



# 《线性代数》



## 第二章 行列式

### § 2.4 克莱姆(Cramer)法则



2019秋

杨晶 主讲

# 内容提要

- 回顾：利用2、3阶行列式给出二元、三元线性方程组的求解公式
- Cramer法则： $n$ 元线性方程组的求解公式
- Cramer法则的适用范围及应用



## 回顾：含参二元一次方程组求解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow$$

当  $D \neq 0$  时,  $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}.$

其中  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$

## 回顾：含参三元一次方程组求解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{当 } D \neq 0 \text{ 时, } x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{b_1} & a_{12} & a_{13} \\ \mathbf{b_2} & a_{22} & a_{23} \\ \mathbf{b_3} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{b_1} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{b_2} & a_{23} \\ a_{31} & \mathbf{b_3} & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{b_1} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{b_2} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{b_3} \end{vmatrix}.$$

## Cramer法则： $n$ 元线性方程组的求解公式

根据上述2、3元线性方程组的求解公式，推测对于一般 $n$ 元情况有类似结果

## 定理1(Cramer) 若线性方程组

[illegible]

的系数行列式  $D \neq 0$ , 则方程组有唯一解:

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (*)$$

其中 $D_j$ 是由线性方程组的常数列替换 $D$ 中第 $j$ 列元素所得到的行列式.

**证明：** (1)存在性. 下证(\*)式满足方程组. 只验证第一个方程. 其它同理.

**方法一：** 把  $D_j$  按照第  $j$  列展开, 可得:

$$D_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}, \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

把  $x_j = D_j / D$  代入第一个方程左边, 得

$$\begin{aligned} & a_{11}(D_1 / D) + a_{12}(D_2 / D) + \cdots + a_{1n}(D_n / D) \\ &= \frac{1}{D} [a_{11}(b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1}) + a_{12}(b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \cdots + b_n A_{n2}) \\ &\quad + \cdots + a_{1n}(b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn})] \\ &= \frac{1}{D} [b_1(a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \cdots + a_{1n} A_{1n}) + b_2(a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + \cdots + a_{1n} A_{2n}) \\ &\quad + \cdots + b_n(a_{11} A_{n1} + a_{12} A_{n2} + \cdots + a_{1n} A_{nn})] = \frac{1}{D} \times b_1 \times D = b_1. \end{aligned}$$

方法二：若  $x_j = D_j/D$  满足第一个方程，即

$$a_{11}(D_1/D) + a_{12}(D_2/D) + \cdots + a_{1n}(D_n/D) = b_1$$

$$\Leftrightarrow \underline{b_1 D} - \underline{a_{11} D_1} - \cdots - \underline{a_{1j} D_j} - \cdots - \underline{a_{1n} D_n} = 0$$

考虑下面  $n+1$  阶行列式，并将其按第一行展开，得：

$$\begin{vmatrix}
 \underline{b_1} & \underline{a_{11}} & \cdots & \underline{a_{1j}} & \cdots & \underline{a_{1n}} \\
 b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
 b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
 \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 = b_1 D - a_{11} D_1 - \cdots - a_{1j} D_j - \cdots - a_{1n} D_n$$

= 上式左边

(2) 唯一性：设 $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 为原方程组的解，下证必有 $c_j = D_j / D$ .

由于 
$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \dots + a_{in}c_n = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

故 
$$\sum_{i=1}^n (a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \dots + a_{in}c_n) A_{ij} = \sum_{i=1}^n b_i A_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

即 
$$c_1 \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{ij} + \dots + c_n \sum_{i=1}^n a_{in} A_{ij} = D_j \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

$$c_j D = 0 + \dots + 0 + c_j \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} + 0 + \dots + 0 = D_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Rightarrow c_j = D_j / D \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$



