《线性代数》

第四章 矩 阵

§4.6 逆矩阵

2019秋

杨晶 主讲

内容提要

- 逆矩阵的概念
- 逆矩阵的性质
- 伴随矩阵及其性质
- 矩阵可逆的条件
- 逆矩阵的求法

问题的提出：

- 记$A=(a_{ij})_{m\times n},\vec{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$，则线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

可写成矩阵的形式 $A\vec{X}=\vec{b}$.

- 在解一元方程 $ax=b$ 的时候，如果 $a\neq 0$，则等式两边同乘以 a^{-1}，得

$$x=a^{-1}b\,.$$

问题：对线性方程组$A\vec{X}=\vec{b}$，是否可以象一元方程 $ax=b$ 一样求解？

问题的分析:

在数的运算中，当数$a\neq 0$时，有 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$，其中 $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$.

在矩阵的运算中，单位阵 I 相当于数的乘法运算中的 1. 那么，对于矩阵A，能否在一定条件下引进 A^{-1} 的概念，使得

$$\boxed{AA^{-1}=A^{-1}A=I}$$

若可以，则 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有解 $\vec{X}=A^{-1}\vec{b}$，且解唯一.

首先，若A为$m\times n$型的矩阵，则由上式两个可乘条件知 A^{-1} 的为$n\times m$型的矩阵；又因两个乘积等于同一个单位阵 I，则有 $m=n$，即 A 和 A^{-1} 均为 n阶方阵.

一、逆矩阵的概念

定义1 设A为n阶方阵，若存在n阶方阵B，使得 $AB=BA=I_n$，则称 A 为可逆矩阵或非奇异矩阵，而称 B 为A 的逆矩阵，并记为A^{-1}.

注：1. 定义中矩阵 A 与 B 的地位相同，因而若 A可逆，且 B 是 A 的逆，则 B 也可逆，A 即是 B 的逆，并且A与A^{-1}乘法可交换.

2. 对上述定义式两边取行列式知：若A为可逆矩阵，则

$$|A|\neq 0,\ |A^{-1}|=|A|^{-1}=1/|A|$$

3. 若 A 为可逆矩阵，则其逆是唯一的.

（设 B, C 都是 A 的逆矩阵，则有

$$B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C.$$

）

例2 考虑矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$， 对任意2阶方阵 $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，有

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-c & b-d\\ 0 & 0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2.$$

从而，并不是所有的方阵都可逆.

现在的问题是： 在什么条件下方阵A是可逆的？

如果 A 可逆，怎样求 A^{-1} ？

可逆矩阵有什么性质？

二、逆矩阵的性质

对可逆矩阵A而言，A^{-1}可看作是对A的一种运算. 下面给出求逆运算与其他运算的一些运算律.

性质： 设A, B, A_i为n阶可逆矩阵, 实数 $k \neq 0$, 则

(1) A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) AB 也可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

进一步有，$(A_1 A_2 \cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1} \cdots A_1^{-1}$

(3) kA 也可逆，且 $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

(4) A^{T} 也可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

“穿脱原则”，与$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$类似.

问题： 是否有 $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$?

- 乘积矩阵求逆的“穿脱原则”：

整个蓝色的过程的逆向过程，就是整个红色的过程，即：

$$(AB)^{-1} = \left[(\text{穿袜子})\cdot(\text{穿鞋})\right]^{-1} = (\text{脱鞋})\cdot(\text{脱袜子}) = B^{-1}A^{-1}$$

性质的证明：用定义直接验证，得

(1) $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

(2) $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}$

$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}IB=B^{-1}B=I$.

反复运用性质(2)，即可得多个矩阵乘积的逆的结论.

(3) $(kA)(k^{-1}A^{-1})=k(A(k^{-1}I_n))A^{-1}=(kk^{-1})AA^{-1}=1\cdot I_n=I_n$

$(k^{-1}A^{-1})(kA)=k^{-1}(A^{-1}(kI_n))A=(k^{-1}k)A^{-1}A=1\cdot I_n=I_n$

(4) $A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{-1}A)^{\mathrm{T}}=I^{\mathrm{T}}=I$,

$(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=(AA^{-1})^{\mathrm{T}}=I^{\mathrm{T}}=I$. ■

回顾.《孙子算经》中著名的数学问题，其内容是：“今有雉（鸡）兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问雉兔各几何。”

对应二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$

问题： 如何求解上述方程组?

