



2019秋

《线性代数》

第四章 矩 阵

§ 4.5 矩阵的初等变换 与 初等矩阵



杨晶 主讲

图像处理中的数学问题



“天上的人影”可通过何种数学的运算来实现呢？

内容提要

- 矩阵的初等变换
- 初等矩阵的概念与性质
- 初等矩阵与矩阵初等变换的关系
- 分块矩阵的初等变换
- 初等矩阵的应用

一、矩阵的初等变换

我们把上一章中对行列式的行(列)进行的对换, 倍乘, 倍加三种操作, 引入到矩阵中来, 自然可得到矩阵的相关操作:

定义1 下面三种变换称为矩阵的初等行变换:

(1) 对调两行 (对调 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$) ;

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行的所有元素 ; (第 i 行乘 k , 记作 $r_i \times k$)

(3) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行

对应的元素上去 (第 j 行的 k 倍加到第 i 行上
记作 $r_i + kr_j$).

同理可定义矩阵的初等列变换(所用记号是把“ r ”换成“ c ”).

定义2 矩阵的初等列变换与初等行变换统称为**初等变换**.

矩阵的初等变换可以视为矩阵集合 $M_{m \times n}$ 到自身的变换,如果有另一个变换使得与原变换复合后,为恒等变换(保持所有矩阵不变),则称这个后者是前者的**逆变换**.

初等变换的逆变换仍为初等变换,且变换类型相同.

$$r_i \leftrightarrow r_j \text{ 逆变换: } r_i \leftrightarrow r_j;$$

$$r_i \times k \text{ 逆变换: } r_i \times \left(\frac{1}{k}\right);$$

$$r_i + kr_j \text{ 逆变换: } r_i + (-k)r_j \text{ 或 } r_i - kr_j.$$

定义3 如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B , 就称矩阵 A 与 B 等价,
记作 $A \sim B$, $A \xrightarrow{r} B$, $A \xrightarrow{c} B$.

等价关系的性质:

- (1) 反身性 $A \sim A$;
- (2) 对称性 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;
- (3) 传递性 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

具有上述三条性质的关系称为**等价**.

若矩阵A经过初等变换变为矩阵B，则以下不正确的是

A

$$A \rightarrow B$$

B

$$A \xrightarrow[c]{r} B$$

C

$$A = B$$

D

$$A \sim B$$

提交

二、初等矩阵的概念

定义1 单位矩阵 I 经过一次初等变换所得到的矩阵称为**初等矩阵**
(elementary matrix).

- (1) 单位矩阵 I 的第 i 行乘以非零数 k (倍乘行变换) 所得矩阵, 记为 $E_i(k)$.
它同时也是 I 的第 i 列乘以非零数 k (倍乘行变换) 所得矩阵.

$$I_n \xrightarrow[\substack{\text{倍乘行} \\ (kc_i)}} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} := E_i(k) \text{ 称为: 倍乘矩阵}$$

(2) 交换单位矩阵 I 的第 i 行与第 j 行, 所得的矩阵记为 $E_{i,j}$.
它也是交换 I 的第 i 列与第 j 列, 所得的矩阵.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} := E_{i,j} \text{ 称为: 对换矩阵}$$

Diagram illustrating the swap operation:

- The matrix is a unit matrix I of size $n \times n$.
- The i -th row (highlighted in red) is swapped with the j -th row (highlighted in red). A blue double-headed arrow indicates this swap between the two rows.
- The i -th column (highlighted in red) is swapped with the j -th column (highlighted in red). A blue double-headed arrow indicates this swap between the two columns.

(3) 将单位矩阵 I 第 i 行的 k 倍加到第 j 行, 所得矩阵记为 $E_{i,j}(k)$.
它也是将 I 第 j 列的 k 倍加到第 i 列, 所得的矩阵.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \vdots & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} := E_{i,j}(k) \text{ 称为: 倍加矩阵}$$

第*i*行 第*j*行 第*i*列 第*j*列

注意: $E_{i,j}(k)$ 中 k 的位置为 (j,i) , 即 $a_{ji}=k$.



