《线性代数》

2019秋

第四章 矩 阵

§4.4 分块矩阵

杨晶 主讲

内容提要

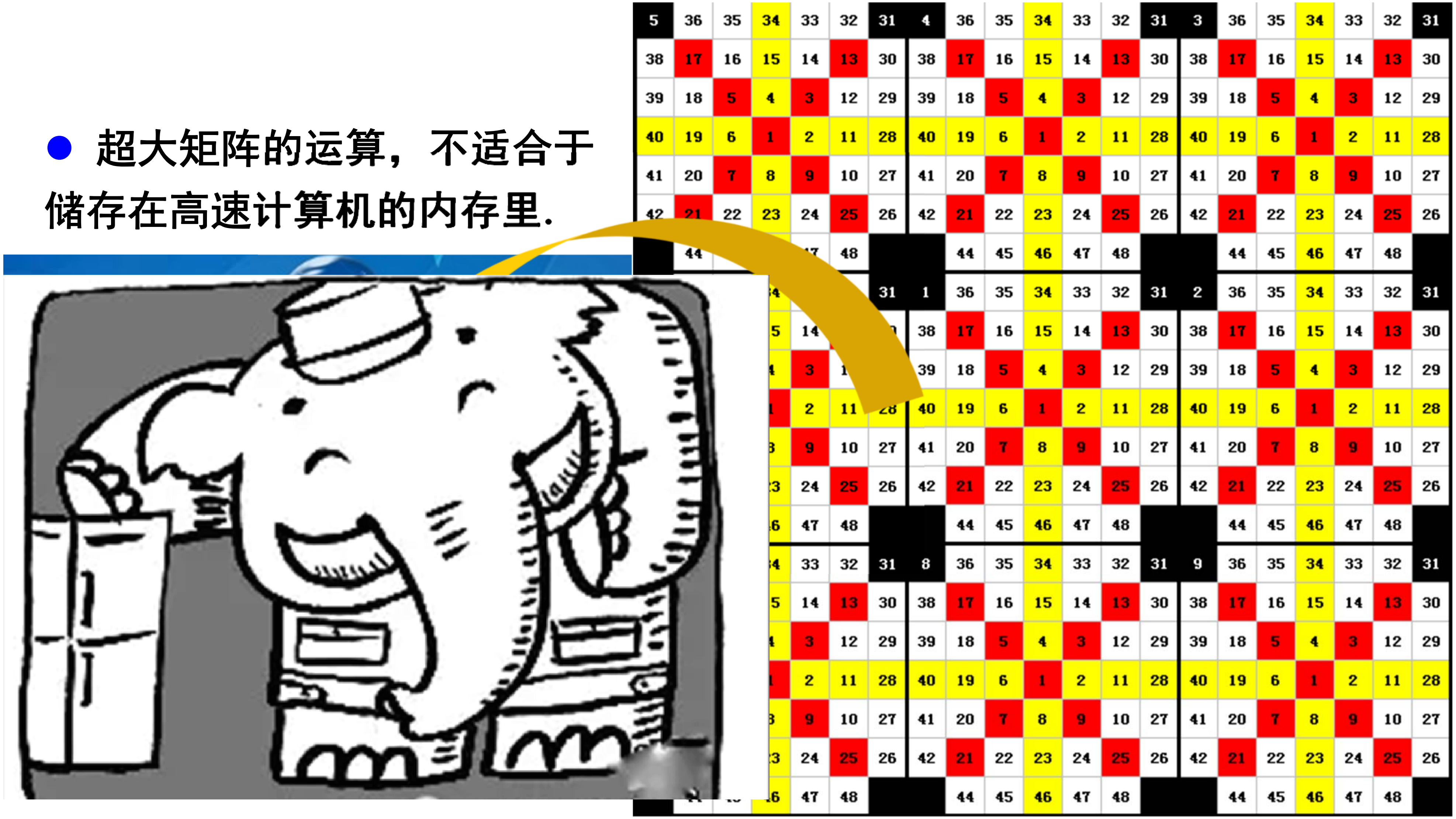
- 分块矩阵的概念
- 常用的矩阵分块方式
- 矩阵分块的主要原则
- 分块矩阵的运算
- 几类特殊的分块矩阵

(一) 分块矩阵的概念

- 在处理有特点的大矩阵时，需要进行分块处理，如：

$$\left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right| = \begin{vmatrix} A & O \\ -I & B \end{vmatrix}$$

- 超大矩阵的运算，不适合于储存在高速计算机的内存里.



● 运用分块矩阵，允许计算机处理小块的子矩阵，使得我们处理超大矩阵的运算成为可行的.