方法1:
消元法
(即初等变换法)

方法2:
逆矩阵法
$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$

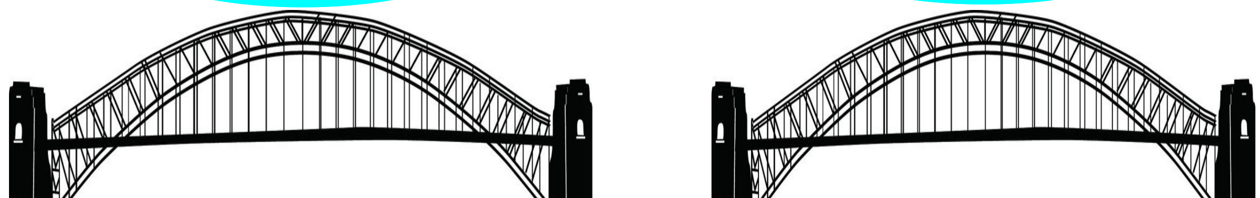
方法3:
Cramer法则
$x_i=D_i/D$

三、伴随矩阵及其性质

问题： 设A为n阶可逆矩阵，则如何求解线性方程组$A\vec{x}=\vec{b}$?

初等矩阵

???



方法1：
消元法
(即初等变换法)

方法2：
逆矩阵法
$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$

方法3：
克拉默法则
$x_i=D_i/D$

问题的进一步分析与回顾

问题： 对线性方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$，是否可以象一元方程 $ax=b$ 一样求解？

即在定义了A^{-1} 后，希望有 $\vec{X}=A^{-1}\vec{b}$.

但是，A^{-1} 仅对方阵有定义，即对应方程组的方程个数m = 未知数个数n.

你想到了什么求解方法？

Cramer法则回顾

符号定义如上，若 $D=|A|\neq 0$, 则$A\vec{X}=\vec{b}$ 有唯一解, 即

$$x_j=\frac{D_j}{|A|},\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

如果把 D_j 按照第 j 列展开，可得：

$$D_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj},\ j=1,2,\cdots,n.$$

如果采用矩阵乘法符号表示Cramer法则给出的解，有:

$$\vec{X} = |A|^{-1}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix} = |A|^{-1}\begin{bmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{|A|^{-1}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}}_{B}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = B\vec{b}\ .$$

注意1: 这里的A_{ij}是数，
而非分块子矩阵.
注意2: A_{ij}下标的排列
顺序与a_{ij}相反.

则, 原方程组的解即为: $\vec{X} = B\vec{b}$.

问题是: 这里的B是否就是A^{-1}是呢？

下面验证：在A为方阵且 $|A|\neq 0$ 时, 有 $A^{-1}=B$.

一方面，由行列式的展开定理有:

$$AB=\left|A\right|^{-1}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}=\left|A\right|^{-1}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}\right]_{1\le i,j\le n}$$

$$=\left|A\right|^{-1}\begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}=I_n$$

另一方面，也可证 $BA = I$：

$$BA = |A|^{-1}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = |A|^{-1}\left[\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj}\right]_{1\le i,j\le n}$$

$$= |A|^{-1}\begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = I_n$$

思考：在以上推导中，条件 $|A|\neq 0$ 在什么地方用到？ 回答：$|A|^{-1}$

那么，当 $|A|=0$ 时，怎么办？

定义2 用 n 阶方阵 A 的元素的代数余子式 A_{ij} 组成的矩阵的转置

$$\left(A_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}^{T}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}:=A^{*}$$

称为矩阵 A 的<u>伴随矩阵</u> (adjoint matrix).

注: (1) 对方阵A, $\boxed{AA^{*}=A^{*}A=|A|I}$ 总是成立的 (含 $|A|=0$ 时).

(2) 若 $|A|\neq 0$, 则 $A|A|^{-1}A^{*}=|A|^{-1}A^{*}A=I$, 故 A 和 A^{*} 可逆, 且

$$A^{-1}=|A|^{-1}A^{*},\qquad (A^{*})^{-1}=|A|^{-1}A.$$

- 伴随矩阵的上述性质有何用?

