《线性代数》

第六章 线性空间

§6-3 欧氏空间与正交性

2019年
秋

杨晶 主讲

本讲提要

欧氏空间 & 正交性

一、内积的引入与欧氏空间

二、标准正交基与正交矩阵

三、施密特正交化与可逆阵的QR分解

四、正交补与正交分解

五、基本子空间的正交关系

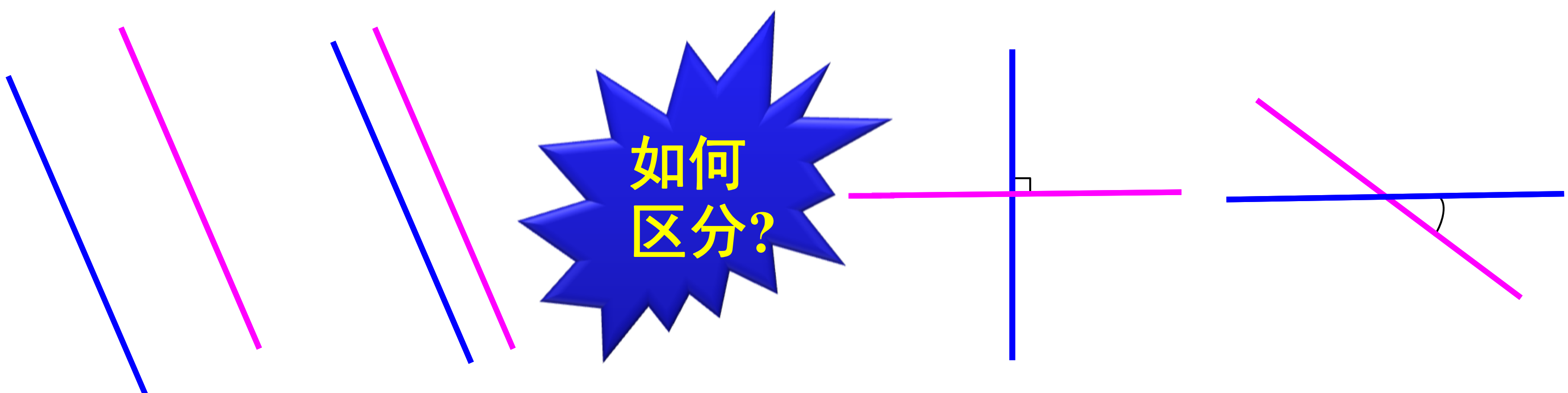
一、内积的引入与欧氏空间

{全体空间向量} $\xleftrightarrow[\text{建立坐标系}]{\cong}$ $\mathbb{R}^3=\{(x_1,x_2,x_3)|x_i\in\mathbb{R}\}$

推广 ↓ 推广 ↓

线性空间$V(F)$ $\xleftrightarrow[\text{取一组基}]{\cong}$ $F^n=\{(x_1,\cdots,x_n)|x_i\in F\}$

- 已将向量的线性相关性推广到了一般的线性空间$V(F)$中.
- 在$\mathbb{R}^2$与$\mathbb{R}^3$中, 线性相关性表示了位置关系, 如:



线性相关：平行(共线)

线性无关：相交

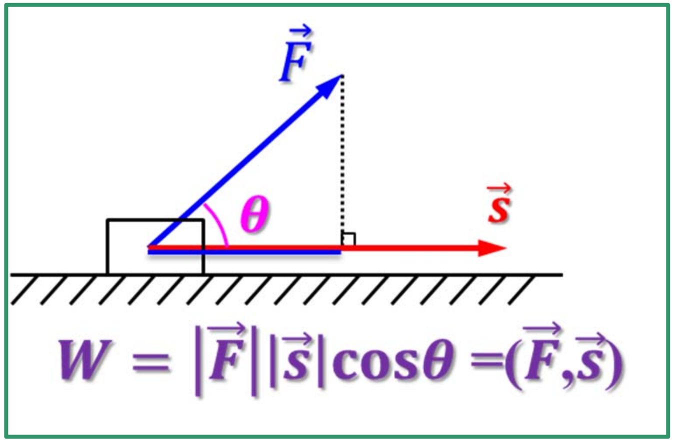
📖 几何空间$\mathbb{R}^3$回顾

- 在$\mathbb{R}^2$与$\mathbb{R}^3$中, 线性相关性无法表示几何对象的度量关系.
  - 对一个向量$\vec{\alpha}$，其度量就是它的大小(模长)，即$|\vec{\alpha}|$.
  - 对两个向量$\vec{\alpha},\vec{\beta}$，除了它们的模长之外，其度量还有$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$的夹角，即$<\vec{\alpha},\vec{\beta}>$.

- 进一步, 利用向量的模长与夹角, 可以定义向量的内积:

$$(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = |\vec{\alpha}|\left|\vec{\beta}\right|\cos<\vec{\alpha},\vec{\beta}>$$

- 你还记得向量内积具有什么样的性质吗?



多选题 1分

设置

$\mathbb{R}^3$中，向量的内积$(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$具有哪些性质？

A $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|^2\geq 0$ 且等号成立 $\Leftrightarrow \vec{\alpha}=\vec{0}$.

B $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$

C $(k\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(k\vec{\beta})=k(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$

D $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$

E $|\vec{\alpha}|=\sqrt{(\vec{\alpha},\vec{\alpha})}$

F $\cos<\vec{\alpha},\vec{\beta}>=\dfrac{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}{\sqrt{(\vec{\alpha},\vec{\alpha})(\vec{\beta},\vec{\beta})}}$

提交

n维实向量空间中的内积

- 下面我们把度量的概念推广到n维向量空间$\mathbb{R}^n$. 由于在高维空间中的几何图形很难想象，故从代数方面进行推广。首先考虑内积：

定义1. 设$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$，若$\vec{\alpha}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\vec{\beta}=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$, 则

定义 $$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) := x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

称为$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$的**标准内积**.

- 可验证: 与3维空间一样，上述定义的n维向量空间中的标准内积，也满足正定性、对称性、双线性的性质.
- 进一步，利用这些性质，可定义$V(\mathbb{R})$中更为一般的内积概念.

定义2. 设V是一个实线性空间, $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$，均唯一对应一个实数$(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$，且满足以下性质：

(1) $(\vec{\alpha},\vec{\alpha}) \geq 0$ 且等号成立 $\Leftrightarrow \vec{\alpha} = 0$. (正定性)

(2) $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha})$ (对称性)

(3) $(k\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = k(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$ (逐位保数乘)

(4) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) + (\vec{\beta}, \vec{\gamma})$ (逐位保加法)

则称$(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$为向量$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$的内积(inner product).

定义了内积的n维向量空间$V(\mathbb{R})$ 称为 欧几里德空间，简称欧氏空间 (Euclid space).

注：(a) 定义1中的标准内积, 是定义2中所给的内积的特殊情况.

(b) 内积是两个向量的运算，其运算结果为一个实数.

(c) 定义2中的性质(2),(3),(4)说明，内积满足双线性的性质.

例1. 在$\mathbb{R}^n$中，对于向量 $\vec{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$， $\vec{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$
定义

$$(\vec{\alpha},\vec{\beta}):=a_1b_1+2a_2b_2+\cdots+na_nb_n.$$

不难验证，上述定义的$(\vec{\alpha},\vec{\beta})$满足定义2中的性质(1)～(4), 故这是一个内积.

这样，$\mathbb{R}^n$对于上述内积$(\vec{\alpha},\vec{\beta})$就成为一个**欧氏空间(Euclid space)**.

注意一点：例1中定义的内积$(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ 与标准内积是$\mathbb{R}^n$中两种不同的内积，于是，$\mathbb{R}^n$对于这两种内积就构成了不同的欧氏空间.

$\mathbb{R}^n$中还可以定义很多非标准的内积. 今后如无特殊说明，我们均默认$\mathbb{R}^n$中的内积是标准内积.

例2. 设$C[0,1]$是定义在$[0,1]$上全体实连续函数构成的线性空间, 对 $f(x), g(x)\in C[0,1]$, 令

$$(f,g):=\int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

则利用定积分定义, 不难验证，上述定义的(f, g)是一个内积.

定义3 由于 $(\vec{\alpha},\vec{\alpha})\geq 0$, 在欧几里得空间中可引入向量 $\vec{\alpha}$ 的长度的概念. 向量 $\vec{\alpha}$ 的**长度(length)** $|\vec{\alpha}|$ 定义为$|\vec{\alpha}|:=\sqrt{(\vec{\alpha},\vec{\alpha})}$.

$\forall\ c\in\mathbb{R}$, 由于 $|c\vec{\alpha}|=\sqrt{(c\vec{\alpha},c\vec{\alpha})}=\sqrt{c^2(\vec{\alpha},\vec{\alpha})}=|c||\vec{\alpha}|.$

所以, 当 $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ 时 $\left|\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}\right|=\frac{1}{|\vec{\alpha}|}|\vec{\alpha}|=1$, 因此, 向量 $\vec{\beta}=\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}$

是与 $\vec{\alpha}$ 同方向长度1的向量, 叫**单位向量**.

