



《线性代数》



第四章 矩 阵

§ 4.7 可逆阵的LU分解



杨晶 主讲

内容提要

- 什么是 LU 分解
- LU 分解的意义: 解同系数方程组
- LU 分解的存在性和唯一性
- $PA=LU$ 分解与 LDL^T 分解

(一) LU分解的概念

- 学习了矩阵的运算,特别是乘法运算后,返回来再看用Gauss消元法解方程的过程

系数矩阵 $A \xrightarrow{\text{行变换}} \text{阶梯形 } U$

用矩阵的语言来说: $EA = U$, 其中 E 是初等矩阵的乘积.

- 特别当 A 是可逆的方阵时, U 也可逆, 从而 U 为主对角线上元素均非零的上三角阵.

例如:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 4r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = U.$$

$$\Rightarrow E_{1,2}(-4)A = U, \quad \Rightarrow A = E_{1,2}(-4)^{-1}U = E_{1,2}(4)U.$$

即, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

用英文首字母缩写
取名为: LU分解.

目标: 将可逆阵 A 分解为一个**下三角阵(lower triangular matrix)**
与上三角阵(upper triangular matrix)的乘积.



● 进一步, 看3阶的情形:

例1. 设如下3阶可逆阵 A 只通过行倍加, 消去变成上三角 U ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - \frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - \frac{2}{3}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = U.$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}}_{U}.$$

一般地, 若 $E_{2,3}(k_3)E_{1,3}(k_2)E_{1,2}(k_1)A = U$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= E_{1,2}(k_1)^{-1}E_{1,3}(k_2)^{-1}E_{2,3}(k_3)^{-1}U \\ &= E_{1,2}(-k_1)E_{1,3}(-k_2)E_{2,3}(-k_3)U. \end{aligned}$$

其中

$$E_{1,2}(-k_1)E_{1,3}(-k_2)E_{2,3}(-k_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 1 & 0 \\ -k_2 & -k_3 & 1 \end{pmatrix}.$$



● 问题: 为什么使用分解 $A=LU$, 而非 $U=E_{2,3}(k_3)E_{1,3}(k_2)E_{1,2}(k_1)A$?

在上页例子中:

$$E_{1,2}(k_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{1,3}(k_2)=I_3, \quad E_{2,3}(k_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{则 } E_{2,3}(k_3)E_{1,3}(k_2)E_{1,2}(k_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$\text{而 } E_{1,2}(k_1)^{-1}E_{1,3}(k_2)^{-1}E_{2,3}(k_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = L.$$

● Tip: L 容易计算, E 相对不易计算, L 只包含消元乘数的信息, E 包含其他信息 (例如 $1/3$), 而且 L 是这样得到的: 将消元的乘数的相反数写在相应的位置.

● 例:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = LU.$$

U 为上三角阵, 主对角线上是 A 的主元,

L 为下三角阵, 主对角线上全为1, 主对角线下方是消元乘数的相反数.

● 有时, 还可把 U 表示为如下形式:

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & * & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

例如上例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LDU_1.$

用英文首字母缩写
取名为: LDU分解.



其中, D 为对角阵(diagonal matrix), L 与 U_1 分别为对角线上为1的下三角阵与上三角阵.

(二) LU分解的意义

- 回到方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$, 若 $A=LU$, 则解方程 $A\vec{x} = \vec{b}$ 就变为以下两步:

(1). 求解 $L\vec{y} = \vec{b}$; (下三角形方程组, 向前代入)

(2). 求解 $U\vec{x} = \vec{y}$. (上三角形方程组, 回代)

例如, 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = LU$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 16 \end{pmatrix}$.

易计算得: $L\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 16 \end{pmatrix}, \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$.

同样, 易得: $U\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}, \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

不计LU分解的运算,
求解两个三角方程
组比直接求解原方
程组要容易.



- 但若算上LU分解的运算过程, 上述方法并不比高斯消元简单, 那为什么利用LU分解求解方程组在实践中还被广泛使用呢?