定义1： 对一个$m \times n$的矩阵A，用若干横线和竖线把A的行分成 p 个部分，列分成 q 个部分，整个矩阵A分成 pq 个小矩阵，即

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}$$

其中每个小矩阵 A_{ij} $(1 \le i \le p,\ 1 \le j \le q)$ 称为矩阵 A 的子块，A也可视为由子块 A_{ij} 构成的 $p \times q$ 阶矩阵，称为分块矩阵 (block matrix).

单选题 1分

设置

下述符号 A_{ij} 表示的意义与其它选项不一样的是(　　)

A $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{ij} = \delta_{ik} D.$

B $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

C $A_{ij} = 0$

D $A_{ij} = (0)$

提交

(二) 常用分块方式

- 分成四块， 例如：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

- 按列分块，　例如：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=\left(A_1, A_2, A_3, A_4\right)$$

- 按行分块，　例如：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

(三) 矩阵分块的三个原则

(1) 体现原矩阵特点, 按需划分

(2) 能够把子块看作元素进行运算 (除乘法的次序外)

(3) 保持原有运算性质

例1

$$A=\left[\begin{array}{c:cc} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right],\quad B=\left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right],\quad AB=\left[\begin{array}{cc:ccc} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 5 & 9 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(四) 分块矩阵的运算

1. 分块矩阵的加法： 设分块矩阵 A 与 B 的行列数均相同 (同型矩阵), 且采用同样的分块方法, 即

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1q}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1q}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{p1} & \cdots & B_{pq} \end{bmatrix}$$

加法分块需全同.

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的行数和列数均相同 (同型矩阵), 则

$$A+B=\begin{bmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1q}+B_{1q}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p1}+B_{p1} & \cdots & A_{pq}+B_{pq} \end{bmatrix}.$$

2. 分块矩阵的数乘

设 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}$ (可任意分块), λ 是数, 则

$$\lambda A=\begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{bmatrix}.$$

数乘分块可任意.

例 $A=\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$, $\lambda=2$, 则 $2A=\left[\begin{array}{c|cc} 1\times 2 & 2\times 2 & 3\times 2 \\ \hline 3\times 2 & 2\times 2 & 1\times 2 \\ 4\times 2 & 5\times 2 & 6\times 2 \end{array}\right]$

3. 分块矩阵的转置

例2

$$A=\left[\begin{array}{c|cc}2&0&0\\1&0&0\\\hline 3&1&0\\2&0&1\end{array}\right],\quad\Rightarrow\quad A^{\mathrm{T}}=\left[\begin{array}{cc|cc}2&1&3&2\\\hline 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right].$$

将A与A^{T}如下分块，有

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix},\quad 其中\ A_{11}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},A_{12}=O_{2\times2},A_{21}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix},A_{22}=I_2.$$

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix},\quad 其中\ B_{11}=\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix},B_{12}=\begin{bmatrix}3&2\end{bmatrix},B_{21}=O_{2\times2},B_{22}=I_2.$$

$$\Rightarrow\quad A_{11}=B_{11}^{\mathrm{T}},A_{12}=B_{21}^{\mathrm{T}}=O_{2\times2},A_{21}=B_{12}^{\mathrm{T}},A_{22}=B_{22}^{\mathrm{T}}=I_2\quad\Rightarrow\quad A_{ij}=B_{ji}^{\mathrm{T}}$$

$$(1\le i,j\le 2)$$

设 $$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}_{m\times n}$$ 则分块矩阵A的转置为：

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{rs}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}_{n\times m}.$$

即，先将分块矩阵转置(子块的行列下标互换), 再对每一块子矩阵都做转置.

★ 4. 分块矩阵的乘法

设 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C_{m\times l}$，要求

- A 的列数 $=$ B 的行数$=n$
- A 的列的分法 $=$ B 的行的分法 (n的加法有序分拆)

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r1} & \cdots & C_{rt} \end{bmatrix},$$

$m\times n$　　　　$n\times l$

$(n_1+\dots+n_s) = (n_1+\dots+n_s)$

设 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C_{m\times l}$，则对乘积矩阵$C$，有

- C的行数及行分块法由A的行数及行分块法决定；C的列数及列分块法由B的列数及列分块法决定.
- C的每个子块 $C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{is}B_{sj}=\sum_{k=1}^{s}A_{ik}B_{kj}$, $\begin{pmatrix}1\le i\le r,\\ 1\le j\le t.\end{pmatrix}$

左行右列中求和
(注意A_{ik},B_{kj}次序)

