



# 《线性代数》



## 第四章 矩 阵

### § 4.5 矩阵的初等变换 与 初等矩阵



2019秋

杨晶 主讲

## 图像处理中的数学问题



“天上的人影”可通过何种数学的运算来实现呢？

# 内容提要

- 矩阵的初等变换
- 初等矩阵的概念与性质
- 初等矩阵与矩阵初等变换的关系
- 分块矩阵的初等变换
- 初等矩阵的应用

# 一、矩阵的初等变换

我们把上一章中对行列式的行(列)进行的对换, 倍乘, 倍加三种操作, 引入到矩阵中来, 自然可得到矩阵的相关操作:

**定义1** 下面三种变换称为矩阵的初等行变换:

(1) 对调两行 (对调  $i, j$  两行, 记作  $r_i \leftrightarrow r_j$ ) ;

(2) 以数  $k \neq 0$  乘以某一行的所有元素 ; (第  $i$  行乘  $k$ , 记作  $r_i \times k$ )

(3) 把某一行所有元素的  $k$  倍加到另一行对应的元素上去 (第  $j$  行的  $k$  倍加到第  $i$  行上记作  $r_i + kr_j$ ).

同理可定义矩阵的**初等列变换**(所用记号是把“ $r$ ”换成“ $c$ ”).

**定义2** 矩阵的初等列变换与初等行变换统称为**初等变换**.

矩阵的初等变换可以视为矩阵集合 $M_{m \times n}$ 到自身的变换, 如果有另一个变换使得与原变换复合后, 为恒等变换(保持所有矩阵不变), 则称这个后者是前者的**逆变换**.

初等变换的**逆变换**仍为初等变换, 且变换类型相同.

$$r_i \leftrightarrow r_j \quad \text{逆变换: } r_i \leftrightarrow r_j;$$

$$r_i \times k \quad \text{逆变换: } r_i \times \left(\frac{1}{k}\right);$$

$$r_i + kr_j \quad \text{逆变换: } r_i + (-k)r_j \text{ 或 } r_i - kr_j.$$

**定义3** 如果矩阵 $A$ 经有限次初等变换变成矩阵 $B$ ，就称矩阵 $A$ 与 $B$ 等价，记作 $A \sim B$ ， $A \overset{r}{\sim} B$ ， $A \overset{c}{\sim} B$ 。

**等价关系的性质：**

- (1) 反身性  $A \sim A$ ;
- (2) 对称性 若  $A \sim B$  ,则  $B \sim A$ ;
- (3) 传递性 若  $A \sim B, B \sim C$ ,则  $A \sim C$ .

具有上述三条性质的关系称为**等价**。

若矩阵A经过初等变换变为矩阵B，则以下**不正确**的是

A

$$A \rightarrow B$$

B

$$A \xrightarrow[c]{r} B$$

C

$$A = B$$

D

$$A \sim B$$

提交

## 二、初等矩阵的概念

**定义1** 单位矩阵  $I$  经过一次初等变换所得到的矩阵称为**初等矩阵** (elementary matrix ).

- (1) 单位矩阵  $I$  的第  $i$  行乘以非零数  $k$  (倍乘行变换) 所得矩阵, 记为  $E_i(k)$ . 它同时也是  $I$  的第  $i$  列乘以非零数  $k$  (倍乘列变换) 所得矩阵.

