# 《线性代数》

## 第五章 向量空间理论

### §5.5 矩阵的秩

2019秋

杨晶 主讲

# 内容提要

- 矩阵的 $k$ 阶子式
- 矩阵秩的定义
- 矩阵秩的计算
- 矩阵四种秩的统一
- 关于秩的更多理论和性质

**回顾上讲问题：**对同一个矩阵，“行秩 = 列秩”是否总是成立？

**分析：**若成立，说明矩阵的行向量组与列向量组之间存在某种相同的本质，换言之，说明矩阵的行与列之间存在某种意义的等价性.

**启发：**过去我们学过的什么对象是具有行列等价性的？

——行列式.

**进一步分析：**但是，行列式只能对方阵定义，而对一般的矩阵，可否也引入行列式的概念呢？

**解决方案：**在一般的$m\times n$型矩阵$A$中，取出行数和列数相同的$k$阶子方阵，即可计算行列式.　其中要求 $1 \le k \le \min\{m, n\}$.

## (一) 矩阵的 $k$ 阶子式

**定义1** 设$1 \le k \le \min\{m, n\}$，在矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 中任取出 $k$ 行 $k$ 列，位于这些行、列交叉处的 $k^2$ 个元素，按原次序组成的 $k$ 阶行列式，称为矩阵 $A$ 的一个 $k$ 阶子式 (minor).

具体地，设所取出的行为：第$i_1, i_2, \ldots, i_k$行, 满足 $1\le i_1< i_2< \ldots< i_k\le m$;

所取出的列为：第$j_1, j_2, \ldots, j_k$列, 满足 $1\le j_1< j_2<\ldots< j_k\le n$,

将上述$k$行$k$列上的元素组成的$A$的子矩阵记为$A\begin{pmatrix} \boxed{i_1,i_2,\ldots,i_k} \\ \boxed{j_1,j_2,\ldots,j_k} \end{pmatrix}$,

则对应的$k$阶子式即为：$\det A\begin{pmatrix} i_1,i_2,\ldots,i_k \\ j_1,j_2,\ldots,j_k \end{pmatrix}$.

注：(1) 可以理解为把某些行与列划去之后，剩下的$A$的$k$阶子方阵.

(2) $A$中$k$阶子式的总个数为：$C_m^k \times C_n^k$.

例1. 设 $A=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{matrix} \\ \begin{matrix}2 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}1 & 1\end{matrix} \end{bmatrix}$ 则$A$有$3\times 4=12$ 个1阶子式，就是每个分量上的元素$a_{ij}$.

$A$有$C_3^2\cdot C_4^2=3\times 6=18$ 个2阶子式，例如：$\left|A\begin{pmatrix}1,2\\1,2\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2$

$A$有4个3阶子式，如下：

$$\left|A\underline{\begin{pmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{pmatrix}}\right|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix},\left|A\underline{\begin{pmatrix}1,2,3\\1,2,4\end{pmatrix}}\right|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix},\left|A\underline{\begin{pmatrix}1,2,3\\1,3,4\end{pmatrix}}\right|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix},\left|A\underline{\begin{pmatrix}1,2,3\\2,3,4\end{pmatrix}}\right|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}.$$

由于在上述4个三阶行列式中，均有$r3=r1+r2$, 故均等于0.

## (二) 矩阵的秩的定义

- 对于矩阵$A$的$k$阶子式有这样的一个性质：

  $A$的所有$k$阶子式均为0 $\Rightarrow$ $A$的所有$k+1$阶子式也为0.

（由行列式的展开公式，即可说明）

**定义2** 矩阵 $A$ 中非零子式的最高阶数称为 $A$ 的**秩** (或**行列式秩**)，记为 $\boxed{\mathrm{r}(A)}$.

**基本性质：** 设$A\in M_{m\times n}$，则

(1). $0\le \mathrm{r}(A)\le \min\{m,n\}$;

(2). $\mathrm{r}(A)=r \Longleftrightarrow A$中存在$r$阶非零子式，且所有$r+1$阶子式均为0;

(3). $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A)$.