在实践中, A 对应了模型函数, \vec{b} 对应了模型输出. 通常模型是不变的, 但输出是经常变动的. 因此, 方程组从 $A\vec{x} = \vec{b}$ 频繁地变成 $A\vec{x} = \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s$

此时高斯消元就需要全部重新计算 (高斯消元用增广矩阵消元, 变化过程是 $[A, \vec{b}_i] \rightarrow [U, \vec{b}'_i]$) , 这对大型矩阵来说极其耗时。

反观LU分解, 因为它不依赖于 \vec{b} , 所以计算一次后就可以存储 U 和 L , 在输出变化后, 求解过程比较简单.

- 因此LU分解的意义在于: 求解同系数的大型线性方程组.
- 此外, 若已知LU分解, 能快速计算 A 的行列式.



设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $\det A =$ [填空1]

小组讨论: 你能给出LU分解求行列式的几何意义吗?

作答

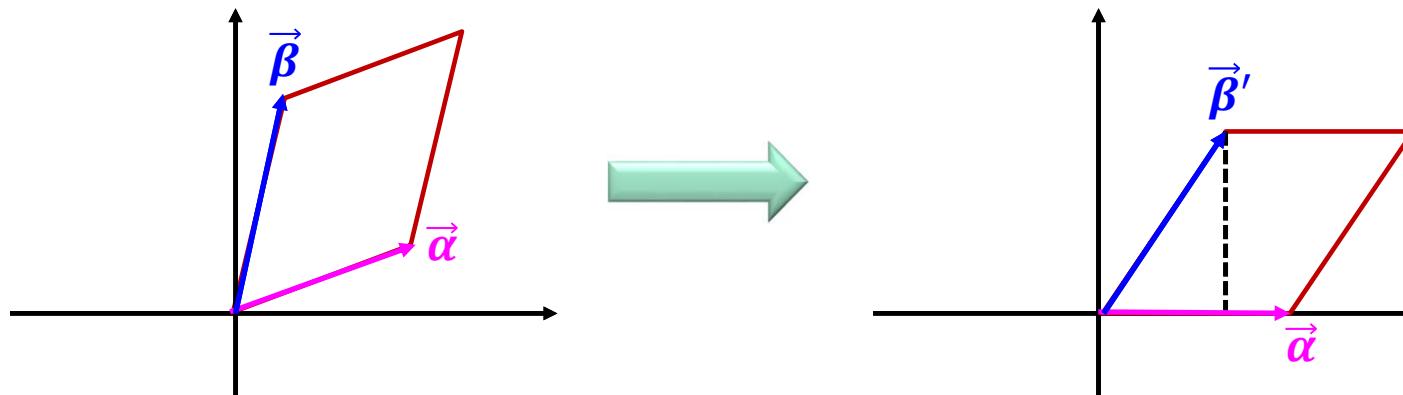
课堂练习分析:

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $\det A = \underline{\hspace{10em}}$.

小组讨论: 你能给出LU分解求行列式的几何意义吗?

---以二维为例, 在直角坐标系中, 将平行四边形改造为同面积的且一条边经过x轴的平行四边形, 其面积恰为: 底(第一条边的横坐标)×高(第二条边的纵坐标).

三维, 及高维的情况同理.



(三) LU分解的存在性与唯一性

- 问题: 是不是每个方阵A都有LU分解?

例如: 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = ? \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{21} \end{pmatrix} = LU$ 

则 $u_{11} = 0, u_{12} = 1, 2 = l_1 \cdot 0$?

- 问题: 若可逆矩阵A有LU分解, 则A应满足什么条件?

定义. 设A为n阶方阵, 则A的左上角的 $k \times k$ 子矩阵 A_k , 称为A的k阶顺序主子阵
(sequential principal submatrix).

$$A_1 \left(\begin{array}{c|cc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right)$$

- 下面给出LU分解存在的充分条件：

定理1. 设 n 阶可逆矩阵 A 的顺序主子阵 A_k ($k=1, 2, \dots, n$) 均可逆, 则 A 有LU分解.