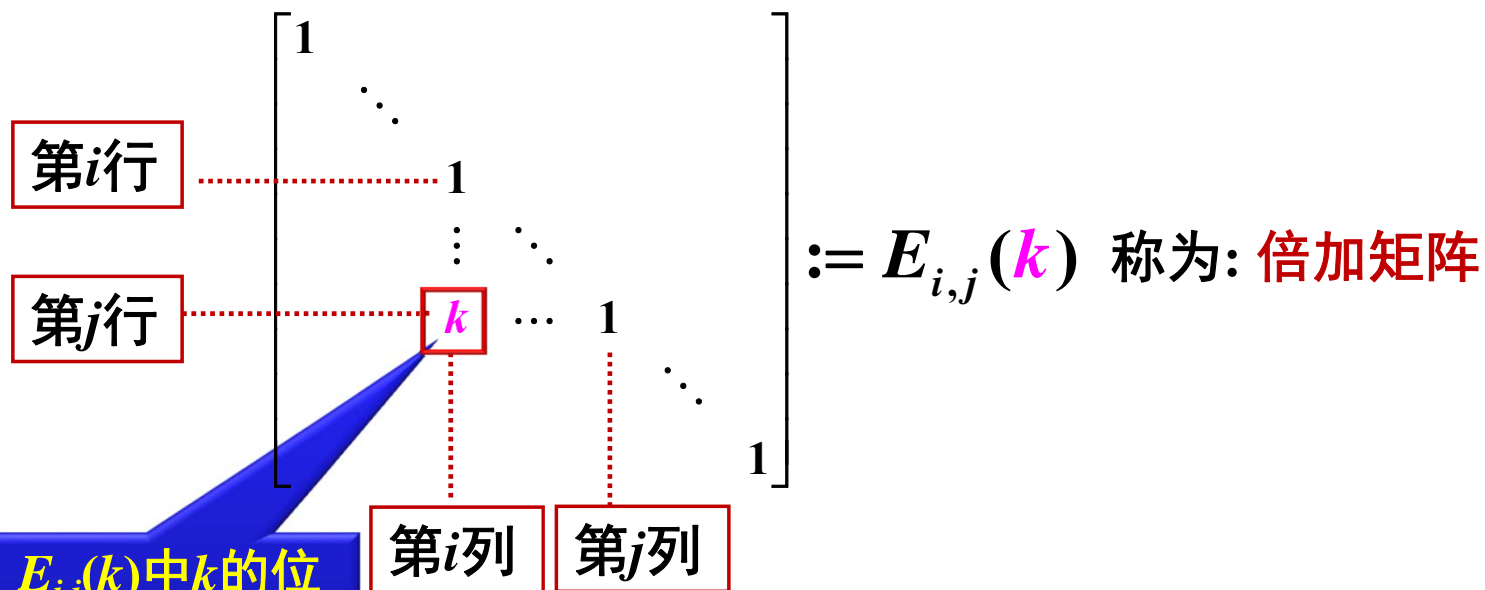
$$I_n \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (kc_i) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} kr_i \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} := E_i(k) \quad \text{称为: 倍乘矩阵}$$

- (2) 交换单位矩阵  $I$  的第  $i$  行与第  $j$  行, 所得的矩阵记为  $E_{i,j}$ .  
它也是交换  $I$  的第  $i$  列与第  $j$  列, 所得的矩阵.

The diagram illustrates the structure of the swap matrix  $E_{i,j}$ . It is a square matrix with 1s on the main diagonal and 0s elsewhere, except for the  $i$ -th and  $j$ -th rows and columns which are swapped. A blue double-headed arrow indicates the swap between the  $i$ -th and  $j$ -th rows, and another blue double-headed arrow indicates the swap between the  $i$ -th and  $j$ -th columns. The matrix is defined as  $E_{i,j}$  and is referred to as a swap matrix (对换矩阵).

$$E_{i,j} := \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ \text{第 } i \text{ 行} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ & & \vdots & 1 & & \vdots \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & & & 1 & \vdots \\ \text{第 } j \text{ 行} & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & & \ddots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{称为: 对换矩阵}$$

- (3) 将单位矩阵  $I$  第  $i$  行的  $k$  倍加到第  $j$  行, 所得矩阵记为  $E_{i,j}(k)$ .  
它也是是将  $I$  第  $j$  列的  $k$  倍加到第  $i$  列, 所得的矩阵.



The diagram shows a square matrix  $E_{i,j}(k)$  with its structure defined by row and column labels. The matrix is represented as a large square bracket containing elements. The top-left element is 1, followed by diagonal dots. The  $i$ -th row has a 1 in the  $i$ -th column. The  $j$ -th row has a  $k$  in the  $i$ -th column, followed by diagonal dots and a 1 in the  $j$ -th column. The  $i$ -th column has a 1 in the  $i$ -th row and a  $k$  in the  $j$ -th row. The  $j$ -th column has a 1 in the  $j$ -th row. The matrix is labeled  $:= E_{i,j}(k)$  称为: 倍加矩阵.

第  $i$  行

第  $j$  行

第  $i$  列

第  $j$  列

$:= E_{i,j}(k)$  称为: 倍加矩阵

注意:  $E_{i,j}(k)$  中  $k$  的位置为  $(j,i)$ , 即  $a_{ji}=k$ .



## 二、初等矩阵的性质

### 1、初等矩阵的转置

$$E_i(k)^T = E_i(k).$$
$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots \\ & & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & \\ & & & & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} = E_{i,j}^T$$

故，倍乘矩阵、对换矩阵转置不变(对称阵)，转置后仍为初等矩阵。

设  $i < j$ , 则

$$E_{i,j}(k) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & k & \dots & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} = E_{j,i}(k)^T$$

(i,j)位置  
(j,i)位置

故，倍加矩阵转置仍为倍加矩阵，但下标顺序交换.