● 要对欧氏空间中的两个向量引入夹角的概念, 与三维情形类似, 必须先证明下面著名的不等式.

定理1 (Cauchy-Schwarz不等式) 在欧氏空间中向量的内积满足:

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta})^2 \le (\vec{\alpha}, \vec{\alpha})(\vec{\beta}, \vec{\beta}) \qquad (1)$$

其中等号成立当且仅当 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 线性相关.

证明: 若 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 线性无关, 则对任意实数 x 都有 $x\vec{\alpha}+\vec{\beta} \neq \vec{0}$, 则

$$(x\vec{\alpha}+\vec{\beta}, x\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = (\vec{\alpha}, \vec{\alpha})x^2 + 2(\vec{\alpha}, \vec{\beta})x + (\vec{\beta}, \vec{\beta}) > 0,$$

将上式看成关于x的二次函数, 则其判别式<0, 即

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta})^2 < (\vec{\alpha}, \vec{\alpha})\cdot(\vec{\beta}, \vec{\beta}).$$

若$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$线性相关, 如 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$中有一个为$\vec{0}$, 则结论显然成立.

下面不妨设 $\vec{\beta} = k\vec{\alpha}$, 那么

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta})^2 = (\vec{\alpha}, k\vec{\alpha})^2 = k^2(\vec{\alpha}, \vec{\alpha})^2 = (\vec{\alpha}, \vec{\alpha})\,(k\vec{\alpha}, k\vec{\alpha}) = (\vec{\alpha}, \vec{\alpha})(\vec{\beta}, \vec{\beta}).$$

■

根据Cauchy-Schwarz不等式，对任何非零向量$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$，总有

$$-1 \le \frac{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} \le 1.$$

定义4 对欧氏空间V中任意两个向量$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, 它们的**夹角(angle)** $\theta = <\vec{\alpha}, \vec{\beta}>$ 定义为: $\cos\theta = \frac{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}, \quad (0 \le \theta \le \pi)$.

由定义4，可进一步给出一般欧氏空间$V(\mathbb{R})$中正交,平行的概念:

- 若 $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$, 则称$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$**正交(orthogonal)**或**垂直(perpendicular)**, 记作 $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.
- 若 $\left|(\vec{\alpha}, \vec{\beta})\right| = |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|$, 则称$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$**平行(parallel)**, 记作 $\vec{\alpha} \,/\!/\, \vec{\beta}$. 由上述定义可知：在$V(\mathbb{R})$中零向量$\vec{0}$与任意向量均正交、均平行.

仅仅是借用$\mathbb{R}^3$中夹角的概念, 并不一定是常规意义下的垂直.

例2 在$\mathbb{R}^4$中求与 $\vec{\alpha}=(1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}, \vec{\beta}=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}, \vec{\gamma}=(2,1,1,3)^{\mathrm{T}}$ 都正交的向量.

分析： 默认即认为是标准内积.

解 设与 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$都正交的向量为 $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$$

由Gauss消元法得：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

所以 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=k(4,0,1,-3)^{\mathrm{T}}$, 这里 k 为任意常数.

将例2一般化，即可得到齐次线性方程组的另一种几何意义.

设齐次线性方程组为
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

令$A \in M_{m\times n}$为系数矩阵，$\vec{X}$为解向量，则$\vec{X}$可以看作是$\mathbb{R}^n$中与系数矩阵A的每一个行向量都正交的向量，将向量的正交概念扩展到集合，即得

$$\mathrm{C}(A^{\mathrm{T}}) \perp \mathrm{N}(A) \quad (\Rightarrow \mathrm{C}(A) \perp \mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})).$$

(上式表示： $\forall \vec{\alpha} \in \mathrm{C}(A^{\mathrm{T}})$ 与 $\forall \vec{X} \in \mathrm{N}(A)$, 均有 $\vec{\alpha} \perp \vec{X}$.)

二、标准正交基与正交矩阵

- 在2维、3维空间中，几何学与物理学观点下，正交的两个向量的相互关联性是最小的.
- 那么, 在一般的欧式空间中, 正交性是否就意味着关联小呢?

在$V(\mathbb{R})$中，一组非零的两两正交的向量称为是一个正交向量组. 正交向量组有一个非常重要的性质.

定理2 任意正交向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 线性无关.

证明 设 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\ldots+k_s\vec{\alpha}_s=\vec{0}$, 等式两边用 $\vec{\alpha}_i$ 作内积, 得

$$(k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\ldots+k_s\vec{\alpha}_s, \vec{\alpha}_i)=0$$

$$k_1(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_i)+k_2(\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_i)+\ldots+k_s(\vec{\alpha}_s, \vec{\alpha}_i)=0.$$

由于$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$是两两正交的，有$j \neq i$时 $(\vec{\alpha}_j, \vec{\alpha}_i)=0$. 代入上式得:

$$k_i(\vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_i) = 0,$$

又因 $\vec{\alpha}_i \neq \vec{0}$, 有 $(\vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_i) > 0$, 从而只有 $k_i = 0$.

以上讨论对$i = 1, 2, \ldots, s$均成立，所以$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$线性无关. ■

推论 在 n 维欧氏空间$V(\mathbb{R})$中，任意正交向量组的向量个数不会超过n.

证明： 因为在$V(\mathbb{R})$中，线性无关的向量至多只有n个, 因而两两正交的非零向量组所含的向量个数不会超过 n. ■

特别地，当正交向量组所含的向量个数等于n时，此向量组就构成$V(\mathbb{R})$的一组基，且是两两正交的, 这样的一组向量就是$\mathbb{R}^2$与$\mathbb{R}^3$中的直角坐标系在n维欧氏空间$V(\mathbb{R})$中的推广. 下面我们将详细讨论这样的基.

标准正交基的概念

定义5 在 n 维欧氏空间 $V(\mathbb{R})$ 中，由 n 个两两正交的非零向量构成的向量组称为**正交基**(orthogonal bases)，由单位向量组成的正交基称为**标准正交基**(orthonormal bases), 或**单位正交基**.

注1. 对一组正交基进行单位化就可得到一组标准正交基.

注2. 由定义, $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n \in V(\mathbb{R})$ 是标准正交基的充分必要条件是:

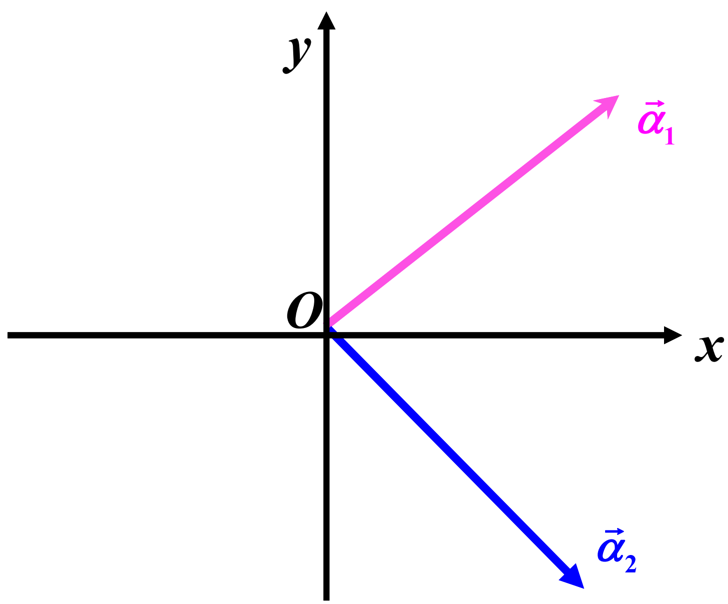
$$(\vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \underline{i = j,} \\ 0, & \underline{i \neq j,} \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n.)$$

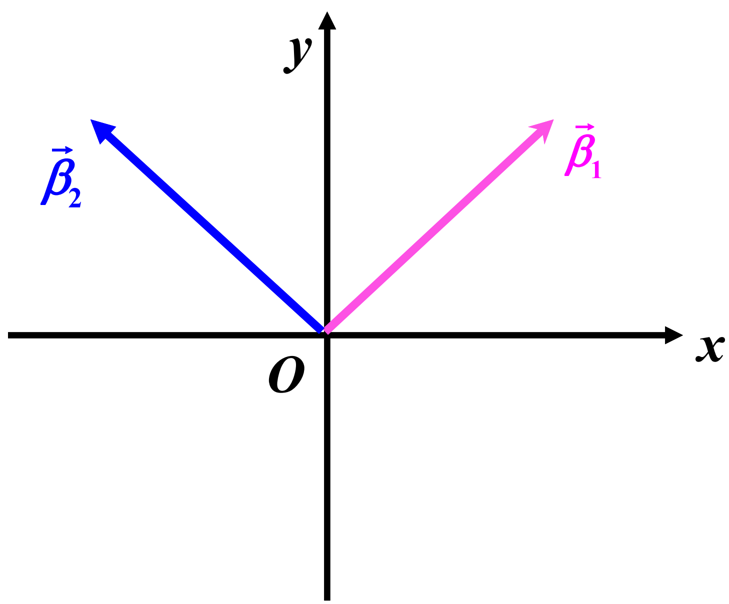
问题: $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n \in V(\mathbb{R})$是正交基的条件是什么?

