《线性代数》

第二章 行列式

§ 2.1 二阶, 三阶行列式

2019秋

杨晶 主讲

内容提要

- 二阶行列式
- 三阶行列式
- 二阶行列式的性质
- 三阶行列式的展开式
- 三阶行列式的性质

引(回顾). 《孙子算经》中著名的数学问题，其内容是：“今有雉（鸡）兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问雉兔各几何。”

解：设鸡和兔的数量分别为 x, y, 则

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$$

因为94–35–35=24，故兔子数量 $y=24/2=12$,
则鸡的数量$x=35-12=23$

(实际上，就是用方程②−方程①×2，消去x，求出y后，代回求得x)

一、二阶行列式的引入

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

$$(1)\times a_{22}: \quad a_{11}a_{22}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(2)\times a_{12}: \quad a_{12}a_{21}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_2a_{12},$$

两式相减消去 x_2 ,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.\qquad (3)$$

由方程组的四个系数确定.

1. 二阶行列式的定义

由四个数排成二行二列（横排称行(row)、竖排称列(column))的数表

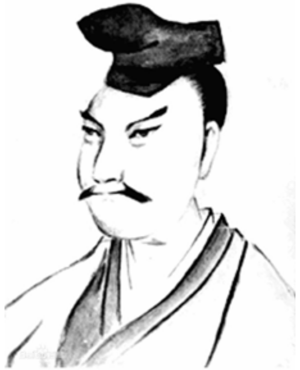
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \qquad (4)$$

构成的表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(4)所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

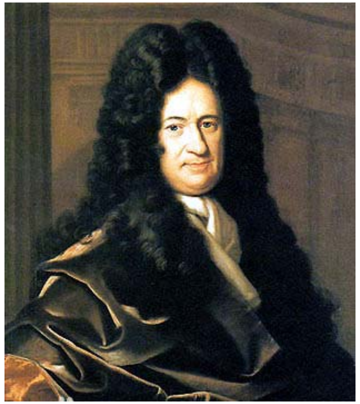
即

$$\boxed{D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.}$$



行列式的提出

(Determinant)



行列式的概念最初是伴随着方程组的求解而发展起来的。行列式的提出可以追溯到十七世纪，最初的雏形由日本数学家关孝和与德国数学家戈特弗里·莱布尼茨各自独立得出，时间大致相同。

- 日本数学家关孝和在**1683**年写了一部名为解伏题之法的著作，意思是“解行列式问题的方法”，书中对行列式的概念和它的展开已经有了清楚的叙述。
- 欧洲第一个提出行列式概念的是德国数学家，微积分学的奠基人之一莱布尼茨。

2. 二阶行列式的计算 —— 对角线法则

主对角线
(diagonal)

副对角线
(counter-diagonal)

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. 用行列式表示二元一次方程组的解

替换后的行列式

用消元法解二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$

$$(2)\times a_{22}: a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(3)\times a_{12}: a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12},$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

两式相减消去 x_2，得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$

类似地，消去 x_1，得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得 $x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

系数行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则当系数行列式 $D \neq 0$时，

二元线性方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注 分母都为原方程组的系数行列式.

分子分别为替换1,2列后的行列式

例1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 = 10, \\ 5x_1 + 7x_2 = 29. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 42 - (-20) = 62 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 29 & 7 \end{vmatrix} = 186, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 29 \end{vmatrix} = 124,$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{186}{62} = 3, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{124}{62} = 2.$$

二、三阶行列式的引入

对含参三元线性方程组：

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1+\boxed{a_{12}}x_2+\boxed{a_{13}}x_3=b_1 \\ \boxed{a_{21}}x_1+\boxed{a_{22}}x_2+\boxed{a_{23}}x_3=b_2 \\ \boxed{a_{31}}x_1+\boxed{a_{32}}x_2+\boxed{a_{33}}x_3=b_3 \end{cases}$$

如何求未知量 x_1,x_2,x_3？

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \end{cases}$$

1. 三阶行列式的定义

三项的分母相同，均为

$$\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&\quad-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}\triangleq\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=D$$

1. 六项代数和，每一项都是三个元相乘；
2. 分析每项三个元素的下标，它们取自不同的行与列；
3. 行下标按升序排列后, 列下标恰好取遍1,2,3的所有全排列.

