《线性代数》

2019秋

第五章 向量空间理论

§5.2 向量组的线性相关性

杨晶 主讲

内容提要

- 线性相关与线性无关的概念
- 线性相关性的几何解释
- 线性相关性的方程组解释
- 向量组在相关性意义下的内部联系

(零)、引言：复习与思考

子空间、生成子空间的概念是由代数方式给出的，那它们有什么样的几何意义呢？

请思考，在三维空间$\mathbb{R}^3$中：

- 一个向量生成的子空间$L(\vec{\alpha}_1)$对应什么图形？
- 两个向量生成的子空间$L(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)$对应什么图形？
- 三个向量生成的子空间$L(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)$对应什么图形？

- 你的答案是否唯一？　如果不唯一，是什么原因造成的呢？

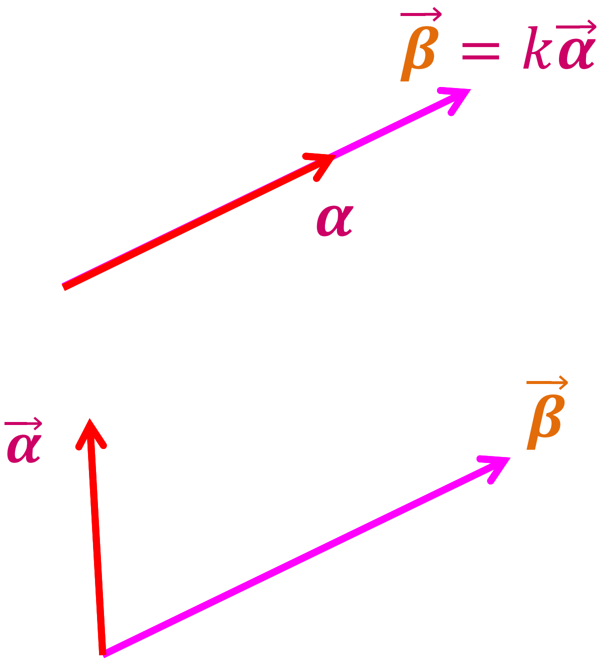
——这正是我们本讲要讨论与分析的内容，

即“向量组的线性相关性”.

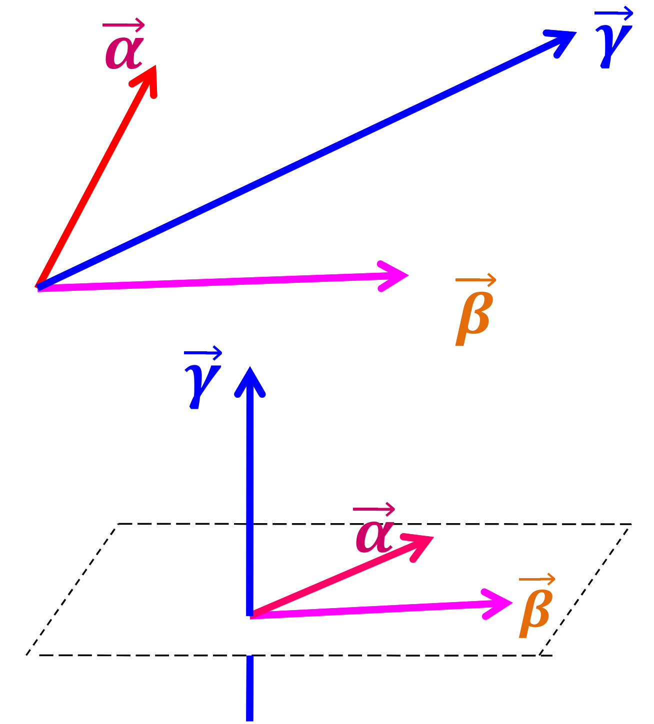
(零)、引言

几何方面: 在$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$中, 常有关于向量的共线，共面的问题.

- 两个向量共线与不共线



- 三个向量共面与不共面



线性方程组方面：求解过程中，并不是所有方程都是必须的.

- 三元线性方程组

$$\begin{cases} x + \quad + z = 0 \\ \qquad y + z = 0 \\ x + y \qquad = 0 \end{cases}$$

的同解方程是

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

一个方程也不能少！

- 三元线性方程组

$$\begin{cases} x + \quad + z = 0 \\ \quad - y + z = 0 \\ x + y \qquad = 0 \end{cases}$$

的同解方程是

$$\begin{cases} \quad - y + z = 0 \\ x + y \qquad = 0 \end{cases}$$

第一个方程是多余的！

矩阵行列式方面：对于三阶方阵$A=(a_{ij})_{3\times3}$, A可逆 $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$.

