2019秋

《线性代数》

第四章 矩 阵

§4.2 矩阵的乘法

杨晶 主讲

内容提要

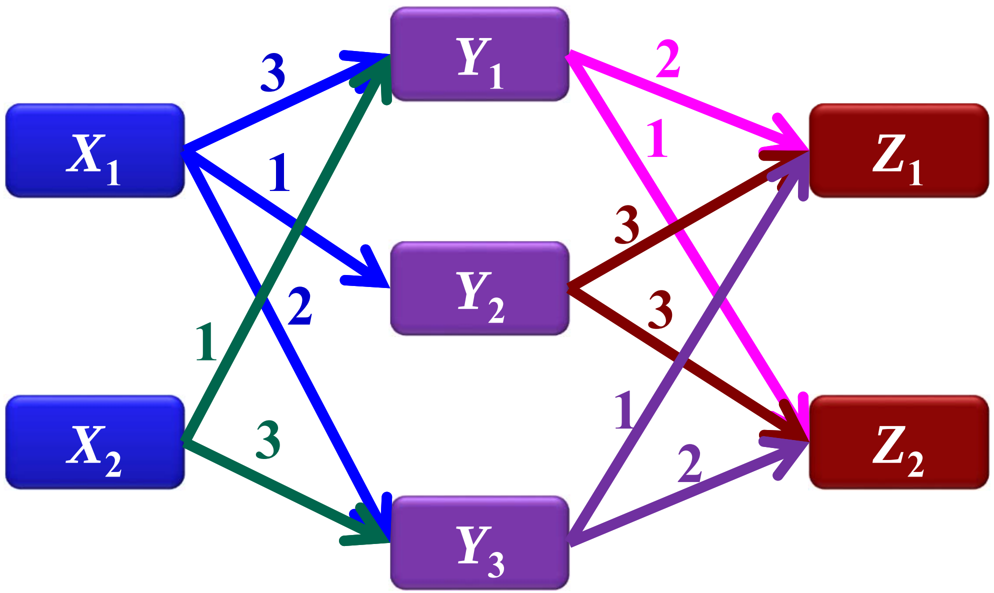
- 背景: 矩阵与变量替换
- 矩阵乘法的定义
- 特殊矩阵的乘法
- 矩阵乘法的运算律

(一) 矩阵乘法的背景

一方有难，八方支援

(一) 矩阵乘法的背景

引例1 物资运输的问题



$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} Z_1 & Z_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$C = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} Z_1 & Z_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} & \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

$X_1 \to Z_1$: $3\times 2+1\times 3+2\times 1 = 11$;

$X_1 \to Z_2$: $3\times 1+1\times 3+2\times 2 = 10$;

$X_2 \to Z_1$: $1\times 2+0\times 3+3\times 1 = 5$;

$X_2 \to Z_2$: $1\times 1+0\times 3+3\times 2 = 7$.

主观题 1分

设置

引例2 设有如下两组变量替换

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

将第二组变量替换代入到第一组中，即可将x_1, x_2表示为z_1, z_2的形式 (填空)

$$\begin{cases} x_1 = (\underline{\qquad\qquad\qquad})z_1 + (\underline{\qquad\qquad\qquad})z_2 \\ x_2 = (\underline{\qquad\qquad\qquad})z_1 + (\underline{\qquad\qquad\qquad})z_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

你发现什么规律? 与你的同伴讨论分享.

作答

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \end{cases}$$

x_i: 被表示量

y_k: 表示量

$$\longrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases}$$

y_k: 被表示量

z_j: 表示量

$$\longrightarrow B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$\begin{cases} x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})z_2 \\ x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})z_2 \end{cases}$$

x_i: 被表示量

z_j: 表示量

$$\rightarrow C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad \text{且 } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}, \quad (1 \le i, j \le 2).$$

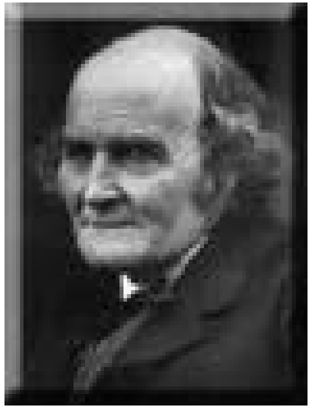
问题：

- 变换②可以代入变换①的条件是什么？ ——变换①的表示量恰为变换②的被表示量
- 代入后，新的变换(被)表示量如何？——被表示量为变换①的被表示量$\{x_i\}$；表示量为变换②的表示量$\{z_j\}$；

