矩阵的行列式一定为0.

证明： 设n为奇数，A为n阶反对称矩阵，则

$$|A| = |-A^T| = (-1)^n |A^T| = -|A|$$

$$\Rightarrow \quad 2|A| = 0 \quad \Rightarrow \quad |A| = 0.$$

■

本讲小结

- 矩阵的方幂与多项式
- 矩阵的转置
  - 对称阵与反对称阵
- 方阵行列式与其他运算的关系
  - 行列式与乘法运算相容（可交换运算次序）