- 若$\det A \neq 0$, 则经过初等变换后，A可化为单位阵I_3, 即

$$A^{-1}A=(P_s\cdots P_1)A=I_3$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

没有全零行(列).

- 若$\det A = 0$, 则经初等行变换化为简化阶梯形后，主元个数$r<3$, 再经初等列变换后，A可化为

$$A\longrightarrow\begin{bmatrix}I_r&O\\O&O\end{bmatrix}$$

有全零行和全零列.

三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

有非零解.

有方程个数更少的同解方程组

缩水

$\mathbb{R}^3$中三个向量

$$\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},\vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

共面.

可以由更少的向量张成平面

缩水

矩阵&行列式

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = 0$$

初等变换后可化为 $\begin{vmatrix} I_r & O \\ O & O \end{vmatrix}=0$

缩水

问题：(1) 上述三件事是否有联系？ (2) 同时“缩水”是偶然or必然？

(3) 推广到 n 维情形如何？

(一)、向量组线性相关与线性无关的概念

首先，我们从代数的角度来刻画3维空间中向量共线与共面的问题. 找出规律后，进一步推广到一般的 n维空间.

- 两个向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 存在数k, 使 $\vec{\alpha} = k\vec{\beta}$ 或 $k\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

  $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 k_1, k_2, 使 $k_1\vec{\alpha} + k_2\vec{\beta} = \vec{0}$.

- 三个向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 共面$\Leftrightarrow$ $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$中某一个可被另外两个线性表出

  $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3 使 $k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + k_3\vec{\alpha}_3 = \vec{0}$.

下面，我们将共线、共面的概念推广到n维空间中. 由于高维空间中几何意义很难想像，所以主要从代数的角度来推广并刻画.

定义1 给定向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中 s 个向量$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$, 若存在不全为零的常数 $k_1, k_2,\ldots, k_s$ 使得

$$k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_s\vec{\alpha}_s=\vec{0}.$$

则称这个向量组线性相关(linearly dependent);

否则, 称这个向量组线性无关(linearly independent).

首先解释一下定义中的“否则”, 即

$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\ \vec{\alpha}_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 只有全零的k_i，使得 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_s\vec{\alpha}_s=\vec{0}.$

下面考虑最简单的一种情况:

判则1. 对于只有一个向量$\vec{\alpha}$的向量组有, $\vec{\alpha}$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ $\vec{\alpha}=\vec{0}$;

$\vec{\alpha}$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$.

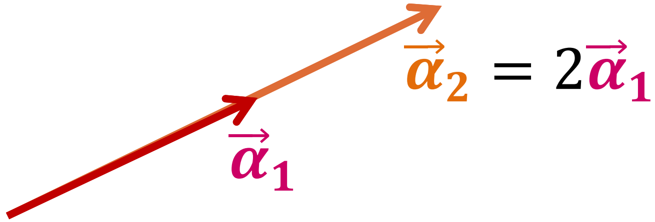
证明: $\because k\vec{\alpha}=\vec{0}, k\neq 0, \ \therefore \vec{\alpha}=\vec{0}$.

反之, 显然.

判则2. 若两个向量$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$的对应分量成比例，则$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$是线性相关的.

从几何角度, 共线的向量必线性相关.

例如, 例1中的 $\vec{\alpha}_1=(1,2)^{\mathrm{T}}$,$\vec{\alpha}_2=(2,4)^{\mathrm{T}}$, 在$\mathbb{R}^2$中是共线的, 它们也是线性相关的.



以上讨论了一个向量与两个向量的简单情形，下面考虑一种特殊情况:

判则3. 任一含有零向量$\vec{0}$的向量组都线性相关.

证明: 设$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$中有一个零向量. 不妨设$\vec{\alpha}_1=\vec{0}$，于是有不全为零的系数$1,0,0,\cdots,0$使得

$$1\vec{\alpha}_1+0\vec{\alpha}_2+\cdots+0\vec{\alpha}_s=\vec{0},$$

所以，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性相关. ■

接下来，我们再来看一个例子.