—— D称为三阶行列式

2. 三阶行列式的计算

(1) 对角线法则(沙路法)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

注意 红线上三元素的乘积冠以正号,

蓝线上三元素的乘积冠以负号.

(2) 拓展对角线法 (Sarrus's rule)

$$D = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

思考:

对角线法则是否只适用于二阶与三阶行列式?

3. 利用三阶行列式求解三元线性方程组

三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ 称为其系数行列式

若 $D \neq 0,$

则三元线性方程组的解为:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)$$

$$+1\times2\times1-1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1$$

$$= -5 \neq 0,$$

同理可得

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5,$$

故方程组的解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = 1.$$

例3 求解方程 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x & x & 0 \\ 4 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$

记重数的情况下，上述方程的根为

A 1, 1, 1

B 1, 1, 0

C 1, 0, 0

D 2, 1, 0

提交

三. 二阶行列式的性质

性质0 二阶单位(阵)行列式为1，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

注：1、形如$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$的行列式称为单位行列式, 也记作$|I_2|$, 其中$I_2$称为二阶单位矩阵, 在后续章节中会介绍.

2、这条性质也称为: 单位归一.

性质1 行列互换，二阶行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

证明： 由行列式的定义，等式两边都等于

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

注：1、性质1说明二阶行列式中，行与列地位相同，即二阶行列式对行成立的结论，对列也同样成立.

2、行列互换，对应到每个元素就是交换两个下标的表示，即第一下标表示列数，而第二下标表示行数.

性质2 若二阶行列式中某行(列)每个元素分成两个数之和，则该行列式可关于该行(列)拆开成两个行列式之和，拆开时其他行均保持不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+b_{11})a_{22} - (a_{12}+b_{12})a_{21}$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21})$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

性质3 两行(列)互换，行列式的值变号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

证明： 由对角线法则, 左边等于 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

对换两行后等于$-(-a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})$.

注： 1、由于行列等价，我们只对行来说明性质2.

2、由性质3可知，若二阶行列式的性质对某一行成立，则对另一行也成立（最多相差一个符号），例如，对性质2，我们是对第一行证明的加法拆分，从而对该性质对第二行也成立.

性质4 二阶行列式中某行(列)有公因子k时，k可以提出公因式外，即

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

证明：

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (ka_{11})a_{22}-(ka_{12})a_{21}$$

$$= k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

性质5 二阶行列式中某一行(列)加上另一行(列)的k倍时，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

证明：
$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=(a_{11}+ka_{21})a_{22}-(a_{12}+ka_{22})a_{21}$$

$$=a_{11}a_{22}+ka_{21}a_{22}-a_{12}a_{21}-ka_{22}a_{21}$$

$$=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

四. 三阶行列式的展开公式

下面考察 3 阶行列式，由定义可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \underline{a_{11}}a_{22}a_{33} + \underline{a_{12}}a_{23}a_{31} + \underline{a_{13}}a_{21}a_{32} - \underline{a_{11}}a_{23}a_{32} - \underline{a_{12}}a_{21}a_{33} - \underline{a_{13}}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}\underline{(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})} + a_{12}\underline{(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})} + a_{13}\underline{(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

在上述 3 阶行列式中，划去第 i 行第 j 列后所剩下的 2 阶行列式称为元素a_{ij}的余子式，记为M_{ij}，则

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

再令： $C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称之为元素a_{ij}的代数余子式(cofactor)，例如

$$C_{11}=M_{11} \qquad C_{12}=-M_{12} \qquad C_{13}=M_{13}$$

因此，利用上面的符号，我们可以把刚才的关系式重新表示如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

称为三阶行列式对其第一行的展开公式 (cofactor expansion).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \underline{a_{21}} & \underline{a_{22}} & \underline{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\underline{a_{22}}a_{33} + a_{12}\underline{a_{23}}a_{31} + a_{13}\underline{a_{21}}a_{32} - a_{11}\underline{a_{23}}a_{32} - a_{12}\underline{a_{21}}a_{33} - a_{13}\underline{a_{22}}a_{31}$$

$$= a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})$$

$$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+1}a_{21}M_{21} + (-1)^{2+2}a_{22}M_{22} + (-1)^{2+3}a_{23}M_{23}$$

$$= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

因此，我们已经有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

类似地，我们也可以得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \underline{a_{31}} & \underline{a_{32}} & \underline{a_{33}} \end{vmatrix} = \underline{a_{31}}C_{31} + \underline{a_{32}}C_{32} + \underline{a_{33}}C_{33}$$

以上三个式子分别称为三阶行列式对其第一、二、三行的展开公式.