## 2、初等矩阵的行列式

易知  $|E_i(k)| = k \neq 0$ ;  $|E_{i,j}(k)| = 1$ , 而

$$|E_{i,j}| = \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\tau(1 \cdots \overset{\text{red}}{j} \cdots \overset{\text{red}}{i} \cdots n)} a_{11} \cdots a_{i-1,i-1} \overset{\text{red}}{a_{ij}} a_{i+1,i+1} \cdots a_{j-1,j-1} \overset{\text{red}}{a_{ji}} a_{j+1,j+1} \cdots a_{nn}$$

$$= (-1) \times 1 \times \cdots \times 1 = -1$$

### 3、初等矩阵的分块表示

设  $\vec{e}_i = (0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第}i\text{位}}}{1}, 0, \cdots, 0)^T$  为列矩阵(列向量), 则

$$I_n = (\vec{e}_1, \cdots, \underline{\vec{e}_i}, \cdots, \vec{e}_j, \cdots, \vec{e}_n), \quad \text{或} \quad I_n = I_n^T = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T \\ \vdots \\ \vec{e}_n^T \end{bmatrix}$$

从而, 由初等矩阵的定义, 有

$$E_{i,j} = E_{i,j}^T = (\vec{e}_1, \cdots, \underline{\vec{e}_j}, \cdots, \vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_n),$$

$$E_i(\textcolor{violet}{k}) = E_i(\textcolor{violet}{k})^T = (\vec{e}_1, \cdots, \textcolor{violet}{k}\vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_n), \quad (k \neq 0).$$

$$E_{i,j}(\textcolor{violet}{k}) = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T \\ \vdots \\ \textcolor{violet}{k}\vec{e}_i^T + \vec{e}_j^T \\ \vdots \\ \vec{e}_m^T \end{bmatrix} = (\vec{e}_1, \cdots, \textcolor{violet}{k}\vec{e}_j + \vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_j, \cdots, \vec{e}_n)$$



反过来，矩阵A右乘倍乘矩阵，得

$$\begin{array}{c}
 \boxed{m \times n} \\
 \downarrow \\
 AE_i(k) =
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & \vdots \\
 \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & a_{in} \\
 \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 1 & & & & \\
 & \ddots & & & \\
 & & 1 & & \\
 & & & k & \\
 & & & & 1 & \ddots \\
 & & & & & 1
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 a_{11} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{21} & \cdots & ka_{2i} & \cdots & \vdots \\
 \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & a_{in} \\
 \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 a_{m1} & \cdots & ka_{mi} & \cdots & a_{mn}
 \end{bmatrix}$$

故，右乘倍乘矩阵 $E_i(k)$ ，相当于对 $A$ 的第 $i$ 列做 $k$ 倍的倍乘变换. 综上

$$A \xrightarrow{kr_i} B \Leftrightarrow B = E_i(k)A; \quad A \xrightarrow{kc_i} B \Leftrightarrow B = AE_i(k).$$

设  $\vec{e}_i = (0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第}i\text{位}}}{1}, 0, \cdots, 0)^T$ , 则  $I_n = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_j, \cdots, \vec{e}_n)$ ,

$$E_{i,j} = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_j, \cdots, \vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_n).$$

于是,  $A I_n = A(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_n) = (A\vec{e}_1, \cdots, A\vec{e}_i, \cdots, A\vec{e}_n) = A$

故,  $A\vec{e}_i$  等于  $A$  的第  $i$  列.

$$\text{又因为, } I_m A = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T \\ \vdots \\ \vec{e}_m^T \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T A \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T A \\ \vdots \\ \vec{e}_m^T A \end{bmatrix} = A \quad \text{故, } \vec{e}_i^T A \text{ 等于 } A \text{ 的第 } i \text{ 行.}$$

考虑，矩阵 $A$ 左乘对换矩阵，得

$$\begin{array}{c}
 \boxed{m \times n} \\
 \swarrow \\
 E_{i,j} A =
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 \vec{e}_1^T \\
 \vdots \\
 \vec{e}_j^T \\
 \vdots \\
 \vec{e}_i^T \\
 \vdots \\
 \vec{e}_m^T
 \end{bmatrix}
 A
 =
 \begin{bmatrix}
 \vec{e}_1^T A \\
 \vdots \\
 \vec{e}_j^T A \\
 \vdots \\
 \vec{e}_i^T A \\
 \vdots \\
 \vec{e}_m^T A
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \underline{a_{j1}} & \underline{a_{j2}} & \cdots & \underline{a_{jn}} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \underline{a_{i1}} & \underline{a_{i2}} & \cdots & \underline{a_{in}} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
 \end{bmatrix},$$

$\boxed{m \times m}$   
 $\nearrow$

故，左乘对换矩阵  $E_{i,j}$ ，相当于对  $A$  的第  $i, j$  行做对换变换。

反过来，矩阵A右乘对换矩阵，得

$$\begin{array}{c}
 \boxed{m \times n} \nearrow \\
 \boxed{n \times n} \nearrow
 \end{array}
 AE_{i,j} = A(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j, \dots, \vec{e}_i, \dots, \vec{e}_n) = (A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_j, \dots, A\vec{e}_i, \dots, A\vec{e}_n)$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|cc|ccc}
 a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\
 \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
 a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn}
 \end{array} \right]$$