  伴随矩阵给出了一个求方阵逆的构造性的方法.

例1 若二阶方阵的行列式 $|A| \neq 0$, 于是

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1}=\left|A\right|^{-1}A^*=\frac{1}{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

副对角线
元素取负.

主对角线
元素换位.

例2 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

$$A^*=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

解

$$\because\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,$$ 所以可以用伴随矩阵求逆法.

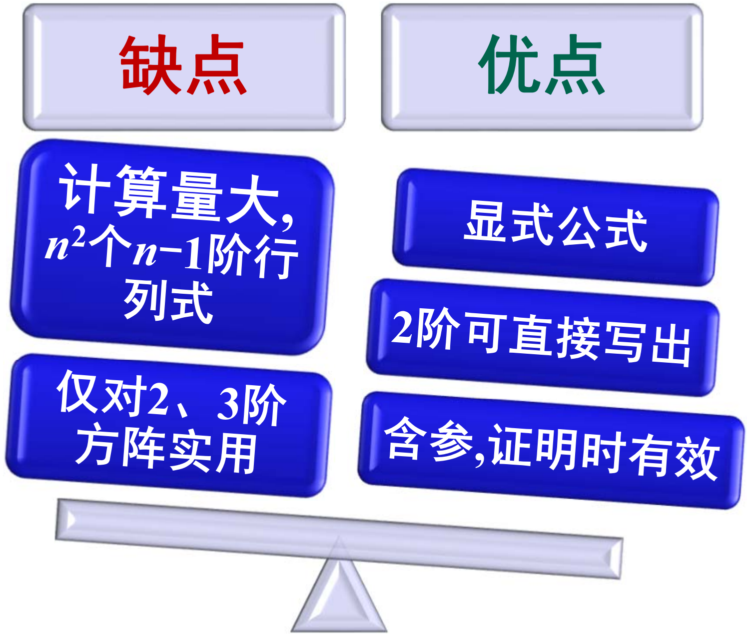
$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=2,$$

同理可得 $A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,\ A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2.$

故 $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 6 & -4\\ -3 & -6 & 5\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

伴随求逆法的优缺点：

(与Cramer法则类似)

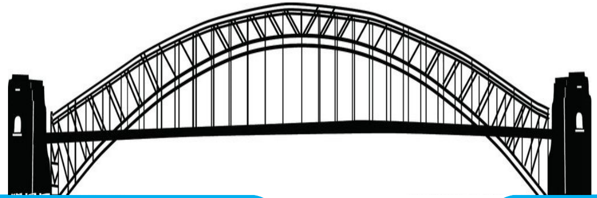


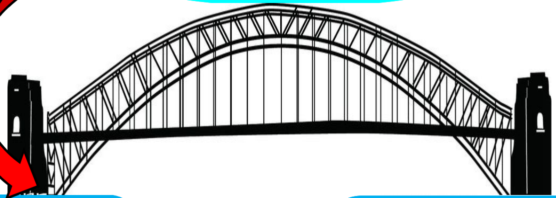
概念之间的联系

问题: 设A为**可逆**阵, 线性方程组$A\vec{x} = \vec{b}$的三种求解方法

初等矩阵

伴随矩阵A^*





方法1:
消元法
(即初等变换法)

方法2:
逆矩阵法
$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

方法3:
Cramer法则
$x_i = D_i/D$

四、矩阵可逆的条件

设A为n阶方阵，若A可逆，则由定义知

两边取行列式，得 $\left|AA^{-1}\right| = |A|\left|A^{-1}\right| = \left|I_n\right| = 1 \quad \Rightarrow |A| \neq 0.$

反之，若 $|A| \neq 0$，则由伴随矩阵的性质 $AA^* = A^*A = |A|I$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = I_n, \quad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

于是，我们就得到了如下关于矩阵可逆的条件.

定理1 n 阶方阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$.

● 逆矩阵定义中有如下关键条件:

(1) A, B都是n阶方阵, (2) $AB = I_n$, (3) $BA = I_n$.

思考：这些条件独立吗? (有多余的吗?)

显然， (2)+(3) ⇒ (1)；以下结论说明：(1)+(2) ⇒ (3) 或 (1)+(3) ⇒ (2).

推论1 设A为n阶方阵，若存在n阶方阵B，使得 $AB = I_n$ (或 $BA = I_n$), 则 A可逆，且 $B = A^{-1}$.

