《线性代数》

2019秋

第四章 矩 阵

§ 4.1 矩阵及其线性运算

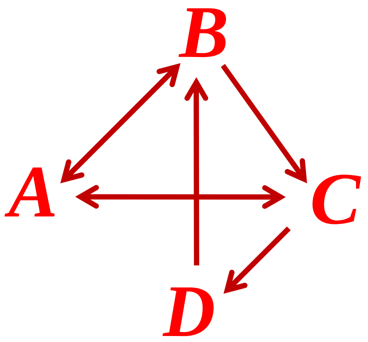
杨晶 主讲

内容提要

- 矩阵概念的引入
- 几类特殊的矩阵
- 矩阵之间的简单关系
- 矩阵的线性运算及运算律

(一) 矩阵的概念

例1. 某航空公司在A, B, C, D四个城市之间开辟了若干航线，如图所示表示了四个城市间的航班图，如果从 A 到 B 有航班, 则用带箭头的线连接 A 与 B.



四城市间的航班图情况常用表格来表示:

发站 \ 到站	A	B	C	D
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

为了便于计算，把表中的 √ 改成1，空白地方填上0，就得到一个矩阵

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

这个表格和矩阵等价，均反映了四个城市间交通联接情况.

例2. 甲, 乙, 丙三人为刚刚认识的朋友，甲列出了自己生日的范围，如下:

$$\left\{\begin{array}{l}5月15日，5月16日，5月19日，6月17日，6月18日,\\ 7月14日，7月16日，8月14日，8月15日，8月17日\end{array}\right\}$$

并且分别把自己生日的月和日告诉了乙和丙.

- 乙先说：我不知道甲的生日，但我知道丙也不知道.
- 丙再说：我一开始不知道甲的生日，但是现在我知道了.
- 乙又说：我现在也知道了.

请问，甲的生日到底是哪一天？

解： 把甲给出的生日范围列为下表，其中1表示范围内，0表示范围外

	14日	15日	16日	17日	18日	19日
五月	0	1	1	0	0	1
六月	0	0	0	1	1	0
七月	1	0	1	0	0	0
八月	1	1	0	1	0	0

- 乙先说：我不知道甲的生日，但我知道丙也不知道.
- 丙再说：我一开始不知道甲的生日，但是现在我知道了.
- 乙又说：我现在也知道了.

通过分析以上数表及其行列关系，我们得到甲的生日为7月16日.

矩阵的定义

定义 由 mn 个(实)数排成行列的矩形数表, 用圆(或方)括号括起来，即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为$m\times n$型的矩阵 (matrix)，简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

其中，横排称为矩阵的行(row)，竖排称为矩阵的列(column).

a_{ij}称为矩阵的元素，其中第一下标表示所在的行数，第二下标表示所在的列数.

全体$m\times n$型的实矩阵组成的集合，记为$M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

从线性方程组的角度：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的系数和常数项按顺序写成两个矩形的表：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(系数矩阵
coefficient matrix)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

(增广系数矩阵
augmented coefficient matrix)

对线性方程组的研究可转化为对系数矩阵和增广矩阵的研究.

主对角线 $k=\min\{m,n\}$，称元 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{kk}$ 构成 A 的(主)对角线，并称 a_{ii} 为 A 的第 i 个对角线元.

元素是实数的矩阵称为实矩阵.

元素是复数的矩阵称为复矩阵.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个 2×4 实矩阵,

$$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ 是一个 3×3 复矩阵,

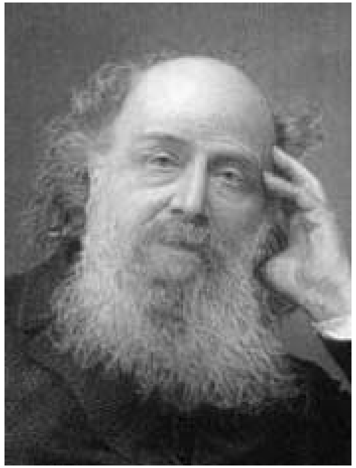
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$ 是一个 3×1 矩阵,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$ 是一个 1×4 矩阵,

$$(4)$$ 是一个 1×1 矩阵.

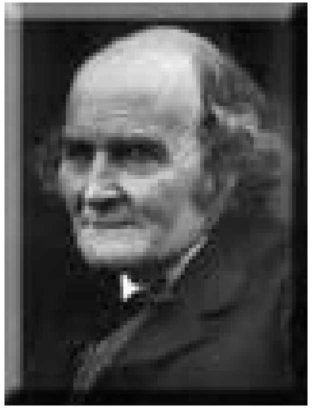
数学史中的矩阵

在数学中，矩阵（Matrix）是一个按照长方阵列排列的复数或实数集合，最早来自于方程组的系数及常数所构成的方阵。矩阵的现代概念在19世纪逐渐形成。1800年代，高斯和威廉·若尔当建立了高斯—若尔当消去法。1844年，德国数学家费迪南·艾森斯坦（F.Eisenstein）讨论了“变换”（矩阵）及其乘积。1850年，英国数学家詹姆斯·约瑟夫·西尔维斯特（James Joseph Sylvester）首先使用矩阵一词。



Sylvester

英国数学家凯利(Cayley)被公认为矩阵论的奠基人。他开始将矩阵作为独立的数学对象研究时，许多与矩阵有关的性质已经在行列式的研究中被发现了，这也使得凯利认为矩阵的引进是十分自然的。他从1858年开始，发表了《矩阵论的研究报告》等一系列关于矩阵的专门论文，研究了矩阵的运算律、矩阵的逆以及转置和特征多项式方程。



Cayley

- 矩阵是代数学中的常见工具，也常见于统计分析等应用数学学科中。
- 在物理学中，矩阵在电路学、力学、光学和量子物理中都有应用；
- 计算机科学中，三维动画制作也需要用到矩阵。
- 矩阵的运算是数值分析领域的重要问题。将矩阵分解为简单矩阵的组合可以在理论和实际应用上简化矩阵的运算。对一些应用广泛而形式特殊的矩阵，例如准对角矩阵，有特定的快速运算算法。
- 在天体物理、量子力学等领域，也会出现无穷维的矩阵，是矩阵的一种推广。

(二) 几类特殊矩阵

(1) 方阵(square matrix) 行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶方阵. 全体n阶方阵组成的集合，记为$M_n(\mathbb{R})$.

