



《线性代数》



2019秋

第二章 行列式

§ 2.2 n 阶行列式的 概念与性质



杨晶 主讲

内容提要

- n 阶行列式的定义
- n 元排列及其逆序数
- 排列中的对换及其性质
- 用表达式计算行列式
- 行列式的行列等价性





上讲思考：

- 四阶、五阶, ..., n 阶行列式的概念？
- 四元、五元, ..., n 元线性方程组有无类似的求解公式？

回顾：二阶、三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

行列式	总项数	每一项		
		乘积个数	符号	表示形式
2阶	2项	2个元	正负各半	$(-1)^? a_{1j_1} a_{2j_2}$
3阶	6项	3个元	正负各半	$(-1)^? a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$

指数位置上的“?”
与 $j_1j_2, j_1j_2j_3$ 有何关系

定义的进一步分析

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum_{j_1, j_2 \in S} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = \sum_{j_1 j_2 j_3 \in S} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

如何决定列下标集合 S ，以及对应关系 τ ？

对二阶行列式：列下标的集合 $S=\{12, 21\}$

顺序取正；
逆序取负

对三阶行列式：列下标的集合 $S=\{123, 231, 312, 321, 213, 132\}$

→ $S = n$ 元全排列集合 P_n ， $\#P_n=n!$

回顾：二阶、三阶行列式的性质

性质

- 0、转置不变（行列等价）
- ✓ 1、单位归一
- ✓ 2、行（列）加法拆项法则
- ✓ 3、倍乘可提出
- ✓ 4、对换取反
- 5、倍加不变

推论1. 同行(列)化零

推论2. 零行(列)化零

推论3. 同比化零



问题：上述哪些性质是独立的？

- 推论可由性质3,4推出
- 性质2+性质3+推论3 \Rightarrow 性质5
- 若暂只考虑行or列1种操作, 性质0可以暂不考虑

一. n 阶行列式的定义

- 设方阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 的列分别为 $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$, 即 $A=(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n)$.
- I_n 为 n 阶单位阵, 即 $I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
- 定义 **n 阶行列式** 为关于 A 的一个 实值函数 $\det = |\cdot|: \{n \text{ 阶方阵}\} \rightarrow \mathbb{R}$, 且满足

1. (单位归一) $|I_n| = \det(I_n) = 1$;

2. (加法拆项) $\det(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_i + \vec{\alpha}'_i, \dots, \vec{\alpha}_n) = \det(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_i, \dots, \vec{\alpha}_n) + \det(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}'_i, \dots, \vec{\alpha}_n)$;

3. (倍乘可提出) $\det(\vec{\alpha}_1, \dots, k\vec{\alpha}_i, \dots, \vec{\alpha}_n) = k \det(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_i, \dots, \vec{\alpha}_n)$;

4. (倍加不变) $\det(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_i, \dots, \vec{\alpha}_j + k\vec{\alpha}_i, \dots, \vec{\alpha}_n) = \det(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_i, \dots, \vec{\alpha}_j, \dots, \vec{\alpha}_n)$.

低阶行列式性质的进一步分析

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + 0 & a_{12} + 0 \\ 0 + a_{21} & 0 + a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + 0 + 0 + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{21} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\triangleq \det(\mathbf{P}_{12})a_{11}a_{22} + \det(\mathbf{P}_{21})a_{12}a_{21} = \sum_{j_1 j_2 \in P_2} \det(\mathbf{P}_{j_1 j_2}) a_{1j_1} a_{2j_2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

类似地, 三阶行列式也可按如下方式拆分为 27 项,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + 0 + 0 & a_{12} + 0 + 0 & a_{13} + 0 + 0 \\ 0 + a_{21} + 0 & 0 + a_{22} + 0 & 0 + a_{23} + 0 \\ 0 + 0 + a_{31} & 0 + 0 + a_{32} & 0 + a_{33} + 0 \end{vmatrix} \quad (\text{其中只有以下 } \underline{6} \text{ 项是非零的})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{23}a_{31} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{13}a_{21}a_{32} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{13}a_{22}a_{31} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{12}a_{21}a_{33} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{11}a_{23}a_{32} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\triangleq \det(\mathbf{P}_{123})a_{11}a_{22}a_{33} + \det(\mathbf{P}_{231})a_{12}a_{23}a_{31} + \det(\mathbf{P}_{312})a_{13}a_{21}a_{32} + \det(\mathbf{P}_{213})a_{12}a_{21}a_{33} + \det(\mathbf{P}_{231})a_{12}a_{23}a_{31} + \det(\mathbf{P}_{132})a_{11}a_{23}a_{32}$$