**例1(续).** 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，因为$A$的所有3阶子式均为0，即：

$$\left|A\binom{1,2,3}{1,2,3}\right|=\left|A\binom{1,2,3}{1,2,4}\right|=\left|A\binom{1,2,3}{1,3,4}\right|=\left|A\binom{1,2,3}{2,3,4}\right|=0.$$

又因为$A$存在非零的2阶子式，例如：$\left|A\binom{1,2}{1,2}\right|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$

$\Rightarrow$ r$(A)=2$.

另一方面， 由 $r3=r1+r2$ 知，$\mathrm{r_r}(A)=2$,

由 $c1=c3+c4$; $c2=c3-c4$ 知，$\mathrm{r_c}(A)=2$,

**问题:**

行列式秩=行秩=列秩，这是偶然现象吗?有何内在联系?

单选题 1分

设置

**例2.** 对于阶梯形矩阵 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，则r($B$)= ?

A 0;

B $r$;

D $n$;

C 不能确定.

提交

**例2.** 对于阶梯形矩阵 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $(b_{ii}\neq 0)$.

一方面，$B$的任意$r+1$阶子式均会包含一个全零行，则必为0.

另一方面，$B$的前$r$行$r$列组成的$r$阶子式，为三角行列式，由主元素$b_{ii}\neq 0$知，此$r$阶子式非零.

从而，$\mathrm{r}(B)=r$, 即阶梯形矩阵的秩 = 非零行数 = 主元素个数.

## (三) 矩阵秩的计算

- 对于一般矩阵$A$，为了确定r($A$)=$r$，需验证$C_m^{r+1}\cdot C_n^{r+1}$个$r$+1阶子式均为0，计算量相当大，所以用定义去计算矩阵秩的方法，只适用于低阶情形或特殊情形.
- 是否有更有效的计算矩阵秩的方法呢？
- 由上述例2知，阶梯形矩阵的秩比较容易计算；而任意矩阵均可以通过初等行变换化为阶梯形矩阵. 这给了我们一些启示：可否用初等变换的方法来求矩阵的秩？

**定理1 初等行变换不改变矩阵的秩.**

**证明:** 按三种初等行变换分别讨论:

(1). <u>数乘变换</u> $k \times r_i\ (k \neq 0)$：由于$k \neq 0$，不影响矩阵中任何一个子式的非零性质.

(2). <u>对换变换</u> $r_i \leftrightarrow r_j$：所有子式或不变、或相差一个±号、或由原子式经若干次对换所得，因而也不影响矩阵中任何一个子式的非零性质.

(3). <u>倍加变换</u> $r_j + k \times r_i$，即把第$i$行的$k$倍加到第$j$行上：设$\mathrm{r}(A)=r$，$A$经过上述倍加变换后变成$B$，设$D$为$B$中任何一个$r+1$阶子式. 以下分为三种情况讨论:

(3.1) 若$D$中不包含第$j$行，则$D$也是$A$的$r+1$阶子式，所以$D=0$.

(3.2) 若$D$同时包含第$i$行和第$j$行，则由行列式的倍加不变性知，$D$与原来的$A$的子式相等，故也有$D=0$.

**(3.3)** 若$D$包含第$j$行但不含第$i$行，则由行列式的拆项法则知，$D$可分拆为两个同阶行列式之和，其中一个就是$A$的$r$+1阶子式，另一个是由$A$的某个$r$+1阶子式经过行对换和倍乘得到，于是它们都等于零，所以$D$=0.

$$D = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ & r_j + k \times r_i & \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ & r_j & \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ & r_i & \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

综合以上三种子情况，有$\mathrm{r}(B) \le r = \mathrm{r}(A)$.