二、初等矩阵的性质

1、初等矩阵的转置

$$E_i(k)^T = E_i(k).$$

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots \\ & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & 1 & & \vdots \\ & & & & & & 1 & \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} = E_{i,j}^T$$

故，倍乘矩阵、对换矩阵转置不变(对称阵)，转置后仍为初等矩阵.

设 $i < j$, 则

$$E_{i,j}(k) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ k & & \dots & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = E_{j,i}(k)^T$$

故, 倍加矩阵转置仍为倍加矩阵, 但下标顺序交换.

2、初等矩阵的行列式

易知 $|E_i(k)| = k \neq 0$; $|E_{i,j}(k)| = 1$, 而

$$|E_{i,j}| = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots \\ & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & 1 & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1 \cdots \textcolor{red}{j} \cdots \textcolor{red}{i} \cdots n)} a_{11} \cdots a_{i-1, i-1} \textcolor{red}{a}_{ij} a_{i+1, i+1} \cdots a_{j-1, j-1} \textcolor{red}{a}_{ji} a_{j+1, j+1} \cdots a_{nn} = (-1) \times 1 \times \cdots \times 1 = -1$$

3、初等矩阵的分块表示

设 $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, \underset{\text{第}i\text{位}}{1}, 0, \dots, 0)^T$ 为列矩阵(列向量), 则

$$I_n = (\vec{e}_1, \dots, \underline{\vec{e}_i}, \dots, \vec{e}_j, \dots, \vec{e}_n), \quad \text{或} \quad I_n = I_n^T = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T \\ \vdots \\ \vec{e}_n^T \end{bmatrix}$$

从而, 由初等矩阵的定义, 有

$$E_{i,j} = E_{i,j}^T = (\vec{e}_1, \dots, \underline{\vec{e}_j}, \dots, \underline{\vec{e}_i}, \dots, \vec{e}_n),$$

$$E_i(\mathbf{k}) = E_i(\mathbf{k})^T = (\vec{e}_1, \dots, \mathbf{k}\vec{e}_i, \dots, \vec{e}_n), \quad (k \neq 0).$$

$$E_{i,j}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T \\ \vdots \\ \mathbf{k}\vec{e}_i^T + \vec{e}_j^T \\ \vdots \\ \vec{e}_m^T \end{bmatrix} = (\vec{e}_1, \dots, \mathbf{k}\vec{e}_j + \vec{e}_i, \dots, \vec{e}_j, \dots, \vec{e}_n)$$

三、初等矩阵与初等变换的关系

回顾问题：如果矩阵 A 经过一次初等变换变为 B , 那么 A 与 B 之间究竟有何种关系?

考虑用初等矩阵分别左(右)乘任意(可乘)矩阵.

$$E_i(k)A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

故, 左乘倍乘矩阵 $E_i(k)$, 相当于对 A 的第 i 行做 k 倍的倍乘变换.

反过来，矩阵 A 右乘倍乘矩阵，得

$$AE_i(k) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \color{magenta}{ka}_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \color{magenta}{ka}_{2i} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \color{magenta}{ka}_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

故，右乘倍乘矩阵 $E_i(k)$ ，相当于对 A 的第 i 列做 k 倍的倍乘变换. 综上

$$A \xrightarrow{kr_i} B \Leftrightarrow B = E_i(k)A; \quad A \xrightarrow{kc_i} B \Leftrightarrow B = AE_i(k).$$

设 $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, \underset{\text{第 } i \text{ 位}}{1}, 0, \dots, 0)^T$, 则 $I_n = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_i, \dots, \vec{e}_j, \dots, \vec{e}_n)$,

$$E_{i,j} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j, \dots, \vec{e}_i, \dots, \vec{e}_n).$$

于是, $A I_n = A(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_i, \dots, \vec{e}_n) = (A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_i, \dots, A\vec{e}_n) = A$

故, $A\vec{e}_i$ 等于 A 的第 i 列.