例3 (1). $\mathbb{R}^n$的自然基$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$为一组标准正交基.

(2). 下列两组基都是$\mathbb{R}^2$的标准正交基:

$$\vec{\alpha}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}; \qquad \vec{\beta}_1 = \begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}, \vec{\beta}_2 = \begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}.$$





例4 设$\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$是$V(\mathbb{R})$的一组标准正交基, $\vec{\alpha}\in V(\mathbb{R})$, 求向量$\vec{\alpha}$在这组标准正交基下的坐标(向量): $\vec{X}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

解 设$\vec{\alpha}=x_1\vec{\varepsilon}_1+x_2\vec{\varepsilon}_2+\ldots+x_n\vec{\varepsilon}_n$, 等式两边同用$\vec{\varepsilon}_j$作内积, 并且利用标准正交基的充要条件$(\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j)=\delta_{ij}$, 就有

$$
\begin{aligned}
(\vec{\alpha}, \vec{\varepsilon}_j) &= (x_1\vec{\varepsilon}_1+x_2\vec{\varepsilon}_2+\ldots+x_n\vec{\varepsilon}_n, \ \vec{\varepsilon}_j) \\
&= x_j(\vec{\varepsilon}_j, \vec{\varepsilon}_j) = x_j,
\end{aligned}
$$

故, $\vec{\alpha}$在这组基下的坐标向量$\vec{X}$的第 j 个分量为 $x_j = (\vec{\alpha}, \vec{\varepsilon}_j)$, $j=1,2,\ldots,n$.

注： 例4说明，求一个向量$\vec{\alpha}$在标准正交基下的各个坐标，只需要分别去计算该向量与每个基向量的内积即可，计算很简便. 然而，对于一般的基，x_i的计算就比较复杂.

例5. 在n维欧氏空间$V(\mathbb{R})$中，对于给定的任意内积运算

$\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$，令$\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\ldots,\vec{\varepsilon}_n$是一组标准正交基，并且

$$\vec{\alpha}=x_1\vec{\varepsilon}_1+x_2\vec{\varepsilon}_2+\ldots+x_n\vec{\varepsilon}_n=(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\ldots,\vec{\varepsilon}_n)\vec{X},$$

$$\vec{\beta}=y_1\vec{\varepsilon}_1+y_2\vec{\varepsilon}_2+\ldots+y_n\vec{\varepsilon}_n=(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\ldots,\vec{\varepsilon}_n)\vec{Y}.$$

于是，有

$$(\vec{\alpha},\vec{\beta})=(\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{\varepsilon}_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\vec{\varepsilon}_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j(\vec{\varepsilon}_i,\vec{\varepsilon}_j)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\vec{X}^T\vec{Y}.$$

$V(\mathbb{R})$中一般内积

$\mathbb{R}^n$中标准内积

问题: 若例5中选取的不是V的标准正交基, 如何用坐标向量$\vec{X},\vec{Y}$计算内积$\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$? ——度量矩阵.

这说明, 标准正交基可以将$V(\mathbb{R})$中一般内积的计算, 转化为$\mathbb{R}^n$中的标准内积的计算，从而起到简化计算的作用.

正交矩阵及其性质

- 从矩阵的角度来看, 令$V=\mathbb{R}^n$, 并在标准内积下, 对任意一组标准正交基$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_n$，将其按列向量排列起来，得$n$阶方阵$Q=(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_n)$, 则

$$Q^TQ=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1,\cdots,\alpha_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\alpha_i,\alpha_j)\end{bmatrix}_{1\le i,j\le n}=\begin{bmatrix}\delta_{ij}\end{bmatrix}_{1\le i,j\le n}=I_n.$$

- 反之， 若n阶方阵Q满足, $Q^{\mathrm{T}}Q=I$, 将Q按列分块表示为$Q=(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_n)$, 则

$$Q^TQ=\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1^T\\ \vdots\\ \vec{\alpha}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_i^T\vec{\alpha}_j\end{bmatrix}_{1\le i,j\le n}=I_n \quad\Rightarrow\quad \vec{\alpha}_i^T\vec{\alpha}_j=\delta_{ij}$$

$\Rightarrow$ 向量组$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2,\ldots, \vec{\alpha}_n$是标准正交基.

定义6 设Q是n阶**实**方阵, 满足 $\underline{Q^{\mathrm{T}}Q = I_n}$, 则称 Q 是正交矩阵, 简称为**正交阵** **(orthogonal matrix)**.

定理3 正交矩阵具有下列性质:

(1) Q 为正交阵 $\Leftrightarrow$ Q的行(列)向量组构成$\mathbb{R}^n$的标准正交基.

(2) Q 为正交阵 $\Rightarrow |Q| = +1$或-1.

(3) 正交阵Q可逆，且$Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$仍为正交矩阵.

(4) Q 为正交阵 $\Leftrightarrow$ Q可逆，且$Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$

(5) 正交阵的乘积仍是正交矩阵.

(上述性质均可由正交阵的定义直接验证, 留作课后习题.)

三、Schmidt-正交化与可逆阵的QR分解

问题1: 对欧氏空间$V(\mathbb{R})$, 标准正交基是否存在？是否唯一？

问题2: 若标准正交基存在，是否有方法确定出一组标准正交基？

分析: 在第四章中，我们证明过极大线性无关组的存在性定理。从而, 欧氏空间及其子空间的基总是存在的. 这就启发我们想办法，把欧氏空间及其子空间的一组基改造成为标准正交基.

下面，我们研究如何把n维欧氏空间V中一组线性无关的非零向量组$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ $(s \le n)$ 改造成单位正交的向量组$\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \ldots, \vec{\gamma}_s$; 并且，为了能使用归纳的方法，我们还要求$\vec{\gamma}_i$ 是前 i 个向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_i$ $(i=1, 2,\ldots, n)$的线性组合.

- 先以两个线性无关的非零向量$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$为例，我们首先来求一个正交向量组 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$，使得 $\vec{\beta}_1$ 是 $\vec{\alpha}_1$ 的线性组合，而$\vec{\beta}_2$ 是 $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$ 的线性组合.

设 $\vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}_1, \vec{\beta}_2 = \vec{\alpha}_2 + k\vec{\beta}_1$，其中$k$为待定系数.根据 $\vec{\beta}_2 \perp \vec{\beta}_1$，应有

$$(\vec{\beta}_2, \vec{\beta}_1) = (\vec{\alpha}_2 + k\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_1) = (\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_1) + k(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_1) = 0,$$

由于 $\vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}_1 \neq \vec{0}$，知 $(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_1) \neq 0$，从而解出 $k = -\dfrac{(\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_1)}$.

再单位化，令 $\vec{\gamma}_1 = \dfrac{1}{|\vec{\beta}_1|}\vec{\beta}_1, \vec{\gamma}_2 = \dfrac{1}{|\vec{\beta}_2|}\vec{\beta}_2$.

那么 $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ 就是合乎要求的单位正交向量组.

● 再考虑三个线性无关的非零向量$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$，同上法构造出$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$后，可设

$$\vec{\beta}_3 = \vec{\alpha}_3 + l\vec{\beta}_1 + m\vec{\beta}_2,$$

其中，l与m为待定系数. 由$\vec{\beta}_i$两两正交，得

$$(\vec{\beta}_3, \vec{\beta}_1) = (\vec{\alpha}_3, \vec{\beta}_1) + l(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_1) = 0, \quad (\vec{\beta}_3, \vec{\beta}_2) = (\vec{\alpha}_3, \vec{\beta}_2) + m(\vec{\beta}_2, \vec{\beta}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\vec{\beta}_3 = \vec{\alpha}_3 - \frac{(\vec{\alpha}_3, \vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_1)}\vec{\beta}_1 - \frac{(\vec{\alpha}_3, \vec{\beta}_2)}{(\vec{\beta}_2, \vec{\beta}_2)}\vec{\beta}_2}$$

再单位化，令 $\vec{\gamma}_1 = \frac{1}{|\vec{\beta}_1|}\vec{\beta}_1, \vec{\gamma}_2 = \frac{1}{|\vec{\beta}_2|}\vec{\beta}_2, \vec{\gamma}_3 = \frac{1}{|\vec{\beta}_3|}\vec{\beta}_3.$

于是$\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3$就是合乎要求的单位正交向量组.

归纳地，可证明给出如下结论，称为Schmidt正交化方法.