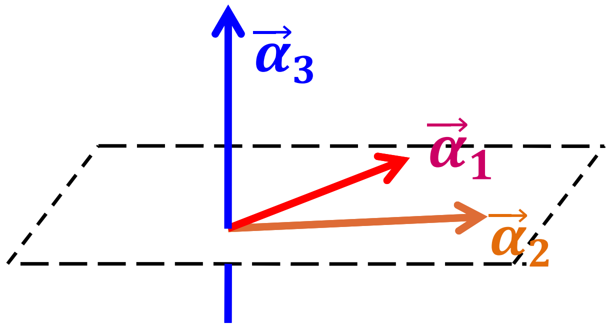
推广到一般情形.

判则4. $\mathbb{R}^n$中的向量组 (也称为：自然基)

$$\vec{e}_1=(1,0,\cdots,0)^T,\vec{e}_2=(0,1,0,\cdots,0)^T,\cdots,\vec{e}_n=(0,\cdots,0,1)^T$$

是线性无关的.

从几何上看, 3维空间中的自然基就是我们熟悉的直角坐标系, 它们是不共面的. 而n维空间中的自然基$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\}$, 就是2, 3维空间的直角坐标系的推广, 它们可以起到坐标系的作用, 它们是线性无关的.



➢ 进一步判断向量的线性相关性

线性相关性是向量之间的一种非常重要的关系．那么除了利用定义来判断给定向量组的线性相关性之外，我们还要通过进一步深入分析，得到其它性质，不仅可以加深我们对向量组线性相关性的认识，而且可以得到更多的判别相关性的方法.

下面，我们将从三维空间中的几何意义，以及线性方程组的角度来进一步讨论向量组的线性相关性.

(二)、线性相关性的几何解释

判则5. 设$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$都是3维向量, 则

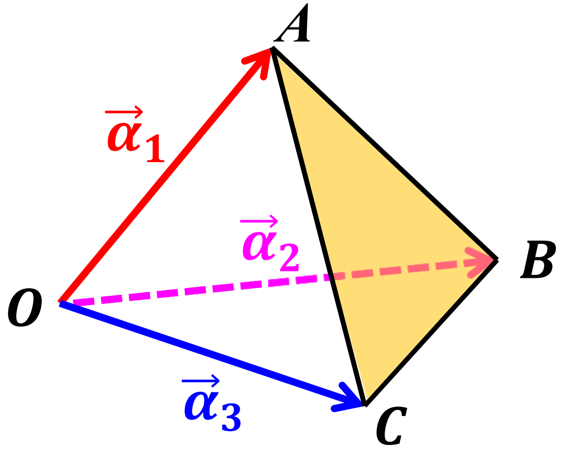
1. 若$\vec{\alpha}_1$ 线性相关，则$\vec{\alpha}_1=\vec{0}$.
2. 若$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$线性相关$\Leftrightarrow$ $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 共线.
3. 若$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性相关$\Leftrightarrow$ $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$共面.

例3. 已知$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性无关，试判断

(1). $\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_3-\vec{\alpha}_1$;

(2). $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_1$的线性相关性，并给出证明.

(1) 几何分析:



代数证明:

因为

$$(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)+(\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_3)+(\vec{\alpha}_3-\vec{\alpha}_1)=\vec{0},$$

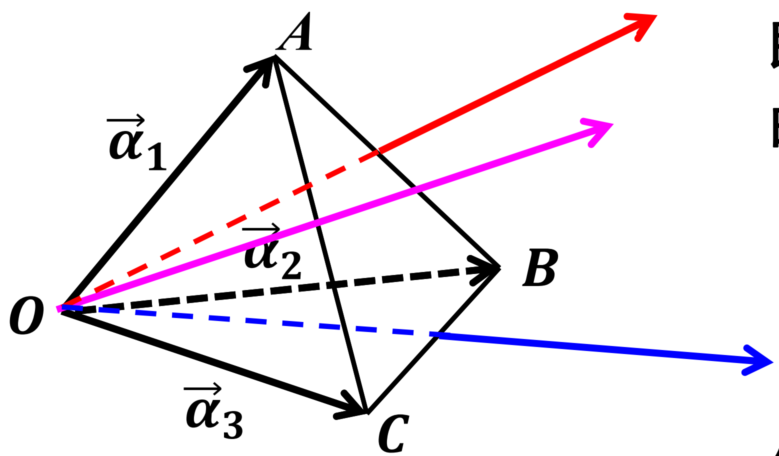
系数1, 1, 1不全为零，所以$\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_3-\vec{\alpha}_1$线性相关. ■

例3. 已知$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性无关，试判断

(1). $\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_3-\vec{\alpha}_1$;

(2). $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_1$的线性相关性，并给出证明.