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\left\{x_i\right\}_{i=1}^{2}} \arrow[r, "A_{2\times 3}"] \arrow[rr, bend right, "AB:=C_{2\times 2}"'] & \boxed{\left\{y_k\right\}_{k=1}^{3}} \arrow[r, "B_{3\times 2}"] & \boxed{\left\{z_j\right\}_{j=1}^{2}}
\end{tikzcd}$$

- 代入后，新的变换的变量系数如何？ —— $c_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj},\quad (1\le i,j\le 2).$

（二）矩阵的乘法运算



历史上，Auther Cayley为了描述线性映射的复合而引入矩阵乘法的. 设

$$A=(a_{ij})_{m\times s},\ B=(b_{ij})_{t\times n}$$

- **可乘原则**：“前列数 $s=$ 后行数 t”，即矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数，则 A 与 B 可以相乘，记为AB.

- **乘积矩阵阶数**：乘积矩阵 C 的阶数为 “前行数$m\times$后列数n”

$$C=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times s}\cdot(b_{ij})_{s\times n}=AB,$$

左行右列中相等

● **乘积矩阵元素:** 积 C 的 (i,j) 位置上的元素 c_{ij} 如下计算:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},\quad (i=1,\cdots,m;\ \ j=1,\cdots,n).$$

即，c_{ij} 是 A 的第 i 行的元素与 B 的第 j 列对应位置上的元素乘积之和.

$$\begin{bmatrix}\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{is}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots&b_{1j}&\vdots\\ \vdots&b_{2j}&\vdots\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ \vdots&b_{sj}&\vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&\vdots&\\ \cdots&\boxed{c_{ij}}&\cdots\\ &\vdots&\end{bmatrix}$$

对应元素乘积之和

左行右列中求和

例3 设 $A=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&2&-1\\0&3&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$, 求 AB.

解

$$\begin{bmatrix}2&3&1\\1&2&-1\\0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times1+3\times0+1\times2\\1\times1+2\times0+(-1)\times2\\0\times1+3\times0+1\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}$$

注 (1) 在本例中 BA 无意义, 即B与A不可乘.

(2) 将本例中的 B 换成

$$B=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad AB=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&2&-1\\0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1+3x_2+x_3\\x_1+2x_2-x_3\\3x_2+x_3\end{bmatrix}$$

例4 考虑如下线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

记 $A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1^T \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_m^T \end{pmatrix}, \quad X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

则可得线性方程组的内积表达形式:

$$\begin{pmatrix} (\vec{\alpha}_1^T)_{1\times n} \cdot \vec{X}_{n\times 1} \\ \vdots \\ (\vec{\alpha}_m^T)_{1\times n} \cdot \vec{X}_{n\times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

上述表达式中的每一个等式(方程)

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \quad (1 \le i \le m)$$

均满足行矩阵与列矩阵的乘积的定义.

而方程组表达式中的左边,根据矩阵乘法的定义, 恰为

$$A_{m\times n}X_{n\times 1};$$

整个方程组可表示为

$$A_{m\times n}X_{n\times 1}=B_{m\times 1}.$$

例5 设 $A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $B=(b_1 \quad b_2)$, 则 $AB=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{bmatrix}$, $BA=(b_1a_1+b_2a_2)$.

注: 在本例中, 虽然 AB 与 BA 均有意义, 但 AB 是 2×2 矩阵, 而 BA 是1×1 矩阵. 从而, 显然有 $AB\neq BA$.

例6 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $AB=\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$.

注 (1) AB 与 BA 是同阶方阵，但 AB 不等于 BA.

(2) 虽然 A, B 都是非零矩阵，但是 $AB=O$.

例7 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-7 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, 求 AB 及 AC.

解

$$\left.\begin{aligned} AB&=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 5\\ -10 & 10\end{bmatrix},\\ AC&=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 5\\ -10 & 10\end{bmatrix}.\end{aligned}\right\}\Rightarrow AB=AC,\quad \text{但 } B\neq C.$$

注 虽然 A 不是零矩阵，而且 $AB=AC$, 但是 B 不等于 C.

这说明消去律不成立!

换言之, 矩阵没有除法, 即 $\dfrac{1}{A}$ 或 $\dfrac{B}{A}$ 没有意义 .