例如 $\begin{bmatrix} 13 & 6 & 21 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 是一个3 阶方阵.

(2) 行矩阵，列矩阵

行数$m=1$时，$\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)$ 称为行矩阵 (或行向量).

列数$n=1$时，$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ 称为列矩阵 (或列向量).

(3) 零矩阵 元素全为零的矩阵称为零矩阵，记为 O 或 $O_{m\times n}$

(4) 负矩阵 $-A=-(a_{ij})_{m\times n}=(-a_{ij})_{m\times n}$

例如，设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$，则 $-A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(5) 三角形矩阵

上三角矩阵: 主对角线下方的元素全为零的<u>方阵</u>称为上三角形矩阵.

下三角矩阵: 主对角线上方的元素全为零的<u>方阵</u>称为下三角形矩阵.

也可省略不写

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(上三角阵)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(下三角阵)

也可省略不写

(6) 对角矩阵(diagonal matrix) 除主对角线上元素外，全为零的方阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} := \mathrm{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn})$$

纯量矩阵:
(数量矩阵,
scalar matrix)

$$\begin{bmatrix} c & & \\ & \ddots & \\ & & c \end{bmatrix}_{n\times n} = \mathrm{diag}(c,\cdots,c)$$

单位矩阵:
(identity matrix)

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} = \mathrm{diag}(1,\cdots,1) := I_n \text{ 或 } E_n$$

(7) 阶梯形矩阵 **(零行在最下方；非零行左端的零的个数严格增加)**

(echelon matrix)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{6} & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

简化阶梯形矩阵 **(阶梯形矩阵，主元素=1，主元所在列的其它元均为0)**

(RREF)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

多选题 1分

设置

以下对于阶梯形矩阵与上三角矩阵的描述, 正确的有:

A 阶梯形矩阵一定是上三角矩阵

B 上三角矩阵一定是阶梯形矩阵

C 上三角矩阵一定是方阵

D 阶梯形矩阵一定是方阵

E 阶梯形矩阵可以为任意尺寸的矩阵

提交

三、同型矩阵与矩阵相等的概念

1. 两个矩阵的行数相等,列数相等时,称为

同型矩阵.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

2. 两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 为同型矩阵, 并且对应元素相等, 即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad\left(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\right),$$

则称矩阵 A 与 B 相等, 记作 $A=B$.

例如, 设 $A=\begin{bmatrix}2&3&\underline{1}\\1&\underline{2}&-1\\\underline{0}&3&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&3&\underline{x}\\1&\underline{y}&-1\\\underline{z}&3&1\end{bmatrix}$, 若 $A=B$, 则 $x=1, y=2, z=0$.

四、矩阵的线性运算

1 矩阵加法

定义: 设有两个 $m\times n$矩阵 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与B 的和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$

说明：

(1) 只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

(2) 矩阵的加法即为对应位置元素相加，可推广至有限个同型矩阵相加.

例如
$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

矩阵加法的运算规律

$$(1)\ A+B=B+A\,;$$

$$(2)\ (A+B)+C=A+(B+C)\,.$$

矩阵 A 的负矩阵 $-A$

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}=(-a_{ij}),$$

显然 $A+(-A)=O\,.$

矩阵减法

$$A-B=A+(-B)\,.$$

2. 矩阵的数乘

定义 数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

例如： $2\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

注意矩阵数乘与行列式运算的差异.

例如：

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq 4\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵数乘的运算规律

(设 A、B为 $m\times n$ 矩阵，λ,μ为数)

(1) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$;

(2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

(3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

矩阵加法与数乘矩阵合起来, 统称为矩阵的线性运算.

例 设矩阵 A、B、C 满足等式 $3(A+C)=2(B-C)$，

其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，求 C.

$$C=\frac{1}{5}(2B-3A)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

本讲小结

- 矩阵的定义
- 特殊矩阵
- 同型矩阵与矩阵相等 —— 逐位相等
- 矩阵的线性运算及性质 ——逐位加法、逐位数乘

矩阵线性运算 (加法&数乘) 的运算律

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，$C=(c_{ij})_{m\times n}$ 为同型矩阵，则

加法运算律

(1) 交换律 $A+B=B+A$

(2) 结合律 $A+(B+C)=(A+B)+C$

(3) 零矩阵 $A+O=A$

(4) 负矩阵 $A+(-A)=O$

数乘运算律

(5) 单位 $1A=A$

(6) 结合律 $k(lA)=(kl)A$

(7) 分配律1 $k(A+B)=kA+kB$

(8) 分配律2 $(k+l)A=kA+lA$

概念辨析:

1. 矩阵与行列式的有何区别?
2. 矩阵的线性运算(加法和数乘)的运算结果有何特点?

提示:

1. 矩阵与行列式有本质的区别，行列式是一个**算式**，经过计算后是一个**数值**，而矩阵仅仅是一个**数表**，
2. 行列式的行列数必须相同，而矩阵的行数和列数可以不同.
3. 与原参与运算的矩阵是同型的. → 运算的**封闭性**