《线性代数》

第二章 行列式

§ 2.2 n 阶行列式的概念与性质

2019秋

杨晶 主讲

内容提要

- n 阶行列式的定义
- n 元排列及其逆序数
- 排列中的对换及其性质
- 用表达式计算行列式
- 行列式的行列等价性

上讲思考：

- 四阶、五阶, ···, n阶行列式的概念？
- 四元、五元,…,n元线性方程组有无类似的求解公式？

回顾：二阶、三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

行列式	总项数	每一项		
		乘积个数	符号	表示形式
2阶	2项	2个元	正负各半	$(-1)^{?}a_{1j_1}a_{2j_2}$
3阶	6项	3个元	正负各半	$(-1)^{?}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$

指数位置上的“?”与$j_1j_2, j_1j_2j_3$有何关系

定义的进一步分析

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum_{j_1, j_2 \in S} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{array} = \sum_{j_1 j_2 j_3 \in S} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

如何决定列下标集合S，以及对应关系τ?

对二阶行列式：列下标的集合 $S=\{12, 21\}$

顺序取正；
逆序取负

对三阶行列式：列下标的集合 $S=\{123, 231, 312, 321, 213, 132\}$

$\Rightarrow$ $S = n$元全排列集合P_n， $\#P_n=n!$

回顾：二阶、三阶行列式的性质

性质

- 0、转置不变（行列等价）
- ✔ 1、单位归一
- ✔ 2、行(列)加法拆项法则
- ✔ 3、倍乘可提出
- ✔ 4、对换取反
- 5、倍加不变

推论1. 同行(列)化零

推论2. 零行(列)化零

推论3. 同比化零

问题: 上述哪些性质是独立的?

- 推论可由性质3,4推出
- 性质2+性质3+推论3 ⇒ 性质5
- 若暂只考虑行or列1种操作, 性质0可以暂不考虑

一. n 阶行列式的定义

- 设方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的列分别为$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$, 即$A=(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n)$.
- I_n为n阶单位阵, 即$I_n=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$.
- 定义n阶行列式为关于A的一个实值函数det=$|\cdot|$: $\{n$阶方阵$\}\to\mathbb{R}$, 且满足

1.(单位归一) $|I_n| = \det(I_n) = 1$;

2.(加法拆项) $\det(\vec{\alpha}_1,\cdots\vec{\alpha}_i+\vec{\alpha}_i',\cdots,\vec{\alpha}_n)=\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_n)+\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_i',\cdots,\vec{\alpha}_n)$;

3.(倍乘可提出) $\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,k\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_n)=k\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_n)$;

4.(倍加不变) $\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_j+k\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_n)=\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_j,\cdots,\vec{\alpha}_n)$.

低阶行列式性质的进一步分析

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ 0+a_{21} & 0+a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + 0 + 0 + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\triangleq \det(P_{12})a_{11}a_{22} + \det(P_{21})a_{12}a_{21} = \sum_{j_1 j_2 \in P_2} \det(P_{j_1 j_2})\, a_{1j_1}a_{2j_2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

类似地, 三阶行列式也可按如下方式拆分为 <u>27</u> 项,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+0+0 & a_{12}+0+0 & a_{13}+0+0 \\ 0+a_{21}+0 & 0+a_{22}+0 & 0+a_{23}+0 \\ 0+0+a_{31} & 0+0+a_{32} & 0+a_{33}+0 \end{vmatrix}$$

(其中只有以下 <u>6</u> 项是非零的)

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{23}a_{31}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{13}a_{21}a_{32}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{13}a_{22}a_{31}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{12}a_{21}a_{33}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{11}a_{23}a_{32}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\triangleq \det(P_{123})a_{11}a_{22}a_{33} + \det(P_{231})a_{12}a_{23}a_{31} + \det(P_{312})a_{13}a_{21}a_{32} + \det(P_{213})a_{12}a_{21}a_{33} + \det(P_{231})a_{12}a_{23}a_{31} + \det(P_{132})a_{11}a_{23}a_{32}$$

低阶行列式性质的进一步分析

这里，$P_{j_1j_2j_3}$称为3阶置换矩阵(permutation matrix)，它们可由单位阵I_3经过若干次列对换而得到：

$$P_{123}=I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad P_{231}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\xleftarrow{c_2\leftrightarrow c_3}P_{321}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xleftarrow{c_3\leftrightarrow c_1}I_3$$

$$P_{312}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\xleftarrow{c_3\leftrightarrow c_2}P_{213}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xleftarrow{c_1\leftrightarrow c_2}I_3$$

$$\Rightarrow \det(P_{j_1j_2j_3})=\begin{cases}1, & \text{当}P_{j_1j_2j_3}\text{由}I_3\text{经过偶数次列对换所得时;}\\ -1, & \text{当}P_{j_1j_2j_3}\text{由}I_3\text{经过奇数次列对换所得时.}\end{cases}$$

$$P_{132}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\xleftarrow{c_2\leftrightarrow c_3}I_3$$

一. n 阶行列式的表达公式

将对低阶行列式的分析推导, 施行于n阶行列式, 不难得到如下表达式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n\in P_n}\det(P_{j_1j_2\cdots j_n})\cdot a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

1. 表达式中共有 $n!$ 项.
2. 每一项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积.
3. 每一项可以写成$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$(正负号除外), 其中$j_1j_2\ldots j_n$是1, 2, ..., n 的某个排列.
4. $\det(P_{j_1j_2\cdots j_n})=\begin{cases}1, & \text{当}P_{j_1j_2\cdots j_n}\text{由}I_n\text{经过偶数次列对换所得时;} \\ -1, & \text{当}P_{j_1j_2\cdots j_n}\text{由}I_n\text{经过奇数次列对换所得时.}\end{cases}$ $\Rightarrow$ 称$P_{j_1j_2\cdots j_n}$是偶的. / $\Rightarrow$ 称$P_{j_1j_2\cdots j_n}$是奇的.

问题: 置换矩阵$P_{j_1j_2\cdots j_n}$的奇偶性如何确定?

例如, 置换矩阵 $P_{453162}=\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$是奇的, 还是偶的?

回答: 可对I_6依次进行$c_1\leftrightarrow c_4$, $c_6\leftrightarrow c_5$, $c_5\leftrightarrow c_2$的列对换而得到P_{453162}, 故它P_{453162}是奇的.

追问: 还有没有别的列对换方法, 使得 $I_6\rightarrow P_{453162}$?
对更大的n, 如何处理?

阶段小结

定义+性质

- 0、转置不变（行列等价）
- 1、单位归一
- 2、行(列)加法拆项法则
- 3、倍乘可提出
- 4、对换取反
- 5、倍加不变

- 推论1. 同列化零
- 推论2. 零列化零
- 推论3. 同比化零

- 推论可由性质3,4推出
- 性质2+性质3+推论3 $\Rightarrow$ 性质5
- 还缺行列等价性

代数表达式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} \det(P_{j_1 j_2 \cdots j_n}) \cdot a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

- $n!$ 项代数和
- 每项不同行不同列的n个元素之积
- 每项符号由置换矩阵的奇偶性确定