低阶行列式性质的进一步分析

这里, $P_{j_1 j_2 j_3}$ 称为3阶置换矩阵(permutation matrix), 它们可由单位阵 I_3 经过若干次列对换而得到:

$$P_{123} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_{231} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} P_{321} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftarrow{c_3 \leftrightarrow c_1} I_3$$

$$P_{312} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xleftarrow{c_3 \leftrightarrow c_2} P_{213} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} I_3$$

$$\Rightarrow \det(P_{j_1 j_2 j_3}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } P_{j_1 j_2 j_3} \text{ 由 } I_3 \text{ 经过} \\ & \text{偶数次列对换所得时;} \\ -1, & \text{当 } P_{j_1 j_2 j_3} \text{ 由 } I_3 \text{ 经过} \\ & \text{奇数次列对换所得时.} \end{cases}$$

$$P_{132} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xleftarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} I_3$$

一. n 阶行列式的表达公式

将对低阶行列式的分析推导, 施行于 n 阶行列式, 不难得到如下表达式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} \det(P_{j_1 j_2 \cdots j_n}) \cdot a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

1. 表达式中共有 $n!$ 项.
2. 每一项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积.
3. 每一项可以写成 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ (正负号除外), 其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的某个排列.
4. $\det(P_{j_1 j_2 \cdots j_n}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } P_{j_1 j_2 \cdots j_n} \text{ 由 } I_n \text{ 经过偶数次列对换所得时;} \\ -1, & \text{当 } P_{j_1 j_2 \cdots j_n} \text{ 由 } I_n \text{ 经过奇数次列对换所得时.} \end{cases} \Rightarrow \text{称 } P_{j_1 j_2 \cdots j_n} \text{ 是偶的.}$
 $\Rightarrow \text{称 } P_{j_1 j_2 \cdots j_n} \text{ 是奇的.}$



问题: 置换矩阵 $P_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 的奇偶性如何确定?

例如, 置换矩阵 $P_{453162} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是奇的, 还是偶的?

回答: 可对 I_6 依次进行 $c_1 \leftrightarrow c_4$, $c_6 \leftrightarrow c_5$, $c_5 \leftrightarrow c_2$ 的列对换而得到 P_{453162} , 故它 P_{453162} 是奇的.

追问: 还有没有别的列对换方法, 使得 $I_6 \rightarrow P_{453162}$?
对更大的 n , 如何处理?

二. n 元排列及其逆序数

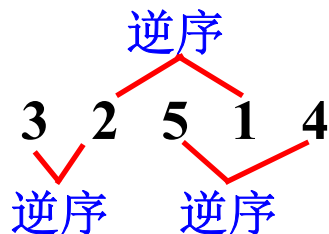
定义 把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的 **n 元排列 (permutation)**. 全体 n 元排列构成的集合，通常用 P_n 表示.

显然, n 元排列一共有 $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ 种.

对于 n 元排列，规定从小到大为**标准序**或**自然序**.

定义 当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就称这两个元素组成一个**逆序 (inverse order)**.

例如，在排列32514中，



问题：还能找到其它逆序吗？

答：2和1，3和1也构成逆序.

定义 排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**(inverse number).
排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数通常记为: $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

奇排列: 逆序数为奇数的排列.

偶排列: 逆序数为偶数的排列.

思考题: 自然排列 $12 \cdots n$ 是奇排列还是偶排列?

答: 自然排列 $12 \cdots n$ 的逆序数等于零, 因而是偶排列.

计算排列的逆序数的方法

考虑排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 先看有多少个比 i_1 大的数排在它前面, 记为 t_1 ;

再看有多少个比 i_2 大的数排在它前面, 记为 t_2 ;直至 t_n .

则此排列的逆序数为

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$$

往前数大

也可等价地
往后数小

练习1: 求排列 32514 的逆序数.

解: $\tau(32514) = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5$

练习2: 求排列 453162 的逆序数.

答案: $\tau = 3 + 3 + 2 + 0 + 1 = 9$

练习3: 求排列 $n(n-1)\dots 21$ 的逆序数.

答案:

$$\tau(n(n-1)\dots 21) = 0 + 1 + \dots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

再看三阶行列式的列下标的集合

$$P_3 = \{123, 231, 312, \mathbf{321}, \mathbf{213}, \mathbf{132}\}$$

有 $\tau(123) = 0, \tau(231) = 2, \tau(312) = 2;$
 $\tau(\mathbf{321}) = 3, \tau(\mathbf{213}) = 1, \tau(\mathbf{132}) = 1;$

因为, 逆序数为偶数的排列为偶排列;
 逆序数为奇数的排列为奇排列.