定理4 n 维欧氏空间$V(\mathbb{R})$中, 任意$s\le n$个线性无关的向量$\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$, …, $\vec{\alpha}_s$, 均可转化成一个正交向量组$\vec{\beta}_1$, $\vec{\beta}_2$,…, $\vec{\beta}_s$, 其中

$$\vec{\beta}_1=\vec{\alpha}_1,\quad \vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_2-\frac{(\vec{\alpha}_2,\vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1)}\vec{\beta}_1,\quad \vec{\beta}_3=\vec{\alpha}_3-\frac{(\vec{\alpha}_3,\vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1)}\vec{\beta}_1-\frac{(\vec{\alpha}_3,\vec{\beta}_2)}{(\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_2)}\vec{\beta}_2,$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$\vec{\beta}_s=\vec{\alpha}_s-\frac{(\vec{\alpha}_s,\vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1)}\vec{\beta}_1-\frac{(\vec{\alpha}_s,\vec{\beta}_2)}{(\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_2)}\vec{\beta}_2-\cdots-\frac{(\vec{\alpha}_s,\vec{\beta}_{s-1})}{(\vec{\beta}_{s-1},\vec{\beta}_{s-1})}\vec{\beta}_{s-1}.$$

而且$\boxed{\mathrm{L}(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_i)=\mathrm{L}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2,\ldots, \vec{\beta}_i),\ i=1,2,\ldots,s,}$ 进而通过把$\vec{\beta}_1$, $\vec{\beta}_2$,…, $\vec{\beta}_s$单位化可得标准正交向量组 $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$, …, $\vec{\gamma}_s$.

● 为更清楚理解Schmidt正交化方法，我们把关键的正交化过程的公式，及每一步的逻辑关系图表示出来：

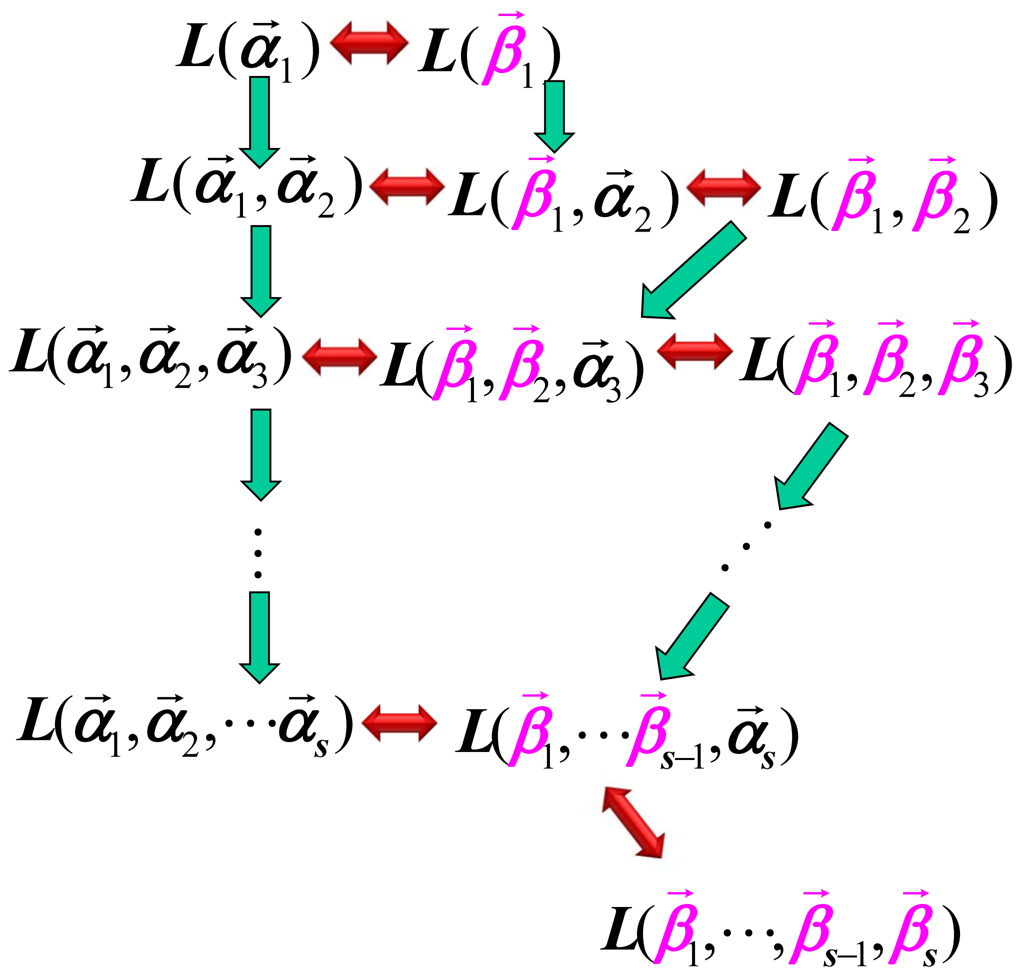
$$\vec{\beta}_1=\vec{\alpha}_1,$$

$$\vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_2-\frac{(\vec{\alpha}_2,\vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1)}\vec{\beta}_1,$$

$$\vec{\beta}_3=\vec{\alpha}_3-\frac{(\vec{\alpha}_3,\vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1)}\vec{\beta}_1-\frac{(\vec{\alpha}_3,\vec{\beta}_2)}{(\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_2)}\vec{\beta}_2,$$

$$\vdots$$

$$\vec{\beta}_s=\vec{\alpha}_s-\frac{(\vec{\alpha}_s,\vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1)}\vec{\beta}_1-\frac{(\vec{\alpha}_s,\vec{\beta}_2)}{(\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_2)}\vec{\beta}_2-\cdots-\frac{(\vec{\alpha}_s,\vec{\beta}_{s-1})}{(\vec{\beta}_{s-1},\vec{\beta}_{s-1})}\vec{\beta}_{s-1}.$$



注: (1) Schmidt正交化方法包含两个过程：正交化+单位化，其中正交化的过程是关键.

(2) Schmidt正交化方法与欧氏空间中内积选取的定义无关.

(3) 正交化的过程是一个归纳地计算过程，并且$\vec{\beta}_i$的计算量随着i 的增加而增加.

(4) 从几何上看，计算公式中 $\dfrac{(\vec{\alpha}_i,\vec{\beta}_j)}{(\vec{\beta}_j,\vec{\beta}_j)}\vec{\beta}_j$ 表示$\vec{\alpha}_i$往$\vec{\beta}_j$方向的正交投影向量，我们将在后文具体讨论一个向量的正交分解问题.

(5) n维欧氏空间中任意 s 维子空间均存在标准正交基, 且在给定$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$的顺序的情况下，由Schmidt正交化方法得到的标准正交基是唯一的.特别地当$s = n$时，n维欧氏空间中必存在标准正交基.

(6) 由Schmidt正交化方法可得到标准正交基扩充定理.

例6 把 $\mathbb{R}^3$ 的基 $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix},\vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}$化成一组标准正交基.

解 先正交化 $\vec{\beta}_1=\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_2-\dfrac{(\vec{\alpha}_2,\vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1)}\vec{\beta}_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}+\dfrac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix},$

$$\vec{\beta}_3=\vec{\alpha}_3-\frac{(\vec{\alpha}_3,\vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1)}\vec{\beta}_1-\frac{(\vec{\alpha}_3,\vec{\beta}_2)}{(\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_2)}\vec{\beta}_2=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}-\frac{4}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}.$$

再单位化，得: $\vec{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\vec{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix},\vec{\gamma}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$

矩阵观点下的Schmidt正交化: 可逆矩阵的QR分解.

设$A=(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n)$ 是一个n阶可逆矩阵，则 A 的列向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ 构成欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 的一组基，利用施密特正交化方法可得标准正交基 $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \ldots, \vec{\gamma}_n$. 过程如下:

$$\vec{\alpha}_1=\vec{\beta}_1, \vec{\alpha}_2=\frac{(\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_1)}\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2,$$

$$\vec{\alpha}_3=\frac{(\vec{\alpha}_3, \vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_1)}\vec{\beta}_1+\frac{(\vec{\alpha}_3, \vec{\beta}_2)}{(\vec{\beta}_2, \vec{\beta}_2)}\vec{\beta}_2+\vec{\beta}_3, \qquad \cdots\cdots,$$

$$\vec{\alpha}_n=\frac{(\vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_1)}\vec{\beta}_1+\frac{(\vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_2)}{(\vec{\beta}_2, \vec{\beta}_2)}\vec{\beta}_2+\cdots+\frac{(\vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_{n-1})}{(\vec{\beta}_{n-1}, \vec{\beta}_{n-1})}\vec{\beta}_{n-1}+\vec{\beta}_n,$$

$$(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_n)=(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_n)\begin{bmatrix} 1 & & * & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{\gamma}_1=\frac{1}{\left|\vec{\beta}_1\right|}\vec{\beta}_1,\vec{\gamma}_2=\frac{1}{\left|\vec{\beta}_2\right|}\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\gamma}_n=\frac{1}{\left|\vec{\beta}_n\right|}\vec{\beta}_n,$$

$$(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_n)=(\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\cdots,\vec{\gamma}_n)\begin{bmatrix}\left|\vec{\beta}_1\right| & & & \\ & \left|\vec{\beta}_2\right| & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left|\vec{\beta}_n\right|\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=(\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\vec{\boldsymbol{\alpha}}_n)=(\vec{\boldsymbol{\gamma}}_1,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_2,\cdots,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_n)\begin{bmatrix}\left|\vec{\boldsymbol{\beta}}_1\right| & & & \\ & \left|\vec{\boldsymbol{\beta}}_2\right| & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left|\vec{\boldsymbol{\beta}}_n\right|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}$$

$$=(\vec{\boldsymbol{\gamma}}_1,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_2,\cdots,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_n)\begin{bmatrix}\left|\vec{\boldsymbol{\beta}}_1\right| & *\cdots & * \\ & & \vdots \\ & \ddots & * \\ 0 & & \left|\vec{\boldsymbol{\beta}}_n\right|\end{bmatrix}=\boldsymbol{QR},$$

$Q=(\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\cdots,\vec{\gamma}_n)$ 是正交矩阵,

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \end{bmatrix}$$ 是主对角元素为正数的上三角阵.

