《线性代数》

第二章 行列式

§2.5 行列式的综合计算

2019秋

杨晶 主讲

内容提要

- **举例说明**：利用其性质化简行列式的计算
- **主要思想**：初等变换，“打洞”化零
  行(列)和拆项
- **进阶方法**: 归纳法、递推法、升阶法、分块三角阵法等

行列式性质回顾

0、行列等价

✔ 1、单位归一

✔ 2、行(列)加法拆项法则

✔ 3、倍乘可提出

✔ 4、对换取反

5、倍加不变

推论1　零行(列)得零

推论2　同行(列)化零

推论3　同比化零

初等变换+展开公式，是行列式计算中最常用的方法.

6、行(列)展开公式：$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \delta_{ik}D;\quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \delta_{jk}D.$

例1 计算下面的四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&-2&3\\-1&-2&4&-2\\0&1&2&-1\\2&3&-3&10\end{vmatrix}$

解 通过行变换将 D 化为上三角行列式

$$D\overset{r_2+r_1}{\underset{r_4-2\times r_1}{=\!=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1&2&-2&3\\\boxed{0}&0&2&1\\\boxed{0}&1&2&-1\\\boxed{0}&-1&1&4\end{vmatrix}\overset{r_4+r_3}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&2&-2&3\\0&0&2&1\\0&1&2&-1\\0&\boxed{0}&3&3\end{vmatrix}\underset{r_2\leftrightarrow r_3}{=\!=\!=}-\begin{vmatrix}1&2&-2&3\\0&1&2&-1\\0&0&2&1\\0&0&3&3\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-(3/2)\times r_3}{=\!=\!=\!=\!=\!=}-\begin{vmatrix}1&2&-2&3\\0&1&2&-1\\0&0&2&1\\0&0&\boxed{0}&3/2\end{vmatrix}=-3.$$

例2 计算 $$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

分析特点: 每行元素之和均为 Σa_i+x.

操作: 把第2~n列加到第1列, 提出公因子, 然后将第1行的 −1 倍加到其余各行, 即可化简.

解　将第2,3,$\cdots$,$n+1$列都加到第一列，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & x & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

提取第一列的公因子，得

$$D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x\end{vmatrix}.$$

将第1列的$(-a_1)$倍加到第 2列，将第 1列的$(-a_2)$倍加到第 3列，$\cdots$，将第1列的$(-a_n)$倍加到最后一列，得

$$D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

课后练习题：用类似方法计算下面的 n 阶行列式：

$$(1)\ D_n = \begin{vmatrix} a-x & b & \cdots & b \\ b & a-x & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a-x \end{vmatrix}$$

$$(2)\ D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

例3 计算下列行列式 (其中 $a_i \neq 0,\ i = 1,\ldots, n$):

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

注: 这种行列式称为箭形(爪形)行列式.

左边的下标$n+1$提示这是一个$n+1$阶的行列式.

分析: 对箭形行列式有固定方法，即把第 $i+1$ 列的 $-c_i/a_i$ 倍加到第1列 $(i=1,2,\ldots,n)$，就可以把这个行列式化为三角行列式.

解

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b_ic_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right).$$

$$=\prod_{j=0}^{n}a_j-\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_ib_ic_i.$$

(其中 $\tilde{a}_i := {a_1a_2\cdots a_n}/{a_i}$.)

例4 计算列等式

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \qquad (a_1a_2\cdots a_n \neq 0.)$$

分析: 行列式中每一项中都含有1，除此之外，主对角线上每项上还有一个a_i的加项.