(2) 几何分析：



代数证明：

设 $k_1(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)+k_2(\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3)+k_3(\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_1)=\vec{0}$,

即 $(k_1+k_3)\vec{\alpha}_1+(k_1+k_2)\vec{\alpha}_2+(k_2+k_3)\vec{\alpha}_3=\vec{0}$.

由于$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性无关，有

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0, \end{cases}$$

问题归结为解齐次线性方程组

解这个齐次方程组得$k_1=k_2=k_3=0$,

因此$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_1$线性无关.

➢ 课后思考练习

1、已知$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$线性无关. 试判断：
$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_4,\vec{\alpha}_4+\vec{\alpha}_1$的线性相关性.

2、已知$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n$线性无关. 试判断：
$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3,\cdots,\vec{\alpha}_{n-1}+\vec{\alpha}_n,\vec{\alpha}_n+\vec{\alpha}_1$的线性相关性.

3、你发现了什么规律？

(三)、线性相关性的方程组解释

- 按线性相关定义, 决定n维向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$的线性相关性就等价于决定向量方程$x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+\cdots+x_s\vec{\alpha}_s=\vec{0}$, 是否有非零解? 如果令

$$A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s),\quad \vec{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_s)^T,$$

则上式可表示成 $A_{n\times s}\vec{X}=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s)\vec{X}=\vec{0},$

判则6. s 个n 维向量 $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix},\cdots,\vec{\alpha}_s=\begin{bmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{bmatrix}$

线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $A_{n\times s}\vec{X}=\vec{0}$ 有非零解.

线性无关 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $A_{n\times s}\vec{X}=\vec{0}$ 只有零解.

由判则6，我们可利用齐次线性方程组的相关结论来判断向量组的线性相关性，从而有如下结论：

判则7. 对于 n 个 n 维向量 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n$，设$A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n)$，则

- $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n$线性相关 $\Longleftrightarrow$ $|A|=0$ $\Longleftrightarrow$ A 奇异 (不可逆);
- $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n$线性无关 $\Longleftrightarrow$ $|A|\neq 0.$ $\Longleftrightarrow$ A 非奇异 (可逆).

判则8. 如下的“阶梯形”向量组线性无关：

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \vec{\alpha}_s=\begin{bmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ss} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (a_{ii}\neq 0, i=1,2,\dots,s)$$

判则9. $\mathbb{R}^n$ 中任意多于n个向量的向量组必定线性相关.

证明： 设$s>n$, 任取 s 个 n 维向量，如下：

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix},\cdots,\vec{\alpha}_s=\begin{bmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{bmatrix}$$

并设 $A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s)$, $\vec{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_s)^T$.

则对应的齐次线性方程组$A\vec{X}=\vec{0}$ 的未知量个数$s>$方程个数n，由3.2节的结论知，齐次线性方程组有非零解, 故向量组线性相关. ■

例4 a 取何值时，$\vec{\beta}_1=(1,3,6,2)^T,\vec{\beta}_2=(2,1,2,-1)^T,\vec{\beta}_3=(1,-1,a,-2)^T$ 线性无关？

解 设 $x_1\vec{\beta}_1+x_2\vec{\beta}_2+x_3\vec{\beta}_3=\vec{0}$ (*)

$$(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3)=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&1&-1\\6&2&a\\2&-1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-5&-4\\0&-10&a-6\\0&-5&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-5&-4\\0&0&a+2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

当 $a\neq-2$ 时，方程组(*)只有零解 $x_1=x_2=x_3=0$,

此时，$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3$ 线性无关.

(四)、向量组在相关性意义下的内部联系：1. 增减关系

线性相关性表示了向量之间的相互联系. 首先，我们来讨论向量组的**数量**发生增减时，向量组的线性相关性的变化规律。

判则10. 若向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 中有一部分向量线性相关，则该向量组线性相关.

(等价命题): 若向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 线性无关，则其任一部分组都是线性无关的.