证明: $\because \quad |AB| = |A||B| = |I| = 1 \quad \therefore |A| \neq 0$，故$A^{-1}$存在. 于是

$$B = IB = \left(A^{-1}A\right)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1}. \qquad \blacksquare$$

● 所以, 上述定义中的三个条件(1),(2),(3)不是独立的, 其中任意去掉一条, 都与原定义等价!

定理2 n 阶方阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow$ A 为若干个初等矩阵的乘积.

证明： “$\Leftarrow$” :因为初等矩阵都是可逆阵，又因可逆矩阵的乘积仍可逆，所以A为可逆阵.

“$\Rightarrow$” : 若A 可逆, 则$|A|\neq 0$，于是齐次线性方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$, 有唯一解(零解), 说明A经过初等行变换化为简化的阶梯形矩阵后，必为I_n, 即存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_s$, 使得 $P_s\cdots P_1A=I_n$,

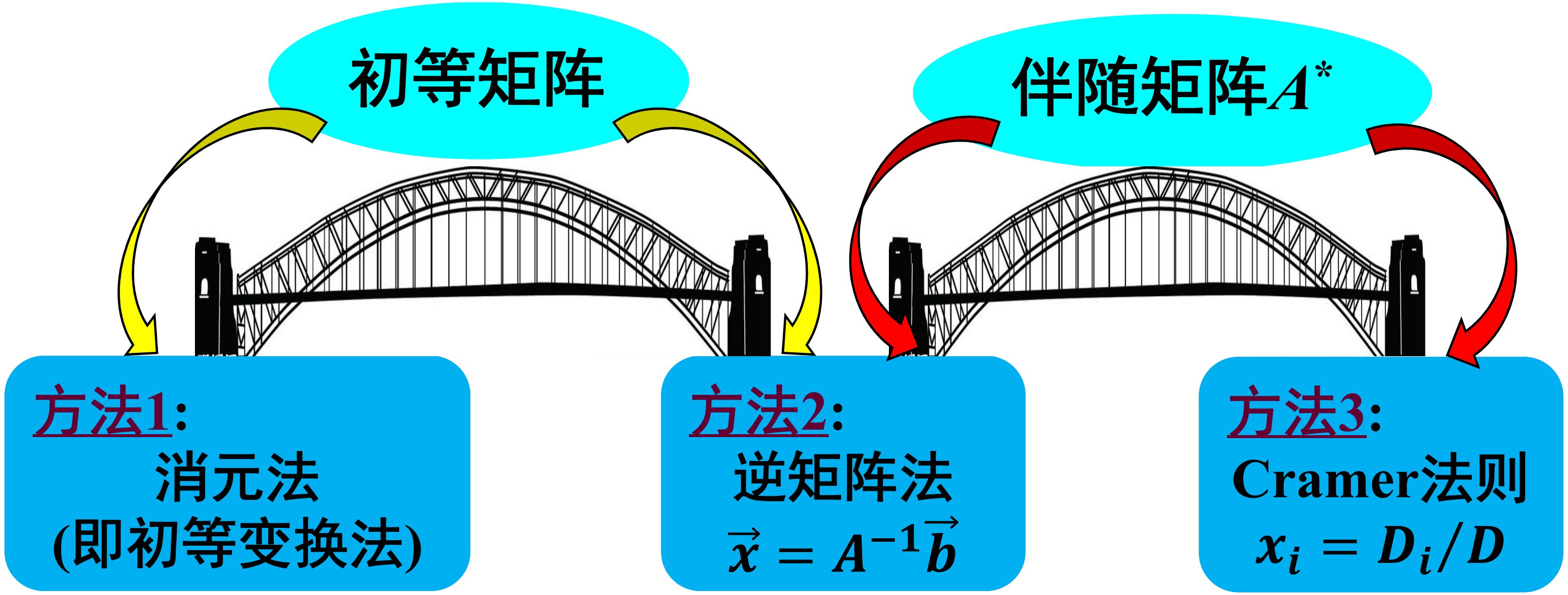
$$\therefore\ A=\left(P_s\cdots P_2P_1\right)^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_s^{-1};$$

$$A^{-1}=P_s\cdots P_2P_1.$$

■

概念之间的联系

问题2′: 设A为可逆阵, 线性方程组$A\vec{x}=\vec{b}$的三种求解方法



推论2 n 阶方阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组$A\vec{X}=\vec{0}$只有零解 .