$$\text{又因为, } I_m A = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T \\ \vdots \\ \vec{e}_m^T \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T A \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T A \\ \vdots \\ \vec{e}_m^T A \end{bmatrix} = A \quad \text{故, } \vec{e}_i^T A \text{ 等于 } A \text{ 的第 } i \text{ 行.}$$

考虑，矩阵 A 左乘对换矩阵，得

$$E_{i,j}A = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T \\ \vdots \\ \vec{e}_j^T \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T \\ \vdots \\ \vec{e}_m^T \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T A \\ \vdots \\ \vec{e}_j^T A \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T A \\ \vdots \\ \vec{e}_m^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{a_{j1}} & \underline{a_{j2}} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{a_{i1}} & \underline{a_{i2}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

故，**左乘对换矩阵** $E_{i,j}$ ，相当于对 A 的第 i, j 行做**对换变换**.

反过来，矩阵A右乘对换矩阵，得

$$AE_{i,j} = A(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j, \dots, \vec{e}_i, \dots, \vec{e}_n) = (A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_j, \dots, A\vec{e}_i, \dots, A\vec{e}_n)$$

m × n
 n × n

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right]$$

故，右乘对换矩阵 $E_i(k)$ ，相当于对 A 的第 i, j 列做对换变换。综上

$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B \Leftrightarrow B = E_{i,j}A;$	$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} B \Leftrightarrow B = AE_{i,j}.$
---	---

考虑，矩阵 A 左乘倍加矩阵，得

$$E_{i,j}(k)_{m \times m} A_{m \times n} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T \\ \vdots \\ k\vec{e}_i^T + \vec{e}_j^T \\ \vdots \\ \vec{e}_m^T \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T A \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T A \\ \vdots \\ (k\vec{e}_i^T + \vec{e}_j^T)A \\ \vdots \\ \vec{e}_m^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T A \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T A \\ \vdots \\ \underline{k\vec{e}_i^T A + \vec{e}_j^T A} \\ \vdots \\ \vec{e}_m^T A \end{bmatrix}$$

故，**左乘倍加矩阵** $E_{i,j}(k)$ ，相当于对 A 做第 i 行的 k 倍加到第 j 行上的**倍加变换**.

反过来，矩阵A右乘倍加矩阵，得

$$\begin{aligned} A_{m \times n} E_{i,j}(k)_{n \times n} &= A(\vec{e}_1, \dots, k\vec{e}_j + \vec{e}_i, \dots, \vec{e}_j, \dots, \vec{e}_n) \\ &= (A\vec{e}_1, \dots, A(k\vec{e}_j + \vec{e}_i), \dots, A\vec{e}_j, \dots, A\vec{e}_n) \\ &= (A\vec{e}_1, \dots, \underline{kA\vec{e}_j + A\vec{e}_i}, \dots, A\vec{e}_j, \dots, A\vec{e}_n) \end{aligned}$$