另一方面, 由于倍加变换的过程是可逆的，即$B$经过倍加变换可变成$A$, 同上可得 $\mathrm{r}(A) \le \mathrm{r}(B)$. 从而有 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = r$. ■

**定理1'** 初等列变换不改变矩阵的秩.

**推论1** 设$A\in M_{m\times n}$, $P\in M_m$, $Q\in M_n$, 且$P$, $Q$可逆，则$\mathrm{r}(PAQ)=\mathrm{r}(A)$，即左(右)乘可逆阵，不改变原矩阵的秩.

**推论2** 若$\mathrm{r}(A)=r$, 则存在可逆阵$P$, $Q$，使得$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$,

即经过初等行、列变换可以将$A$化为$\boxed{\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}}$. 标准形

**证明**: $A$经初等行变换可化为简化阶梯形矩阵$C$, $C$经列对换可化为

$\begin{bmatrix} I_r & C_1 \\ O & O \end{bmatrix}$, 再经列倍加可将右上的$C_1$化零, 得到$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$. ■

**推论3** 设$A$与$B$为同型矩阵，则

存在可逆阵$P$, $Q$，使得$PAQ=B$ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$.

**例3** 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{pmatrix}$，r($A$)=3，求参数$a, b$的值.

**解:** 对$A$做初等行、列变换，得

$$A\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\\boxed{0}&1&a-2&2\\\boxed{0}&2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\boxed{1\quad 1\quad 1}\\0&1&\boxed{-1\quad b}\\0&\boxed{0}&a-1&\boxed{2-b}\\0&\boxed{0}&\boxed{0}&\boxed{4-2b}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&a-1&0\\0&0&0&2-b\end{pmatrix}=B.$$

由 r($A$) = r($B$) =3知，

$$a\neq 1, b=2 \quad 或 \quad a=1, b\neq 2.$$

## (四)、四种秩的统一

**定理2** 矩阵 $A$ 的秩=行秩=列秩=对应阶梯形矩阵$U$的主元个数，即

$$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}_r(A)=\mathrm{r}_c(A)=r_U.$$

**证明:** 先证$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}_c(A)$. 设$A\in M_{m\times n}$, $\mathrm{r}(A)=r$, 且对$A$按列进行分块有

$$A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n)$$

用初等行变换可将$A$化为阶梯形矩阵$B$，由定理1知 $\mathrm{r}(A)=r=\mathrm{r}(U)$, 从而$U$必然只有 $r$ 行非零. 不妨设$U$的主元就在前 $r$ 列, 即

$$A\to U=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ \text{其中} b_{ii}\neq 0\ \ (1\leq i\leq r).$$

$$A \to U = \begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \boxed{b_{22}} & \cdots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{b_{rr}} & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

由极大无关组的求法知，主元素$b_{ii}\neq 0$所对应的列$\{\vec{\alpha}_i: 1\leq i\leq r\}$就是$A$的列向量组的极大线性无关组，从而$\mathrm{r}_c(A)= r =\mathrm{r}(A)=r_U$.

把上述结论用于$A^{\mathrm{T}}$，得$\mathrm{r}_c(A^{\mathrm{T}})= \mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})$，再由$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A)$, 有$\mathrm{r}_r(A) = \mathrm{r}(A)$.

综上，有 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}_r(A) = \mathrm{r}_c(A)\ )=r_U$. ■

## (四) 关于秩的更多理论和性质：1. 满秩矩阵

**回顾：** 由矩阵的秩的定义知，若$A\in M_{m\times n}$，则 $\mathrm{r}(A)\le \min\{m,n\}$. 特别地，当$\mathrm{r}(A)$达到上界(等号成立)时，有如下定义：

**定义1** 设$A\in M_{m\times n}$, 若 $\mathrm{r}(A)=m$, 则称$A$**行满秩**;若 $\mathrm{r}(A)=n$, 则称$A$**列满秩**. 若$A$即行满秩又列满秩，则称$A$为**满秩(full rank)**矩阵.