故，右乘对换矩阵 $E_{i,j}(k)$ ，相当于对A的第*i, j*列做对换变换. 综上

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B \Leftrightarrow B = E_{i,j}A; \qquad A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} B \Leftrightarrow B = AE_{i,j}.$$

考虑，矩阵 $A$ 左乘倍加矩阵，得

$$E_{i,j}(k)_{m \times m} A_{m \times n} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T \\ \vdots \\ k\vec{e}_i^T + \vec{e}_j^T \\ \vdots \\ \vec{e}_m^T \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T A \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T A \\ \vdots \\ (k\vec{e}_i^T + \vec{e}_j^T)A \\ \vdots \\ \vec{e}_m^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T A \\ \vdots \\ \vec{e}_i^T A \\ \vdots \\ \hline k\vec{e}_i^T A + \vec{e}_j^T A \\ \vdots \\ \vec{e}_m^T A \end{bmatrix}$$

故，**左乘倍加矩阵**  $E_{i,j}(k)$ ，相当于对 $A$ 做第  $i$  **行**的 $k$ 倍加到第  $j$  行上的**倍加变换**。

反过来，矩阵 $A$ 右乘倍加矩阵，得

$$\begin{aligned} A_{m \times n} E_{i,j}(k)_{n \times n} &= A(\vec{e}_1, \dots, k\vec{e}_j + \vec{e}_i, \dots, \vec{e}_j, \dots, \vec{e}_n) \\ &= (A\vec{e}_1, \dots, A(k\vec{e}_j + \vec{e}_i), \dots, A\vec{e}_j, \dots, A\vec{e}_n) \\ &= (A\vec{e}_1, \dots, \underline{kA\vec{e}_j + A\vec{e}_i}, \dots, A\vec{e}_j, \dots, A\vec{e}_n) \end{aligned}$$

故，**右乘倍加矩阵** $E_{i,j}(k)$ ，相当于对 $A$ 做第 $j$ **列**的 $k$ 倍加到第 $i$ 列上的**倍加变换**. 即

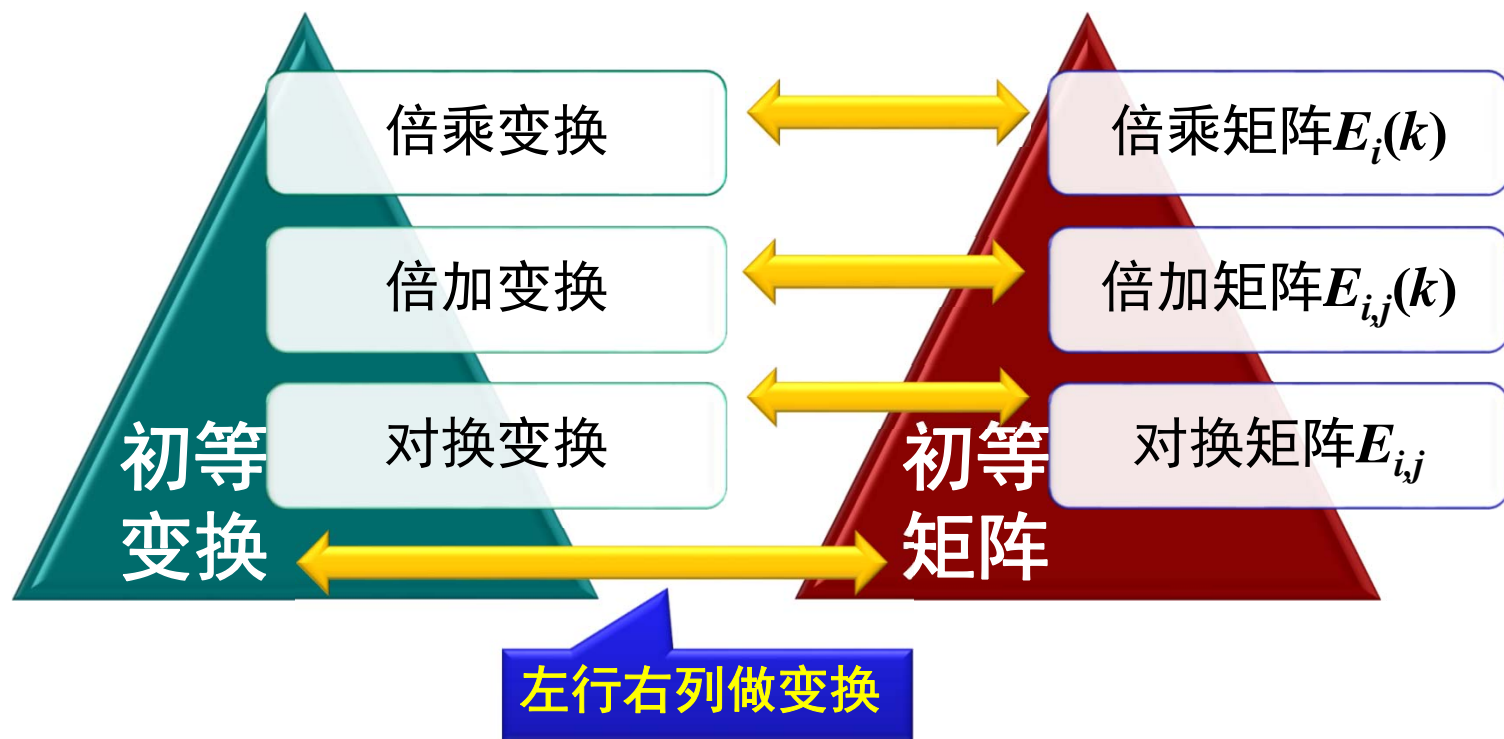
$$A \xrightarrow{r_j + kr_i} B \Leftrightarrow B = E_{i,j}(k)A; \quad A \xrightarrow{c_i + kc_j} B \Leftrightarrow B = AE_{i,j}(k).$$