故，**右乘倍加矩阵** $E_{i,j}(k)$ ，相当于对A做第j列的k倍加到第i列上的**倍加变换**. 即

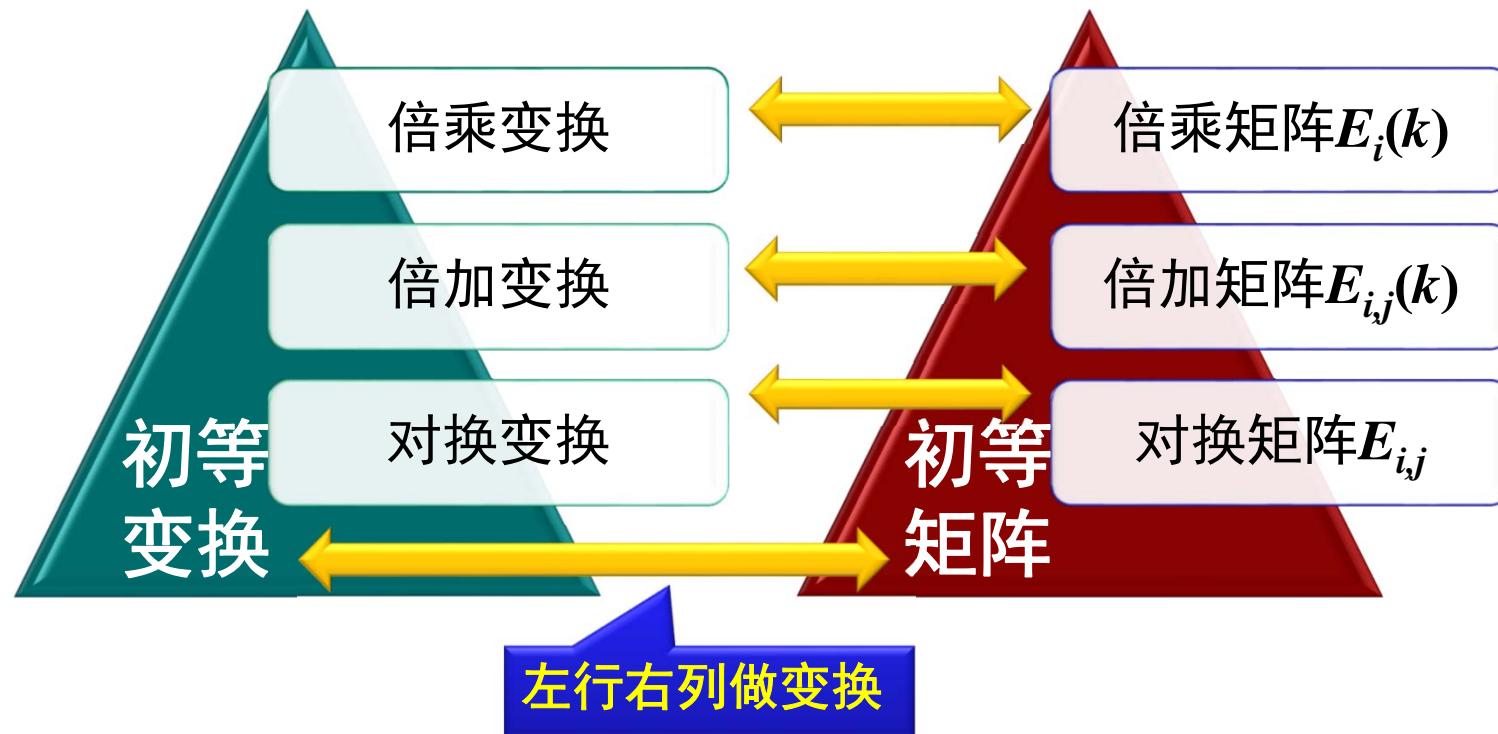
$$A \xrightarrow{r_j + kr_i} B \Leftrightarrow B = E_{i,j}(k)A; \quad A \xrightarrow{c_i + kc_j} B \Leftrightarrow B = AE_{i,j}(k).$$

左乘:从左到右做倍加.

右乘:从右到左做倍加.



定理1 用初等矩阵**左**乘矩阵 A , 相当于对 A 进行一次相应的初等**行**变换.
用初等矩阵**右**乘矩阵 A , 相当于对 A 进行一次相应的初等**列**变换.



例1 用初等矩阵与初等变换的关系，再次验证行列式的性质

验证: (1) 逐行保数乘 $A \xrightarrow{kr_i} B \Leftrightarrow B = E_i(k)A;$

$$\Rightarrow |B| = |E_i(k)| \cdot |A| = k |A|;$$

(2) 交错性 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B \Leftrightarrow B = E_{i,j}A;$

$$\Rightarrow |B| = |E_{i,j}| \cdot |A| = (-1) |A| = -|A|;$$

(3) 倍加不变性 $A \xrightarrow{r_j + kr_i} B \Leftrightarrow B = E_{i,j}(k)A;$

$$\Rightarrow |B| = |E_{i,j}(k)| \cdot |A| = 1 \cdot |A| = |A|;$$

与同伴讨论分享一下你的结果.