证明： “$\Rightarrow$” : 若A可逆，则 $\vec{X}=A^{-1}\vec{0}=\vec{0}$, 即方程组只有零解.

“$\Leftarrow$” : 若齐次线性方程组$A\vec{X}=\vec{0}$ 只有零解, 即有唯一解，则说明A经过初等行变换化为阶梯形矩阵后有，主元个数 $r=n$，进一步再化为简化的阶梯形矩阵后为 I_n，即存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_s$,使得

$$P_s\cdots P_1A=I_n,$$

从而 A 可逆. ■

五、求逆矩阵的典型方法：

1. 定义方法
2. 伴随矩阵方法
3. 初等变换方法
4. 分块矩阵求逆方法

逆矩阵的求法1——定义法

回顾: 逆矩阵定义中的条件:

(1) A, B都是n阶方阵, (2) $AB = I_n$, (3) $BA = I_n$.

—— 任意两个可推出第三个.

例1 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$, 其中$a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, 求 A^{-1}.

分析: 若$AB = I_n$, 其中A与I_n均为对角阵，猜测B也是 (n阶) 对角阵；再由条件$a_{ii} \neq 0$, 用定义可验证结果.

解: 由于$a_{ii} \neq 0$，有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & & \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{11}^{-1} & & & \\ & a_{22}a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}a_{nn}^{-1} \end{bmatrix} = I_n$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & & \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}.$$

例2 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$，其中$a_{11}, a_{22}\neq 0$, 求 A^{-1}.

分析: 若$AB=I_2$, 其中A与I_2均为上三角阵，猜测B也是2阶上三角阵，再由待定系数法，可求出B.

解: 设 $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$, 若 $I_2=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}b_{11}=1 \\ a_{22}b_{22}=1 \\ a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{11}=a_{11}^{-1} \\ b_{22}=a_{22}^{-1} \\ b_{12}=-a_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1} \end{cases} \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & -a_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1} \\ 0 & a_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

例3 设方阵A满足$A^2-2A+4I=O$，证明：$A+I$ 和$A-3I$ 都可逆，并求它们的逆矩阵.

分析: 关于A是多项式，A^i与A^j乘法可交换，可按通常方法分解多项式, 希望能凑出$A+I$ 和$A-3I$ 的项.

解:

$$A^2-2A+4I=(A+I)(A-3I)+7I=O$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{7}(A+I)(A-3I)=I$$

由定义知 $(A+I)^{-1}=-\frac{1}{7}(A-3I)$; $(A-3I)^{-1}=-\frac{1}{7}(A+I)$.

逆矩阵求法2——伴随矩阵法

回顾: 伴随矩阵的定义：
$$A^* := \left(A_{ij}\right)^T_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

伴随矩阵的性质：
$$AA^* = A^*A = |A|I.$$

若 $|A| \neq 0$, 则$A^{-1} = |A|^{-1}A^*$，　$(A^*)^{-1} = |A|^{-1}A.$

对2阶方阵A：若$|A| \neq 0$, 则 $A^{-1} = \dfrac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

(主对角线元素互换，副对角线元素取负)

例2(续) 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$，其中$a_{11}, a_{22} \neq 0$, 求 A^{-1}.

分析: 二阶矩阵求逆，伴随矩阵法是最方便的.

解：由 $|A| = a_{11}a_{22} \neq 0$，知$A$可逆，且用伴随矩阵法得：

$$A^{-1} = |A|^{-1} A^{*} = a_{11}^{-1}a_{22}^{-1}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & \underline{-a_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1}} \\ 0 & a_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

例4 求下面方阵 A 的逆矩阵：$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$

解： $\because |A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-2\neq 0$，所以方阵 A 可逆.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-4,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=4,\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1,$$

从而

$$A^{*}=\begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$A^{-1}=|A|^{-1}A^{*}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

逆矩阵求法3——初等变换法

回顾：n阶方阵A可逆 $\Longleftrightarrow$ A 经过若干次初等行变换后可化为I_n.