（三）矩阵乘法的性质与运算律

首先，总结一下矩阵乘法的一些反常性质：

- 不满足交换律： $AB \neq BA$
- 存在零因子： $A \neq O$ and $B \neq O \nRightarrow AB \neq O$

  $AB = O \nRightarrow A = O$ or $B = O$
- 不满足消去律： $AB = AC \nRightarrow B = C$

例8 考虑对角阵与矩阵的乘积

左行右列做倍乘

$$\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_m \end{pmatrix}_{m\times m} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}_{n\times n} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{m\times n}$$

由例8，可得如下两个结论

- 对于**单位阵** I_n与I_m，有

$$\boxed{I_n A_{n\times m} = A_{n\times m} I_m = A.}$$

- 对于**数量阵** $kI_n = \begin{bmatrix} k & & \\ & \ddots & \\ & & k \end{bmatrix} \quad (k \in \mathbb{R})$，有

kI_n与任意n阶方阵B (乘法) 可交换，且$(kI_n)B=B(kI_n)=kB$;
反之，与任意n阶方阵可交换的矩阵只有kI_n . (留作习题)

矩阵乘法的运算律

设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，且取 B, C 使得下列运算可行，则

(1) 零矩阵： $O_{k\times m}A = O_{k\times n},\ AO_{n\times l} = O_{m\times l}$

(2) 单位阵： $I_m A = A,\ AI_n = A$

(3) 数乘： $(kA)B=A(kB)=k(AB)$

(4) 左右分配律： $A(B+C) = AB+AC,\quad (B+C)A = BA+CA$

(5) 结合律： $A(BC) = (AB)C$

(5)结合律的证明：

设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times s}, C=(c_{ij})_{s\times t}$,

并记 $AB=P=(p_{ij})$, $BC=Q=(q_{ij})$，则 P为$m\times s$阶矩阵，Q为$n\times t$阶矩阵.

于是， $(AB)C=PC$ 以及 $A(BC)=AQ$ 均为 $m\times t$ 阶矩阵.

一方面，矩阵 $(AB)C=PC$ 位于第 i 行第 j 列位置的元素为：

$$d_{ij}=\sum_{l=1}^{s}p_{il}c_{lj}=\sum_{l=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}=\sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj};$$

另一方面，矩阵 $A(BC)=AQ$ 位于第 i 行第 j 列位置的元素为

$$e_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}q_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{s}b_{kl}c_{lj}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{s}a_{ik}b_{kl}c_{lj}=d_{ij}.$$

■

思考题1. 设A与B为n阶方阵,问等式

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

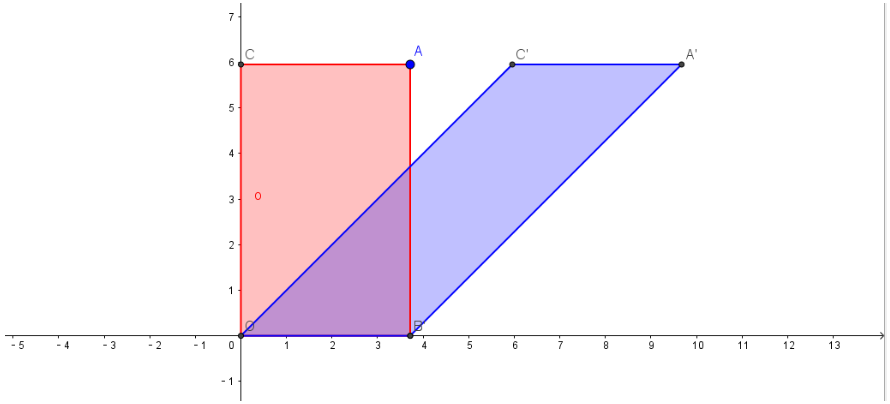
是否一定成立? 它成立的充要条件是什么?

思考题2. 矩阵还可引入其他运算吗?

作答

拓展：矩阵乘法的简单应用

📖 矩阵乘法在图形变换中的应用：



图像处理, 3D游戏, 虚拟现实VR, AR技术中.

一定意义下, 矩阵乘法就是“运动”.

拓展: 矩阵乘法在机械臂控制的应用:

- 在机器人学中, D-H (Denavit–Hartenberg) 参数法是控制链式机械臂关节的一种重要的数学方法.
- 多个机械关节完成的复合动作, 实际上就是通过若干4×4型矩阵的乘法运算, 来控制机械臂完成指定动作.
- 例如: 乘以下述矩阵就是控制机械臂在三维空间中实现平移动作的

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4(1,4(a)) \cdot E_4(2,4(b)) \cdot E_4(3,4(c))$$

[1].Denavit, Jacques; Hartenberg, Richard Scheunemann (1955). "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices". Trans ASME J. Appl. Mech. 23: 215–221.
[2].梶田秀司.仿人机器人[M]. 北京：清华大学出版社, 2008

本讲小结

- 由映射的复合引入矩阵乘法的定义
  - 可乘条件，乘积矩阵的阶数，乘积矩阵的元素
- 矩阵乘法的反常性
  - 非交换性，存在零因子，无消去律，无除法
- 矩阵的运算律
  - 零矩阵，单位阵，数乘，左右分配律，结合律