作答

四 分块矩阵的初等变换

对分块矩阵同样可以引进初等变换和初等矩阵的概念. 我们只以分成4块的情况简单解释. 设

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

定义2 下面三种针对分块矩阵 M 的变形, 统称为**分块矩阵的初等变换**:

- (1) **倍乘**: 用**特定**矩阵 P 左(右)乘 M 的某一“行(列)”;
- (2) **倍加**: 用矩阵 Q 乘 M 的某“行(列)” 加到另外一“行(列)”;
- (3) **对换**: 交换 M 的两“行”或“列”.

注: • 这里要假定运算满足可行性原则.
• 加引号的“行”, “列”表示由子块组成的行、列.
• 对应一般倍乘矩阵的 $k \neq 0$, 分块情形的“**特定**”为什么要求?

定义3 将单位矩阵分块成准对角形矩阵 $I = \text{diag}(I_s, I_t)$, 对其进行一次初等变换, 得到的分块矩阵称为分块初等矩阵 (block elementary matrix):

(1) 分块倍乘矩阵: $\begin{bmatrix} P & O \\ O & I_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & P \end{bmatrix}$ (其中 P 为特定方阵);

(2) 分块倍加矩阵: $\begin{bmatrix} I_s & O \\ Q & I_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_s & Q \\ O & I_t \end{bmatrix};$

(3) 分块对换矩阵: $\begin{bmatrix} O & I_t \\ I_s & O \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & I_s \\ I_t & O \end{bmatrix}.$

定理2 对分块矩阵进行一次初等行(列)变换, 相当于给它左(右)乘以一个相应的分块初等矩阵.

证明: 验证行变换

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{P}} & \underline{\underline{O}} \\ \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{PA}} & \underline{\underline{PB}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{O}} \\ \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{P}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{PC}} & \underline{\underline{PD}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{QC + A}} & \underline{\underline{QD + B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{O}} \\ \underline{\underline{Q}} & \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{QA + C}} & \underline{\underline{QB + D}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{O}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \\ \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \end{bmatrix}.$$

验证列变换：

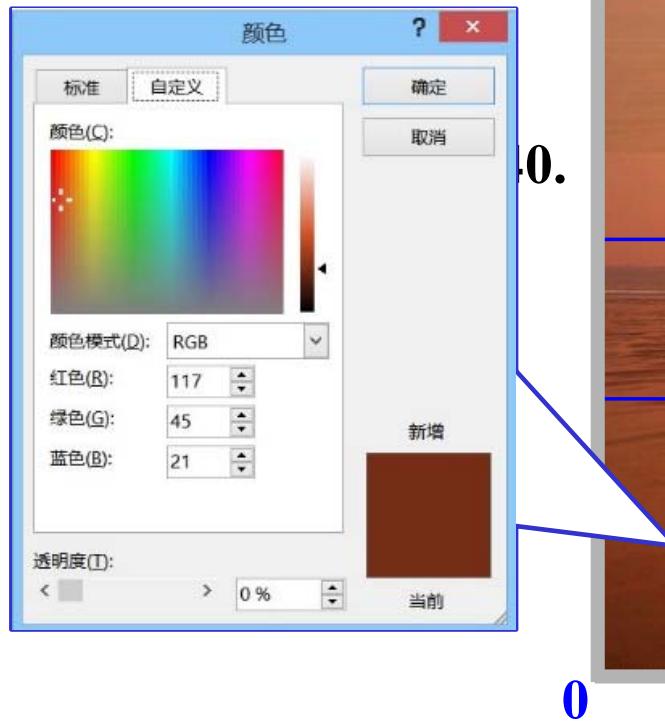
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} P & O \\ \hline O & I \end{array} \right] = \begin{bmatrix} AP & B \\ CP & D \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & P \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A & BP \\ C & DP \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline Q & I \end{array} \right] = \begin{bmatrix} BQ + A & B \\ DQ + C & D \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} I & Q \\ \hline O & I \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A & AQ + B \\ C & CQ + D \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} O & I \\ \hline I & O \end{array} \right] = \begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}.$$

五、应用1. 图像处理中的具体应用

- 设图片像素点组成一个600行800列的矩阵，记为 A .