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1s}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ A_{r1}&\cdots&A_{rs}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}B_{11}&\cdots&B_{1t}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ B_{s1}&\cdots&B_{st}\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}C_{11}&\cdots&C_{1t}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ C_{r1}&\cdots&C_{rt}\end{bmatrix},$$

分块乘法：
左行右列中同分

$$m\times n:\ \underline{(m_1+\ldots+m_r)}\times\underline{(n_1+\ldots+n_s)} \quad = \quad n\times l:\ \underline{(n_1+\ldots+n_s)}\times\underline{(l_1+\ldots+l_t)}$$

$$m\times l:\ \underline{(m_1+\ldots+m_r)}\times\underline{(l_1+\ldots+l_t)}$$

例1(续)

$$A=\left[\begin{array}{c:cc} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right],\ B=\left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right],\ AB=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\quad}^{2} & \overbrace{\qquad\qquad\quad}^{3} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc:ccc} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 5 & 9 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\}2 \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\}2 \end{array} \end{array}$$

A： $4\times 3\to$ $(2+2)\times(1+2)$

B： $3\times 5\to$ $(1+2)\times(2+3)$

AB： $4\times 5\to$ $(2+2)\times(2+3)$

验证：

$$C_{11}=\sum_{k=1}^{2}A_{1k}B_{k1}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\1 & 2\end{bmatrix}+O_{2\times 2}$$

$$C_{21}=\sum_{k=1}^{2}A_{2k}B_{k1}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\2 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 9\\2 & 6\end{bmatrix}$$

例1(续)

$$A=\left[\begin{array}{c|cc}2&0&0\\1&0&0\\\hline 3&1&0\\2&0&1\end{array}\right],\ B=\left[\begin{array}{cc|ccc}1&2&0&0&0\\\hline 2&3&1&3&1\\0&2&2&0&1\end{array}\right],\ AB=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overbrace{\quad\quad}^{2}&\overbrace{\quad\quad\quad}^{3}\end{array}\\\left[\begin{array}{cc|ccc}2&4&0&0&0\\1&2&0&0&0\\\hline 5&9&1&3&1\\2&6&2&0&1\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\}2\\\}2\end{array}$$

A：$4\times3\rightarrow$
$\underline{(2+2)}\times(1+2)$

B：$3\times5\rightarrow$
$(1+2)\times\underline{(2+3)}$

AB：$4\times5\rightarrow$
$\underline{(2+2)}\times\underline{(2+3)}$

验证：

$$C_{12}=\sum_{k=1}^{2}A_{1k}B_{k2}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&1\\2&0&1\end{bmatrix}=O_{2\times3}$$

$$C_{22}=\sum_{k=1}^{2}A_{2k}B_{k2}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&1\\2&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&1\\2&0&1\end{bmatrix}$$

例2 $AB = C$ **的不同理解:**

(1) $A_{m\times n}B_{n\times l}$

$$AB = C = (C_1, C_2, \cdots, C_l) \Rightarrow C_j = AB_j, \quad j = 1, \cdots, l.$$

(2) $$AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B \Rightarrow C_i' = A_i B, \quad i = 1, \cdots, m.$$

(3) $$AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} (B_1, B_2, \cdots B_l) = C \Rightarrow c_{ij} = A_i B_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \cdots, m; \ j = 1, \cdots, l.$$

例2 (续) 特别地，当$AB=O$时, 有

这种观点将来很有用！

$$AB=A(B_1,B_2,\cdots,B_l)=(AB_1,AB_2,\cdots,AB_l)=(\vec{0},\vec{0},\cdots,\vec{0})$$

$$\Rightarrow AB_j=\vec{0},\ \ j=1,\cdots,l.$$

说明 B 的每一列都是齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的一个解.

类似地，可以考虑 A 按行分块, 而 B 作为一整块的情形.

$$AB=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}A_1B\\A_2B\\\vdots\\A_mB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{0}^T\\\vec{0}^T\\\vdots\\\vec{0}^T\end{bmatrix}\quad\Rightarrow A_iB=\vec{0}^T,\ \ i=1,\cdots,m.$$

说明 A 的每一行的转置都是齐次线性方程组 $B^{\mathrm{T}}\vec{x}=\vec{0}$ 的一个解.

(五) 特殊的分块矩阵

● **准对角矩阵**

设A为方阵, 若 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{nn} \end{bmatrix}:=diag(A_{11},\cdots,A_{nn})$

其中，$A_{11},\cdots,A_{nn}$ 都是小方阵，则称A为<u>准对角矩阵 (block diagonal matrix)</u>.