定理5 对任意 n 阶可逆实矩阵 A, 存在一个 n 阶正交矩阵 Q 及一个 n 阶主对角元素为正数的上三角阵 R, 使 $A=QR$, 称为可逆矩阵 A 的**QR分解**. 这种分解是唯一的.

证明：只证唯一性. 设 $A=Q_1R_1=Q_2R_2$, 则

$$Q_1^{-1}Q_2=R_1R_2^{-1}$$

上式左边为正交阵，右边为主对角线上元素为正数的上三角阵，则只能为单位阵(为什么？). 从而

$$Q_1=Q_2;\quad R_1=R_2.$$

■

四、正交补与正交分解

下将向量与向量之间的正交关系, 推广到向量与子空间, 以及子空间与子空间之间的正交关系, 得:

定义7 设W, W_1, W_2是欧氏空间$V(\mathbb{R})$中的子空间, 向量$\vec{\alpha}\in V$, 则

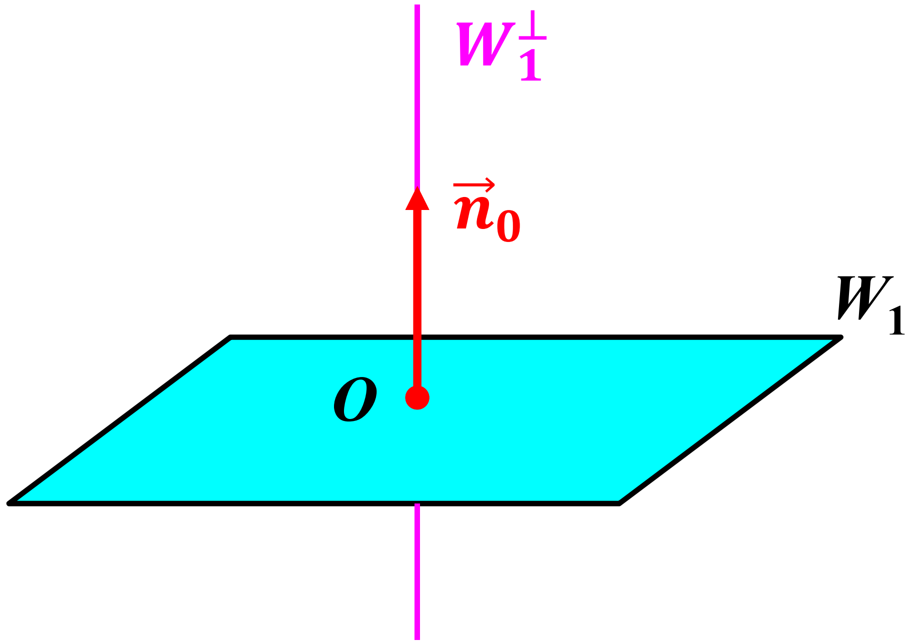
(i) 若$\forall\vec{\beta}\in W$, 均有$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, 则称$\vec{\alpha}$与$W$正交, 记为$\vec{\alpha}\perp W$.

(ii) 若$\forall\vec{\beta}\in W_1$, $\forall\vec{\gamma}\in W_2$, 均有$\vec{\beta}\perp\vec{\gamma}$, 则称$W_1$与$W_2$正交, 记为$W_1\perp W_2$.

(iii) $W^{\perp}:=\{\vec{\beta}\in\mathbb{R}^n \mid \vec{\beta}\perp W\}$ 称为W在$V(\mathbb{R})$中的正交补 (orthocomplement).

注: $W^{\perp}$恰好由所有与W正交的向量组成.

例7 设 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \in \mathbb{R}^3$为线性无关的两个向量, 设$W_1 = L(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)$, 则 W_1为$\mathbb{R}^3$ 中过原点的一张平面. 于是, W_1 的正交补空间$W_1^{\perp}$, 即为过原点且与 W_1 垂直的直线. 沿直线$W_1^{\perp}$方向取单位向量$\vec{n}_0$, 即为平面W_1的单位法向量.



下面结论告诉我们, 在欧氏空间里, 如何将向量正交投影到给定的子空间中.

定理6 (正交分解) 设W是欧氏空间V中的一个子空间, 则V中任一向量$\vec{\alpha}$可唯一地分解为:

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}, \text{ s.t. } \vec{\beta} \in W \text{ 且 } \vec{\gamma} \in W^{\perp}. \qquad (1)$$

更进一步, 若$\{\vec{\eta}_1, \dots, \vec{\eta}_p\}$是$W$的一组正交基, 那么上述分解中的

$$\vec{\beta} = \boxed{\frac{(\vec{\alpha}, \vec{\eta}_1)}{(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_1)} \vec{\eta}_1} + \cdots + \boxed{\frac{(\vec{\alpha}, \vec{\eta}_p)}{(\vec{\eta}_p, \vec{\eta}_p)} \vec{\eta}_p}. \qquad (2)$$

定义8 上述定理分解式中的$\vec{\beta}$称为$\vec{\alpha}$在W上的**正交投影向量**, 记为$(\vec{\alpha})_W$.

注: 定理6表明, 当W有正交基时, 要计算正交投影向量$(\vec{\alpha})_W$, 只需将$\vec{\alpha}$分别正交投影到各个(正交)基向量上, 再相加即可.

(证明留作习题)

证明 首先, 由施密特正交化方法知, 子空间W必有正交基.

其次, 为证分解的存在性, 只需验证(2)式给出的$\vec{\beta}$符合分解式(1)的要求. 由(2)知, $\vec{\beta}$为W的正交基$\{\vec{\eta}_1, \dots, \vec{\eta}_p\}$ 的线性组合, 故$\vec{\beta} \in W$.

令$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, 于是两边同时用$\vec{\eta}_1$作用内积, 得

$$
\begin{aligned}
(\vec{\gamma}, \vec{\eta}_1) &= \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\eta}_1\right) \\
&= (\vec{\alpha}, \vec{\eta}_1) - \frac{(\vec{\alpha}, \vec{\eta}_1)}{(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_1)}(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_1) - 0 \cdots - 0 \\
&= (\vec{\alpha}, \vec{\eta}_1) - (\vec{\alpha}, \vec{\eta}_1) = 0.
\end{aligned}
$$

从而, $\vec{\gamma} \perp \vec{\eta}_1$. 类似地, $\vec{\gamma}$与每个基向量$\vec{\eta}_i$均正交, 因此$\vec{\gamma}$与W中任何向量正交, 即$\vec{\gamma} \in W^{\perp}$.

最后, 证明唯一性. 设$\vec{\alpha}=\vec{\beta}_1+\vec{\gamma}_1$ ($\vec{\beta}_1\in W$ 且 $\vec{\gamma}_1\in W^{\perp}$) 为另一个满足条件的分解式. 则

$$\vec{\alpha}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}_1+\vec{\gamma}_1 \Rightarrow \underline{\vec{\beta}-\vec{\beta}_1}=\underline{\vec{\gamma}-\vec{\gamma}_1}:=\vec{v}.$$

上式说明$\vec{v}$既属于W, 也属于$W^{\perp}$. 因此

$$(\vec{v},\vec{v})=0 \Rightarrow \vec{v}=\vec{0},$$

$$\Rightarrow \vec{\beta}=\vec{\beta}_1 \text{ 且 } \vec{\gamma}=\vec{\gamma}_1.$$

从而证明了唯一性. 于是我们完成了定理2的证明. ■

注: 定理5中分解的唯一性表明, 正交投影向量$\vec{\beta}=(\vec{\alpha})_W$仅依赖于$\vec{\alpha}$与$W$, 而不依赖于$W$中正交基的选取.

几何观点下的施密特正交化方法: 正交投影

之前, 我们是用代数的方法递归地给出施密特正交化的公式. 假设前i个相互正交的向量组$\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2,\ldots, \vec{\beta}_i$已经取好, 且

$$\mathrm{L}(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_i) = \mathrm{L}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2,\ldots, \vec{\beta}_i) := W,$$

则$\vec{\beta}_{i+1}$的计算公式如下:

$-(\vec{\alpha}_{i+1})_W$

$$\vec{\beta}_{i+1} = \vec{\alpha}_{i+1} \boxed{- \frac{(\vec{\alpha}_{i+1}, \vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_1)}\vec{\beta}_1 - \frac{(\vec{\alpha}_{i+1}, \vec{\beta}_2)}{(\vec{\beta}_2, \vec{\beta}_2)}\vec{\beta}_2 - \cdots - \frac{(\vec{\alpha}_{i+1}, \vec{\beta}_i)}{(\vec{\beta}_i, \vec{\beta}_i)}\vec{\beta}_i}.$$

用几何观点来看, 实际上上述公式可表示为: $\vec{\beta}_{i+1} = \vec{\alpha}_{i+1} - (\vec{\alpha}_{i+1})_W$.