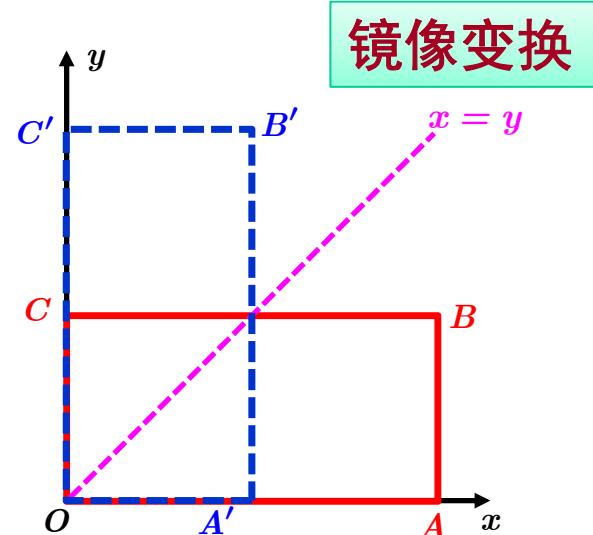
五、应用2. 图形变换中的具体应用：

\mathbb{R}^2 平面中的矩形 $OABC$ 对应矩阵

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

对换矩阵左乘作用后得

$$E_{1,2}\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



图形变换中的具体应用：

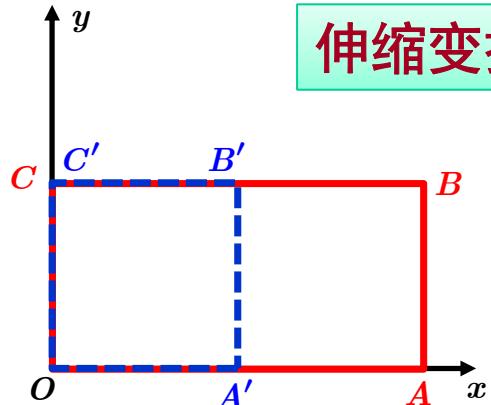
\mathbb{R}^2 平面中的矩形 $OABC$ 对应矩阵

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

倍乘矩阵左乘作用后得

$$E_1(0.5) \cdot \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

当倍乘系数换成2,
图形如何变换?



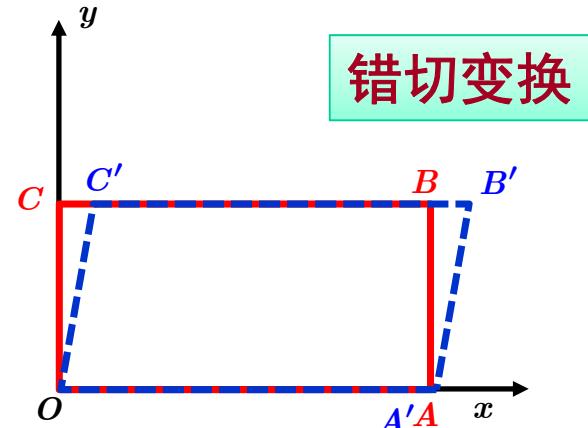
图形变换中的具体应用：

\mathbb{R}^2 平面中的矩形 $OABC$ 对应矩阵

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

倍加矩阵左乘作用后得

$$E_{2,1}(0.2)\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



应用2. 初等矩阵在图形模拟与变换中的应用:



风车叶片的转动可用初等矩阵的复合运算来实现!

