《线性代数》

第二章 行列式

§2.3 行列式的展开公式

2019秋

杨晶 主讲

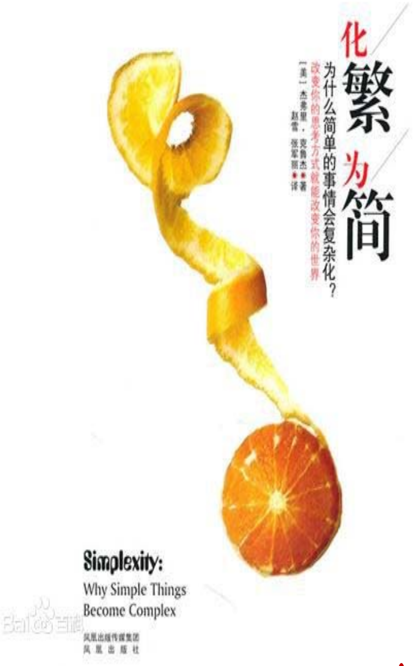
复习：

定理 二阶、三阶行列式等于它的任一行 (或列) 的元素与其代数余子式乘积之和.

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
\begin{aligned}
&= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\
&= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\
&= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \\
&= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\
&= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\
&= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}
\end{aligned}
$$

此结论是否可以推广到n阶

内容提要



一、准三角行列式

二、余子式与代数余子式

三、行列式按行(列)展开法则

计算高阶行列式的思路：将高阶行列式化为低阶行列式计算

一、准(分块)三角行列式的计算问题 (block triangular det)

引理1. 令 $D=\left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ \hdashline c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right|$, $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$ $D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix}$.

则有，$D=D_1D_2$

引理1(简化版): 对于准下三角行列式, 有 $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|$.

证明：利用行的初等变换，总可把 D_1 化成下三角行列式，

$$D_1 \xlongequal{r} \begin{vmatrix} p_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ p_{1k} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{kk}$$

再利用列的初等变换，总可把 D_2 化成下三角行列式，

$$D_2 \xlongequal{c} \begin{vmatrix} q_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ q_{1n} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} = q_{11} \cdots q_{nn}$$

对 D 的前 k 行作运算 r，后 n 列作运算 c, 则有

$$D \xlongequal[c]{r} \begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= p_{11} \cdots p_{kk} q_{11} \cdots q_{nn} = D_1 D_2$$

例1 $$D=\begin{vmatrix}1&1&1&0&0\\1&2&0&0&0\\1&0&3&0&0\\1&-1&5&1&2\\1&4&7&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2$$

类似地，我们还有如下结论：

准下三角行列式

$$\begin{vmatrix}A&O\\C&B\end{vmatrix}=|A||B|;\quad \begin{vmatrix}A&C\\O&B\end{vmatrix}=|A||B|.$$

准上三角行列式

单选题 1分

设置

请大家思考：$\begin{vmatrix} O & B_{t\times t} \\ A_{s\times s} & C_{s\times t} \end{vmatrix} = ?$ $\begin{vmatrix} C_{t\times s} & B_{t\times t} \\ A_{s\times s} & O \end{vmatrix} = ?$

A 均为 $-|A||B|$.

B 均为 $(-1)^{st}|A||B|$.

C 均为 $(-1)^{s+t}|A||B|$.

D $(-1)^{s}|A||B|$ 或 $(-1)^{t}|A||B|$

提交

二、余子式与代数余子式

定义 (1) 在n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}.

(2) 记$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, 叫做元素a_{ij}的代数余子式(cofactor).

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}.$$

行列式的每个元素分别 对应着一个余子式和一个代数余子式 .