注：准对角矩阵可作为对角矩阵的推广情形, 是最简单的一类分块矩阵.

例如 $A=\left[\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$, $B=\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B_{11} & O \\ O & B_{22} \end{bmatrix}$.

- **准上三角矩阵:**

设矩阵A的行与列均分为个n子块，且 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ O & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

则称A为**准上三角矩阵 (block upper triangular matrix)**.

- **准下三角矩阵:**

设矩阵A的行与列均分为个n子块，且 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

则称A为**准下三角矩阵 (block lower triangular matrix)**.

一般地，准三角形矩阵不一定是方阵，例如：例1中的

$$A=\left[\begin{array}{c|cc}2&0&0\\1&0&0\\\hline 3&1&0\\2&0&1\end{array}\right],\quad B=\left[\begin{array}{cc|ccc}1&2&0&0&0\\\hline 2&3&1&3&1\\0&2&2&0&1\end{array}\right],\quad AB=\left[\begin{array}{cc|ccc}2&4&0&0&0\\1&2&0&0&0\\\hline 5&9&1&3&1\\2&6&2&0&1\end{array}\right]$$

表示为分块矩阵的乘积为：

$$AB=\begin{bmatrix}A_{11}&O\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11}&O\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}&O\\A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}&A_{22}B_{22}\end{bmatrix}$$

注意做乘积时的次序

则乘积矩阵也为准下三角形矩阵. 更一般地, 在可乘的情况下，上式推导对所有分为4块的准下三角形矩阵均成立.

问题：对一般的准三角形矩阵，是否有类似的结论？

● 准三角形矩阵的运算性质

定理 在可运算的条件下，准上(下)三角形矩阵的加法, 数乘与乘法运算的结果仍是准上(下)三角形角矩阵.

证明：(1) 先来看加法和数乘. 对于两个有相同分块的准三角形矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ O & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ O & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix}$$

容易验证，以下矩阵仍为准上三角阵,

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1n}+B_{1n} \\ O & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2n}+B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_{nn}+B_{nn} \end{bmatrix}, \qquad kA=\begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1n} \\ O & kA_{22} & \cdots & kA_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & kA_{nn} \end{bmatrix}.$$

(2) 再考虑乘法. 若准上三角形矩阵A与B可乘，则A与B的行列均分拆为相同的块数(设分为n块)，下证明：

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & * & \cdots & * \\ O & A_{22}B_{22} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_{nn}B_{nn} \end{bmatrix},$$

对n进行归纳. 当n=2时，容易验证

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ O & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

假设结论对$n-1$成立，下考虑n的情况.

对A, B进行如下的分块

$$A=\left[\begin{array}{c:ccc} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \hdashline O & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_{nn} \end{array}\right]:=\begin{bmatrix} A_{11} & A' \\ O & A'' \end{bmatrix}, \qquad B=\left[\begin{array}{c:ccc} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ \hdashline O & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & B_{nn} \end{array}\right]:=\begin{bmatrix} B_{11} & B' \\ O & B'' \end{bmatrix},$$

则

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B'+A'B'' \\ O & A''B'' \end{bmatrix}$$

其中 A'', B'' 为行列均分拆成$n-1$个子块的准上三角形矩阵，则由归纳假设知 $A''B''$ 为准上三角形矩阵.

从而AB为准下三角形矩阵，即结论对n也成立. ■

由于三角形矩阵是特殊的准三角形矩阵，故由上述定理，即可得如下关于三角形矩阵的结论：

推论 n阶上(下)三角形矩阵的加法, 数乘与乘法运算结果仍是n阶上(下)三角形矩阵.

多选题 1分

设置

下述叙述正确的有(　　)

A 两个n阶上三角矩阵的加法仍为上三角矩阵

B n阶上三角矩阵的数乘仍为上三角矩阵

C n阶上三角矩阵的转置仍为上三角矩阵

D 两个n阶上三角矩阵的乘法仍为上三角矩阵

提交

本讲小结

- 矩阵分块的原则

  (1) 按需划分使方便; (2) 把块看作元素; (3)保持原有运算

- 常用的矩阵分块方式

  (1) 分四块; (2) 按行按列; (3) 按特殊分块矩阵(准对角阵，准三角阵)

- 分块矩阵的运算:

  - 加法、数乘、转置
  - ★乘法: 左行右列中同分 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C_{m\times l}$, $\begin{cases} m=m_1+\cdots+m_r \\ n=n_1+\cdots+n_s \\ l=l_1+\cdots+l_t \end{cases}$ (有序拆分)

    左行右列中求和 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{s}A_{ik}B_{kj}$,