3.2初等矩阵在图形模拟与变换中的应用:

数学建模(代数运算)

1. \mathbb{R}^2 单位圆上任取向量 \overrightarrow{OA}

$$2. \overrightarrow{OB} = P_1 \cdot \overrightarrow{OA}$$

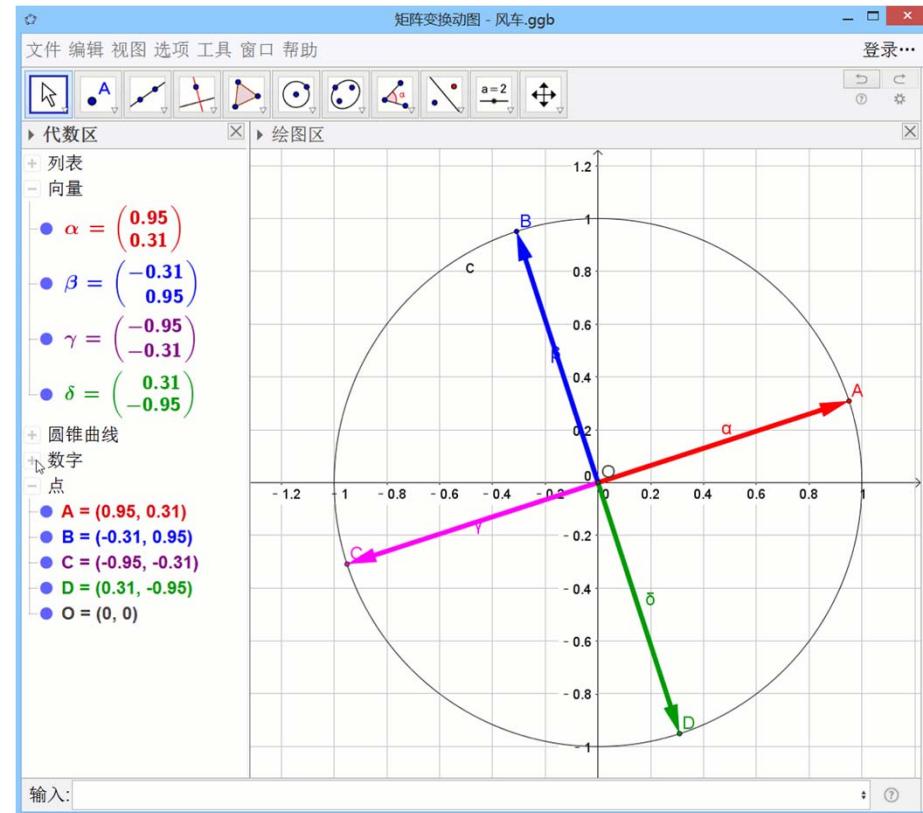
$$3. \overrightarrow{OC} = P_2 \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$4. \overrightarrow{OD} = P_3 \cdot \overrightarrow{OA}$$

5. 运算 $R \cdot \overrightarrow{OA}$, 其中 R 为初等矩阵乘积

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix}$$
$$(0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

软件实现(几何作图)



3.3 初等矩阵在机械臂控制的应用:

- 在机器人学中, **D-H (Denavit–Hartenberg)** **参数法**是控制链式机械臂关节的一种重要的数学方法.
- 通过若干4阶矩阵控制机械臂完成指定动作.
- 例如: 下述矩阵就是**3个初等矩阵(倍加)**的**乘积**:

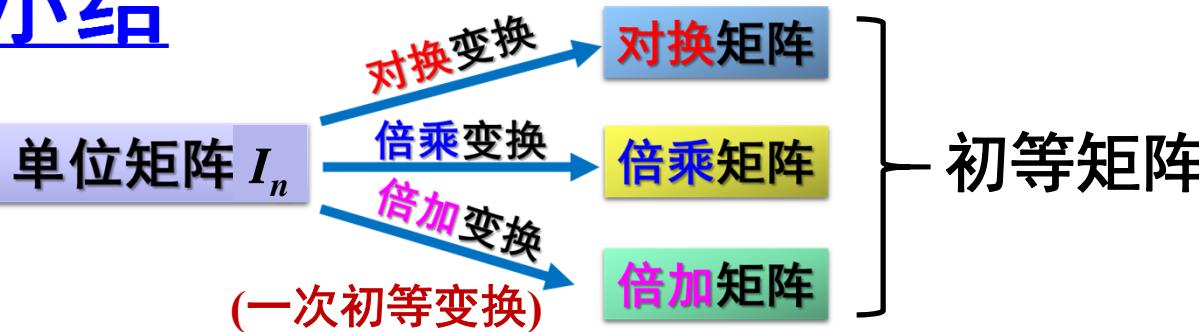
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \color{blue}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \color{red}{b} \\ 0 & 0 & 1 & \color{magenta}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \color{blue}{E_{4,1}(a)} \cdot \color{red}{E_{4,2}(b)} \cdot \color{magenta}{E_{4,3}(c)}$$



