



《线性代数》



第三章

几何空间中的向量



§ 3.2 空间向量的积 & \mathbb{R}^3 中的位置关系与距离

2019年
秋



杨晶 主讲

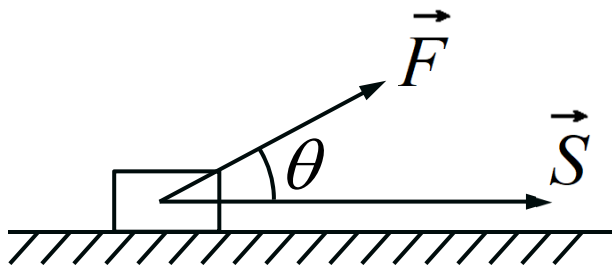
内容提要

- 一、向量的数量积(内积)
- 二、向量的向量积(外积)
- 三、向量的混合积
- 四、平面的方程与位置关系
- 五、直线的方程与位置关系
- 六、直角坐标系下的距离



(一) 向量的数量积(内积, 点积)

- 向量的线性运算可以用来解决向量的位置关系.
- 要利用向量解决更复杂的几何问题, 需要引入向量的其它运算, 这其中最重要的就是数量积和向量积.
- 向量的加法是从物理中力的合力抽象出来的. 向量的数量积也可以从物理中力作功的计算公式抽象出来.
- 物理学中力作功的问题:



$$W = |\vec{F}| |\vec{S}| \cos \theta$$

1. 数量积的定义与性质

定义1. 向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 的数量积定义为:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} := (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \theta,$$

其中 $\theta = \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$ 表示向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 间的夹角.

与 $\cos \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$ 有关
问题可转为内积问题



- 数量积又称为点积(dot product)或内积(inner product).
- 内积 $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ 有以下重要性质:

(1) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$

(对称性)

(2) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$

(分配律)

(3) $(k\vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (k\vec{\beta}) = k(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$

(数乘)

(4) $\vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} \geq 0$ 且等号成立 $\Leftrightarrow \vec{\alpha} = 0$. (正定性)

证明见中文教材

2. 利用坐标计算内积

设 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 是一个空间仿射坐标系, 记

$$\vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

$$\vec{\beta} = (y_1, y_2, y_3) = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$$

利用内积的性质, 有

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3)$$

$$= x_1y_1\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + x_1y_2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + x_1y_3\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3$$

$$+ x_2y_1\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + x_2y_2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + x_2y_3\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3$$

$$+ x_3y_1\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 + x_3y_2\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 + x_3y_3\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} y_1\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + y_2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + y_3\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ y_1\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + y_3\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ y_1\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 + y_2\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

$$= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{bmatrix} \text{ 称为仿射坐标系的度量矩阵. 记:}$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \text{ 则 } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{X}^T A \vec{Y}$$

目前只需了解, 矩阵乘法将来会精讲.

- 直角坐标系 $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 下形式更简单. $A = I_3$,

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{X}^T \vec{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$



3. 内积的应用 —— 表示度量

(1) $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}} \quad (= \sqrt{\vec{\alpha}^2})$ 利用内积求长度.

(2) $\cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|} \quad (= \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\sqrt{\vec{\alpha}^2} \sqrt{\vec{\beta}^2}})$ 利用内积求夹角余弦.

(3) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 垂直, 即 $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \frac{\pi}{2}$, 记为 $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0.$ 利用内积表正交.

(4) $\vec{\alpha}_{\vec{\beta}} := |\vec{\alpha}| \cos \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2} \vec{\beta} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}_0) \vec{\beta}_0$
利用内积表 $\vec{\alpha}$ 到 $\vec{\beta}$ 的正交投影.

● 在直角坐标系 $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 下的计算公式:

设两向量 $\vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3), \vec{\beta} = (y_1, y_2, y_3)$, 则:

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

例1 证明 Cauchy-Schwarz不等式:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

证明 在直角坐标系 $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 中令

$$\vec{\alpha} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \vec{\beta} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k},$$

$$|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| |\cos \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle| \leq |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|,$$

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$



(二) 向量的向量积(外积, 叉积)

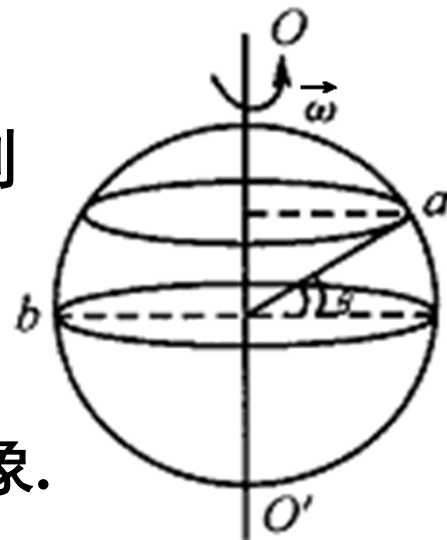
● 物理背景:

某些物理量, 是两个向量的运算结果后得到一个新的向量(既有大小又有方向),

如: 通过角速度求线速度问题

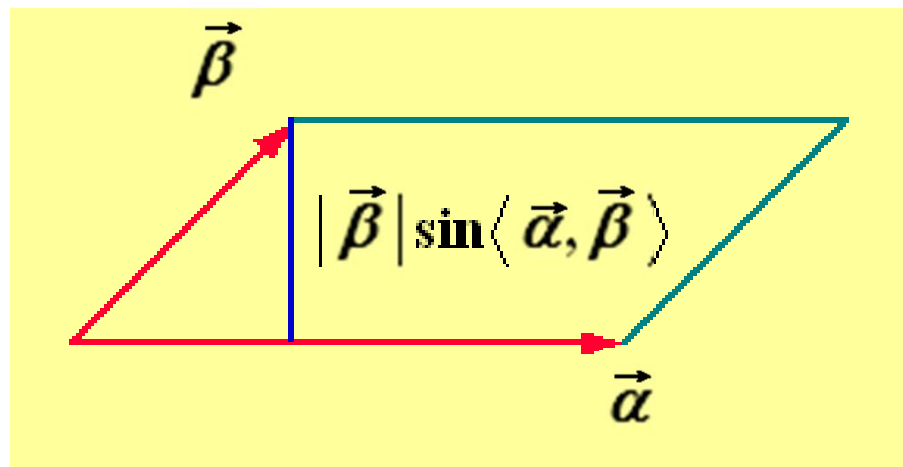
(中文教材p.99, 例3.17)

需要引入新的向量运算, 来表示这些物理现象.



● 几何背景:

平行四边形的面积问题



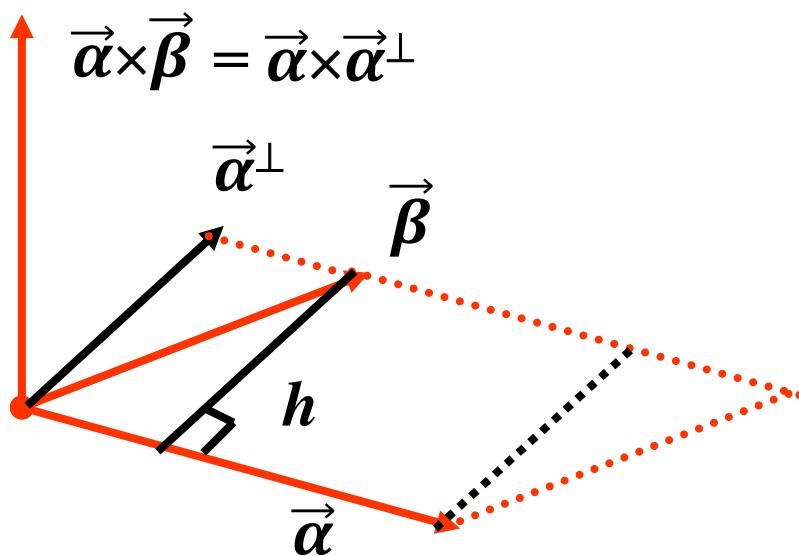
1. 向量积的定义与性质

定义2. 两个向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 的向量积 $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ 是一个向量，它的方向与 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 垂直，而且 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ 符合右手系，长度为

$$|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \sin \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle,$$

恰为以向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 为边的平行四边形的面积。

与 $\sin \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$ 有关问题可转为外积问题；特别地 $\vec{\alpha} \times \vec{\alpha} = \vec{0}$



- 向量积(vector product)也称为外积(outer product)or叉积(cross product).

- 外积具有以下性质

$$(1) \vec{\alpha} \times \vec{\beta} = -\vec{\beta} \times \vec{\alpha},$$

(对换取反)

$$(2) (k\vec{\alpha}) \times \vec{\beta} = \vec{\alpha} \times (k\vec{\beta}) = k(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}),$$

(倍乘可提出)

$$(3) \vec{\alpha} \times (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \times \vec{\beta} + \vec{\alpha} \times \vec{\gamma}.$$

(加法拆项)

2、外积的应用

- 求平行四边形(三角形)的面积;

- 求点到直线的距离;

- 计算向量的夹角正弦值

- 提供与给定两个向量(给定平面)垂直的向量.

- 可判断向量平行(共线): $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{0}.$

例2 已知三个向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ 不共线, 试证明

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{\beta} \times \vec{\gamma} = \vec{\gamma} \times \vec{\alpha}.$$

证明 必要性 由 $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma} = -(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$, 由向量积的性质得

$$\vec{\beta} \times \vec{\gamma} = -\vec{\beta} \times (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = -\vec{\beta} \times \vec{\alpha} - \vec{\beta} \times \vec{\beta} = -\vec{\beta} \times \vec{\alpha} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta},$$

$$\vec{\gamma} \times \vec{\alpha} = -(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \times \vec{\alpha} = -\vec{\alpha} \times \vec{\alpha} - \vec{\beta} \times \vec{\alpha} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta}.$$

充分性 用反证法: 若 $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} \neq \vec{0}$, 由 $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{\beta} \times \vec{\gamma} = \vec{\gamma} \times \vec{\alpha}$, 有

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}) \times \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \times \vec{\gamma} + \vec{\beta} \times \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \times \vec{\gamma} = \vec{0},$$

所以 $\vec{\gamma}$ 与 $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ 共线; 同理可证 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ 共线, $\vec{\beta}$ 与 $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ 共线, 由 $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} \neq \vec{0}$ 和 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ 均与 $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ 共线 $\Rightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ 共线, 与已知矛盾, 所以 $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$.