证明: 对 A 的阶数 n 用归纳法.

当 $n=1$ 时, $L=(1)$, $U=A=(a_{11})\neq 0$, 定理成立.

假设 $n-1$ 时定理成立, 下考虑 n 的情形: 记

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \vec{\beta} \\ \vec{\alpha}^T & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{其中, } \vec{\alpha}^T \text{ 是 } n-1 \text{ 维行向量, } \vec{\beta} \text{ 是 } n-1 \text{ 维列向量.})$$

由于 A_{n-1} 可逆, 对 A 做分块的倍乘变换:

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & \vec{0} \\ -\vec{\alpha}^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \vec{\beta} \\ \vec{\alpha}^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \vec{\beta} \\ \vec{0}^T & a_{nn} - \vec{\alpha}^T A_{n-1}^{-1} \vec{\beta} \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \vec{0} \\ \vec{\alpha}^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \vec{\beta} \\ \vec{0}^T & a_{nn} - \vec{\alpha}^T A_{n-1}^{-1} \vec{\beta} \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \vec{0} \\ \vec{\alpha}^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \vec{\beta} \\ \vec{0}^T & a_{nn} - \vec{\alpha}^T A_{n-1}^{-1} \vec{\beta} \end{pmatrix}.$$

由归纳假设, $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$. 故

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & \vec{0} \\ \vec{\alpha}^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{n-1} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n-1} & \vec{\beta}' \\ \vec{0}^T & a_{nn} - \vec{\alpha}^T A_{n-1}^{-1} \vec{\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_{n-1} & \vec{0} \\ \vec{\alpha}^T A_{n-1}^{-1} L_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n-1} & \vec{\beta}' \\ \vec{0}^T & a_{nn} - \vec{\alpha}^T A_{n-1}^{-1} \vec{\beta} \end{pmatrix} = LU. \end{aligned}$$

定理得证. ■

注: 1. 分块矩阵的打洞法是常用的技巧.

2. 本定理给出了一个LU分解存在的充分条件, 还有其他的充分和必要条件.

- 下面给出LU分解的唯一性：

定理2. 设 n 阶可逆矩阵 A 有LU分解, 即 $A=LU$, 其中 L 为主对角线元全为1的下三角阵, U 为上三角阵, 且 $u_{ii} \neq 0$ ($1 \leq i \leq n$), 则该分解唯一.

证明: 设可逆阵 A 有两个LU分解: $A=L_1U_1=L_2U_2$, 则

$$L_1^{-1}L_2 = U_1U_2^{-1}$$

既是上三角阵, 也是下三角阵, 从而为对角阵.

因 L_1, L_2 的对角元为1, 故 $L_1^{-1}L_2$ 对角元全为1. 因此, $L_1^{-1}L_2 = U_1U_2^{-1} = I_n$,
也即 $L_1=L_2, U_1=U_2$, 即分解唯一. ■

- 由定理2, 易得LDU分解的唯一性:

推论. 设 n 阶可逆矩阵 A 有LDU分解, 即 $A=LDU$, 其中 L, U 为主对角元全为1的下, 上三角阵, D 为对角阵, 则该分解唯一.

(四) 对称矩阵的 LDL^T 分解

- 问题: 上文的例子中, A 为对称阵 ($A=A^T$), A 的LUD分解为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LDU,$$

我们发现: $L=U^T$, $U=L^T$ ——这是偶然的现象呢? 还是必然的结果?

验证: 设 $A=LDU$, 则 $A=A^T=U^TDL^T$. 于是, 由LDU分解的唯一性知:

$$L=U^T, U=L^T.$$

结论: 对称矩阵若有LU分解, 则可分解为: $\textcolor{red}{A=LDL^T}$ 的形式.

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, 请给出 A 的 LDL^T 分解.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

例2. 如下对称阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = LDL^T$$

(五) $PA=LU$ 分解

- 并不是所有可逆阵都有LU分解, 例如: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

问题: 是否能将 A 稍作改造, 使其具有 LU 分解?