思考: 应如何利用上述特点？

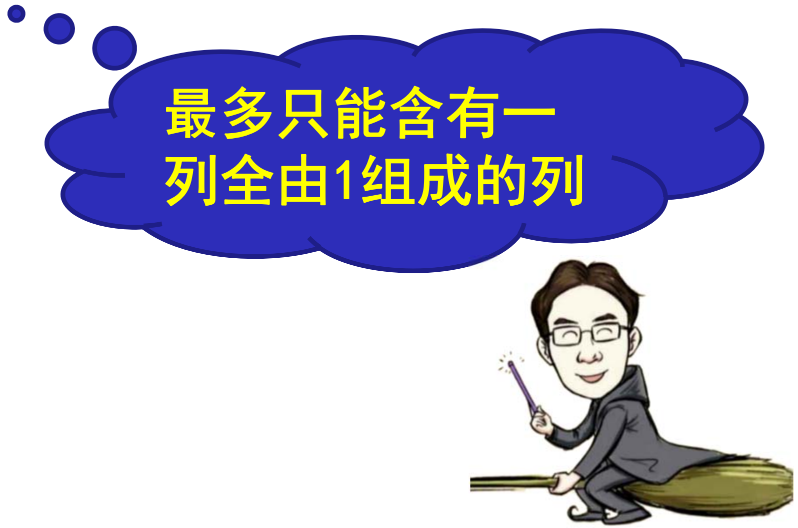
解法1　D的第2~n行均减第1行，可化成箭形行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & & & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i}\right)a_2\cdots a_n = \left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

解法2 除主对角线外，将每项的1写成1+0, 将D拆成2^n个行列式,

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+0 & \cdots & 1+0 \\ 1+0 & 1+a_2 & \cdots & 1+0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+0 & 1+0 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$



解法2 除主对角线外，将每项的1写成1+0, 将D拆成2^n个行列式,
只有如下的$n+1$个非0:

$$D=\begin{vmatrix}1&&&\\1&a_2&&\\\vdots&&\ddots&\\1&&&a_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&1&&\\&1&&\\&\vdots&\ddots&\\&1&&a_n\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}a_1&&&1\\&a_2&&1\\&&\ddots&\vdots\\&&&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{a_1}\prod_{k=1}^{n}a_k+\frac{1}{a_2}\prod_{k=1}^{n}a_k+\cdots+\frac{1}{a_n}\prod_{k=1}^{n}a_k+\prod_{k=1}^{n}a_k$$

$$=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

最多只能含有一
列全由1组成的列

行列式计算小结(1)

1. 利用定义直接计算：适用于非零元素较少的情况.

2. 打洞法1：利用初等变换把行列式化为三角行列式.

3. 行(列)拆项法：把行列式拆分为2的方幂个易于计算的行列式之和.

4. 降阶法：展开公式

5. 典型类型：行和固定，箭形等

单选题 1分

设置

1. 若$D_n = \left|a_{ij}\right|_{n\times n} = a$,则$D = \left|-a_{ij}\right|_{n\times n} = ???$

A $\boldsymbol{a}$

B $-\boldsymbol{a}$

C $(-1)^{n}\boldsymbol{a}$

D $(-1)^{n-1}\boldsymbol{a}$

提交

单选题 1分

设置

$$3.\quad D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2017 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2018 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

A $2018!$

B $-2018!$

C $(-1)^n 2018!$

D $(-1)^{n+1} 2018!$

提交

单选题 1分

设置

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} =$$

A $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$

B $(a_2a_3 - b_2b_3)\cdot(a_1a_4 - b_1b_4)$

C $-(a_2a_3 - b_2b_3)\cdot(a_1a_4 - b_1b_4)$

D 0

提交

行列式计算的典型方法

1. 定义法

——适用范围有限

2. 打洞法1

——初等变换化为三角阵

3. 拆项法

——某一行(列)可以表为两行（列）相加，则拆分为2个同阶行列式之和

4. 降阶法

——展开公式

5. 固定形式

——行和固定，箭形等

6. 升阶法（加边法）

7. 递推公式法

8. 化为范德蒙行列式计算

9. 分块三角法（分块打洞法）

例4 计算下列行列式

$$D=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}\quad (a_i\neq 0)$$

方法1： D的第2~n行均减第1行，可化成箭形行列式

方法2： 拆项法，1表示为1+0，拆为2^n个行列式之和

分析: 行列式中每一项中都含有1.