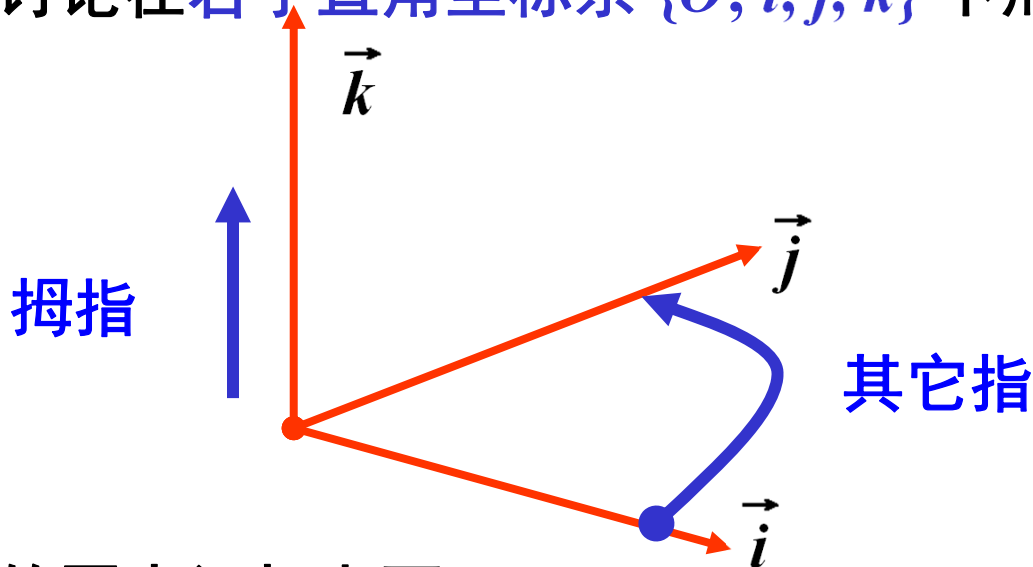
2、外积的坐标表示法

- 从理论上而言, 直角坐标系与仿射坐标系没有什么区别, 但是许多计算和讨论在右手直角坐标系 $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 下形式更简单.

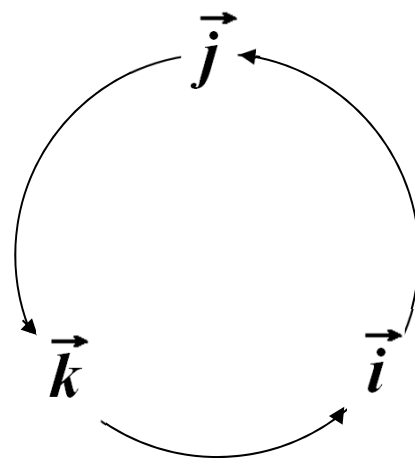
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$



- 我们可借助右边的图来记忆上面的三个式子: 当两个向量的向量积的次序与图中箭头所示的次序一致(相反)时, 向量积就是箭头所指的第三个坐标向量(反向量).



- 于是在右手直角坐标系下，我们有：

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},$$

$$\vec{\alpha} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}, \vec{\beta} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k},$$

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} \times \vec{\beta} &= (x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) \times (y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}) \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}.\end{aligned}$$

- 为便于记忆，可借用行列式符号来表示：

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} \times \vec{\beta} &= (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

例3 再证 $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow$ 对应坐标分量成比例.

证明 两个向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 共线 $\Leftrightarrow \vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{0}$, 记

$$\vec{\alpha} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}, \vec{\beta} = y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} + y_3 \vec{k},$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \times \vec{\beta} &= (x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}) \times (y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} + y_3 \vec{k}) \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}. \end{aligned}$$

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow x_2 y_3 - x_3 y_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = x_3 : y_3. \quad \blacksquare$$

(三) 向量的混合积

1. 混合积的定义与性质

- 三个向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ 的混合积 是一个数

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$$

- 混合积性质:

$$(1) (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha}) = (\vec{\gamma}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}),$$

(轮换不变)

$$(2) (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = -(\vec{\beta}, \vec{\alpha}, \vec{\gamma}),$$

(对换变号)

$$(3) (k\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}, k\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, k\vec{\gamma}) = k(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}),$$

(倍乘可提出)

$$(4) (\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) + (\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}, \vec{\gamma}).$$

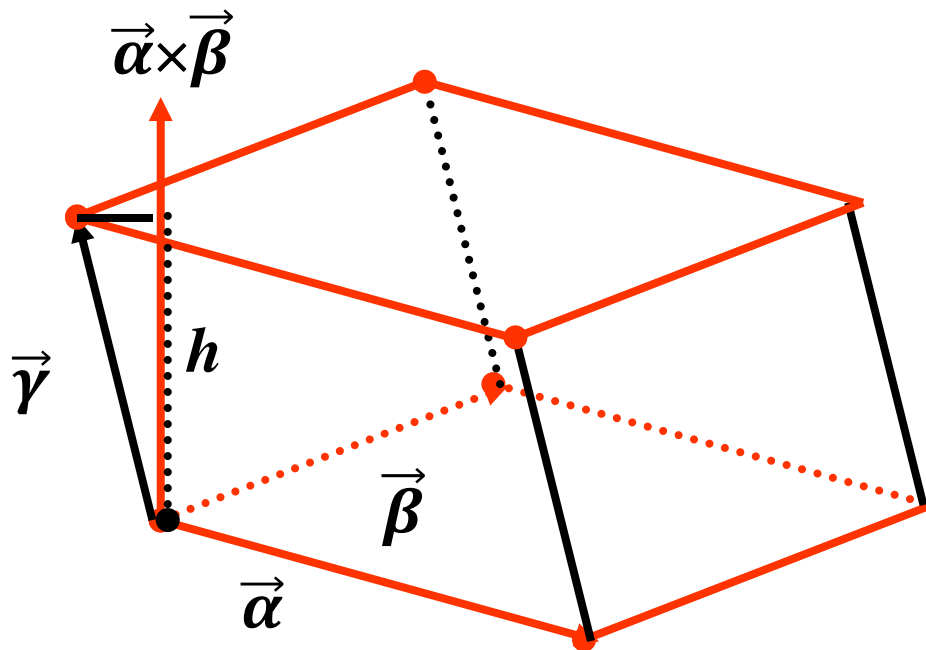
(加法拆项)

注: (3)与(4)为线性性质, 这些性质可以利用内积和外积的性质来加以证明.