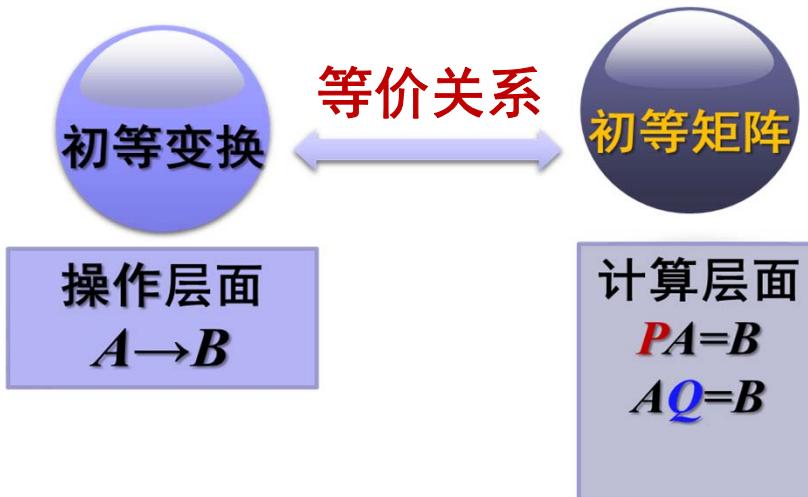
[1].Denavit, Jacques; Hartenberg, Richard Scheunemann (1955). "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices". Trans ASME J. Appl. Mech. 23: 215–221.
[2].梶田秀司.仿人机器人[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008

本讲小结

概念:



结论:



➤ 两个方面的统一

- 理论与实践的对立与统一
- 对三种初等矩阵给出统一的证明方法

➤ 一语三关的口诀

左行右列

- 初等矩阵与初等变换的关系
- 倍加矩阵的产生方式
- 倍加矩阵乘法的效果

应用:

初等矩阵在图像处理、图形变换、机械手臂控制 等实际问题中的应用

拓展提问：

3.2 初等矩阵在图形模拟与变换中的应用:

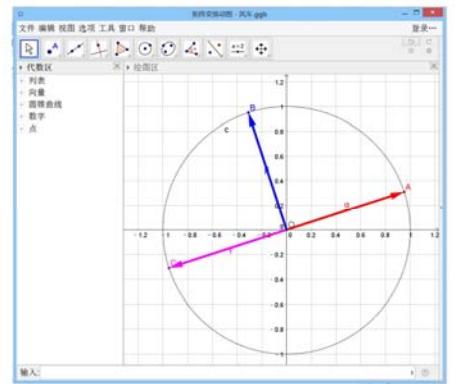
数学建模(代数运算)

1. \mathbb{R}^2 单位圆上任取向量 \overrightarrow{OA}
2. $\overrightarrow{OB} = P_1 \cdot \overrightarrow{OA}$
3. $\overrightarrow{OC} = P_2 \cdot \overrightarrow{OA}$

其中, P_2 为初等矩阵乘积

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

软件实现(几何作图)



3.3 初等矩阵在机械臂控制的应用:



• 例如: 下述矩阵就是3个初等矩阵(倍加)的乘积:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{4,1}(a) \cdot E_{4,2}(b) \cdot E_{4,3}(c)$$

若干个初等矩阵的乘积是什么数学对象?



分块倍乘矩阵

$$\begin{bmatrix} P & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

“特定”矩阵是什么要求?