则 $123, 231, 312$ 为偶排列;
 $\mathbf{321}, \mathbf{213}, \mathbf{132}$ 为奇排列.

三. 排列中的对换及其性质

定义. 在排列中, 将任意两个元素对调, 其余的元素不动, 这种作出新排列的手续叫做**对换 (swapping)**.

将相邻两个元素对换, 叫做**相邻对换 (adjacent swapping)**.

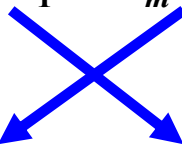
例如

$a_1 \cdots a_l$ **a** **b** $b_1 \cdots b_m$



$a_1 \cdots a_l$ **b** **a** $b_1 \cdots b_m$

$a_1 \cdots a_l$ **a** $b_1 \cdots b_m$ **b** $c_1 \cdots c_n$



$a_1 \cdots a_l$ **b** $b_1 \cdots b_m$ **a** $c_1 \cdots c_n$

注: 1. 连续施行两次相同的对换, 则排列还原.

2. 一般的对换可以通过一系列的相邻对换来实现.

$a_1 \cdots a_l$ **a** $b_1 \cdots b_m$ **b** $c_1 \cdots c_n$ $\xrightarrow{m \text{ 次相邻对换}}$ $a_1 \cdots a_l$ **a** **b** $b_1 \cdots b_m$ $c_1 \cdots c_n$

$\xrightarrow{m+1 \text{ 次相邻对换}}$ $a_1 \cdots a_l$ **b** $b_1 \cdots b_m$ **a** $c_1 \cdots c_n$

对换与排列奇偶性的关系

定理1 1次对换改变排列的奇偶性.

证明: 先考虑相邻对换的情形.

往前数大

$$\tau = t_{a_1} + \cdots + t_{a_l} + t_a + t_b + t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}$$
$$a_1 \cdots a_l \quad a \quad b \quad b_1 \cdots b_m$$
$$\Downarrow$$
$$a_1 \cdots a_l \quad b \quad a \quad b_1 \cdots b_m$$
$$\tau' = t_{a_1} + \cdots + t_{a_l} + t_b + t_a + t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}$$

注意到除 a, b 外, 其它元素的逆序数不改变.

当 $a < b$ 时, $r_a = t_a + 1, r_b = t_b,$

$$\tau' = \tau + 1.$$

当 $a > b$ 时, $r_a = t_a, r_b = t_b - 1,$

$$\tau' = \tau - 1.$$

因此一次相邻对换改变排列的奇偶性.

对一般的对换

$$a_1 \cdots a_l \quad a \quad b_1 \cdots b_m \quad b \quad c_1 \cdots c_n$$

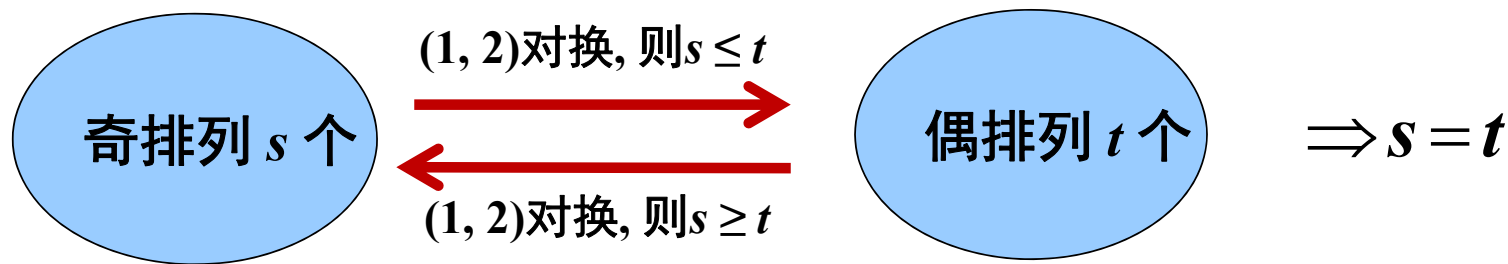
$2m+1$ 次相邻对换

$$a_1 \cdots a_l \quad b \quad b_1 \cdots b_m \quad a \quad c_1 \cdots c_n$$

因此, 一个排列中的任意两个元素对换, 排列的奇偶性改变.