2、混合积几何意义

- 以 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ 为棱的平行六面体的有向体积.
- 有向：符合右手系时，体积为正，否则为负.
- 混合积应用：

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \text{ 共面} \Leftrightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 0.$$



3、混合积的坐标计算公式及其应用

- 在右手直角坐标系 $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 下混合积的计算:

$$\vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3), \vec{\beta} = (y_1, y_2, y_3), \vec{\gamma} = (z_1, z_2, z_3)$$

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k},$$

$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} z_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_3$$

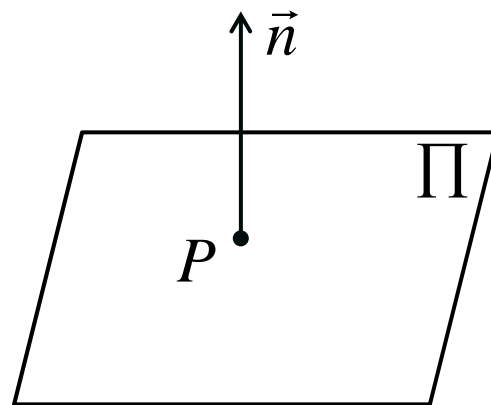
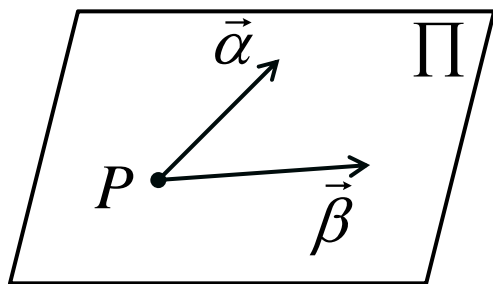
$$\therefore (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

- 因此有
如下判则:

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \text{ 共面} \Leftrightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(四)、 \mathbb{R}^3 中平面的方程与位置关系

Question: 如何确定一个平面？



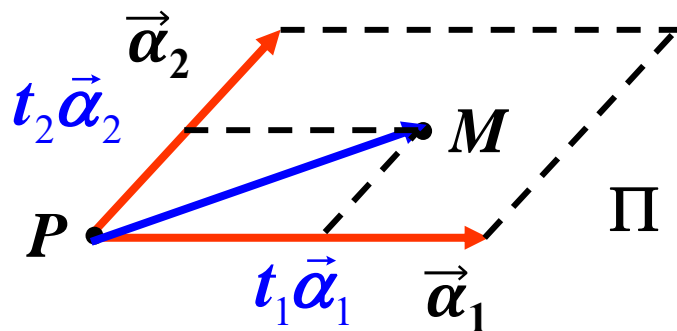
Case1. 仿射坐标系 $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 下, 点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 与不共面的两个向量 $\vec{\alpha} = (x_1, y_1, z_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2, z_2)$ 确定平面 Π .

Case2. 直角坐标系 $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 下, 平面上一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 及平面的法向量 $\vec{n} = (a, b, c)$ 确定平面 Π .

1. 平面的方程

- Case1(点向式): 平面 Π 方程: 设 M 是空间中任一点,

$$\begin{aligned} M \in \Pi &\Leftrightarrow \vec{PM}, \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \text{ 共面} \\ &\Leftrightarrow \vec{PM} = t_1 \vec{\alpha}_1 + t_2 \vec{\alpha}_2. \end{aligned}$$



- 在坐标系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 下, 设 $P(x_0, y_0, z_0)$,

$$M(x, y, z), \quad \vec{\alpha}_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{\alpha}_2 = (x_2, y_2, z_2),$$

$$\vec{PM} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

- 则 $M(x, y, z) \in \Pi \Leftrightarrow \vec{PM}, \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \text{ 共面} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$

按第一行展开, 得到一个三元一次方程:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

平面的一般方程

其中,

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, B = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, D = -\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

注: 由于 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 不平行, A, B, C 不全为零.

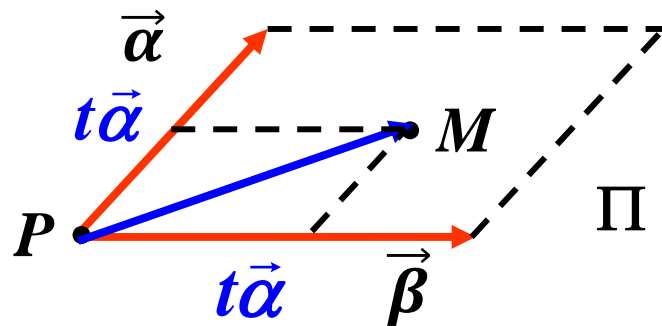
● 再回到初始模型

$$M(x, y, z) \in \Pi \Leftrightarrow PM, \vec{\alpha}, \vec{\beta} \text{ 共面}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} = t\vec{\alpha} + s\vec{\beta}$$

平面的参数方程
体现二维本质
消参可得一般方程

$t \vec{\alpha}$



例4 讨论平面 $\underline{x} + \underline{y} + \underline{z} = 1$ 可由什么点和向量按点向式生成.