即 $\underline{P_s \cdots P_1 A = I}$, 其中 $P_1, \cdots, P_s$ 为初等矩阵

$$\Rightarrow A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1 = \underline{(P_s \cdots P_2 P_1) I},$$

说明：完全相同的初等行变换可以把 I 化为 A^{-1}.

另一方面 $AA^{-1} = A(P_s \cdots P_2 P_1) = I,$

说明：经(顺序相反的)初等列变换可以把 A 化为 I.

$$A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1 = I(P_s \cdots P_2 P_1),$$

说明：经(顺序相反的)初等列变换可以把 I 化为A^{-1}.

综上，可得到求逆矩阵的初等变换法：

行变换法： 构造一个$n\times(2n)$阶分块矩阵：

$$\boxed{[A, I] \xrightarrow{\text{若干初等行变换}} [I, A^{-1}]}$$

$$P_s\cdots P_1[A, I] = [P_s\cdots P_1 A, P_s\cdots P_1 I] = [A^{-1}A, A^{-1}I] = [I, A^{-1}]$$

列变换法： 构造一个$(2n)\times n$阶分块矩阵：

$$\boxed{\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{若干初等列变换}} \begin{bmatrix} I \\ A^{-1} \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} P_s\cdots P_1 = \begin{bmatrix} AP_s\cdots P_1 \\ IP_s\cdots P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{-1} \\ IA^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

例5 用初等行变换求矩阵 A 的逆矩阵： $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$.

解 先将 A 化为阶梯形矩阵，再化为单位阵：

$$[A,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[r3+r1]{r1\leftrightarrow r2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ \boxed{0} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ \boxed{0} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & \boxed{0} & \boxed{0} & -1/2 & -3/2 & -5/2\\ 0 & 1 & \boxed{0} & 1/2 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right],\quad \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -3 & -5\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

验证： $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -3 & -5\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$?

初等变换过程，环环相扣
容易出错，故验证很关键

例6 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&-1\\-1&1&-3\end{bmatrix}$，试判断 A 是否可逆.

解

$$[A,I]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&-1&0&1&0\\-1&1&-3&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&-1&0&1&0\\0&2&-1&1&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&-1&0&1&0\\0&0&0&1&-1&1\end{array}\right],$$

此时，A 经初等行变换化为阶梯形矩阵时，出现全零行，则 A 的行列式为零，故 A 不可逆.

这说明：利用初等变换法，判断是否可逆与求逆可以同时进行.

● 进一步分析：

如果在如下行、列初等变换法的过程中，把 I 换成其他矩阵会如何？

$$P_s\cdots P_1\left[A, \overset{B}{\boxed{I}}\right] = \left[P_s\cdots P_1A, P_s\cdots P_1\overset{B}{\boxed{I}}\right] = \left[A^{-1}A, A^{-1}\overset{B}{\boxed{I}}\right] = \left[I, \overset{A^{-1}B}{\boxed{A^{-1}}}\right]$$

$$\begin{bmatrix} A \\ \underset{C}{\boxed{I}} \end{bmatrix} P_s\cdots P_1 = \begin{bmatrix} AP_s\cdots P_1 \\ \underset{C}{\boxed{I}}P_s\cdots P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{-1} \\ \underset{C}{\boxed{I}}A^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ \underset{CA^{-1}}{\boxed{A^{-1}}} \end{bmatrix} \qquad (A^{-1} = P_s\cdots P_2P_1)$$

$$A^{-1}[A, B] = [I, A^{-1}B],$$

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} A^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ CA^{-1} \end{bmatrix},$$

$$[A, B] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [I, A^{-1}B]$$

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} I \\ CA^{-1} \end{bmatrix}$$

例7 求如下矩阵方程 $XA=C$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&2\\5&6\\7&8\end{pmatrix}$.

解 由$|A|=-2$知，A可逆，则$X=CA^{-1}$，对如下分块矩阵进行初等列变换，

$$\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\\hdashline 0&2\\5&6\\7&8\end{bmatrix}\xrightarrow{(-2)c1+c2}\begin{bmatrix}1&0\\3&-2\\0&2\\5&-4\\7&-6\end{bmatrix}\xrightarrow{(-1/2)c2}\begin{bmatrix}1&0\\3&1\\0&-1\\5&2\\7&3\end{bmatrix}\xrightarrow{(-3)c2+c1}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\3&-1\\-1&2\\-2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I\\CA^{-1}\end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad X=CA^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-1&2\\-2&3\end{bmatrix}.$$

回顾分块初等矩阵：其中，我们在定义分块倍乘矩阵时

$$\begin{bmatrix} P & O \\ O & I_t \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & P \end{bmatrix}$$

要求其中的子块P为特定方阵. 下面我们把这个要求明确化.

