《线性代数》

第五章 向量空间理论

§5.4 向量组的秩

2019秋

杨晶 主讲

内容提要

- 向量组的秩及其性质
- 向量(子)空间的基与维数
- 矩阵的行秩与列秩

回顾上节问题：极大线性无关组的选取并不是唯一的，那么，不同的极大无关组之间，会存在什么样的本质联系呢？

例1(上节例1). 对向量组 $\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

- 有$\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\}$, $\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_3\}$与$\{\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3\}$均为向量组的极大线性无关组.
- 以上三个极大无关组的向量个数均为2.

性质5 (等量性) 向量组的任意两个极大无关组的向量个数相同.

证明： 设 $\vec{\alpha}_{i_1},\vec{\alpha}_{i_2},\cdots,\vec{\alpha}_{i_r}$ 与 $\vec{\alpha}_{j_1},\vec{\alpha}_{j_2},\cdots,\vec{\alpha}_{j_t}$ 为原向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$的两组极大线性无关组, 下面证明$r=t$. 由极大无关组的性质3(等价性)及其推论知,

$$(1)\{\vec{\alpha}_{i_1},\vec{\alpha}_{i_2},\cdots,\vec{\alpha}_{i_r}\}\sim(3)\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s\}\sim(2)\{\vec{\alpha}_{j_1},\vec{\alpha}_{j_2},\cdots,\vec{\alpha}_{j_t}\}$$

由(1)可由(2)线性表出，且(1)中向量线性无关，则 $r\le t$.

同理 $t\le r$, 故有$r=t$. ■

(一)、向量组的秩及其性质

由极大线性无关组的等量性质，我们知道，极大无关组虽然有不同选择，但是不同极大无关组的向量个数总是相等的. 换言之，极大无关组的向量个数不依赖极大无关组的选取，而是由向量组本身决定.

定义1 向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 的极大线性无关组中向量个数 $r\ (\leq s)$ 称为该**向量组的秩**，记为 $r(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s)$ 或 $R(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s)$.
只含零向量一个向量的向量组的秩规定为0.

如：例1中的向量组 $\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

- 有 $r(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3)=2$.

例2. (1) 若 $r(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s) = r$, 则$r \le s$, 且其中任意 r 个线性无关的向量组都是一个极大无关组, 而其中任意 $r+1$ 个向量 (如果存在) 都线性相关.

(2) $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s) = s$.

$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s) < s$.

有了向量组的秩的概念，我们再来看两个向量组之间的数量关系，有如下结论.

定理1 若向量组 A 可由向量组 B 线性表出，则 $\mathrm{r}(A)\le \mathrm{r}(B)$.

证明: 设 $\mathrm{r}(A)=s$, $\mathrm{r}(B)=t$, 令 A_1, B_1 分别为 A, B 的极大线性无关组, 于是，A_1 与 B_1 含向量个数分别是 s 与 t.

因为 $A_1\sim A$, $B_1\sim B$, 而 A 可由 B 线性表出, 所以 A_1 可由 B_1 线性表出，再由 A_1 是线性无关的，则 $s\le t$. ■

注： 定理1说明，不论向量组 A 与 B 自身是线性相关还是线性无关，用秩的观点来看，向量组本质上只能以多生少.

推论 等价的向量组有相同的秩.

反之是否成立？为什么？

(二)、向量(子)空间的基与维数

在4.1节中，我们介绍了向量空间与向量子空间的概念。在向量 (子) 空间中通常都有无穷多个向量，那么在这些向量中，是否有冗余的向量，是否有具代表性的向量？

定义2 设V表示$\mathbb{R}^n$或$\mathbb{R}^n$中的子空间，则若 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 是V中s个线性无关的向量，且V中任何向量$\vec{\beta}$均可由$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 唯一地线性表示，设为

$$\vec{\beta} = x_1\vec{\alpha}_1 + x_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + x_s\vec{\alpha}_s,$$

则我们称 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$为空间$V$的一组**基**，$x_1, x_2, \cdots, x_s$称为向量$\vec{\beta}$在$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$下的**坐标**，$s$称为$V$的**维数**，记为$\dim V$.

简言之，向量空间的基 = 无关性 + (唯一)表出性. 在上一讲中我们已经证明了这与极大无关组的定义是等价的.

结论： $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$为$V$的一组基 $\Longleftrightarrow$ $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_s$ 为V中全体向量的极大无关组.

注: (1) “基”与“维数”是特别情况下的“极大无关组”与“秩”.

(2) 向量空间V中的基的选取不唯一，但维数是确定的.

(3) 自然基$\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$是$\mathbb{R}^3$中的直角坐标系在$\mathbb{R}^n$中的推广；而一般的基是$\mathbb{R}^3$中的仿射坐标系在$\mathbb{R}^n$中的推广.

(三)、矩阵的行秩与列秩

对于矩阵A来说，天然的就存在两个向量组，即A的全体行构成的向量组, 以及A的全体列构成的向量组. 再由向量组的秩的概念，有如下关于矩阵的两个概念.

定义3 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 中行向量组的秩称为矩阵A的**行秩**，列向量组的秩称为矩阵A的**列秩**. 分别简记为：$r_r(A)$和$r_c(A)$.

回顾：

- 由A的全体行向量生成的子空间 $(\subset \mathbb{R}^n)$ 称为 A 的行空间, 记为$\mathrm{Row}(A)$.
- 由A的全体列向量生成的子空间 $(\subset \mathbb{R}^m)$ 称为 A 的列空间, 记为$\mathrm{Col}(A)$.

从而, 有 $r_r(A)=\dim \mathrm{Row}(A)$; $r_c(A)=\dim \mathrm{Col}(A)$.

例3. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，求$A$的行秩与列秩.

易知：$r1$与$r2$是A的行向量集的极大无关组，故 $r_r(A)=2$;

$c1$与$c2$是A的列向量集的极大无关组，故 $r_c(A)=2$.

分别求下列矩阵的行秩与列秩.

$r_r(B)=$ [填空1] , $r_c(B)=$ [填空2] , $r_r(C)=$ [填空3] , $r_c(C)=$ [填空4] ,

$$B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 0 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & -1\\ 2 & 4 & 6 & 8 & -2\\ 3 & 6 & 9 & 12 & -3\\ 4 & 8 & 12 & 16 & -4\end{bmatrix}$$

作答

本讲小结

- 极大线性无关组的等量性
- 向量组的秩及其性质：任意极大无关组的大小
  数量上看向量组：本质上只能以多生少
- 向量子空间的基与维数：向量空间的极大无关组与秩
- 矩阵的行秩与列秩：$r_r(A) = r_c(A)$?