提示: Gauss消元法总是可行, 是因为还可以做**行对换**.

例如: 对之前的反例, 对换1,2两行后, $E_{1,2}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 显然可做 LU 分解.

定理3. 设 A 为 n 阶可逆矩阵, 则存在置换矩阵(若干对换阵的乘积) P , 使得 $PA=LU$.

证明: 对 A 的阶数 n 做归纳法.

当 $n=1$ 时, 定理显然成立, 假设定理对 $n-1$ 阶可逆阵成立, 下考虑 n 的情形.

设 $a_{i1} \neq 0$, 则对调第1行与第 i 行, 得矩阵 A' . 于是, $A' = E_{1,i}A$ 也可逆. 对 A' 做倍加变换, 消去第一列下方元, 得

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{l} & I_{n-1} \end{pmatrix} A'', \quad \text{其中 } A'' = \begin{pmatrix} a_{i1} & * \\ \vec{0} & A_1 \end{pmatrix}$$

$$E_{1,i}A = A' = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{l} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & * \\ \vec{0} & A_1 \end{pmatrix},$$

其中, A_1 为 $n-1$ 阶可逆阵, 由归纳假设知, 存在 $n-1$ 阶置换阵 P_1 , 使 $P_1 A_1 = L_1 U_1$.
于是

$$\begin{aligned} E_{1,i}A = A' &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{l} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & * \\ \vec{0} & U_1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ P_1 \vec{l} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & * \\ \vec{0} & U_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{故, } \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1 \end{pmatrix} E_{1,i}A = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ P_1 \vec{l} & L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & * \\ \vec{0} & U_1 \end{pmatrix} = LU.$$

最后, 令 $P = \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1 \end{pmatrix} E_{1,i}$, 则得 $PA = LU$. ■

例3. 如下3阶矩阵做 $PA=LU$ 分解.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = E_{1,2}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 且 } PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = LU.$$

例4. 如下4阶矩阵做 $PA=LU$ 分解.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 - 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = U.$$

$$\Rightarrow U = E_{3,4}(-3)E_{2,4}E_{1,4}(-2)E_{1,3}A.$$

$$\Rightarrow A = E_{1,3}E_{1,4}(2)E_{2,4}E_{3,4}(3)U.$$

注意到: $E_{1,4}(2)E_{2,4} = E_{2,4}E_{1,2}(2)$,

$$\Rightarrow A = \underbrace{E_{1,3}E_{2,4}}_{P^{-1}} \underbrace{E_{1,2}(2)E_{3,4}(3)}_{L} U = P^{-1}LU.$$

1. 如何验证上式.
2. 一般的对换与倍加矩阵的乘积, 若交换次序, 其规律是怎样的? (习题课)

其中, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.



下述关于LU等分解, 叙述正确的有()

A

*LU*分解只能对可逆矩阵做

B

目前, 我们只讨论可逆矩阵的*LU*分解, 其他矩阵可能存在*LU*分解.

C

所有可逆阵都有*LU*分解,

D

所有可逆阵都有 $PA=LU$ 分解

E

所有的可逆对称阵都有 LDL^T 分解

F

由 $PA=LDU$ 分解知, Gauss消元过程中的三种初等行变换可以独立分类出来.

 提交

本讲小结

- **LU分解的概念:** 一类Gauss消元的矩阵表示
 L : 主对角元为1的下三角阵; U : 保持第一行的上三角阵; LDU 分解: L 与 U 的对称化
- **LU分解的意义:** 大规模数值计算, 求解同系数的线性方程组, 行列式计算
- **LU分解存在的充分条件:** 顺序主子阵可逆(顺序主子式非零)
- **对称阵的LDLT分解:** 特殊情形下的LDU分解.
- **PA=LU分解:** 调整推广的LU分解

拓展思考:

1. LU分解的存在性是否有其它条件?
2. 一般矩阵如何做LU分解, 或PLU分解?
3. 对换矩阵的乘积为置换矩阵. 反之如何?