推论1. 全部 $n (\geq 2)$ 元排列中奇偶排列各占一半.

证明:



例如 S_2 中有 $21 \rightarrow 12$; S_3 中有 $132 \rightarrow 231$, $213 \rightarrow 123$, $321 \rightarrow 312$

推论2. 存在非负整数 t , 使得 $j_1 j_2 \cdots j_n \xrightarrow{t \text{ 次对换}} 12 \cdots n$

其中, t 的奇偶性与排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的奇偶性相同.

证明: 存在性易证. 下证奇偶性: 由每次对换都改变奇偶性, 而 $\tau(12 \cdots n) = 0$ 为偶, 故得证.

推论3. 置换矩阵 $P_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 的奇偶性等价于排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的奇偶性.

阶段小结

定义+性质

- 0、转置不变（行列等价）
- ✓ 1、单位归一
- ✓ 2、行（列）加法拆项法则
- ✓ 3、倍乘可提出
- ✓ 4、对换取反
- 5、倍加不变

推论1. 同列化零

推论2. 零列化零

推论3. 同比化零

- 推论可由性质3,4推出
- 性质2+性质3+推论3
⇒ 性质5
- 还缺行列等价性

代数表达式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} \det(P_{j_1 j_2 \cdots j_n}) \cdot a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

- $n!$ 项代数和
- 每项不同行不同列的 n 个元素之积
- 每项符号由逆序数的奇偶性确定

四. 用表达式计算行列式

例1 写出四阶行列式展开式中同时含 a_{13} 与 a_{32} 的项, 并确定正负号.

解: 对四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

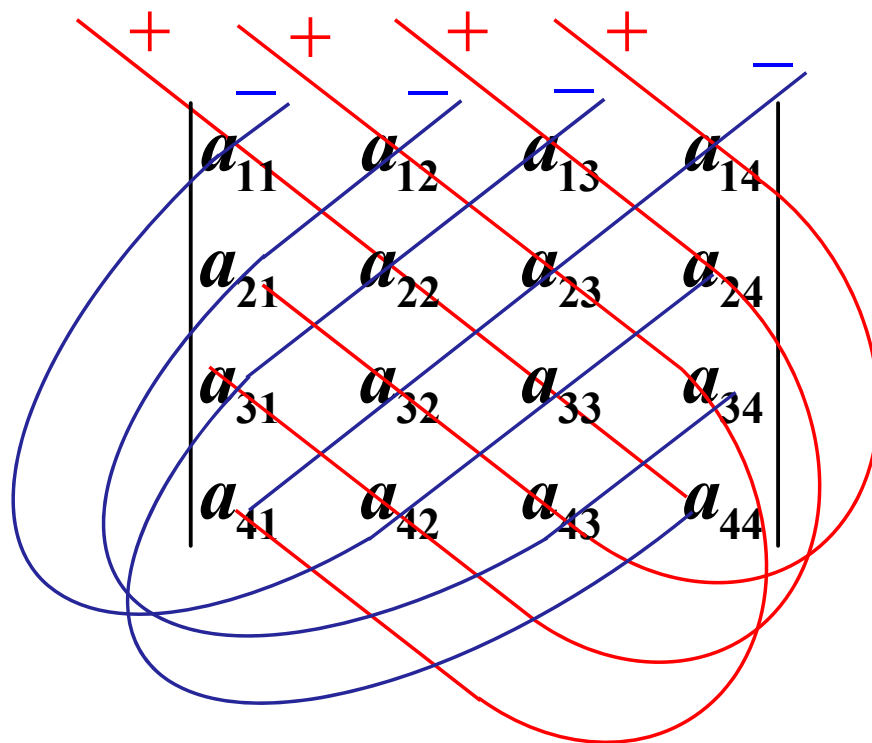
按定义展开后, 同时含 a_{13} 与 a_{32} 的项的一般形式为

其中 $j_2 j_4$ 为 1 与 4 的排列, 共两种: 14, 41, 对应的两项为

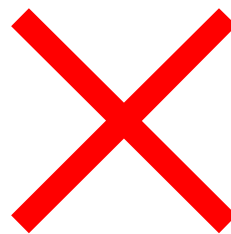
$$(-1)^{\tau(3124)} a_{13} a_{21} a_{32} a_{44} = a_{13} a_{21} a_{32} a_{44},$$

$$(-1)^{\tau(3421)} a_{13} a_{24} a_{32} a_{41} = -a_{13} a_{24} a_{32} a_{41}.$$