**克莱姆**（**Cramer, Gabriel**，瑞士数学家 1704-1752）

1704年7月31日生于日内瓦，早年在日内瓦读书，1724年起在日内瓦加尔文学院任教，1734年成为几何学教授，1750年任哲学教授。他自1727年进行为期两年的旅行访学。在巴塞尔与约翰·伯努利、欧拉等人学习交流，结为挚友。后又到英国、荷兰、法国等地拜见许多数学名家，回国后在与他们的长期通信中，加强了数学家之间的联系，为数学宝库也留下大量有价值的文献。他一生未婚，专心治学，平易近人且德高望重，先后当选为伦敦皇家学会、柏林研究院和法国、意大利等学会的成员。主要著作是《代数曲线的分析引论》（1750）。为了确定经过5个点的一般二次曲线的系数，应用了著名的“克莱姆法则”，即由线性方程组的系数确定方程组解的表达式。



**推论：** 若 $n$ 个变量， $n$ 个方程的齐次线性方程组

[illegible]

的系数行列式  $D \neq 0$ , 则方程组只有零解:  $x_j = 0, (j = 1, 2, \cdots, n)$ .

**等价推论:**  $n$ 个变量,  $n$ 个方程的齐次线性方程组有非零解.



## 系数行列式 $D = 0$

## 将来会给出答案

例1 用克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_2 + 4x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11/6, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5/6. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 67 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \\ 11/6 & 1 & 1 & 1 \\ 5/6 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{67}{3}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 11/6 & 1 & 1 \\ 1 & 5/6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 11/6 & 1 \\ 1 & -1 & 5/6 & 2 \end{vmatrix} = \frac{67}{2}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 11/6 \\ 1 & -1 & -3 & 5/6 \end{vmatrix} = 67,$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 0, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{2}, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = 1.$$

使用Cramer法则求解线性方程组方法的特点有:

- ☒ A 只适用于方程个数 = 未知数个数的方程组
- ☒ B 只适用于系数行列式  $D \neq 0$  的情形
- ☒ C 求解公式简洁, 结果可表示为系数与常数的显式函数(显式解)
- ☒ D 一般情况下需要计算  $n+1$  个  $n$  阶行列式, 计算量较大

## 关于Cramer法则

### 缺点

只适用于系数矩阵为方阵

只能解  $D \neq 0$  的方程

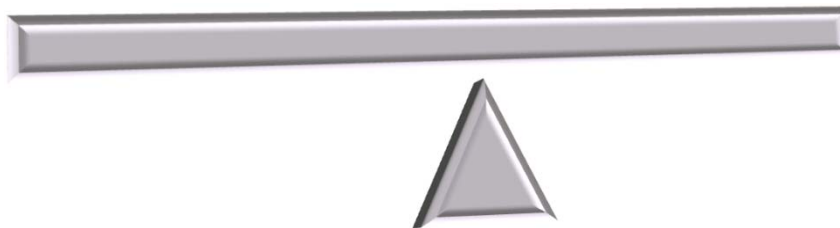
$n+1$  个  $n$  阶行列式, 计算量大

### 优点

理论证明中有重要作用

显式解

系数含有参数时, 比较有效



## Cramer法则应用举例

**例2** 设 $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $i=1, 2, 3$ , 为平面上不共线的三点, 且 $x_1, x_2, x_3$ 两两互不相等, 求过点 $P_1, P_2, P_3$ 的二次曲线  $y = ax^2 + bx + c$ .

**解:** 将 $P_i = (x_i, y_i)$ 代入曲线方程  $y = ax^2 + bx + c$ , 得

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3. \end{cases}$$

这是一个以 $a, b, c$ 为未知量的线性方程组, 其系数行列式为:

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$x_1, x_2, x_3$ 互不相等



$$D_1 = \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$



$P_1, P_2, P_3$  不共线

$$\Rightarrow a = \frac{D_1}{D} \neq 0, \quad b = \frac{D_2}{D}, \quad c = \frac{D_3}{D},$$

$$\Rightarrow y = ax^2 + bx + c$$

$$= \frac{1}{D} \underline{(D_1 x^2 + D_2 x + D_3)} = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{x^2} & \mathbf{x} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{vmatrix}$$

# 本讲小结

- Cramer法则： $n$ 元线性方程组的求解公式
- Cramer法则的适用范围：
  - 方程个数 $m =$ 未知数个数 $n$
  - 系数行列式  $D \neq 0$
  - 含参系数，理论证明