——如果有一个全1的行就好了！

例4(续) 计算下列行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0)$$

方法1： D的第2~n行均减第1行，可化成箭形行列式

方法2： 拆项法，1表示为1+0，拆为2^n个行列式之和

分析: 行列式中每一项中都含有1.

——如果有一个全1的行就好了！

方法3 在D的上面加一行$(1, 1, \ldots, 1)$, 左边加一列$(1, 0, \ldots, 0)^T$， 得到$n+1$阶行列式D_1, 这种方法叫**加边法(升阶法)**.

$$D = D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & & & a_n \end{vmatrix}$$

箭形行列式

$$= \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} = \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n} a_i$$

例5 计算下面n阶范德蒙 (*Vandermonde*) 行列式 $(n \geq 2)$

连乘号

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \boxed{\prod}_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

求积范围:后减前

形式分析： 第一行为全1行，第二行有n个元素；
每个元素各占1列，幂次从 0 到 $n-1$ 连续递增.

结果分析：

$$\left.\begin{array}{ll} j=1\text{时} & (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1) \\ j=2\text{时} & \qquad\qquad (a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2) \\ \cdots\cdots j=n-1\text{时} & \qquad\qquad\qquad\qquad (a_n-a_{n-1}) \end{array}\right\} \text{共}\frac{n(n-1)}{2}\text{项}$$

证明： 用归纳法.

当n=2时， $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 = \prod_{1 \le i < j \le 2} (a_j - a_i).$

假设结论对$n=k-1$成立，即

$$D_{k-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{k-2} & a_2^{k-2} & \cdots & a_{k-1}^{k-2} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le k-1} (a_j - a_i).$$

则当 $n=k$ 时，有

（分析：希望能降阶，从而可利用归纳假设 → 初等变换+展开公式.）

观察D_k的第一列，下面元素是上面元素的 a_1 倍，从第n行到第2行，依次将前一行的 $(-a_1)$ 倍加到本行上，得

$$
D_k=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \cdots & a_k^{k-1} \end{vmatrix}
=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_k-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_k(a_k-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{k-2}(a_2-a_1) & a_3^{k-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_k^{k-2}(a_k-a_1) \end{vmatrix}
$$

$\times(-a_1)$ $\times(-a_1)$ $\times(-a_1)$

$$D_k = (a_k - a_1)\cdots(a_2 - a_1)\cdot \underline{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^{k-2} & a_3^{k-2} & \cdots & a_k^{k-2} \end{vmatrix}}$$

$$= (a_k - a_1)\cdots(a_2 - a_1)\cdot \prod_{\underline{2\le j<i\le k}} (a_i - a_j) \qquad \text{(由归纳假设)}$$

$$= \prod_{1\le j<i\le k} (a_i - a_j).$$

■

问题： 哪些行列式可以化成范德蒙行列式的形式？你能识别出来吗？

思考: 计算下列行列式.

(1) $$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_3}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = -(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1\ \ 3^0 & 1\ \ 2^0 & 4\ \ 2^2 & a \\ 3\ \ 3^1 & \frac{1}{2}\ \ 2^{-1} & 8\ \ 2^3 & aq \\ 9\ \ 3^2 & \frac{1}{4}\ \ 2^{-2} & 16\ \ 2^4 & aq^2 \\ 27\ \ 3^3 & \frac{1}{8}\ \ 2^{-3} & 32\ \ 2^5 & aq^3 \end{vmatrix} = 4a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & 2 & q \\ 3^2 & (\frac{1}{2})^2 & 2^2 & q^2 \\ 3^3 & (\frac{1}{2})^3 & 2^3 & q^3 \end{vmatrix} = 4a(\tfrac{1}{2} - 3)(2 - 3)(q - 3)$$

$$\times (2 - \tfrac{1}{2})(q - \tfrac{1}{2})(q - 2)$$

$$= \frac{15a}{2}(2q - 1)(q - 3)(q - 2).$$

等比数列

例6 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$ (**分析：**缺了2次方的一行构成等比数列)