解 将方程的第一个系数非零的未知量取作主未知量, 其余的未知量取为自由未知量, 自由未知量任取参数, $\underline{y} = k_1, \underline{z} = k_2$, 其中 k_1, k_2 为任意常数, 代入方程组, 可得到原方程组的全部解为:

$$x = 1 - k_1 - k_2, y = k_1, z = k_2. \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数})$$

$$\therefore (x, y, z) = (1, 0, 0) + k_1(1, -1, 0) + k_2(1, 0, -1)$$

所以该线性方程组的解集为过点 $(1, 0, 0)$ 且与两个不共线向量 $\vec{\alpha}_1 = (1, -1, 0), \vec{\alpha}_2 = (1, 0, -1)$ 平行的平面.

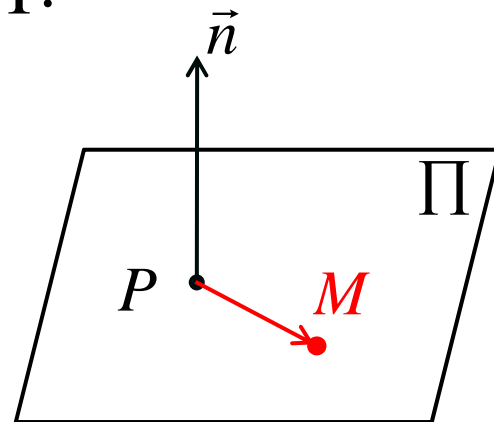
Case2(点法式). 直角坐标系下, 平面上一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 及平面的法向量 $\vec{n} = (a, b, c)$ 确定平面 Π .

$$M(x, y, z) \in \Pi$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \perp \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$



Remark: 直角坐标系下, 如果平面 Π 的一般方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

则 Π 的法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$, $D = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

问题：直角坐标系中，若平面的一般方程中出现系数为零时，平面有何特征？

$$A = 0 \Leftrightarrow \vec{n} // YOZ \text{ 平面} \Leftrightarrow \Pi // x \text{ 轴}$$

$$A = B = 0 \Leftrightarrow ?$$

$$B = 0 \Leftrightarrow \vec{n} // XOZ \text{ 平面} \Leftrightarrow \Pi // y \text{ 轴}$$

$$B = C = 0 \Leftrightarrow ?$$

$$C = 0 \Leftrightarrow \vec{n} // XOY \text{ 平面} \Leftrightarrow \Pi // z \text{ 轴}$$

$$A = C = 0 \Leftrightarrow ?$$

问题： $-D/A$, $-D/B$ 和 $-D/C$ 的几何意义是什么？

回答：坐标轴的截距.

问题：如何计算三点决定的平面方程？

回答：化为Case1（点向式），或代入法解方程.

作答

例5 求包含 $P(1, 2, 3), Q(-1, 4, 2), R(0, 1, -1)$ 的平面的方程.

解法一(点向式) $\vec{\alpha}_1 = \vec{PQ} = (-2, 2, -1), \vec{\alpha}_2 = \vec{PR} = (-1, -1, -4),$

Π : 过点 P, Q, R , 即过点 P 且与两个不共线向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 平行的平面.

故平面方程满足:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

化简得:

$$9x + 7y - 4z - 11 = 0.$$

解法二(点法式): $\vec{\alpha}_1 = \vec{PQ} = (-2, 2, -1), \vec{\alpha}_2 = \vec{PR} = (-1, -1, -4),$

则平面 Π 的法方向为:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_1 \times \vec{\alpha}_2 &= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-9, -7, 4)\end{aligned}$$

代入点法式方程, 得:

$$-9(x-1) - 7(y-2) + 4(z-3) = 0$$

$$\Rightarrow -9x - 7y + 4z + 11 = 0.$$

解法三(待定系数法1) 设所求平面为 $Ax+By+Cz+D=0$, 将 P, Q, R 点的坐标代入, 得线性方程组

$$\begin{cases} A + 2B + 3C + D = 0 \\ -A + 4B + 2C + D = 0 \\ B - C + D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 23/11 \\ 0 & 1 & 0 & 7/11 \\ 0 & 0 & 1 & -4/11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9/11 \\ 0 & 1 & 0 & 7/11 \\ 0 & 0 & 1 & -4/11 \end{bmatrix}$$

D 为自由变量



不妨取 $D = -11$, 得 $C = -4, B = 7, A = 9$, 故所求平面的方程为 $9x + 7y - 4z - 11 = 0$.