左乘:从左到右做倍加.

右乘:从右到左做倍加.



**定理1** 用初等矩阵**左**乘矩阵 $A$ ，相当于对 $A$ 进行一次相应的初等**行**变换。  
用初等矩阵**右**乘矩阵 $A$ ，相当于对 $A$ 进行一次相应的初等**列**变换。



**例1** 用初等矩阵与初等变换的关系，再次验证行列式的性质

验证: (1) 逐行保数乘  $A \xrightarrow{kr_i} B \Leftrightarrow B = E_i(k)A;$   
 $\Rightarrow |B| = |E_i(k)| \cdot |A| = k|A|;$

(2) 交错性  $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B \Leftrightarrow B = E_{i,j}A;$   
 $\Rightarrow |B| = |E_{i,j}| \cdot |A| = (-1)|A| = -|A|;$

(3) 倍加不变性  $A \xrightarrow{r_j + kr_i} B \Leftrightarrow B = E_{i,j}(k)A;$   
 $\Rightarrow |B| = |E_{i,j}(k)| \cdot |A| = 1 \cdot |A| = |A|;$

与同伴讨论分享一下你的结果.

## 四 分块矩阵的初等变换

对分块矩阵同样可以引进初等变换和初等矩阵的概念. 我们只以分成4块的情况简单解释. 设

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

**定义2** 下面三种针对分块矩阵  $M$  的变形, 统称为分块矩阵的初等变换:

- (1) **倍乘**: 用**特定**矩阵  $P$  左(右)乘  $M$  的某一“行(列)”;
- (2) **倍加**: 用矩阵  $Q$  乘  $M$  的某“行(列)”加到另外一“行(列)”;
- (3) **对换**: 交换  $M$  的两“行”或“列”.

**注:**

- 这里要假定运算满足可行性原则.
- 加引号的“行”, “列”表示由子块组成的行、列.
- 对应一般倍乘矩阵的  $k \neq 0$ , 分块情形的“**特定**”为什么要求?

**定义3** 将单位矩阵分块成准对角形矩阵  $I = \text{diag}(I_s, I_t)$ , 对其进行一次初等变换, 得到的分块矩阵称为分块初等矩阵 (block elementary matrix):

(1) 分块倍乘矩阵:  $\begin{bmatrix} P & O \\ O & I_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & P \end{bmatrix}$  (其中  $P$  为特定方阵);

(2) 分块倍加矩阵:  $\begin{bmatrix} I_s & O \\ Q & I_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_s & Q \\ O & I_t \end{bmatrix};$

(3) 分块对换矩阵:  $\begin{bmatrix} O & I_t \\ I_s & O \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & I_s \\ I_t & O \end{bmatrix}.$

**定理2** 对分块矩阵进行一次初等行(列)变换, 相当于给它左(右)乘以一个相应的分块初等矩阵.

**证明:** 验证行变换

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{P} & \underline{O} \\ \underline{O} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{PA} & \underline{PB} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{O} \\ \underline{O} & \underline{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{PC} & \underline{PD} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{Q} \\ \underline{O} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{QC + A} & \underline{QD + B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{O} \\ \underline{Q} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{QA + C} & \underline{QB + D} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \underline{O} & \underline{I} \\ \underline{I} & \underline{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{D} \\ \underline{A} & \underline{B} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

验证列变换：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & O \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AP & B \\ CP & D \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BP \\ C & DP \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ Q & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BQ + A & B \\ DQ + C & D \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Q \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AQ + B \\ C & CQ + D \end{bmatrix},$$