证明: 不妨设 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r$ 线性相关$(r \le s)$, 于是有不全为零的数 k_1, $k_2,\ldots, k_r$ 使 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_r\vec{\alpha}_r=\vec{0}$,

从而有 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_r\vec{\alpha}_r+0\vec{\alpha}_{r+1}+\cdots+0\vec{\alpha}_s=\vec{0}$,

这就证明了 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 线性相关. ■

回顾：向量组的线性相关性与齐次线性方程组

判则6. 设$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$为$n$维列向量$A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s),\vec{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_s)^T$,

$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $A_{n\times s}\vec{X}=\vec{0}$ 有非零解.

$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性无关 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $A_{n\times s}\vec{X}=\vec{0}$ 只有零解.

用齐次线性方程组的观点来看判则10, 向量组中向量的个数s对应了齐次线性方程组中未知量的个数。向量数增加，对应了未知量的个数增加，从而有自由未知量的可能也增加，于是有非零解的可能也增加，对应向量组线性相关的可能也增加. 简言之，从**数量上来看**，向量越多越容易相关；反之，向量越少越容易无关.

判则10. 部分组相关 $\Rightarrow$ 向量组相关;
(简化版) 向量组无关 $\Rightarrow$ 部分组无关;

接下来，我们来讨论向量组的维数 (长度) 发生增减时，向量组的线性相关性的变化规律。

判则11. 若向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 线性相关，则把每个向量去掉相同位置的分量，得到的截短向量组仍然线性相关.

(等价命题): 若向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 线性无关，则把每个向量增加相同数目相同位置的分量，得到的加长向量组仍然线性无关.

具体地，设 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s\in\mathbb{R}^m,\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_s\in\mathbb{R}^n$， 若令

$$\vec{\gamma}_1=\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1\\ \vec{\beta}_1\end{bmatrix},\vec{\gamma}_2=\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_2\\ \vec{\beta}_2\end{bmatrix},\cdots,\vec{\gamma}_s=\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_s\\ \vec{\beta}_s\end{bmatrix},$$ 为一组 $m+n$ 维向量，于是

(1) $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性无关，则 $\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\cdots,\vec{\gamma}_s$ 线性无关；

(2) $\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\cdots,\vec{\gamma}_s$ 线性相关，则 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 线性相关.

判则11.	原向量组相关 ⇒ 截短向量组相关.
(简化版):	原向量组无关 ⇒ 加长向量组无关.

用齐次线性方程组的观点来看判则11:

- 减少向量分量相当于减少方程个数，从而方程组的解集扩大，原来已有非零解，变化后更有非零解了;
- 反之，增加向量分量相当于增加方程个数，从而方程组的解集缩小，原来已只有零解，变化后依然只有零解.
- 简言之，从维数(长度)上来看，向量越短越容易相关; 反之，向量越长越容易无关.

(四)、向量组在相关性意义下的内部联系: 2. 表出关系

之前我们在讨论3维空间中2个向量共线的问题时，有如下结论:

- 两个向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 存在数k, 使 $\vec{\alpha} = k\vec{\beta}$ 或 $k\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

  $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 k_1, k_2, 使 $k_1\vec{\alpha} + k_2\vec{\beta} = \vec{0}$.

对于一般n维空间中2个向量的线性相关性问题，也有类似的结论，即

- 如果两个向量 $\vec{\alpha}$和 $\vec{\beta}$线性相关, 则有不全为零的数 k_1, k_2使得

$$k_1\vec{\alpha} + k_2\vec{\beta} = 0,$$

若 $k_1 \neq 0$，则有 $\vec{\alpha} = -\dfrac{k_2}{k_1}\vec{\beta}$;　　若 $k_2 \neq 0$，则有 $\vec{\beta} = -\dfrac{k_1}{k_2}\vec{\alpha}$.

- 反之也成立.

下面的结论说明：对于$s \geq 2$个向量，线性相关与线性表出有等价关系.

判则12. n 维向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s\ (s \geq 2)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 存在一个向量可由其余的向量线性表出.

(等价命题): n 维向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s\ (s \geq 2)$线性无关 $\Leftrightarrow$ 任何向量都不能由其余向量线性表出.