根据正交分解定理, 有$\vec{\beta}_{i+1} \in W^{\perp}$且唯一决定, 从而$\vec{\beta}_{i+1}$为第$i+1$个满足正交条件的向量. 并且, 由于每一个$\vec{\beta}_i$均是唯一的, 故若给定原向量组$\{\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_s\}$的次序, 则用施密特正交化方法所得的单位正交向量组是唯一的.

定理7 设W是n维欧式空间V的子空间，则$W^{\perp}$也是V的子空间；且 $W \oplus W^{\perp}=V$, 从而 $\dim W^{\perp}=n-\dim W$.

证明: 易验证$W^{\perp}$对于加法和数乘是封闭的, 故构成子空间.

下设 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_m$ 是 W 的标准正交基，扩充为 V 的标准正交基 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_m,\vec{\alpha}_{m+1},\cdots,\vec{\alpha}_n$，则 $V=W\oplus L(\vec{\alpha}_{m+1},\cdots,\vec{\alpha}_n)$.

先证 $L(\vec{\alpha}_{m+1},\cdots,\vec{\alpha}_n)$ 中任一个向量与 W 正交.

$\because \forall \vec{\beta}\in W$，有$\vec{\beta}=\sum_{i=1}^{m}k_i\vec{\alpha}_i$. $\forall \vec{\gamma}\in L(\vec{\alpha}_{m+1},\cdots,\vec{\alpha}_n)$，有$\vec{\gamma}=\sum_{j=m+1}^{n}\mu_j\vec{\alpha}_j$.

$$\therefore (\vec{\gamma},\vec{\beta})=\sum_{i=1}^{m}k_i\sum_{j=m+1}^{n}\mu_j(\vec{\alpha}_i,\vec{\alpha}_j)=0, \therefore L(\vec{\alpha}_{m+1},\cdots,\vec{\alpha}_n)\subseteq W^{\perp}.$$

再证所有与W正交的向量都属于 $L(\vec{\alpha}_{m+1},\cdots,\vec{\alpha}_n)$,

即 $W^{\perp}\subseteq L(\vec{\alpha}_{m+1},\cdots,\vec{\alpha}_n)$.

$\forall \vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\alpha}_i \in V$，若 $\vec{\alpha} \perp W$，则 $(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}_j) = 0, 1 \le j \le m.$

$$\therefore x_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \right) = (\vec{\alpha}, \vec{\alpha}_j) = 0, 1 \le j \le m.$$

$$\therefore \vec{\alpha} = \sum_{i=m+1}^{n} x_i \vec{\alpha}_i \in L(\vec{\alpha}_{m+1}, \cdots, \vec{\alpha}_n).$$

$$\therefore W^{\perp} \subseteq L(\vec{\alpha}_{m+1}, \cdots, \vec{\alpha}_n).$$

$$\therefore V = W \oplus L(\vec{\alpha}_{m+1}, \cdots, \vec{\alpha}_n) = W \oplus W^{\perp}.$$ ■

例8 试证 $(W^{\perp})^{\perp} = W.$

证明 由定义, 有 $(W^{\perp})^{\perp} = \{\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{\alpha} \perp W^{\perp}\}$, 则易知, $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}.$

又由定理7有 $\dim(W^{\perp})^{\perp} = n - (n - \dim W) = \dim W.$

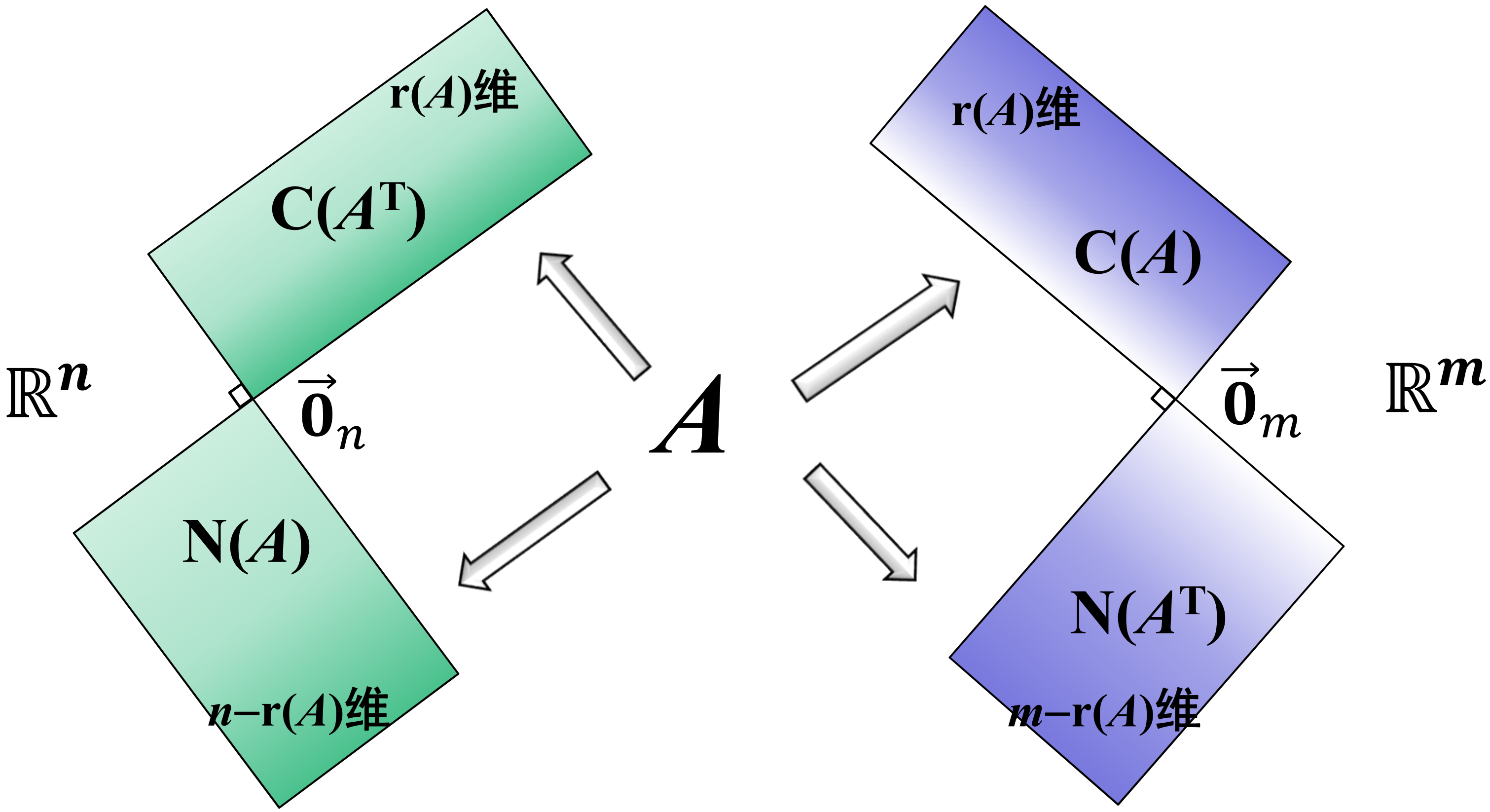
从而有 $(W^{\perp})^{\perp} = W.$ ■

五、基本子空间的正交关系

结论. 设A为$m\times n$型实矩阵, 则

(i) $C(A^T)=N(A)^{\perp}$, $C(A^T)\oplus N(A)=\mathbb{R}^n$;

(ii) $C(A)^{\perp}=N(A^T)$, $C(A)\oplus N(A^T)=\mathbb{R}^m$.



问题: 若已知实矩阵$A_{m\times n}$.

(1) 给定$\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, 求$\vec{v}_{\text{row}}=\vec{v}_r\in C(A^T)$, $\vec{v}_{\text{null}}=\vec{v}_n\in N(A)$,

$$\text{s.t.}\quad \vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_n.$$

(2) 给定$\vec{u}\in\mathbb{R}^m$, 求$\vec{u}_{\text{col}}=\vec{u}_c\in C(A)$, $\vec{v}_{ln}\in N(A^T)$,

$$\text{s.t.}\quad \vec{u}=\vec{u}_c+\vec{u}_{ln}.$$

分析: **(1)** 为求出$\vec{v}_r$, $\vec{v}_n$, 两边左乘A, 得

$$C(A)\ni A\vec{v}=A\vec{v}_r+A\vec{v}_n=A\vec{v}_r+\vec{0}=A\vec{v}_r.$$

即转化为问题: 若$A\vec{x}=\vec{b}$有解, 求$A\vec{x}=\vec{b}$在$C(A^T)$中的解.