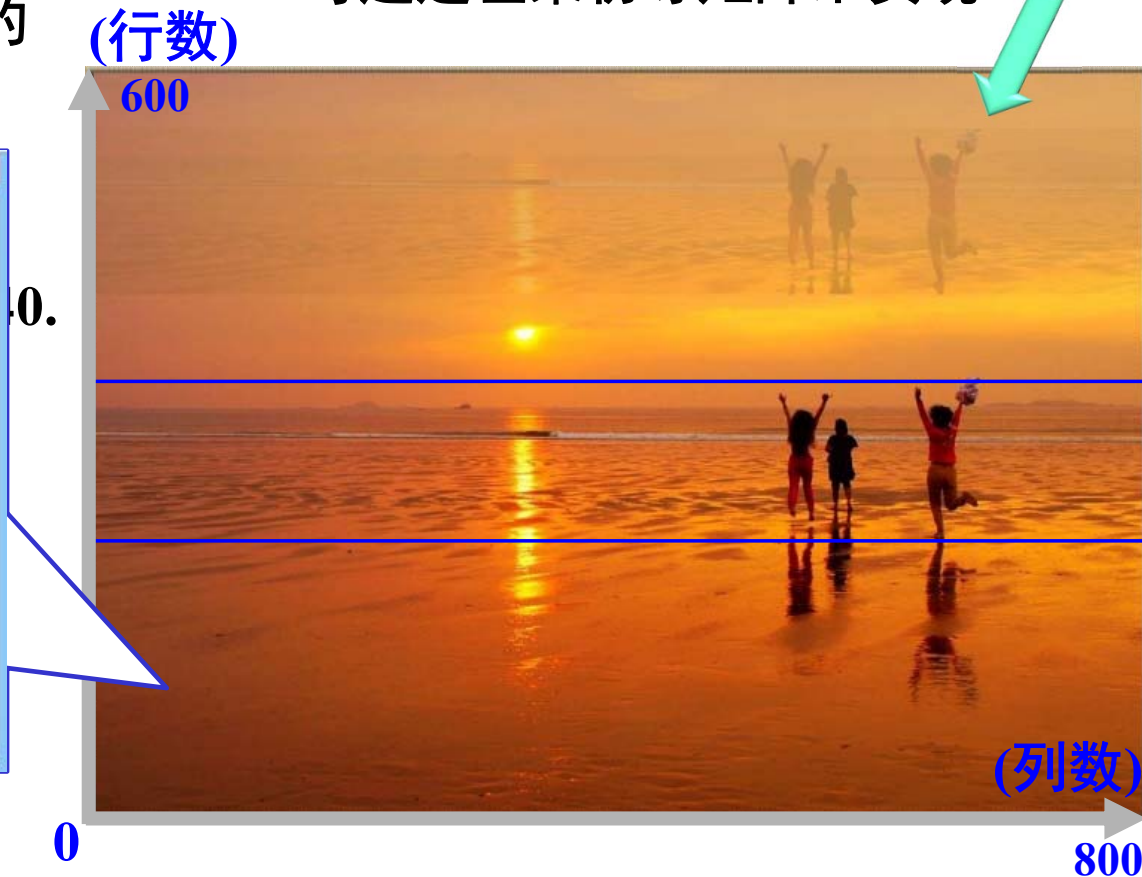
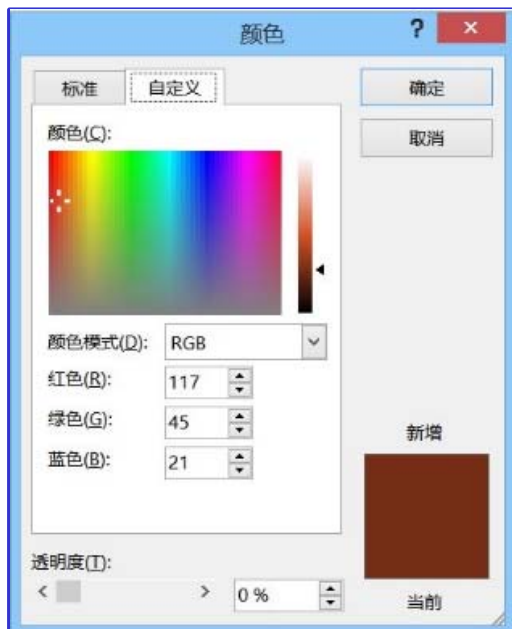
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & I \\ I & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}.$$

## 五、应用1. 图像处理中的具体应用

- 设图片像素点组成一个600行800列的矩阵，记为 $A$ .

“天上的人影”

可通过左乘初等矩阵来实现.



