《线性代数1》

第一章 线性方程组的解法
§1.2 解的情况的判定

2019秋

杨晶 主讲

内容提要

- 阶梯形矩阵，简化阶梯形矩阵
- 线性方程组解的情况的判断定理
- 齐次线性方程组的情形

复习回顾

线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

增广系数矩阵
$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)_{m\times(n+1)}$$

线性方程组的同解变换 $\longleftrightarrow$ 初等行变换

Gauss消元法

- 对换
- 倍乘
- 倍加

一、阶梯形矩阵、简化阶梯形矩阵

定义3 一个矩阵若满足下列条件，称其为**阶梯形矩阵(echelon matrix)**.

(1) 矩阵若有零行（即元素全为0的行），则零行一定全在矩阵的下方.

(2) 对于矩阵的每一个非零行，从左起第1个非零元素称为此行的<u>主元 (pivot)</u>. 矩阵下面行的主元所在列一定在上面行的主元所在列的右端.

例如：

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

下列哪些是阶梯形矩阵? (可多选)

A

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{6} & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

C

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

提交

定义4 一个阶梯矩阵若满足下列条件，称其为**简化阶梯形矩阵 (reduced row echelon form, RREF).**

(1). 主元都是1.

(2). 每个主元所在的列中，除主元外其他的元素都是0.

例如：

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{tn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

定理2 任一矩阵A都可以通过矩阵的初等行变换化为阶梯形矩阵, 进而可再化为简化的阶梯形矩阵.

证明: 对矩阵A的行数m作归纳.

(1) $m=1$时，A 已经成立是阶梯形矩阵，结论显然.

(2) 设结论对$m-1$行的矩阵成立，则对任意m 行的矩阵来说.

若A的每个元素都为0，则A是阶梯形矩阵.

若A中有非零元素，则取列指标最小的一个非零元素，设它在第j列，于是A的第1到第$j-1$列上的元素都为0. 由于可进行行对换，我们可假设$a_{1j} \neq 0$. 对任意第i行 ($i=2,3,\ \ldots,m$), 把A的第一行的$(-\frac{a_{ij}}{a_{1j}})$倍加到第 i 行上，设得到的矩阵为B，则矩阵B的第j列上除第1行元素外均为0，即矩阵B形如:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{2,j+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{m,j+1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow B_1$$

设B的后$m-1$行作成的矩阵为B_1，则B_1为$m-1$行矩阵.由归纳假设，B_1通过初等行变换可化为阶梯形矩阵. 再加上B的第1行，得到的矩阵仍为阶梯形矩阵. 即矩阵A通过初等行变换化为阶梯形矩阵.

把A通过初等行变换化成阶梯形后，把非0行乘以适当的非0常数，可把主元素变成1；再从最后一个主元开始，把它所在行的适当倍数加到其他非0行上，可把它上方元素变成0, 以此类推，就可把阶梯形矩阵化为简化的阶梯形矩阵. ■

二、线性方程组解情况的判定定理

下面讨论线性方程组的解的情况: 只需考察阶梯形矩阵C对应的线性方程组的解.

1. 若阶梯形矩阵C有一个主元在最后一列，即矩阵C中除全零行外，最后一个非零行形如：

$$(0, 0, \cdots, 0, 0, d) \qquad (d \neq 0)$$

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_{n-1} + 0 \cdot x_n = d$$

显然这个方程无解，也即原方程组无解.

2. 若阶梯形矩阵C的主元都不在最后一列. 这时，设阶梯形矩阵C有r个非零行 $(r \le n)$，也即有r 个主元.

(1) 若$r = n$，这时前n列上每一列都有一个主元. 这时矩阵C形如：

$$
C = \begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\
0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\
0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3n} & d_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} & d_n \\
0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}
\to C_0 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & c_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_n \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

可得方程组有唯一解： $x_i = c_i \quad (\forall i = 1, 2, \cdots, n)$

(2) 若$r < n$，不妨设这时主元所在的列为前r列. 即C形如：

$$C=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \to C_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & c_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取负号

方程组的一般解为：

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n + c_1 \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n + c_2 \\ \vdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n + c_r \end{cases}$$

自由变量

主变量

主元

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & c_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第1列 第2列 … 第r列 第$r+1$列 … 第n列