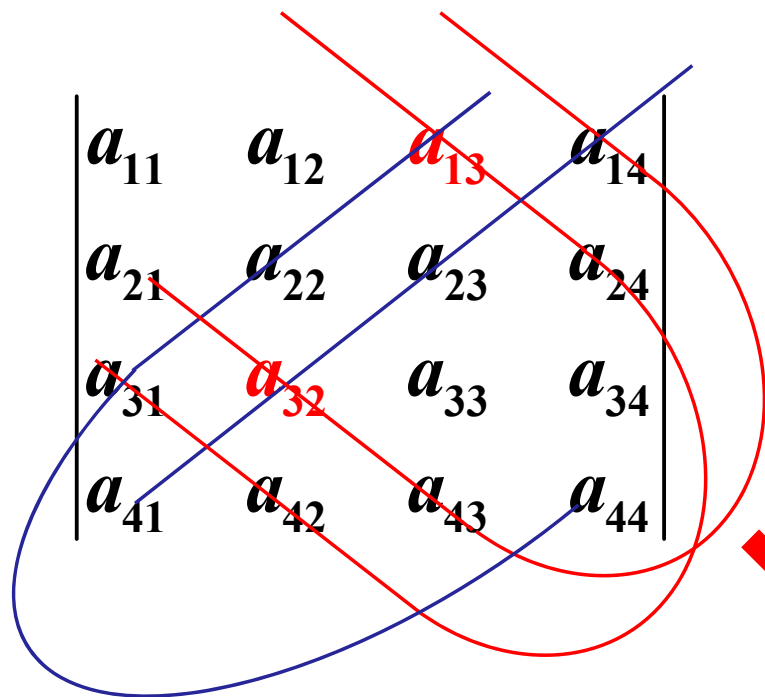
思考：对角线法则对四阶行列式是否成立？



如此只能得到8项(正负各4项)
四阶行列式应该有 $4!=24$ 项



思考：对角线法则对四阶行列式是否成立？



另一个角度：
同时含 a_{13} 与 a_{32} 的对角线是不存在的，这与刚刚例1的结论不符.

六个结论:

(1) 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(3) 上三角行列式

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(5) 下三角行列式

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

(2) 反对角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

(4) 反上三角行列式

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

(6) 反下三角行列式

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

五. n 阶行列式的行列等价性

思考：若行列式表达式展开项中的行指标不按自然排列的顺序，此项的符号应如何确定？

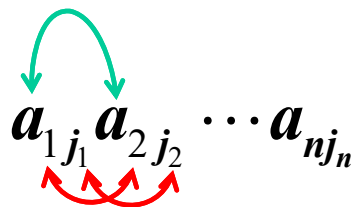
设定义求和式中一项为 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ ，其符号为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 。

因为数的乘法具有交换性，所以可把此项中的元素任意交换次序。

每做一次元素的对换

- ➡ 行指标与列指标的排列同时都做了一次对换
- ➡ 行指标排列与列指标排列的奇偶性同时发生变化
- ➡ 行指标排列与列指标排列的逆序数之和奇偶性不变

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \xrightarrow{\text{若干次对换后}} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_n k_n}$$



则，有如下的等式

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(12 \cdots n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(k_1 k_2 \cdots k_n)}.$$

特别地，若把每一项的列指标都按自然顺序排列时，即取

$$k_1 k_2 \cdots k_n = 12 \cdots n$$

则有

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)}.$$

故得，行列式的等价计算表达式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in P_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

等价表达式说明：行列式中行和列地位相同.

本讲小结

定义+性质

- 0、行列等价
- ✓ 1、单位归一
- ✓ 2、行(列)加法拆项法则
- ✓ 3、倍乘可提出
- ✓ 4、对换取反
- 5、倍加不变

推论1. 同列化零

推论2. 零列化零

推论3. 同比化零

- 推论可由性质3,4推出
- 性质2+性质3+推论3
⇒ 性质5

代数表达式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} \det(P_{j_1 j_2 \cdots j_n}) \cdot a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in P_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

- $n!$ 项代数和
- 每项不同行不同列的 n 个元素之积
- 每项符号由逆序数的奇偶性确定

本讲小结

- n 元排列的逆序数 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$, 及其计算方法.
- 排列的奇偶性: 由排列逆序数的奇偶性决定.
- 对换及其对奇偶性的影响
 - ✓ 结论1. 对换改变排列的奇偶性
 - ✓ 结论2. 奇偶排列各占一半
 - ✓ 结论3. 奇(偶)排列经过奇(偶)数次对换后可化为自然排列