形象地理解：

- 当某个向量可由其他向量线性表出时，它就可有可无的，或是多余的，即便没有它，也可以通过其他向量的线性组合得到其信息；
- 而当某个向量都不能由其余向量线性表出时，则它就是必须有的，若没有它，我们就会丢失无法恢复的信息.

判则12的证明：

如果 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 线性相关，由定义知存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\ldots,k_s$ 使得 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_s\vec{\alpha}_s=\vec{0}$,

不妨设 $k_i\neq 0$, 于是

$$\vec{\alpha}_i=-\frac{k_1}{k_i}\vec{\alpha}_1-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\vec{\alpha}_{i-1}-\frac{k_{i+1}}{k_i}\vec{\alpha}_{i+1}-\cdots-\frac{k_s}{k_i}\vec{\alpha}_s,$$

即有, $\vec{\alpha}_i$ 可由 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_{i-1},\vec{\alpha}_{i+1},\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性表出.

反之，如果 $\vec{\alpha}_j$ 可由 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_{j-1},\vec{\alpha}_{j+1},\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 线性表出,

$$\vec{\alpha}_j=l_1\vec{\alpha}_1+\cdots+l_{j-1}\vec{\alpha}_{j-1}+l_{j+1}\vec{\alpha}_{j+1}+\cdots+l_s\vec{\alpha}_s,$$

$$\Rightarrow l_1\vec{\alpha}_1+\cdots+l_{j-1}\vec{\alpha}_{j-1}-\vec{\alpha}_j+l_{j+1}\vec{\alpha}_{j+1}+\cdots+l_s\vec{\alpha}_s=\vec{0},$$

故$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 线性相关. ■

(四)、向量组在相关性意义下的内部联系：3. 临界关系

由之前的讨论知，以下事实成立：

- 向量的个数越多越容易线性相关，
- 当向量数量足够多时，如：向量个数s大于维数n时，向量组必然线性相关.

那么，从一个无关的向量组开始，不断往向量组中添加新的向量，一定有在某一步，就从线性无关的状态变为线性相关的，我们就把这一步称为临界情形. 下面的结论说明：临界情形下添加的向量，可被唯一地线性表出.

判则13. 设 n 维向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 线性无关, 而 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s, \vec{\beta}$线性相关, 则 $\vec{\beta}$ 可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s$线性表出，且表示法唯一.

证明：(1) 先证表出性

由$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$, $\vec{\beta}$线性相关知, 存在不全为0的数$k_1, \ldots, k_s, l$, 使得

$$k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_s\vec{\alpha}_s+l\vec{\beta}=\vec{0}.$$

若$l=0$，则存在不全为0的数$k_1, \ldots, k_s$, 使得

$$k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_s\vec{\alpha}_s=\vec{0}.$$

这与$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性无关矛盾，因此$l\neq 0$, 于是有：

$$\vec{\beta}=-\frac{k_1}{l}\vec{\alpha}_1-\frac{k_2}{l}\vec{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_s}{l}\vec{\alpha}_s,$$

即$\vec{\beta}$可由$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$线性表出.

(2) 再证唯一性．设

$$\vec{\beta} = x_1\vec{\alpha}_1 + x_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + x_s\vec{\alpha}_s,$$

$$\vec{\beta} = y_1\vec{\alpha}_1 + y_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + y_s\vec{\alpha}_s.$$

则

$$(x_1 - y_1)\vec{\alpha}_1 + (x_2 - y_2)\vec{\alpha}_2 + \cdots + (x_s - y_s)\vec{\alpha}_s = \vec{0}.$$

由于$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s$线性无关，因此:

$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \cdots = x_s - y_s = 0,$$

即

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \cdots, x_s = y_s,$$

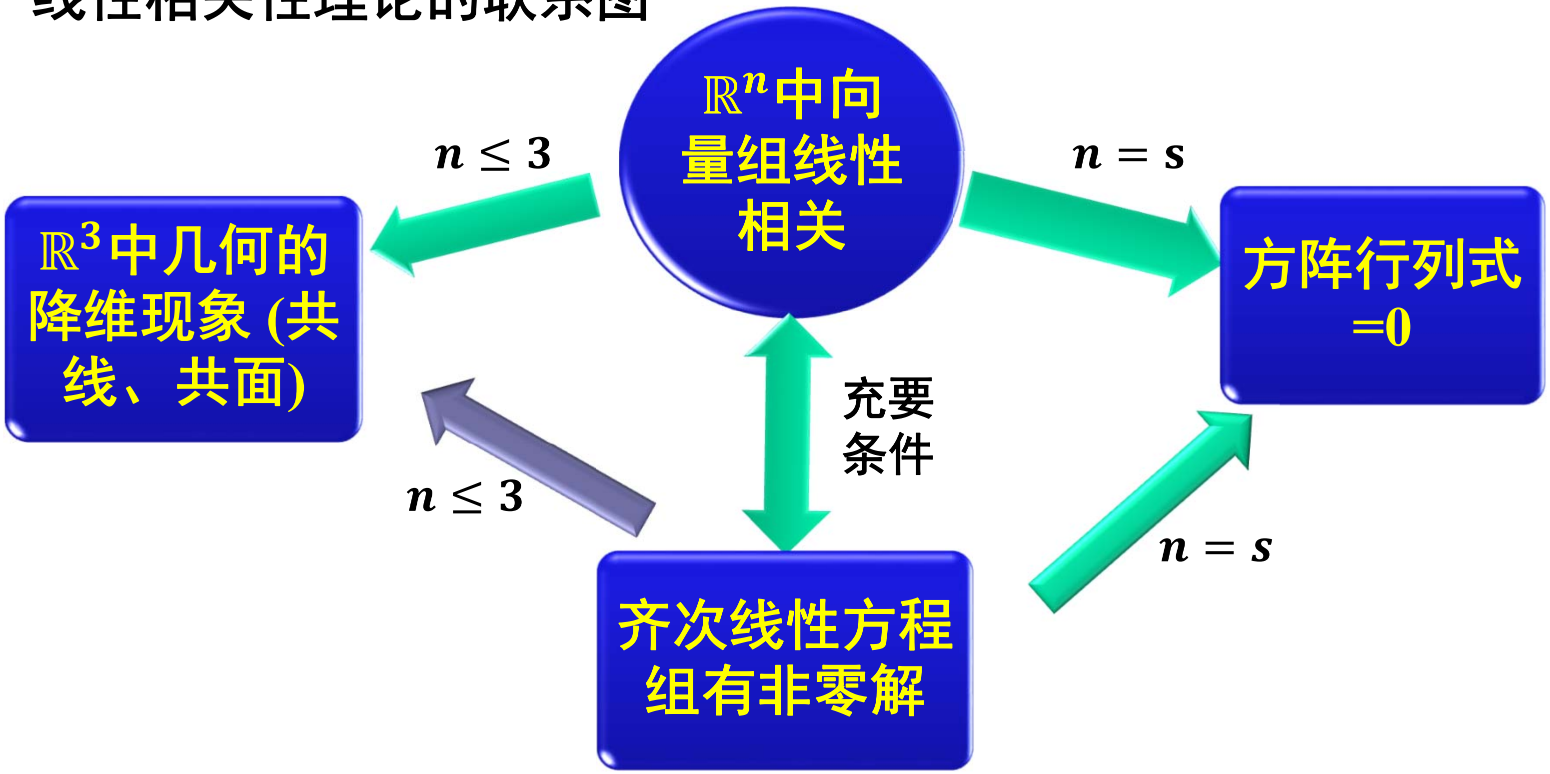
唯一性得证. ■

本讲小结

- 线性相关与线性无关的概念
  - 线性组合等于零，有非零(只有全零)系数
- 线性相关性的几何解释
  - 线性相关 $\Leftrightarrow$ 三维空间中的共线、共面
- 线性相关性的方程组解释
  - 线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 有非零解;
  - 线性无关 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 只有零解.

本讲小结

- 线性相关性理论的联系图



本讲小结

向量组在线性相关性意义下的内部联系.

- **增减关系**

  数量上: 部分组相关 $\Rightarrow$ 向量组相关;
  向量组无关 $\Rightarrow$ 部分组无关.

  维数上: 原向量组相关 $\Rightarrow$ 截短向量组相关;
  原向量组无关 $\Rightarrow$ 加长向量组无关.

- **表出关系**

  线性相关 $\Leftrightarrow$ 存在向量可由其余的向量线性表出.
  线性无关 $\Leftrightarrow$ 任何向量都不能由其余向量线性表出.

- **临界关系**

  临界情形下添加的向量, 可被原向量组唯一地线性表出.

思考问题: 临界情形何时出现? 临界情形是否唯一?