简化阶梯形矩阵

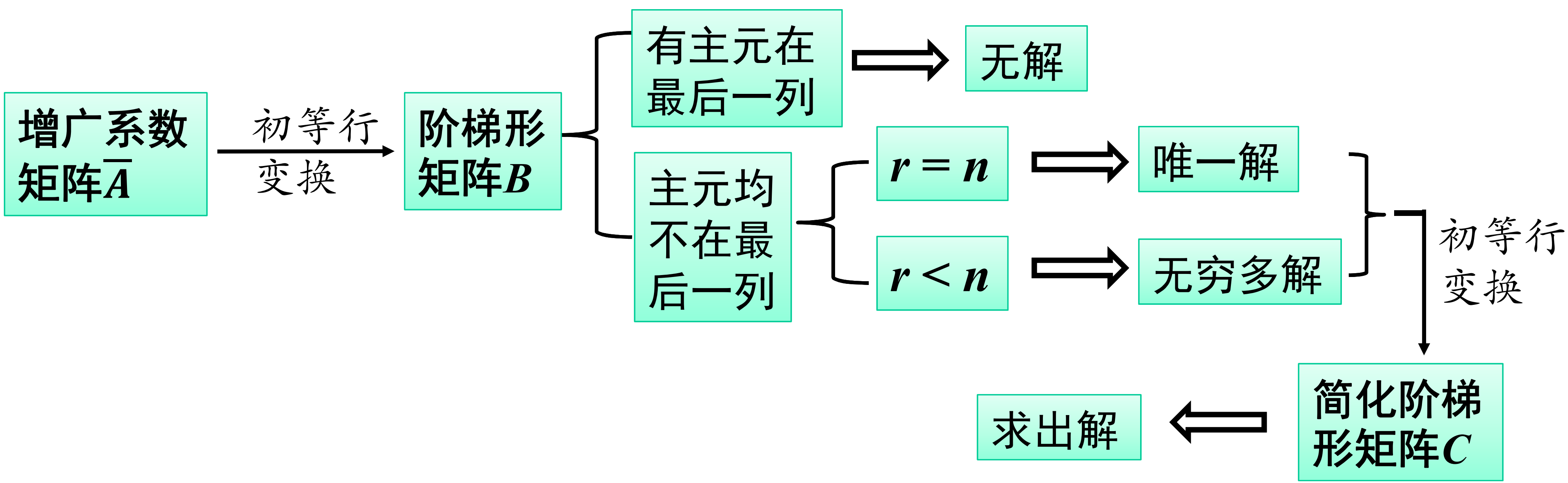
主变量 取负号 常数项

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n + c_1 \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n + c_2 \\ \vdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n + c_r \end{cases}$$

自由未知量

线性方程组一般解

定理3 设含n个未知量的线性方程组的增广系数矩阵为$\overline{A}$，对$\overline{A}$作初等行变换，化为阶梯形矩阵B. 若B有一个主元在最后一列，则方程组无解. 若B的主元都不在最后一列，则方程组有解. 进一步地，若这时主元个数 $r=n$，则方程组有唯一解. 若 $r<n$，则方程组有无穷多组解.



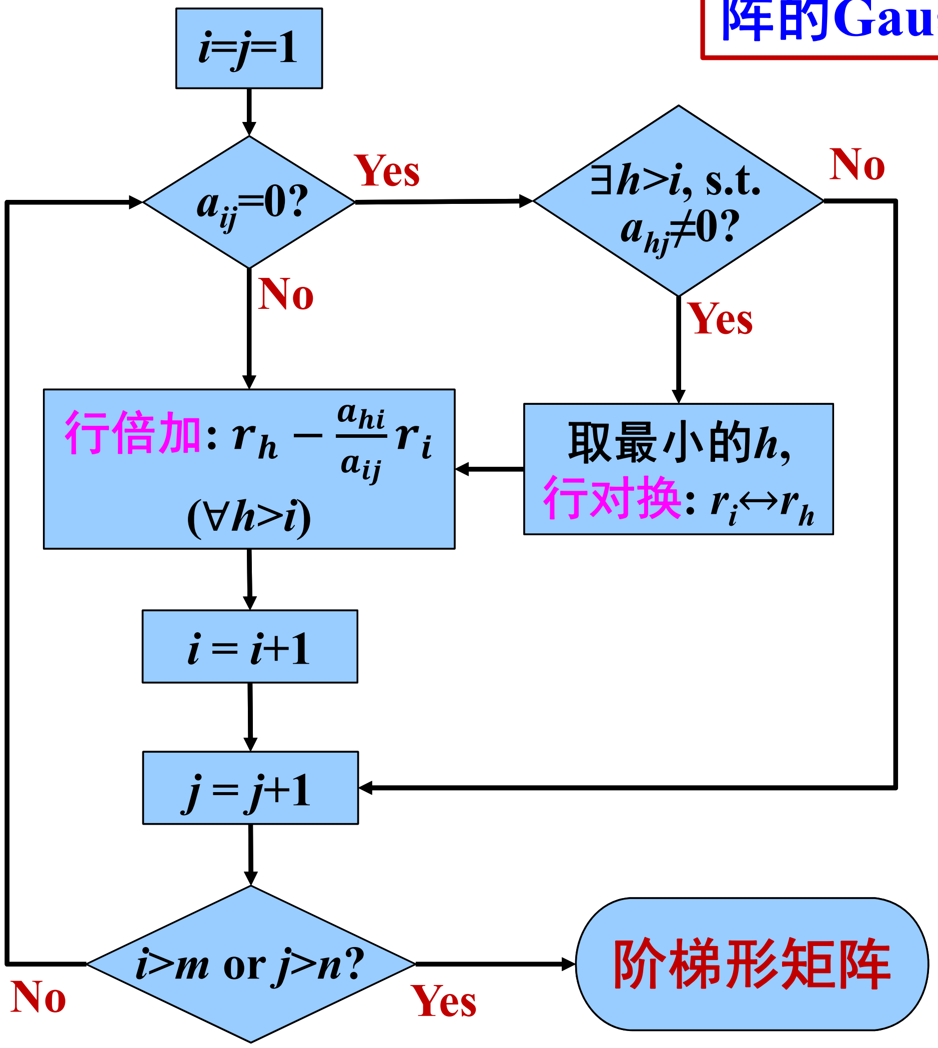
例3 (续) 解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 - 11x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