**注：** 行满秩 $\Rightarrow m\le n$　　列满秩 $\Rightarrow m\ge n$　　满秩 $\Rightarrow m=n$

矮胖型矩阵　　瘦高型矩阵　　方阵

**定理1** 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵，则下列命题等价:

(1) $A$ 满秩 ($r(A) = n$);

(2) $|A| \neq 0$;

(3) $A$ 可逆 ( 称 $A$ 为非奇异或非退化);

(4) $A$ 的$n$个列(行)向量线性无关;

(5) 齐次线性方程组 $A\vec{X} = \vec{0}$ 只有零解;

(6) 对 $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$，线性方程组 $A\vec{X} = \vec{b}$ 有唯一解 $\vec{X} = A^{-1}\vec{b}$.

**证明：** 只证(1),(2)等价: 若$r(A) = n$, 则$A$的标准形为$I_n$，即存在可逆阵$P,Q$，使得$PAQ= I_n$，两边取行列式得，$|A|\neq 0$.

反之，若$|A|\neq 0$, 则$A$可逆，于是 $A=P_1P_2\ldots P_s=P_1P_2\ldots P_sI_n$, 其中$P_i$为初等矩阵，由初等变换不改变矩阵的秩知, $r(A)=r(I_n)=n$. ■

## (四) 关于秩的更多理论和性质：2. 运算律

**定理2** 设以下运算可行，则

(1) 转置: $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(A)$

(2) 求逆: $\mathrm{r}(A^{-1}) = \mathrm{r}(A)$;

(3) 加法: $\mathrm{r}(A+B) \le \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$;

(4) 乘法: $\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) - n \le \mathrm{r}(A_{m\times n}B_{n\times p}) \le \min\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\}$.

**证明**：(1) 已证, (2) $A$可逆 $\Rightarrow$ $A$满秩 $\Rightarrow$ $\mathrm{r}(A^{-1}) = \mathrm{r}(A)=n$.

(3) 将$A$与$B$按列分块，设$A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n)$, $B=(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_n)$，于是

$$A+B=(\vec{\alpha}_1+\vec{\beta}_1,\vec{\alpha}_2+\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n+\vec{\beta}_n),$$

这说明$A+B$的列向量集合可由向量组$\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n,\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_n\}$线性表出，故 $\mathrm{r}(A+B)=\mathrm{r}_c(A+B) \le \mathrm{r}(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n,\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_n)$.

不妨设 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r$ 为$A$的列向量组的极大线性无关组，设$\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_s$ 为 $B$ 的列向量组的极大线性无关组, 则向量组$\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_n\}$可由$\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_r, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_s\}$线性表示，故

$$\mathrm{r}(A+B) \le \mathrm{r}(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_n) \le r + s = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B).$$

**(4)** 记 $A = (\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n)$, $AB = (\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \cdots, \vec{\gamma}_s)$, $B = (b_{ij})_{n\times s}$.

则

$$\left.\begin{aligned} \vec{\gamma}_1 &= b_{11}\vec{\alpha}_1 + b_{21}\vec{\alpha}_2 + \dots + b_{n1}\vec{\alpha}_n, \\ \vec{\gamma}_2 &= b_{12}\vec{\alpha}_1 + b_{22}\vec{\alpha}_2 + \dots + b_{n2}\vec{\alpha}_n, \\ &\cdots\ \cdots\ \ \cdots\ \ \cdots\ \ \cdots, \\ \vec{\gamma}_s &= b_{1s}\vec{\alpha}_1 + b_{2s}\vec{\alpha}_2 + \dots + b_{ns}\vec{\alpha}_n, \end{aligned}\right\}$$

$\{\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \cdots, \vec{\gamma}_s\}$可由$\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ 线性表出.

$$\Rightarrow \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n) \ge \mathrm{r}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \cdots, \vec{\gamma}_s) = \mathrm{r}(AB).$$

同理 $\mathrm{r}(B) \ge \mathrm{r}(AB)$.
$\Rightarrow$矩阵乘法降秩.

