

2019秋

《线性代数》

第二章 行列式

§ 2.4 克莱姆(Cramer)法则



杨晶 主讲

内容提要

- 回顾：利用2、3阶行列式给出二元、三元线性方程组的求解公式
- Cramer法则： n 元线性方程组的求解公式
- Cramer法则的适用范围及应用



回顾：含参二元一次方程组求解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow$$

当 $D \neq 0$ 时, $x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$

其中 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$

回顾：含参三元一次方程组求解

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{13}\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{23}\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_{31}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{32}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{33}\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_3 \end{cases} \Rightarrow$$

当 $D \neq 0$ 时, $\mathbf{x}_1 = \frac{\mathbf{D}_1}{D}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{\mathbf{D}_2}{D}, \quad \mathbf{x}_3 = \frac{\mathbf{D}_3}{D}$.

其中

$$D = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{b}_3 & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

Cramer法则： n 元线性方程组的求解公式

根据上述2、3元线性方程组的求解公式，推测对于一般 n 元情况有类似结果

定理1(Cramer) 若线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 则方程组有唯一解:

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (*)$$

其中 D_j 是由线性方程组的常数列替换 D 中第 j 列元素所得到的行列式.

证明：(1) 存在性. 下证(*)式满足方程组. 只验证第一个方程. 其它同理.

方法一：把 D_j 按照第 j 列展开，可得：

$$D_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

把 $x_j = D_j / D$ 代入第一个方程左边，得

$$\begin{aligned} & a_{11}(D_1 / D) + a_{12}(D_2 / D) + \cdots + a_{1n}(D_n / D) \\ &= \frac{1}{D} [a_{11}(b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1}) + a_{12}(b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \cdots + b_n A_{n2}) \\ & \quad + \cdots \cdots + a_{1n}(b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn})] \\ &= \frac{1}{D} [b_1(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}) + b_2(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \cdots + a_{1n}A_{2n}) \\ & \quad + \cdots \cdots + b_n(a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \cdots + a_{1n}A_{nn})] = \frac{1}{D} \times b_1 \times D = b_1. \end{aligned}$$

方法二：若 $x_j = D_j / D$ 满足第一个方程，即

$$a_{11}(D_1 / D) + a_{12}(D_2 / D) + \cdots + a_{1n}(D_n / D) = b_1$$

$$\Leftrightarrow \underline{b_1 D} - \underline{a_{11} D_1} - \cdots - \underline{a_{1j} D_j} - \cdots - \underline{a_{1n} D_n} = 0$$

考虑下面 $n+1$ 阶行列式，并将其按第一行展开，得：

$$\left| \begin{array}{cccccc} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \hline b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| = b_1 D - a_{11} D_1 - \cdots - a_{1j} D_j - \cdots - a_{1n} D_n$$

= 上式左边

(2) 唯一性：设 (c_1, c_2, \dots, c_n) 为原方程组的解，下证必有 $c_j = D_j / D$.

由于 $a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \dots + a_{in}c_n = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$

故 $\sum_{i=1}^n (a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \dots + a_{in}c_n)A_{ij} = \sum_{i=1}^n b_i A_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$

即 $c_1 \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{ij} + \dots + c_n \sum_{i=1}^n a_{in} A_{ij} = D_j \quad (j = 1, 2, \dots, n).$

$$c_j D = 0 + \dots + 0 + c_j \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} + 0 + \dots + 0 = D_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Rightarrow c_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$



克莱姆 (Cramer,Gabriel, 瑞士数学家 1704-1752)

1704年7月31日生于日内瓦，早年在日内瓦读书，1724 年起在日内瓦加尔文学院任教，1734年成为几何学教授，1750年任哲学教授。他自 1727年进行为期两年的旅行访学。在巴塞尔与约翰. 伯努利、欧拉等人学习交流，结为挚友。后又到英国、荷兰、法国等地拜见许多数学名家，回国后在与他们的长期通信 中，加强了数学家之间的联系，为数学宝库也留下大量有价值的文献。他一生未婚，专心治学，平易近人且德高望重，先后当选为伦敦皇家学会、柏林研究院和法国、意大利等学会的成员。主要著作是《代数曲线的分析引论》（1750）。为了确定经过5 个点的一般二次曲线的系数，应用了著名的“克莱姆法则”，即由线性方程组的系数确定方程组解的表达式。



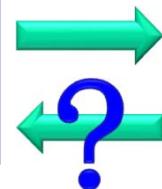
推论：若 n 个变量， n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$ ，则方程组只有零解： $x_j = 0, (j = 1, 2, \dots, n)$.

等价推论：

n 个变量， n 个方程的齐次
线性方程组有非零解.



系数行列式 $D = 0$

将来会给出答案

例1 用克莱姆法则解方程组
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_2 + 4x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11/6, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5/6. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 67 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \\ 11/6 & 1 & 1 & 1 \\ 5/6 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{67}{3}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 11/6 & 1 & 1 \\ 1 & 5/6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 11/6 & 1 \\ 1 & -1 & 5/6 & 2 \end{vmatrix} = \frac{67}{2}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 11/6 \\ 1 & -1 & -3 & 5/6 \end{vmatrix} = 67,$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 0, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{2}, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = 1.$$

使用Cramer法则求解线性方程组方法的特点有：

- A 只适用于方程个数 = 未知数个数的方程组
- B 只适用于系数行列式 $D \neq 0$ 的情形
- C 求解公式简洁, 结果可表示为系数与常数的显式函数(显式解)
- D 一般情况下需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式, 计算量较大

关于Cramer法则

缺点

优点

只适用于系数矩阵为方阵

理论证明中有重要作用

只能解 $D \neq 0$ 的方程

显式解

$n+1$ 个 n 阶行列式，计算量大

系数含有参数时，比较有效



Cramer法则应用举例

例2 设 $P_i = (x_i, y_i)$, $i=1, 2, 3$, 为平面上不共线的三点, 且 x_1, x_2, x_3 两两互不相等, 求过点 P_1, P_2, P_3 的二次曲线 $y = ax^2+bx+c$.

解: 将 $P_i = (x_i, y_i)$ 代入曲线方程 $y = ax^2+bx+c$, 得

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3. \end{cases}$$

这是一个以 a, b, c 为未知量的线性方程组, 其系数行列式为:

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$



x_1, x_2, x_3 互不相等

$$D_1 = \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$



P_1, P_2, P_3 不共线

$$\Rightarrow a = \frac{D_1}{D} \neq 0, \quad b = \frac{D_2}{D}, \quad c = \frac{D_3}{D},$$

$$\Rightarrow y = ax^2 + bx + c$$

$$= \frac{1}{D} \underline{(D_1 x^2 + D_2 x + D_3)}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 & 0 \\ x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{vmatrix}$$

本讲小结

- Cramer法则: n 元线性方程组的求解公式
- Cramer法则的适用范围:
 - 方程个数 $m =$ 未知数个数 n
 - 系数行列式 $D \neq 0$
 - 含参数，理论证明