存在性: $A\vec{x}=\vec{b}$有解 $\Leftrightarrow \vec{b}\in C(A) \Leftrightarrow \vec{b}\in C(AA^T)$

$\Leftrightarrow AA^T\vec{x}=\vec{b}$有解 $\Leftrightarrow \exists\vec{y}=A^T\vec{u}$, 使得$A\vec{y}=\vec{b}$.

$\Leftrightarrow A\vec{x}=\vec{b}$在$C(A^T)$中有解.

唯一性: 设$\vec{\alpha},\vec{\beta}\in C(A^T)$, 使得$A\vec{\alpha}=\vec{b}$, $A\vec{\beta}=\vec{b}$. 则$A(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\vec{b}$, 从而, $\vec{\alpha}-\vec{\beta}\in N(A)$, 于是$\vec{\alpha}-\vec{\beta}\in N(A)\cap C(A^T)=\{\vec{0}\}$,故$\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

定理8. 若$A\vec{x}=\vec{b}$有解, 则$A\vec{x}=\vec{b}$在$C(A^T)$中的有唯一解.
(同理有, 若$A^T\vec{y}=\vec{b}'$有解, 则$A^T\vec{y}=\vec{b}'$在$C(A)$中的有唯一解.)

对照我们的问题, $\vec{b}=A\vec{v}$, 即$\vec{v}$是$A\vec{x}=\vec{b}$的某个解, 则$A\vec{x}=\vec{b}$在$C(A^T)$中的唯一解, 就是$\vec{v}$对$C(A^T)$的正交投影向量$\vec{v}_r$. 而$A\vec{x}=\vec{b}$的全部解为: $\vec{v}_r+N(A)$, 其中$\vec{v}_r\perp N(A)$.

设$\vec{v}_r=A^T\vec{u}$, 则有 $AA^T\vec{u}=\vec{b}=A\vec{v}$, 于是, 可先求解$AA^T\vec{u}=A\vec{v}$, 解出$\vec{u}$后, 可算出$\vec{v}_r=A^T\vec{u}$. ($\vec{u}$可能不唯一, 但由定理8, $A^T\vec{u}$是唯一的).

例如: 若$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, 易知$C(A)=C(A^T)=\{c\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}|c\in\mathbb{R}\}$.

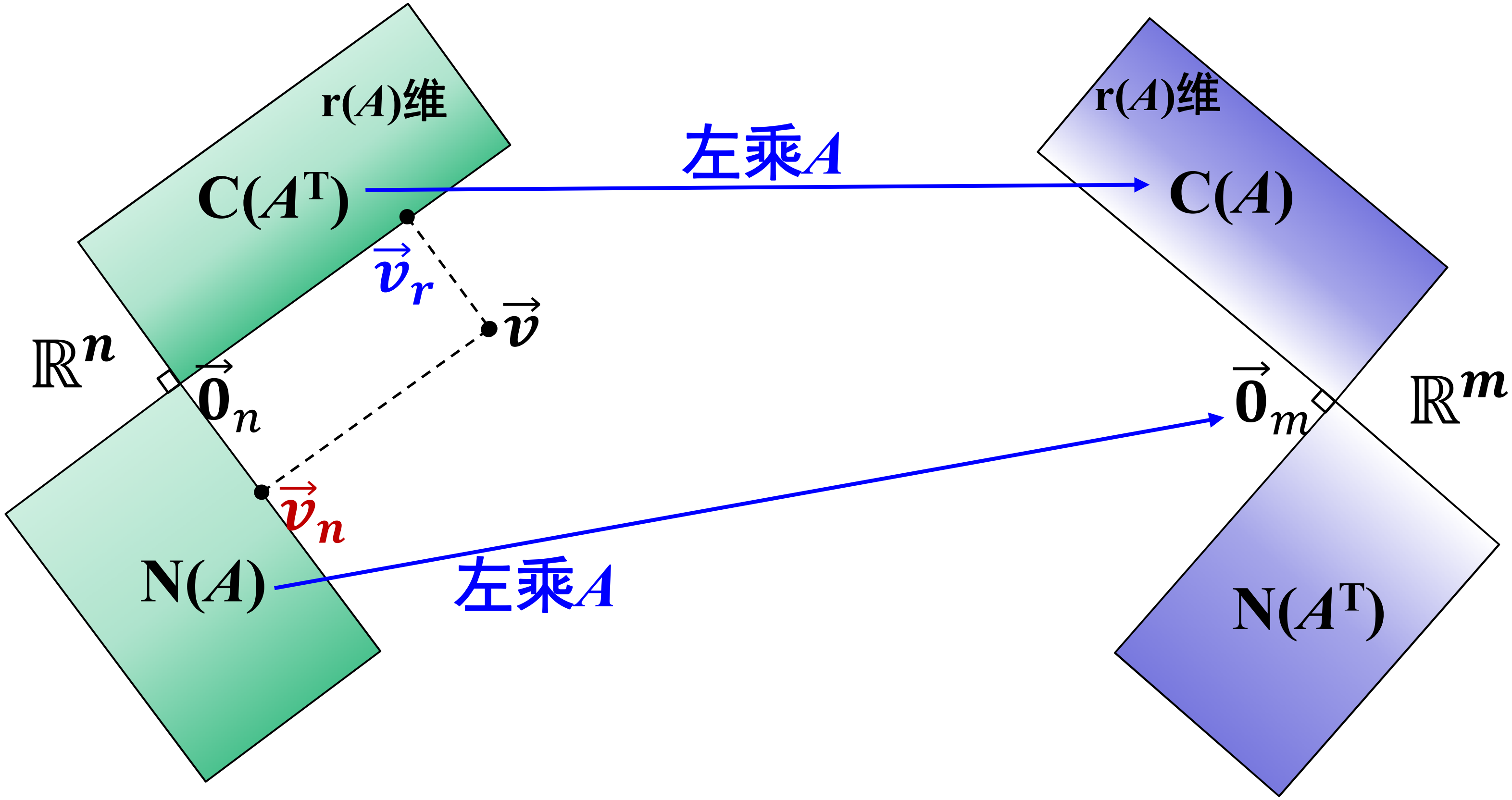
先求解$AA^T\vec{u}=A\vec{v}$, 即$\begin{pmatrix}3 & 10\\ 10 & 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, $\Rightarrow\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1/10\end{pmatrix}$,

$\Rightarrow\vec{v}_r=\begin{pmatrix}1/5\\ 2/5\end{pmatrix}$, $\Rightarrow\vec{v}_n=\vec{v}-\vec{v}_r=\begin{pmatrix}4/5\\ -2/5\end{pmatrix}\in N(A)$.

问题: 还有别的方法对$\vec{v}$做正交分解 $\vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_n$吗? (习题课)

小结: 给定$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, 为求$\vec{v}$在C(A^{T})的正交投影$\vec{v}_r$, 左乘A, 转化为求解方程$AA^{\mathrm{T}}\vec{y}=A\vec{v}$.

视为映射φ_A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$, 则$\varphi_A$(N($A$))={$\vec{0}$}, φ_A(C(A^{T}))=C(A). $\forall \vec{b} \in$C(A), 由定理8知, 存在唯一的$\vec{v}_r \in$C(A^{T}), s.t. $\varphi_A(\vec{v}_r)=\vec{b}$. 说明$\varphi_A$既单又满, 故为双射. 进一步可证$\varphi_A$为C($A^{\mathrm{T}}$)到C($A$)的同构 (习题课).