另一个不等式的证明，需用分块矩阵的秩的结论, 将在之后给出. ■

## (四) 关于秩的更多理论和性质：3. 分块矩阵的秩

**定理3** 设以下矩阵分块和运算可行，则

(1) 列并排: $\max\{r(A),r(B)\} \le r(A \mid B) \le r(A)+r(B)$. (行并排也有相同结论)

(2) 准对角: $r\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$;

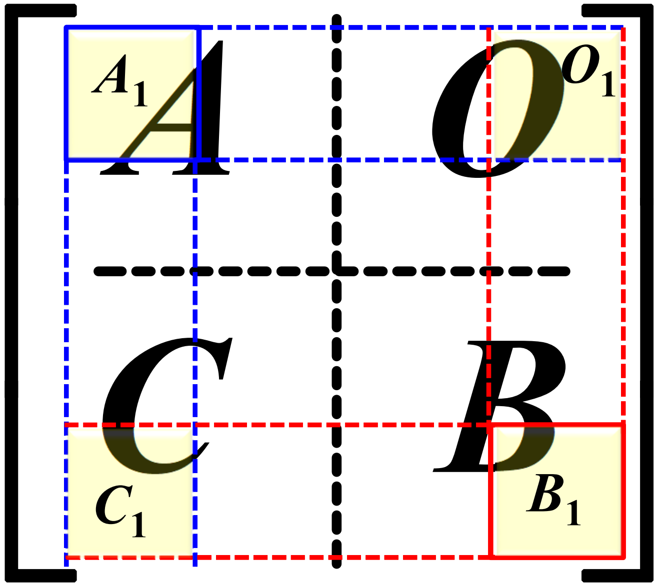
(3) 准三角: $r\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} \ge r(A) + r(B)$;

证明：(1) 将$A,B$按列分块，则由列向量组的表出关系易证.

(2) $A$通过初等行变换可化为阶梯形矩阵, 其非零行数为$r(A)$, $B$通过初等行变换化为阶梯形矩阵, 其非零行数为$r(B)$, 则$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$通过初等行变换化为阶梯形矩阵, 其非零行数为$r(A)+r(B)$, 故得结论.

(3) $A$中存在一个r($A$)阶子式不为零，$B$中存在一个r($B$)阶子式不为零，

则 $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}$ 必有一个 r($A$)+r($B$) 阶子式不为零，故 $\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}\right) \geq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$.




$$\left[\begin{array}{c:c} A_1 & O_1 \\ \hdashline C_1 & B_1 \end{array}\right]$$

r($A$)+r($B$) 阶子式 $\neq 0$

■

注: 结论(3)可以用结论(1)来说明, 过程更加简单.

注：在定理3中我们给出了准对角阵，准三角阵的秩的结论. 对于一般的分块矩阵，可以利用分块初等变换的方法将其化为准对角阵或准三角阵. 由于分块初等矩阵是可逆矩阵，则左右乘以分块初等矩阵不改变原矩阵的秩, 从而分块初等变换不改变原分块矩阵的秩.

定理2(4)的证明： 即要证 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n\le \mathrm{r}(A_{m\times n}B_{n\times p})$.

利用分块初等行、列变换，有

$$\begin{bmatrix} A & O \\ I_n & B \end{bmatrix} \xrightarrow{c2-c1\cdot B} \begin{bmatrix} A & -AB \\ I_n & O \end{bmatrix} \xrightarrow{r1-A\cdot r2} \begin{bmatrix} O & -AB \\ I_n & O \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\cdot c2\leftrightarrow c1} \begin{bmatrix} AB & O \\ O & I_n \end{bmatrix}$$

由定理3知

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\le \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} A & O \\ I_n & B \end{bmatrix}\right)=\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} AB & O \\ O & I_n \end{bmatrix}\right)=\mathrm{r}(AB)+n. \qquad \blacksquare$$