解： 考虑

$$D'=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a_1 & a_2 & a_3 \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ x^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}.$$

一方面，D'是一个标准范德蒙行列式，有

$$D'=(a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)\prod_{1\le j<i\le 3}(a_i-a_j).$$

故D'是关于x的3次多项式，其中x^2的系数为 $(a_1+a_2+a_3)\prod\limits_{1\le j<i\le 3}(a_i-a_j).$

另一方面，将D'按第一列展开，可知x^2的系数为

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a_1 & a_2 & a_3 \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ x^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{3+1} D = D.$$

比较两种方法所得x^2的系数，有

$$D = (a_1 + a_2 + a_3) \prod_{1 \le j < i \le 3} (a_i - a_j) = \left(\sum_{k=1}^{3} a_k \right) \cdot \prod_{1 \le j < i \le 3} (a_i - a_j).$$

注：1.本例中，我们运用了加边法，特殊行列式法，按列展开法，对比系数法. ——行列式计算往往需要综合利用各种方法.

2.本例中的D称为超范德蒙行列式，且结果可以推广到一般情况.

(课外拓展: 请推导一般超范德蒙行列式的计算公式.)

例7 计算 n 阶三对角行列式 (**递推公式法**)

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \mathbf{0} & \\ & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ & & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

D_{n-1}

分析： 0元素很多，有明显规律性 → 展开公式降阶

解： 将D_n按第一列展开，得

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\begin{vmatrix} \alpha\beta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

$D_{n\text{-}2}$

$$\Rightarrow \quad D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$

二阶递推式

可化为 $D_n-\beta D_{n-1}=\alpha D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})$

令 $d_n:=D_n-\beta D_{n-1}$ 得

2个一阶递推式

$$d_n=\alpha d_{n-1}=\alpha^2 d_{n-2}=\cdots=\alpha^{n-2}d_2=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1)=\alpha^n$$

从而 $D_n=\beta D_{n-1}+\alpha^n=\beta(\beta D_{n-2}+\alpha^{n-1})+\alpha^n=\beta^2 D_{n-2}+\alpha^{n-1}\beta+\alpha^n$

$$=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\alpha^{n-2}\beta^2+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$$

例8 $D=\begin{vmatrix} \boxed{0} & 1 & \boxed{0} & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2\times 3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

$$=(-1)^{1+2}(-1)\cdot 25\cdot(-4)=-100.$$

分析： 利用准(分块)三角行列式的结果.