解法四(待定系数2) 设所求平面为 $Ax+By+Cz+D=0$, 则 $(A, B,$

$C, D)$ 是

$$\begin{cases} xA + yB + zC + D = 0 \\ -A + 4B + 2C + D = 0 \\ B - C + D = 0 \\ A + 2B + 3C + D = 0 \end{cases}$$

平面上的任意一点 M



的非零解, 故

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$9x + 7y - 4z - 11 = 0.$$

2. 平面的位置关系

仿射坐标系下的两张平面：

$$(*) \begin{cases} \Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

(直角坐标系下)

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= (A_1, B_1, C_1), \\ \vec{n}_2 &= (A_2, B_2, C_2). \end{aligned}$$

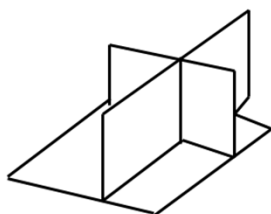
几何上	代数上	\vec{n}_1, \vec{n}_2	方程组(*)
相交	$\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$	$\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$	无穷多解
平行	$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$	$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$	无解
重合	$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$	$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$	无穷多解

注意： 上述连比中总认为0/0可为任意值。

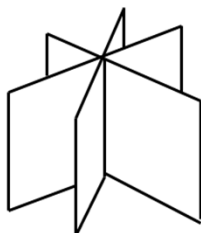
● 三个平面的位置关系:

代数上：三元一次方程组求解

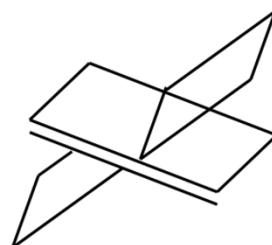
几何上：



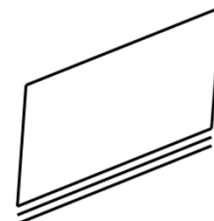
①



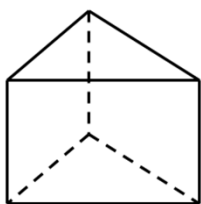
②



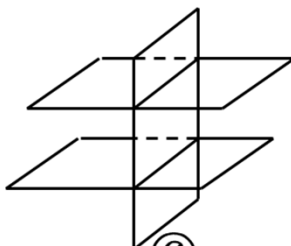
③



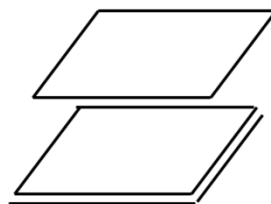
④



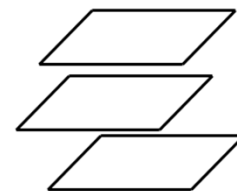
⑤



⑥



⑦



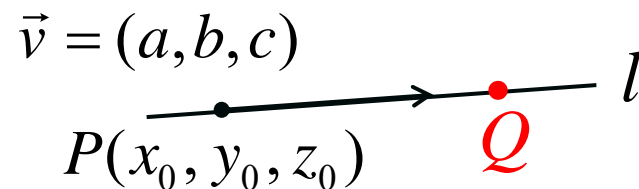
⑧

思考：如何判断这
八种位置关系？



(五) \mathbb{R}^3 中直线的方程与位置关系

1. 直线的方程: 如何确定一条直线?



Case1. 点向式 (仿射坐标系)

$$Q(x, y, z) \in l \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = t\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

直线的标准方程

添加参数

消参

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

直线的参数方程
反映1维本质



$$l: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

问题 方向向量 (a, b, c) 中出现0怎么办? 几何意义如何?

问题1: $0/0 = \text{任何值}$

问题2:

- 一个分量为零, 如: $a = 0 \Leftrightarrow$ 直线落在 $x = x_0$ 平面
- 两个分量为零, 如: $a = b = 0 \Leftrightarrow$ 直线平行于 \vec{e}_3 (z 轴)
- 三个分量为零, 不可能!!!
- 没有分量为零, 将如何?

● Case2(交线式): 直线也可看成是两个不平行平面的交线, 因而

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

如何体现
“不平行”?



表示一条直线, 称为直线的一般方程.

例8 用点向式描述下述方程给出的直线:
$$\begin{cases} y + z + 1 = 0, \\ y - z - 1 = 0. \end{cases} \quad \text{(一般方程)}$$

解:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -2 & | & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (t \in \mathbb{R}) \\ \text{(参数方程)} \end{matrix}$$

所求的交线的方程为 $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{(z+1)}{0}$, (标准方程)

为一条过 $(0, 0, -1)$ 点平行于 x 轴的直线.

2. 直线与平面的位置关系

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 & \longrightarrow \text{平面}\Pi \text{ (法向}\vec{n}\text{)} \\ \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} & \longrightarrow \text{直线}l \text{ (方向}\vec{v}\text{)} \end{cases}$$

直线与平面	直线与平面的方程组	\vec{v} 与 \vec{n}
相交	\Leftrightarrow 唯一解	$\vec{v} \not\perp \vec{n}$
平行	\Leftrightarrow 无解	$\vec{v} \perp \vec{n}$
重合	\Leftrightarrow 无穷解	$\vec{v} \perp \vec{n}$

问题： 上述三元一次方程组是否会对应8种几何情况？

回答： 不会，只有上表中的3种情况。**为什么？**

例6 已知平面 $\pi: x-y-z-4=0$, 直线 $L: x-1=1-y=\frac{z+3}{2}$,

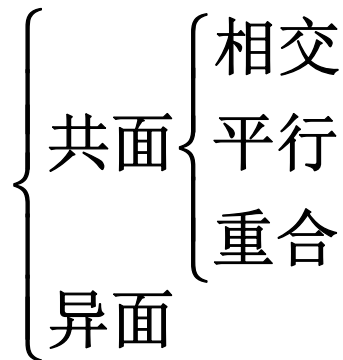
则下列结论中正确的是:

- ☐ A 直线 L 与平面 π 相交.
- ☒ B 直线 L 与平面 π 平行.
- ☐ C 直线 L 与平面 π 垂直.
- ☐ D 直线 L 在平面 π 内.