## (四) 关于秩的更多理论和性质：4. 一些重要结论

**结论1(乘积为零)** 设 $\underline{A_{m\times n}B_{n\times s}} = O_{m\times s}$，则 $\underline{r(A) + r(B)} \le n$.

**分析：** 不等式的左边启发我们考虑准三角阵, 且设法用初等变换给出$AB$.

**证明**

$$\begin{bmatrix} A & O \\ I & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} O & -AB \\ I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O \\ I & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} O & O \\ I & O \end{bmatrix}$$

由于分块初等变换不改变矩阵的秩，所以由定理3(3)，有

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B) \le \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} A & O \\ I & B \end{bmatrix}\right) = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} O & O \\ I & O \end{bmatrix}\right) = n. \qquad \blacksquare$$

**结论2 (满秩分解)** 设 $r(A_{m\times n})=r$, 则存在列满秩矩阵 $G_{m\times r}$, 行满秩矩阵 $H_{r\times n}$, 使得 $A=GH$.

**分析:** 由 $r(A)=r$,可先给出 $A$ 的标准形, 再将标准形化为列、行满秩矩阵乘积.

**证明:** 设 $A\in M_{m\times n}, r(A)=r$, 则存在 $m$ 阶可逆矩阵 $P$ 和 $n$ 阶可逆矩阵 $Q$, 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}_{m\times r}\cdot\begin{pmatrix} I_r & O \end{pmatrix}_{r\times n}.$$

$$\Rightarrow A=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}_{m\times r}\begin{pmatrix} I_r & O \end{pmatrix}_{r\times n}Q^{-1}$$

$:=GH$, 其中

$G=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}_{m\times r}$, 为 $m\times r$ 阶矩阵, 且 $r(G)=r$;

$H=(I_n,O)_{r\times n}\cdot Q^{-1}$, 为 $r\times n$ 阶矩阵, 且 $r(H)=r$. ■

**结论3 (伴随的秩)** 设 $A \in M_n, n \geq 2$, 则 $r(A^*) = \begin{cases} n & 若\ \mathrm{r}(A) = n, \\ 1 & 若\ \mathrm{r}(A) = n-1, \\ 0 & 若\ \mathrm{r}(A) \leq n-2. \end{cases}$

**分析：** 由于 $AA^* = A^*A = |A|I$ 总是成立, 再由 $A^*$ 的定义，分情况讨论即可.

**证明：** (1) 若 $\mathrm{r}(A)=n$，则 $|A|\neq 0$. 由 $AA^* = A^*A = |A|I$, 得.

$$|A||A^*| = |A|^n, \quad \Rightarrow \quad |A^*| = |A|^{n-1} \neq 0, \quad \Rightarrow r(A^*) = n.$$

(2) 若 $\mathrm{r}(A)=n-1$，则 $A$ 至少有一个 $n-1$ 阶子式非零，从而 $A^* \neq O$，$r(A^*) \geq 1.$

另一方面，$\mathrm{r}(A)=n-1$ 时, $|A|=0$，则 $AA^* = |A|I=O$, 因此，由结论1知,

$$r(A) + r(A^*) \leq n, \Rightarrow r(A^*) \leq 1, \quad \Rightarrow \quad r(A^*) = 1.$$

(3) 若 $\mathrm{r}(A)\leq n-2$，则 $A$ 的任意 $n-1$ 阶子式均为0, 从而 $A^* = O$，$r(A^*) = 0.$ ■