同样也有三阶行列式对其一、二、三列的展开公式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

$$= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

$$= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}$$

易知，2阶行列式也满足这个结论，故我们就证明了以下的定理.

定理 二阶、三阶行列式等于它的任一行 (或列) 的元素与其代数余子式乘积之和.

五. 三阶行列式的性质

根据已经证明的关于2阶行列式的性质，3阶行列式也有同样的性质

性质0′ 三阶单位(阵)行列为1，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

证明： 由行列式的定义(对角线法则)计算即得.

性质1′ 行列互换，3阶行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

证明： 等式左端的行列式按照第1列展开利用性质1可得

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$ =等式右端.

性质3′ 两行 (列) 互换，3阶行列式的值变号. (只给出行列式的前2行变换的情形，其他情形类似).

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

证明： 把等式左端的行列式按第 3 行展开再利用性质3可得

$$a_{31}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{11} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

$$= -\left(a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right) = \text{等式右端}.$$

类似的，我们可以证明下面的性质：

性质2′：若 3 阶行列式某行 (列) 各个元素分成两个数的和，则该行列式可关于该行 (列) 拆开成两个行列式之和，拆开时其他行 (列) 均保持不变.

性质4′：行列式的某一行 (列) 的公因式 k 可以提到行列式的外面. 特别的，若行列式有一行 (列) 为零，则行列式的值为0.

性质5′：把一行 (列) 的倍数加到另一行 (列) 上，行列式的值不变.

单选题 1分

设置

例4. 按列拆项法，行列式 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$

可分拆为多少个3阶行列式之和（包含等于零的行列式）?

A 3个

B 6个

C 8个

D 9个

提交

例5. **试证:**
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明:
$$\text{左端} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \text{右端}$$

例6. 试证

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明： 把左端行列式按第一行展开即得.

注： 由上面的例可知，在计算3阶行列式时，我们可以利用初等行变换和行列式的性质，把某一行 (或列) 的3个元素中的2个变成0，然后再按此行 (或列) 展开就化成计算一个2阶行列式了.

单选题 1分

设置

三阶行列式的按行(列)展开公式, 体现了什么样的数学思想?

A 精湛的数学技巧

B 万物皆数

C 以符代数, 相忘江湖

D 降阶化简

提交

例7. **计算下列行列式：**

（1）$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

（2）$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$

解：(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{r2-3\cdot r1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 25$$

解：（2）

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \xrightarrow{r1+(r2+r3)} \begin{vmatrix} 2x+2y & 2x+2y & 2x+2y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \xrightarrow[c3-c1]{c2-c1} 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & x-y \\ x+y & -y & -x \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y)\begin{vmatrix} x & x-y \\ -y & -x \end{vmatrix} = -2(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right) = -2(x^3+y^3)$$

注： 此题的做法，对所有行(列)和相等的行列式均适用.

解：（3）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[c3-c1]{c2-c1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 \\ a_1^2 & a_2^2-a_1^2 & a_3^2-a_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 \\ (a_2-a_1)(a_2+a_1) & (a_3-a_1)(a_3+a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2+a_1 & a_3+a_1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$

本讲小结

- 引入二阶、三阶行列式的概念

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

- 给出一类二元、三元线性方程组的求解公式

$$\begin{cases} \text{方程个数} = \text{未知数个数} \\ \text{系数组成的行列式 } D \neq 0 \\ \text{所求出的解是唯一的} \end{cases}$$

二阶、三阶行列式的性质

性质

1、单位归一
2、转置不变（行列等价）
3、行(列)加法拆项法则
4、倍乘可提出
5、对换取反
6、倍加不变

初等变换，是行列式计算中最常用的方法.

展开公式： 降阶与递归的思想.

计算方法： 行(列)初等变换，产生尽量多的0元素.

进一步思考：

- 四阶、五阶, ···, n阶行列式的概念？

- 四元、五元,…,n元线性方程组有无类似的求解公式？