提交

3. 两直线的位置关系

- 两条直线可能的位置关系:



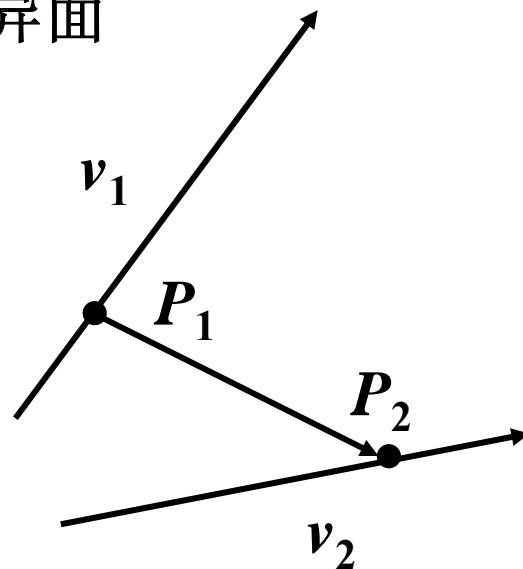
- 如何判别给定直线的位置关系?

- 设两条直线 l_1, l_2 方程如下:

$$l_1: \frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1},$$

$$v_1 = (X_1, Y_1, Z_1) \quad P_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{X_2} = \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2} \quad v_2 = (X_2, Y_2, Z_2) \quad P_2(x_2, y_2, z_2)$$

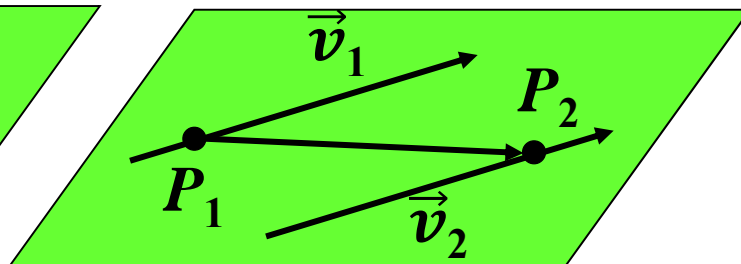
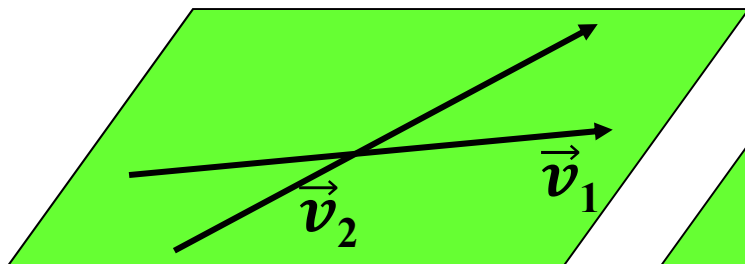


- 通过分析向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1P_2}$ 的位置关系, 可以得到两直线间的位置关系.

$$l_1, l_2 \text{ 共面} \Leftrightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1P_2} \text{ 共面} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

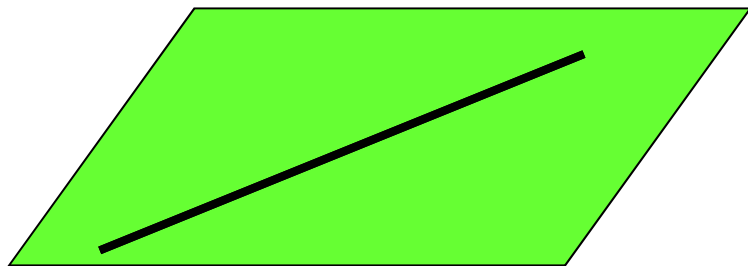
l_1, l_2 相交 $\Leftrightarrow l_1, l_2$ 共面

且 \vec{v}_1 不平行于 \vec{v}_2 , 即 $X_1 : Y_1 : Z_1 \neq X_2 : Y_2 : Z_2$



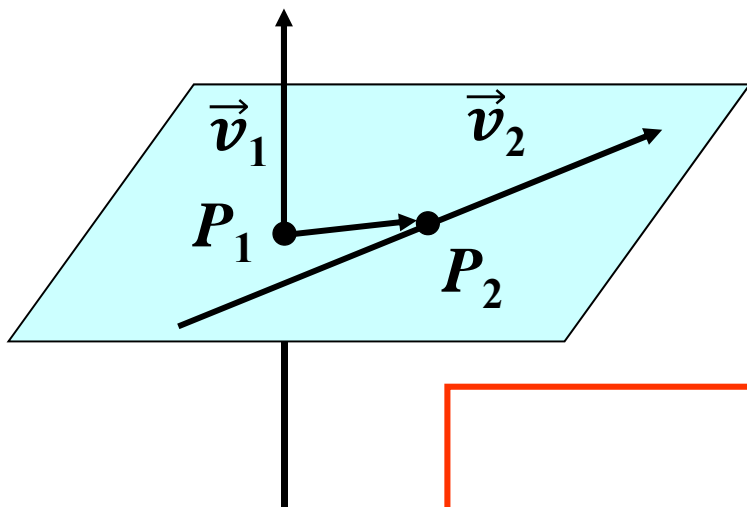
l_1, l_2 平行 $\Leftrightarrow l_1, l_2$ 共面, 且 $\vec{v}_1 // \vec{v}_2$ 不平行于 $\overrightarrow{P_1P_2}$