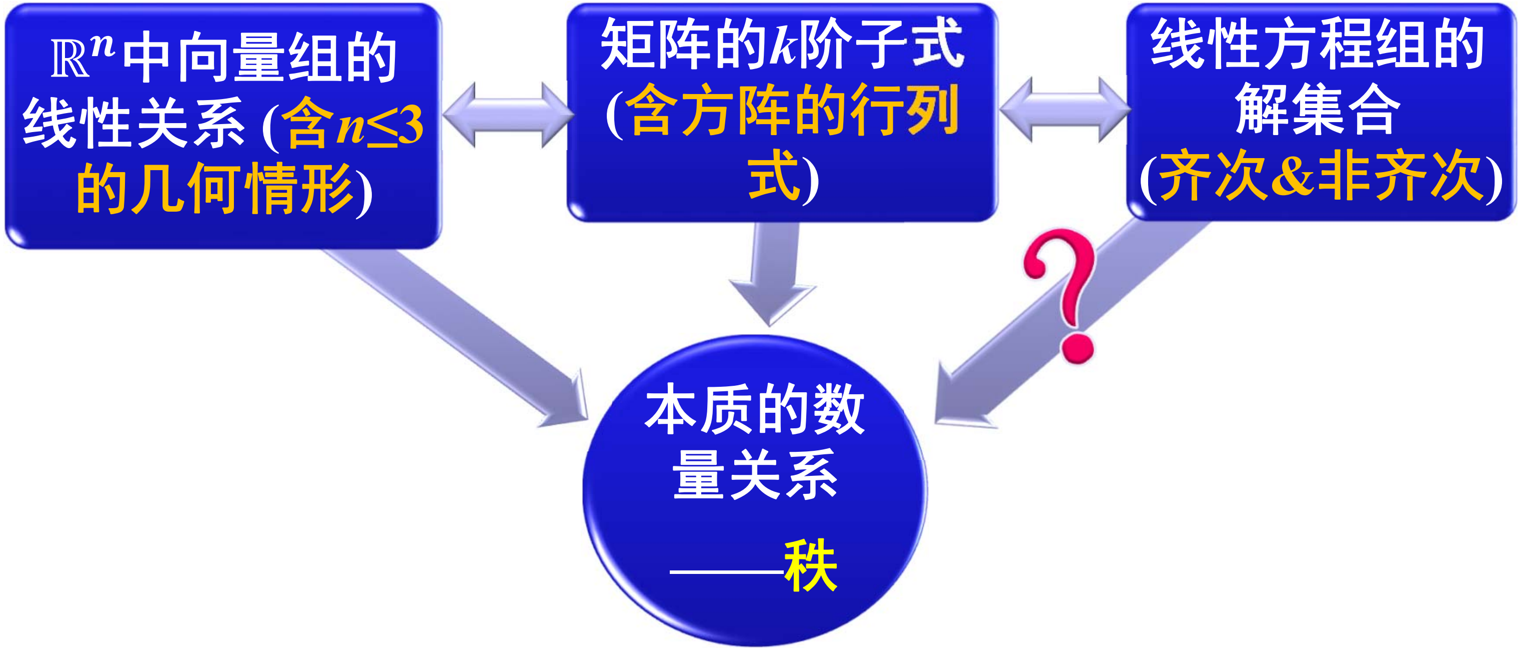
# 本讲小结

- 矩阵的 $k$ 阶子式 ——$\det A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_k \\ j_1, j_2, \dots, j_k \end{pmatrix}$
- 矩阵秩的定义 ——非零子式的最高阶数 $\mathrm{r}(A)$
  所有$r$+1阶子式为0,存在$r$阶子式非0
- 矩阵秩的计算 ——初等变换化为阶梯形或标准形
- 四种秩的统一 —— $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}_r(A) = \mathrm{r}_c(A) = r_U$
- 秩相关的一些重要性质与结论

# 本讲小结

**总结：解决与矩阵秩相关问题的思路**

1. 考虑矩阵中不为0的子式；
2. 把矩阵转换为行(列)向量组，利用向量组的秩和极大无关组；
3. 利用初等变换化为标准型；
4. 利用分块矩阵；
5. 灵活应用已得到的秩的性质；
6. 用一些最简单的矩阵来记忆和想象。




**思考问题：** 线性方程组的解的基本问题，即存在问题、个数问题、解法问题、结构问题等，与秩有何关系？