引理2. 一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零，那末该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D = a_{ij}A_{ij}$

例如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

证 分两种情况讨论，只对行来证明此定理。

(1)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用引理1的结论有

$$D=a_{11}M_{11}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}A_{11}$$

(2) 设 D 的第 i 行除了 a_{ij} 外都是 0 。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

下面, 把 D 转化为 (1) 的情形

先把 D 的第 i 行依次与第 $i-1$行，第 $i-2$行，⋯，第 1 行交换，经过 $i-1$次行交换后得

再把 第 j 列依次与第 $j-1$列，第 $j-2$列，⋯，第 1 列交换，经过 $j-1$次列交换后得

$$D=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+1j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$$

三、行列式按行(列)展开法则

定理1（Laplace第一展开定理） 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或 $$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

证 考虑第 i 行，将原行列式写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

无中生有

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)
$$

应用思路：利用行列式加法拆项的性质，将行列式的某一行（列）的元素化为只有一个非零，进而利用引理2的结论即得。

单选题 1分

设置

例 设 $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$. 按第二行展开，有 $D=xA_{21}+yA_{22}+zA_{23}$.

问题： $pA_{21}+qA_{22}+rA_{23}$ 所表示的是哪个行列式的展开式?

A $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$.

B $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}$.

C 无法确定

提交

例

设 $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$,

D 的 (i,j) 元的余子式和代数余子 式依次记作 M_{ij} 和 A_{ij} ,求

(1) $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$,

(2) $A_{11}+A_{31}+A_{41}$,

(3) $M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}$.

解

(1) $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-1&-6\\0&4&2&4\\0&-6&-3&-5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0&-1&-6\\2&1&2\\-6&-3&-5\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}0&-1&-6\\2&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}-1&-6\\0&1\end{vmatrix}=4.$$

(2) $A_{11}+A_{31}+A_{41}=\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\0&1&0&-5\\1&3&1&3\\1&-4&-1&-3\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1&-5&2&-24\\0&1&0&0\\1&3&1&18\\1&-4&-1&-23\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-24\\1&1&18\\1&-1&-23\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&-24\\0&-1&42\\0&-3&1\end{vmatrix}=125$$

(3) $M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}$

$$=-A_{21}+A_{22}-A_{23}+A_{24}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-14\,.$$

上述例子说明，指定位置的元素可替换，而对应的代数余子式不会发生变化。特别地，如替换为另一行的元素，结果会如何？

换言之，如果 $i \neq k$，下面的展开式是哪个行列式的展开式？

$$D_1 = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{------ 第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{------ 第 } k \text{ 行} \\ \\ \end{array}$$

上面的展开式相当于把原来的行列式 D 的第 k 行的元素换成第 i 行的元素，得到 D_1，然后把 D_1 按第 k 行展开！ D_1 中有两行相同，则 $D_1 = 0$.

故有 $$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}, \quad (i \neq k).$$

定理2 n 阶行列式 D 的某一行的元素与另一行对应代数余子式的乘积之和等于零，即:

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0,\quad (i\neq k).$$

由行列对称性，对列来说也有类似的结论：

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=0,\quad (j\neq k).$$

- 综合定理1与定理2的结论, 可以得到:

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=k;\\ 0, & i\neq k.\end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=\begin{cases}D, & j=k;\\ 0, & j\neq k.\end{cases}$$

- 引入克罗内克(Kronecker)符号: $\delta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}$

- 上述公式可统一书写为如下形式:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\delta_{ik}D;\quad \sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=\delta_{jk}D.}$$

本讲小结

- 准(分块)三角行列式 $\begin{vmatrix}A & O\\ C & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & C\\ O & B\end{vmatrix}=|A||B|;\ \begin{vmatrix}O & A\\ B & C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C & A\\ B & O\end{vmatrix}=(-1)^{st}|A||B|;$
- n 阶行列式按一行(列)的展开公式.
- 最常用的计算行列式的方法:

  初等变换(打洞化零) + 展开公式(降阶).
- 替换后的行(列)展开公式

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\delta_{ik}D;\quad \sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=\delta_{jk}D.$$

投票 最多可选1项

设置

你认为n阶行列式按某1行的展开公式是否能推广到2行, 3行, …, 甚至按s行展开的情形呢? ($1 \le s \le n$)

A 能

B 不能

C 无法确定

提交