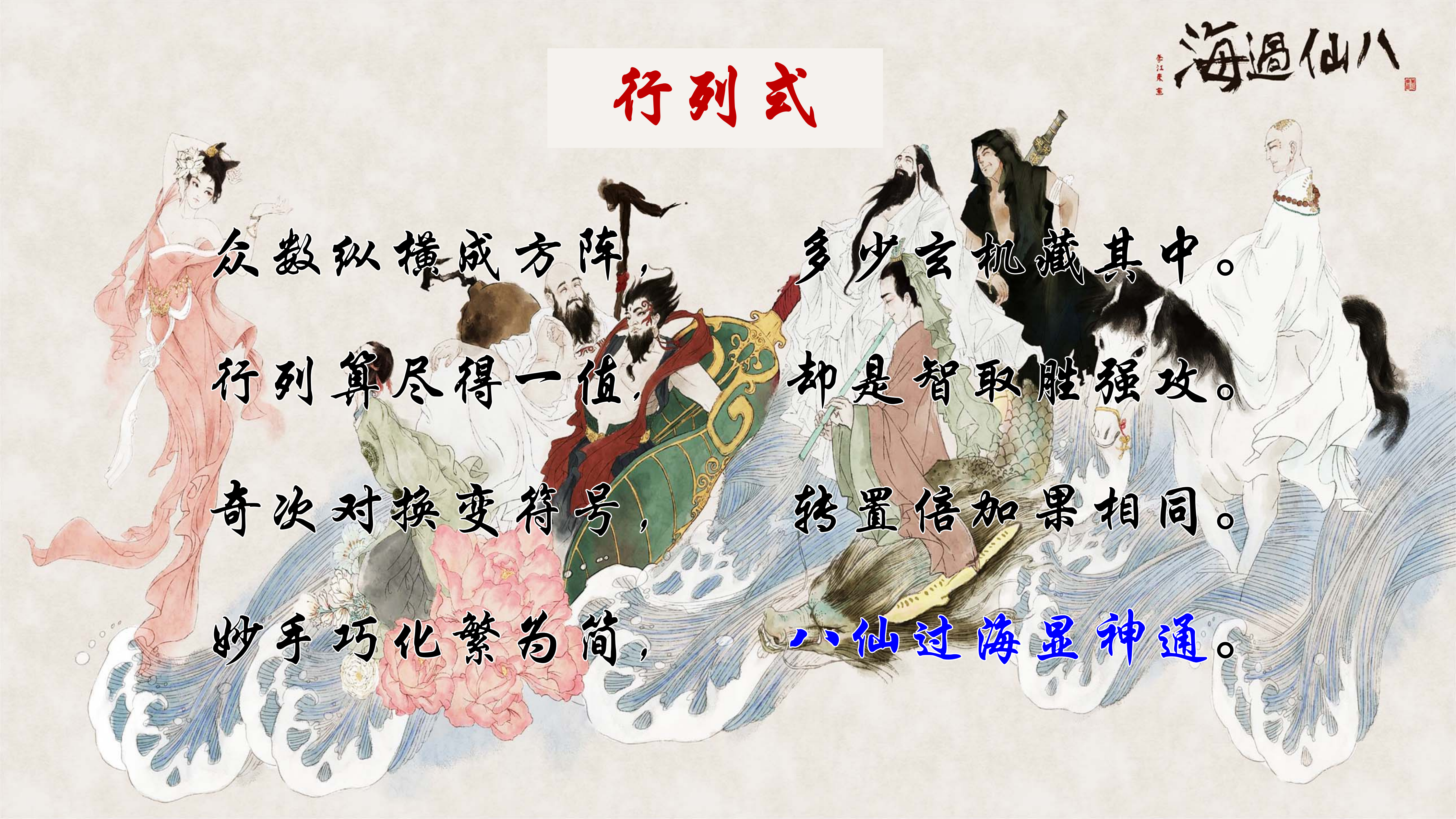
$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|;\quad \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|.\quad \begin{vmatrix} O & B_{t\times t} \\ A_{s\times s} & C_{s\times t} \end{vmatrix}=(-1)^{st}|A||B| = \begin{vmatrix} C_{t\times s} & B_{t\times t} \\ A_{s\times s} & O \end{vmatrix}$$

本讲小结(2)

- 升阶法（加边法）
- 归纳法
- 化为范德蒙行列式法
- 递推公式法
- 分块三角法（分块打洞法）

计算行列式的方法比较灵活，同一行列式可以有多种计算方法；有的行列式计算需要几种方法综合应用．在计算时，首先要仔细考察行列式在构造上的特点，利用行列式的性质对它进行变换后，再考察它是否能用常用的几种方法．

行列式



众数纵横成方阵，　　多少玄机藏其中。

行列算尽得一值，　　却是智取胜强攻。

奇次对换变符号，　　转置倍加果相同。

妙手巧化繁为简，　　八仙过海显神通。