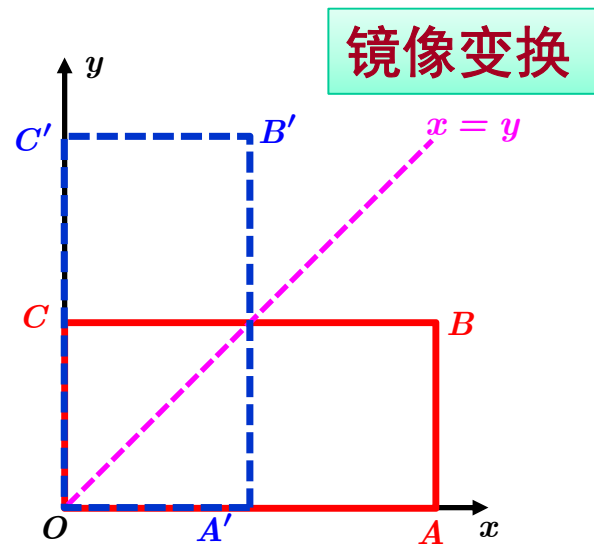
## 五、应用2. 图形变换中的具体应用:

$\mathbb{R}^2$ 平面中的矩形 $OABC$ 对应矩阵

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

对换矩阵左乘作用后得

$$E_{1,2}\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



## 图形变换中的具体应用:

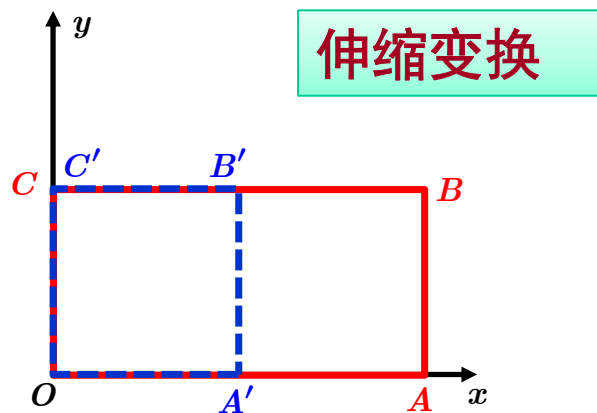
$\mathbb{R}^2$ 平面中的矩形 $OABC$ 对应矩阵

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

倍乘矩阵左乘作用后得

$$E_1(0.5) \cdot \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

当倍乘系数换成2,  
图形如何变换?



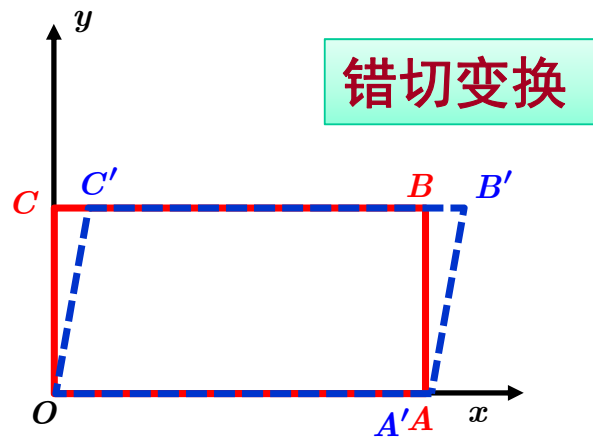
## 图形变换中的具体应用:

$\mathbb{R}^2$ 平面中的矩形 $OABC$ 对应矩阵

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

倍加矩阵左乘作用后得

$$E_{2,1}(0.2)\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



## 应用2. 初等矩阵在图形模拟与变换中的应用:



风车叶片的转动可用**初等矩阵的复合运算**来实现!