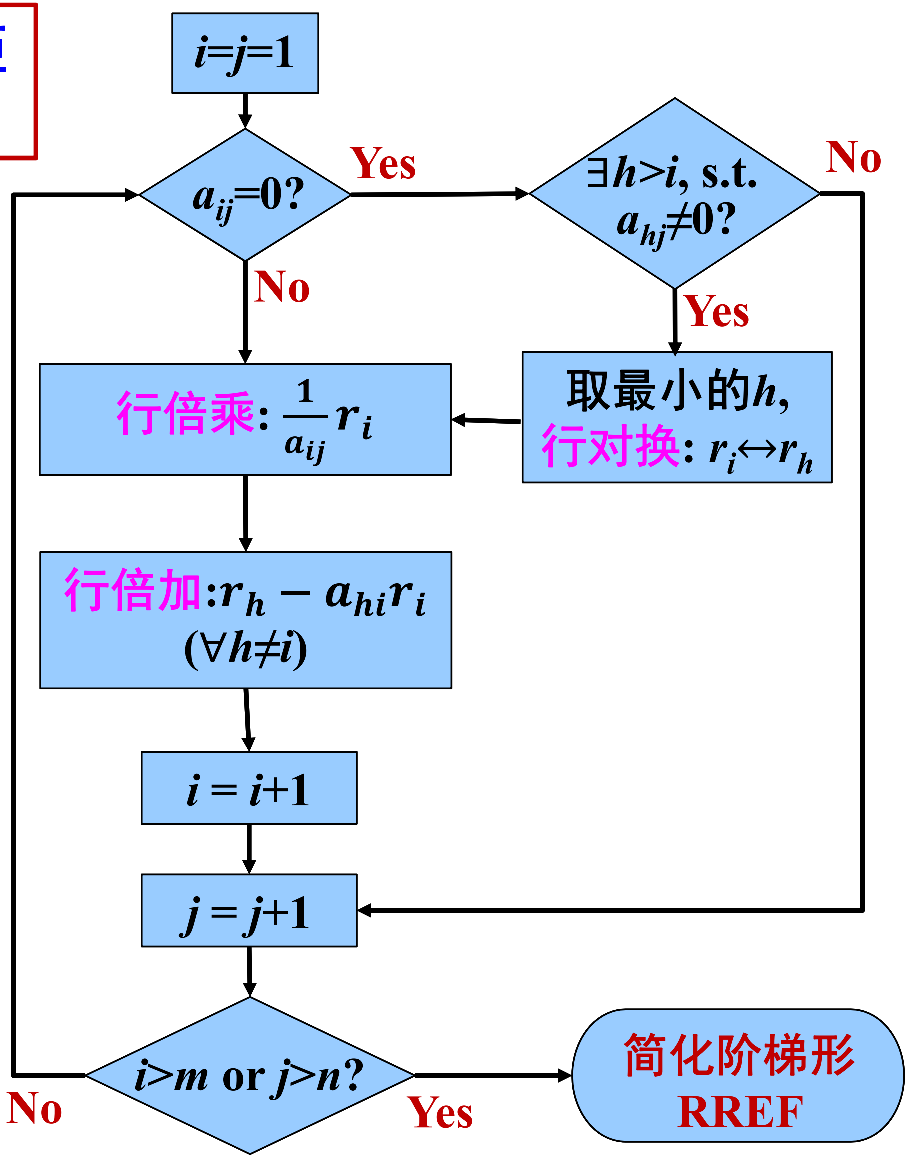
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & -2 & 10 \\ 2 & -2 & -11 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{-2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \cdot x_2 + \frac{1}{5} x_4 + \frac{11}{5} \\ x_3 = 0 \cdot x_2 + \frac{2}{5} x_4 + \frac{2}{5} \end{cases} (x_2, x_4 \in \mathbb{R})$$

简化阶梯形已包含了一般解的全部信息.