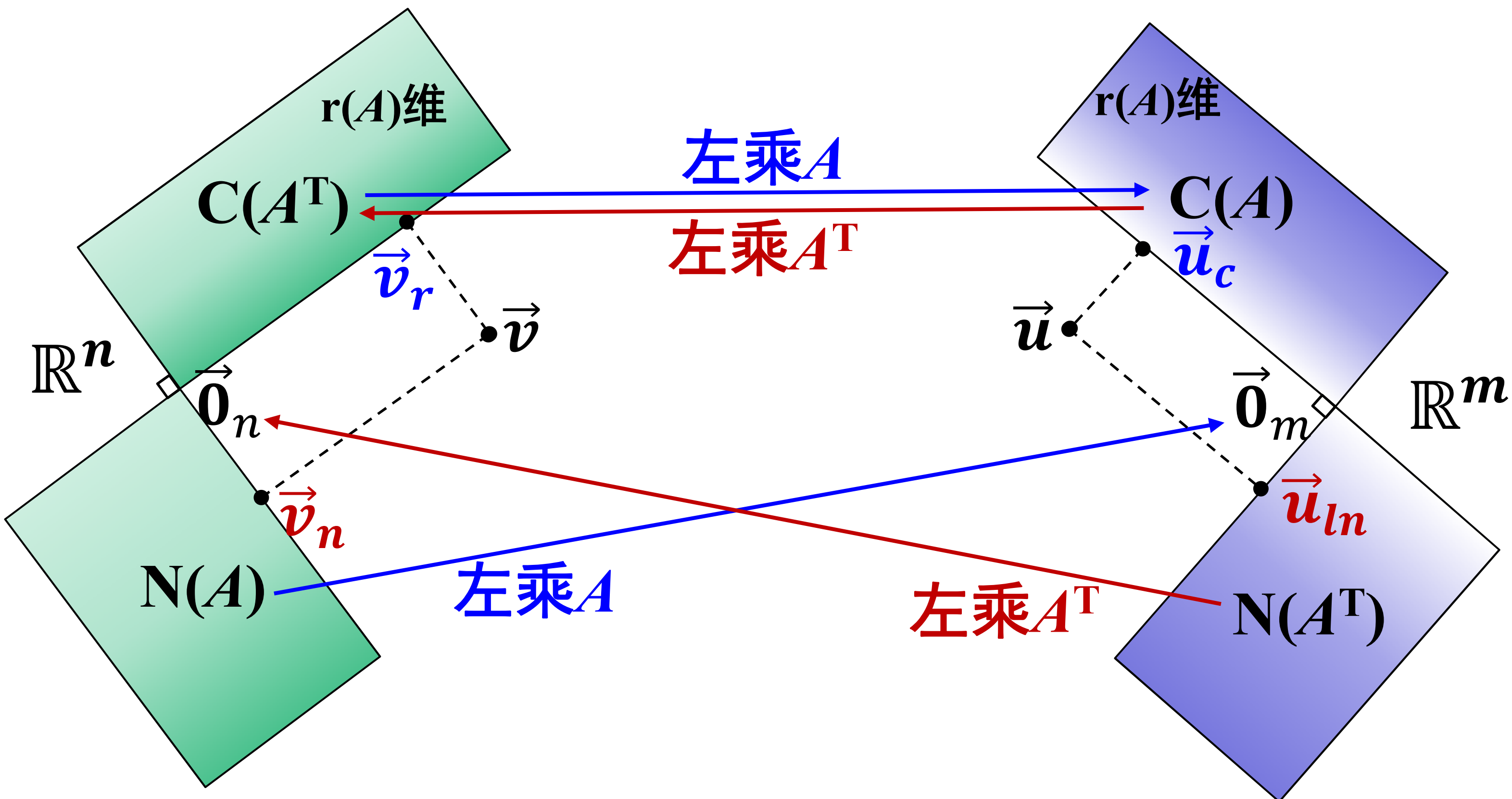


同理: 给定$\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, 为求$\vec{u}$在C(A)的正交投影$\vec{u}_c$, 左乘A^{T}, 可转化为求解方程$A^{\mathrm{T}}A\vec{x}=A^{\mathrm{T}}\vec{u}$.

视为映射$\varphi_{A^{\mathrm{T}}}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \vec{y} \mapsto A^{\mathrm{T}}\vec{y}$, 则

$$\varphi_{A^{\mathrm{T}}}(\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}))=\{\vec{0}\},\ \varphi_{A^{\mathrm{T}}}(\mathrm{C}(A))=\mathrm{C}(A^{\mathrm{T}}).$$

$\forall \vec{b}' \in \mathrm{C}(A^{\mathrm{T}})$, 同理存在唯一的$\vec{u}_c \in \mathrm{C}(A)$, s.t. $\varphi_{A^{\mathrm{T}}}(\vec{u}_c)=\vec{b}'$. 说明$\varphi_{A^{\mathrm{T}}}$既单又满, 故为双射. 进一步可证$\varphi_{A^{\mathrm{T}}}$为C($A$)到C($A^{\mathrm{T}}$)的同构.



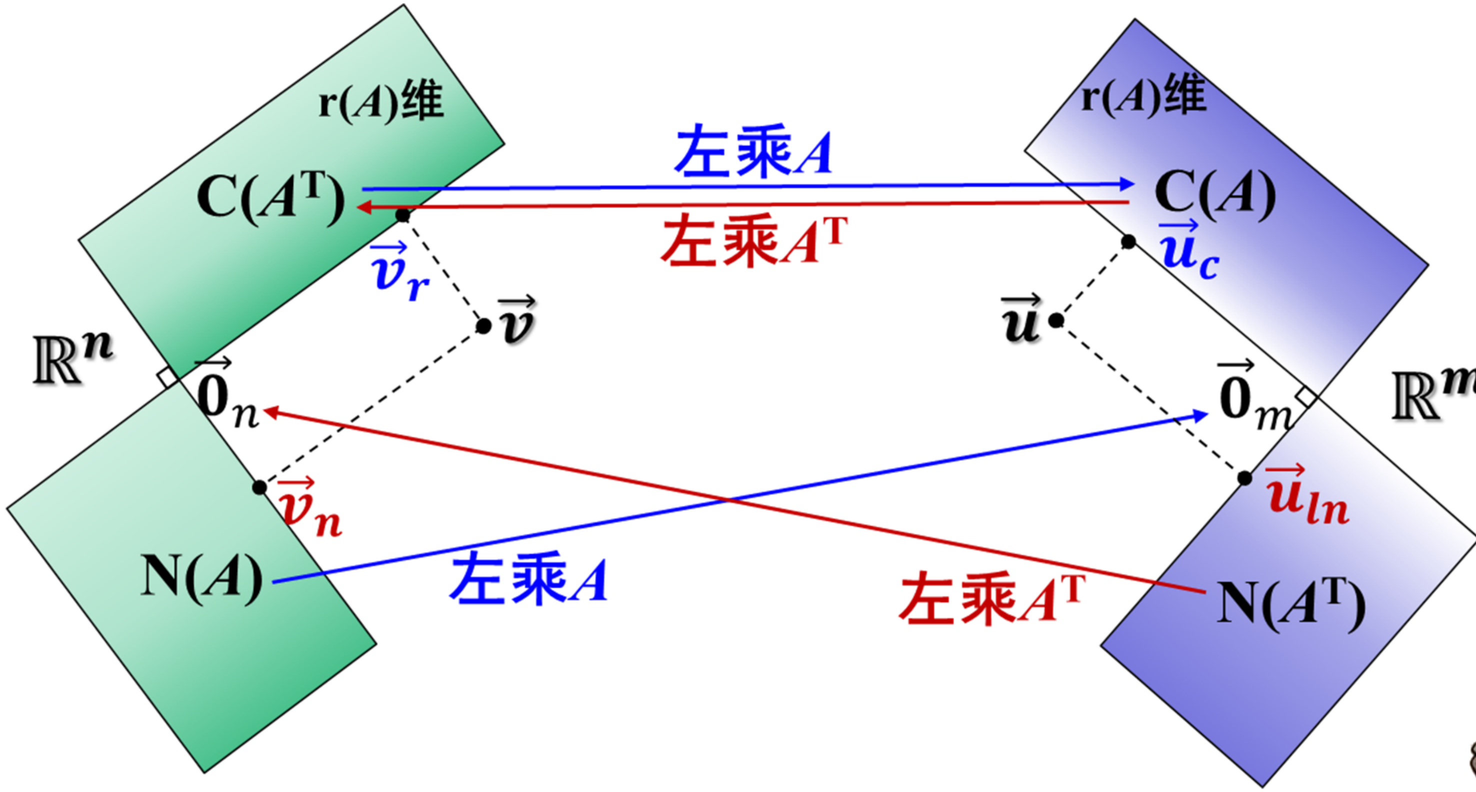
本讲小结

- 欧式空间定义：实空间+对称性+双线性+正定性

  内积→长度→夹角（C-S不等式)

- 两两正交的非零的向量组必线性无关
- 标准正交基 ——等价定义 $(\vec{\alpha}_i,\vec{\alpha}_j)=\delta_{ij}$; 简化计算的作用
- 正交矩阵 —— 定义$Q^{\mathrm{T}}Q=I_n$, 行(列)构成标准正交基, 性质
- Schmidt正交化方法 —— 正交化+单位化，记住公式, QR分解
- 正交补: $W^{\perp}:=\{\vec{\beta}\in\mathbb{R}^n \mid \vec{\beta}\perp W\}$
- 正交分解: $\vec{\alpha}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, s.t. $\vec{\beta}\in W$且$\vec{\gamma}\in W^{\perp}$.
- 正交补的直和分解: $\dim W+\dim W^{\perp}=n$; $W\oplus W^{\perp}=V$
- 矩阵的四个空间: $\mathrm{Row}(A)^{\perp}=\mathrm{N}(A)$; $\mathrm{Col}(A)^{\perp}=\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})$.

本讲小结



- $\vec{v}$在$\mathrm{C}(A^{\mathrm{T}})$的正交投影向量，转为求$AA^{\mathrm{T}}\vec{y}=A\vec{v}$;
- $\vec{u}$在$\mathrm{C}(A)$的正交投影向量，转为求$A^{\mathrm{T}}A\vec{x}=A^{\mathrm{T}}\vec{u}$.
- $\mathrm{C}(A) \underset{A^{\mathrm{T}}}{\overset{A}{\rightleftarrows}} \mathrm{C}(A^{\mathrm{T}})$ 同构.