## 3.2初等矩阵在图形模拟与变换中的应用:

### 数学建模(代数运算)

1.  $\mathbb{R}^2$  单位圆上任取向量  $\overrightarrow{OA}$

2.  $\overrightarrow{OB} = P_1 \cdot \overrightarrow{OA}$

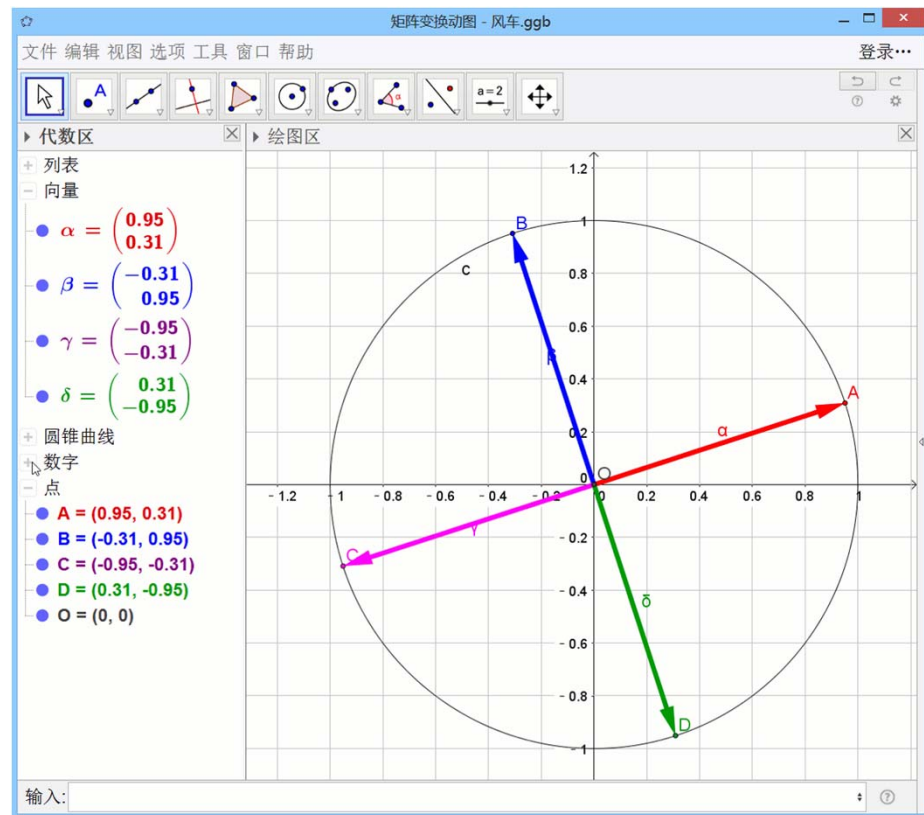
3.  $\overrightarrow{OC} = P_2 \cdot \overrightarrow{OA}$

4.  $\overrightarrow{OD} = P_3 \cdot \overrightarrow{OA}$

5. 运算  $R \cdot \overrightarrow{OA}$ , 其中  $R$  为初等矩阵乘积

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

### 软件实现(几何作图)



### 3.3 初等矩阵在机械臂控制的应用:

- 在机器人学中, **D-H (Denavit–Hartenberg) 参数法**是控制链式机械臂关节的一种重要的数学方法.
- 通过若干4阶矩阵控制机械臂完成指定动作.
- 例如: 下述矩阵就是**3个初等矩阵(倍加)的乘积**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{4,1}(a) \cdot E_{4,2}(b) \cdot E_{4,3}(c)$$



- [1].Denavit, Jacques; Hartenberg, Richard Scheunemann (1955). "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices". Trans ASME J. Appl. Mech. 23: 215–221.
- [2].梶田秀司.仿人机器人[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008

# 本讲小结

## 概念:

单位矩阵  $I_n$

对换变换

对换矩阵

倍乘变换

倍乘矩阵

倍加变换

倍加矩阵

(一次初等变换)

初等矩阵



## 结论:

初等变换

等价关系

初等矩阵

操作层面  
 $A \rightarrow B$

计算层面  
 $PA=B$   
 $AQ=B$

### ➤ 两个方面的统一

- 理论与实践的对立与统一
- 对三种初等矩阵给出统一的证明方法

### ➤ 一语三关的口诀

**左行右列**

- 初等矩阵与初等变换的关系
- 倍加矩阵的产生方式
- 倍加矩阵乘法的效果

## 应用:

初等矩阵在图像处理、图形变换、机械手臂控制等实际问题中的应用

# 拓展提问:

## 3.2初等矩阵在图形模拟与变换中的应用:

数学建模(代数运算)

软件实现(几何作图)

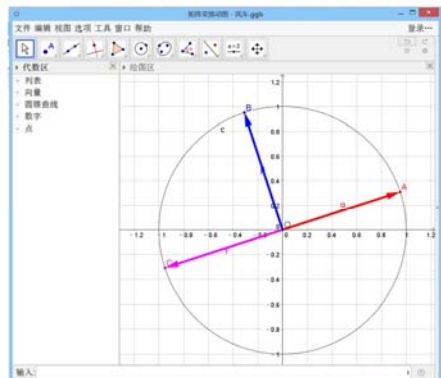
1.  $\mathbb{R}^2$ 单位圆上任取向量 $\overrightarrow{OA}$

2.  $\overrightarrow{OB} = P_1 \cdot \overrightarrow{OA}$

3.  $\overrightarrow{OC} = P_2 \cdot \overrightarrow{OA}$

其中,  $P_2$ 为初等矩阵乘积

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



## 3.3 初等矩阵在机械臂控制的应用:



• 例如: 下述矩阵就是3个初等矩阵(倍加)的乘积:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{4,1}(a) \cdot E_{4,2}(b) \cdot E_{4,3}(c)$$

若干个初等矩阵的乘积是什么数学对象?



分块倍乘矩阵  $\begin{bmatrix} P & O \\ O & I \end{bmatrix}$

“特定”矩阵是什么要求?