流程图：对$m\times n$矩阵的Gauss消元法





三、齐次线性方程组的情形

设线性方程组为
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

系数矩阵：
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

增广系数矩阵：
$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

若对所有$i=1,2,\ldots,m$，均有$b_i=0$，则称为上述为<u>齐次线性方程组</u>，否则，称为<u>非齐次线性方程组</u>.

对于齐次线性方程组，由定理2知，如下结论成立：

- 增广系数矩阵$\overline{A}$的最后一列全为0，故作初等行变换后，最后一列的元素也全为0，于是主元素不可能出现在最后一列，因此一定有解.
- $x_i=0\ \ (i=1,2,\ldots,m)$一定是一组解，称为零解. 且当$r=n$时, 零解就是唯一解.
- 反之, 若有非零解，必有$r<n$, 则此时方程组有无穷多个解.
- 作Gauss消元法时，只需对系数矩阵A操作即可

对于齐次线性方程组，我们最关心的是它有没有非零解。除了用定理2中的$r = n$或$r < n$的判定以外，下面的定理给出了另一个充分条件。

定理4 若齐次线性方程组的方程个数m小于未知量的个数n，即$m < n$时，齐次线性方程一定有非零解。

证明： 对此方程组的系数矩阵A作初等行变换化为阶梯型矩阵B，则阶梯型矩阵B的主元个数 r 一定小于或等于其行数m，由$r \le m<n$, 知$r<n$. 由定理2知，方程组有无穷多组解。 ■

例4 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 - x_4 = 0 \\ 9x_1 - 7x_2 + 15x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

解： 只需对系数矩阵A作初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & -3 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 7 & -1 \\ 9 & -7 & 15 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \\ 3 & -4 & 7 & -1 \\ 9 & -7 & 15 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & -1 & -7 \\ 0 & 11 & -2 & -7 \\ 0 & 38 & -12 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & 3 & 2\\ 0 & 9 & -1 & -7\\ 0 & 11 & -2 & -7\\ 0 & 19 & -6 & -7\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -5 & 3 & 2\\ 0 & 9 & -1 & -7\\ 0 & 11 & -2 & -7\\ 0 & 1 & -4 & 7\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -5 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -4 & 7\\ 0 & 11 & -2 & -7\\ 0 & 9 & -1 & -7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -4 & 7\\ 0 & 0 & 42 & -84\\ 0 & 0 & 35 & -70\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -5 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -4 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -5 & 0 & 8\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以方程组有无穷多组解，它的一般解为 $\begin{cases} x_1 = -3x_4, \\ x_2 = x_4, \\ x_3 = 2x_4. \end{cases} \quad (x_4 \in \mathbb{R})$

注意齐次与非齐次，系数矩阵与增广系数矩阵的区别.

其中，x_4为自由未知量，可取任意实数.

主观题 2分

设置

- 某个非齐次线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$，经初等行变换变为
- 某个齐次线性方程组的系数矩阵A，经初等行变换变为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{b} \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

请分别写出上述两个方程组的全部解.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

本章小结

1. 概念：线性方程组&矩阵、初等变换&Gauss消元法(主元素、主变量、自由变量)、简化阶梯形矩阵.

2. 结论：初等变换通解定理

线性方程组解情况的判定定理

- 齐次线性方程组:

系数矩阵$A \to$ (简化)阶梯形矩阵B $\begin{cases} r = n\text{ 时}, & \text{只有零解(唯一解)} \\ r < n\text{ 或}m < n\text{时}, & \text{有非零解(无穷解)} \end{cases}$

- 非齐次线性方程组:

增广系数阵$(A, \vec{b}) \to$ (简化)阶梯阵B $\begin{cases} d_{r+1} \neq 0\text{时} \rightarrow \text{无解} \\ d_{r+1} = 0\text{时} \rightarrow \text{有解} \begin{cases} r = n\text{时} \rightarrow \text{有唯一解} \\ r < n\text{时} \rightarrow \text{解不唯一} \end{cases} \end{cases}$

3. 思想方法：初等行变换、转化、简化阶梯形矩阵包含所有解的信息

小结与展望: 线性方程组的几个基本问题:

Q1. 解的存在问题： 判断方程组是否有解?

Q2. 解的个数问题： 如果有解，有多少个解?

Q3. 求解问题： 能否给出解的公式，或者给出一个算法求出所有的解?

Q4. 解的结构问题： 解不唯一时解集合结构如何?

Q5. 解的近似问题： 如果无解，能否求出一个近似解?

Q6. 对应几何问题： 线性方程组对应的几何意义是什么?