2019-2020 学年第二学期 **线性代数 B** 综合练习

一、选择题

1. 设$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2$，则$\begin{vmatrix} 2a_1+b_1 & 3b_1+c_2 & -c_1 \\ 2a_2+b_2 & 3b_2+c_2 & -c_2 \\ 2a_3+b_3 & 3b_3+c_3 & -c_3 \end{vmatrix}=$ (　　)

（A）4；　(B) 6；　(C) 12；　(D) -12

2. 设n阶矩阵A,B,C，则下列说法**正确的**是(　　)

(A) 若$AB=AC$，则$B=C$；　(B) 若$|A|\neq 0$，则$A\neq O$；

(C) $(AB)^T=A^TB^T$；　(D) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

3. 设$Ax=b$是一非齐次线性方程组，η_1,η_2是其任意 2 个解，则下列结论**错误的**是(　　)

(A) $\eta_1+\eta_2$是$Ax=0$的一个解；　(B) $\frac{1}{2}\eta_1+\frac{1}{2}\eta_2$是$Ax=b$的一个解；

(C) $\eta_1-\eta_2$是$Ax=0$的一个解；　(D) $2\eta_1-\eta_2$ 是$Ax=b$的一个解

4. 已知 3×4 矩阵A的行向量组线性无关，则矩阵A的秩等于(　　)

（A）1；　（B）2；　（C）3；　（D）4

5. 若齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2-x_3=0 \\ \lambda x_3=0 \end{cases}$只有零解，则(　　)

(A) $\lambda=0$或$\lambda=\pm 1$；　(B) $\lambda\neq 0$且$\lambda\neq\pm 1$；　(C) $\lambda\neq 0$；　(D) $\lambda\neq\pm 1$

6. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列说法正确的是(　　)

（A）α_1,α_2线性无关；　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关；

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关；　（D）$\alpha_4$能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

7. 已知三阶方阵A与对角矩阵$\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$相似，则$A^2=$(　　)

(A) A；　(B) Λ；　(C) E；　(D) $-E$

二、填空题

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 4 & -1 & x & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 5 & 2 & 1\end{vmatrix}$ 中元素 x 的代数余子式等于_______.

2. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}$，则 A 的逆矩阵 $A^{-1}=$__________.

3. 已知 n 阶矩阵满足 $A^2+A-2E=0$，则 $(A-3E)^{-1}=$__________.

4. 设 A 为 3 阶方阵，若 $|A|=-\frac{1}{3}$，则 $\left|-3A^2\right|=$_________.

5. 已知向量组 $\alpha_1=(1,3,2)^T,\alpha_2=(1,0,2)^T,\alpha_3=(t,-2,0)^T$ 线性相关，则 $t=$_______.

6. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)=r<n$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系中含有线性无关的解的个数为__________________ .

7. 若 $\alpha=(1,k,1)^T$ 与 $\beta=(1,-2,1)^T$ 正交，则 $k=$____________.

8. 设 3 阶矩阵 A 的行列式 $|A|=8$，已知 A 有特征值 1 和 -4，则另一个特征值为 _____.

三、计算题

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}$.

2. 求解矩阵方程 $AX=A+X$，其中 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

3. 求解非齐次线性方程组（要求写出通解的向量形式）$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+2x_4=1\\ 2x_1+4x_2+x_3+x_4=5\\ -x_1-2x_2-2x_3+x_4=-4\end{cases}$

4. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-5\\6\\-5\\9\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\-4\\3\\-5\end{pmatrix}$，求该向量组的一个极大无关组，并求其余向量用该极大无关组线性表示的表达式.

5．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，试求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

6．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$，试求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{T}-2\boldsymbol{C}$.

四、证明题

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$，证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系。

参考答案

一、选择题

1、（D）　2、（B）　3、（A）　4、（C）　5、(B)　6、(A)　7、(C)

二、填空题

1、$\underline{-10}$ ；　2、$\underline{\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}}$ ；　3、$\underline{-\frac{1}{10}(A+4E)}$；　4、$\underline{-3}$；　5、$\underline{0}$ ；

6、$\underline{n-r}$ ；　7、$\underline{1}$ ；　8、$\underline{-2}$

三、计算题

1、解：$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{\underset{r_4+5r_1}{=}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -8 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 16 & 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$

$$\overset{c_1-2c_2}{\underset{c_3-c_2}{=}} \begin{vmatrix} -16 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 20 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -16 & -2 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 40$$

2、解：$\left(A-E \mid A\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，

所以 $X = \left(A-E\right)^{-1} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

或先得 $\left(A-E\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3、解：$\left(A,b\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$，

方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 + 2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 + 1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$　即 $x = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，（$c_1, c_2$ 为任意常数）

4、解：$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}-1&1&-5&3\\0&-2&6&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

所以α_1,α_2为其一个极大无关组，且$\alpha_3=2\alpha_1-3\alpha_2$，$\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$

5、解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\-2&2-\lambda&0\\4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)^2$，得$A$的特征值$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=1$；

对$\lambda_1=0$，特征方程组为$Ax=0$，$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1/2\\0&1&1/2\\0&0&0\end{pmatrix}$，

所以基础解系为$p_1=\left(1,1,-2\right)^T$；

对$\lambda_2=\lambda_3=1$，特征方程组为$\left(A-E\right)x=0$，$A-E=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-2&1&0\\4&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1/2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

所以基础解系为$p_1=\left(1,2,0\right)^T$，$p_1=\left(0,0,1\right)^T$；

取$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\Lambda$

6、解：$AB^T=\begin{pmatrix}-4&-2\\0&2\end{pmatrix}$，$AB^T-2C=\begin{pmatrix}-6&-6\\-10&-4\end{pmatrix}$

四、 证明题

证：令有数k_1,k_2,k_3使$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，即

$(k_1+k_3)\alpha_1+(2k_1+2k_2)\alpha_2+(3k_2+3k_3)\alpha_3=0$，

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$Ax=0$的基础解系，从而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以$\begin{cases}k_1+k_3=0,\\2k_1+2k_2=0,\\3k_2+3k_3=0,\end{cases}$

得$k_1=k_2=k_3=0$，因此β_1,β_2,β_3线性无关；

而β_1,β_2,β_3是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是$Ax=0$的解；

从而得β_1,β_2,β_3也是$Ax=0$的基础解系