即 $X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 \neq (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)$



l_1, l_2 重合 $\Leftrightarrow l_1, l_2$ 共面, 且 $\vec{v}_1 // \vec{v}_2 // \overrightarrow{P_1P_2}$

即 $X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 = (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)$



$$l_1, l_2 \text{异面} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

l_1 与 l_2	$(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$	\vec{v}_1, \vec{v}_2	
相交	$(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$	$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$	
平行	$(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$	$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$	$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \nparallel \overrightarrow{P_1P_2}$
重合	$(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$	$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$	$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \parallel \overrightarrow{P_1P_2}$
异面	$(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \neq 0$		

例7 判断 m 为何值时下面两直线相交:

$$l_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \quad l_2: \frac{x-3}{m} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}.$$

解 $P_1(-2, 0, 1), P_2 = (3, 1, 7)$ $\overrightarrow{P_1P_2} = (5, 1, 6), \vec{v}_1 = (2, -3, 4), \vec{v}_2 = (m, 4, 2).$

由已知, 应当有

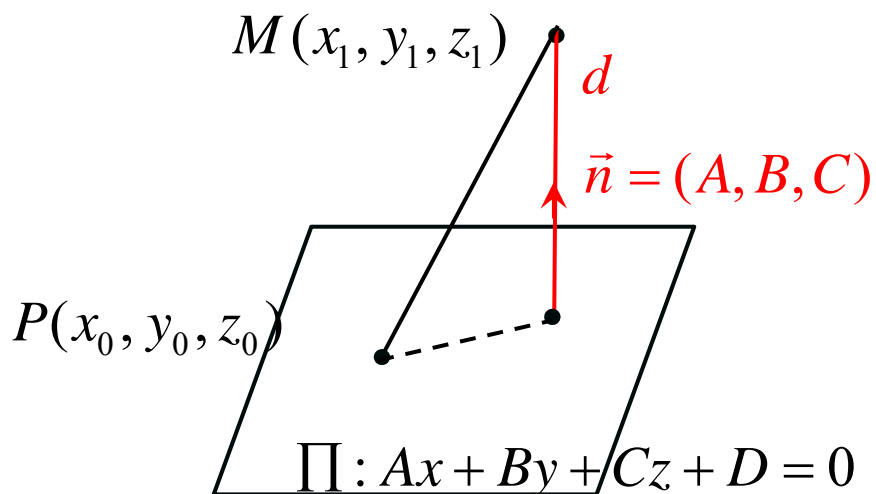
$$(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \\ m & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

由此解出 $m = 3$.

显然 v_1 不平行于 v_2 , 故 $m = 3$ 时, 两直线相交.

(六) 直角坐标系下的距离

1、点到平面的距离



$$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{PM}| |\vec{n}| \cos \langle \overrightarrow{PM}, \vec{n} \rangle$$

$$d = |\overrightarrow{PM}| |\cos \langle \overrightarrow{PM}, \vec{n} \rangle|$$

$$\Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}_0|}{|\vec{n}_0|}$$

直角坐标系下, $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)$

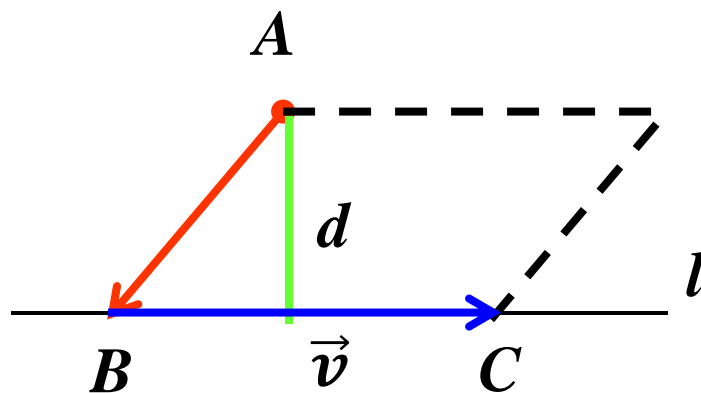
$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$$

点 $M(x_1, y_1, z_1)$ 到平面 $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2、点到直线的距离

- 求 A 点到直线 l 的距离 d , 可在 l 上任取一点 B 构造向量 \overrightarrow{AB} , 再取 l 的方向向量 $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, 那么 $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$ 表示以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ 为边的平行四边形面积, 于是



$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \left| \overrightarrow{AB} \times \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right| = |\overrightarrow{AB} \times \vec{v}_0|.$$

例11 求点 $A(2, -3, -1)$ 到直线 $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ 的距离.

解
$$d = \frac{|(1, -2, -1) \times (-2, -1, 1)|}{|(-2, -1, 1)|} = \frac{|(-3, 1, -5)|}{|(-2, -1, 1)|} = \frac{\sqrt{210}}{6}.$$

3、异面直线间的距离

平行六面体的高

- 假定有两条异面直线 l_1, l_2 , 它们的方向向量为 \vec{v}_1, \vec{v}_2 (必不共线), 而 P_1, P_2 分别在两条直线上, 两条直线 l_1, l_2 之间的距离 $d = \left| \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \frac{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} \right| = \frac{|(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1P_2})|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$.

例12 求下面两条异面直线的距离.

$$l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, \quad l_2: x-1 = y+1 = z-2,$$

解 $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, P_1 = (0, 0, 0), P_2 = (1, -1, 2),$

$$d = \left| \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \frac{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} \right| = \left| \frac{\sqrt{6}}{6} (-1 - 2 - 2) \right| = \frac{5\sqrt{6}}{6}.$$