由于初等变换都是可逆的过程，故对应的初等矩阵为可逆阵，这等价于要求初等矩阵的行列式不为零. 对于分块倍乘矩阵，有

$$\begin{vmatrix} P & O \\ O & I \end{vmatrix} = |P| \cdot |I| = \boxed{|P| \neq 0}.$$

因此，$|P| \neq 0$, 也即P为可逆阵，就是分块倍乘矩阵的明确要求.

逆矩阵求法4——分块矩阵求逆法

本部分讨论一些特殊的分块矩阵的求逆问题. 利用分块矩阵的运算律，以及逆矩阵的定义，可以验证如下结论：

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{可逆} \Leftrightarrow A_{11},\cdots,A_{nn} \text{均可逆, 此时} A^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & * & \cdots & * \\ 0 & A_{22}^{-1} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn}^{-1} \end{bmatrix}.$$

(A_{ii}为方阵)

(准三角形矩阵)　　(准三角形矩阵)

特别地，若 $A=\mathrm{diag}(A_{11},\cdots,A_{nn})$ ，则 $A^{-1}=\mathrm{diag}(A_{11}^{-1},\cdots,A_{nn}^{-1})$

(准对角矩阵)　　(准对角矩阵)

例8 试判断矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ 是否可逆? 若可逆, 求出 A^{-1}.

解: 设 $A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\O&A_{22}\end{bmatrix}$, 其中 $A_{11}=\begin{bmatrix}2&0\\1&2\end{bmatrix}$, $A_{12}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $A_{22}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$, 且 $|A_{11}|=4$, $|A_{22}|=1$,

从而 $|A|=|A_{11}|\cdot|A_{22}|=4$, 所以 A, A_{11}, A_{22} 均可逆. 设 $A^{-1}=\begin{bmatrix}X&Y\\O&Z\end{bmatrix}$, 则

$$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\O&A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X&Y\\O&Z\end{bmatrix}=I \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}X=A_{11}^{-1};\\ Z=A_{22}^{-1};\\ A_{11}Y+A_{12}A_{22}^{-1}=O,\end{cases} \quad\Rightarrow\quad Y=-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1},$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1}&-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\O&A_{22}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2&0&0&0\\-1&1/2&-1/2&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}.$$

分块矩阵的原则之一：子块当元素做运算. 在引入了逆矩阵的概念后，我们可以讨论分块矩阵的三角化（打洞）问题.

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \boxed{O} & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \boxed{O} \\ A_{21} & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

A_{11}可逆时

$$\begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$$

A_{22}可逆时

例9 设 $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，其中 A 可逆，D 为方阵，试证 $|M|=|A||D-CA^{-1}B|$，

进而证明，M 可逆 $\Longleftrightarrow$ $D-CA^{-1}B$ 可逆，并求 M 的逆.

证明

$$\because \begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & \boxed{O} \\ \boxed{O} & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |M|=\begin{vmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|.$$

从而，M 可逆 $\Longleftrightarrow A$ 与 $D-CA^{-1}B$ 均可逆，且

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & \left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}$$

本讲小结

- **逆矩阵的概念：** 方阵，且$AB = BA = I$.
- **逆矩阵的性质：**
  - $(A^{-1})^{-1} = A$； $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$； $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$； $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$.
- **伴随矩阵及其性质：** $A^* = (A_{ij})^{T}{}_{n\times n}$， $AA^* = A^*A = |A|I$
- **矩阵可逆的条件**
  - A可逆 $\Longleftrightarrow |A| \neq 0 \Longleftrightarrow AB = I \Longleftrightarrow A = P_1P_2\cdots P_s$ (初等矩阵乘积)
    $\Longleftrightarrow A\vec{X} = \vec{0}$只有零解.
- **逆矩阵的求法：** 定义法; 伴随矩阵法; 初等变换法; 分块矩阵法