《线性代数》

第二章 行列式

§ 2.2 n 阶行列式的概念与性质

2019秋

杨晶 主讲

内容提要

- n 阶行列式的定义
- n 元排列及其逆序数
- 排列中的对换及其性质
- 用表达式计算行列式
- 行列式的行列等价性

上讲思考：

- 四阶、五阶, ···, n阶行列式的概念？
- 四元、五元,…,n元线性方程组有无类似的求解公式？

回顾：二阶、三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

行列式	总项数	每一项		
		乘积个数	符号	表示形式
2阶	2项	2个元	正负各半	$(-1)^{?}a_{1j_1}a_{2j_2}$
3阶	6项	3个元	正负各半	$(-1)^{?}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$

指数位置上的“?”与j_1j_2, $j_1j_2j_3$有何关系

定义的进一步分析

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum_{j_1,j_2\in S} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned} = \sum_{j_1j_2j_3\in S} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

如何决定列下标集合S，以及对应关系τ?

对二阶行列式：列下标的集合 S={12, 21}

顺序取正；
逆序取负

对三阶行列式：列下标的集合 S={123, 231, 312, 321, 213, 132}

→ $S = n$元全排列集合P_n， $\#P_n = n!$

回顾：二阶、三阶行列式的性质

性质

0、转置不变（行列等价）

1、单位归一

2、行(列)加法拆项法则

3、倍乘可提出

4、对换取反

5、倍加不变

- 推论1. 同行(列)化零
- 推论2. 零行(列)化零
- 推论3. 同比化零

问题：上述哪些性质是独立的?

- 推论可由性质3,4推出
- 性质2+性质3+推论3 ⇒ 性质5
- 若暂只考虑行or列1种操作，性质0可以暂不考虑

一. n 阶行列式的定义

- 设方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的列分别为$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$, 即$A=(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n)$.
- I_n为n阶单位阵, 即$I_n=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$.
- 定义n阶行列式为关于A的一个<u>实值函数</u>det=$|\cdot|$: $\{n$阶方阵$\}\to\mathbb{R}$, 且满足

1.(<u>单位归一</u>) $|I_n| = \det(I_n) = 1$;

2.(<u>加法拆项</u>) $\det(\vec{\alpha}_1,\cdots\vec{\alpha}_i+\vec{\alpha}_i',\cdots,\vec{\alpha}_n)=\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_n)+\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_i',\cdots,\vec{\alpha}_n)$;

3.(<u>倍乘可提出</u>) $\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,k\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_n)=k\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_n)$;

4.(<u>倍加不变</u>) $\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_j+k\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_n)=\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_j,\cdots,\vec{\alpha}_n)$.

低阶行列式性质的进一步分析

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ 0+a_{21} & 0+a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + 0 + 0 + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\triangleq \det(P_{12})a_{11}a_{22} + \det(P_{21})a_{12}a_{21} = \sum_{j_1 j_2 \in P_2} \det(P_{j_1 j_2})\, a_{1j_1}a_{2j_2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

类似地，三阶行列式也可按如下方式拆分为 27 项，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+0+0 & a_{12}+0+0 & a_{13}+0+0 \\ 0+a_{21}+0 & 0+a_{22}+0 & 0+a_{23}+0 \\ 0+0+a_{31} & 0+0+a_{32} & 0+a_{33}+0 \end{vmatrix}$$

(其中只有以下 6 项是非零的)

$$= a_1a_{22}a_{33}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{23}a_{31}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{13}a_{21}a_{32}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{13}a_{22}a_{31}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{12}a_{21}a_{33}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{11}a_{23}a_{32}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\triangleq \det(P_{123})a_{11}a_{22}a_{33} + \det(P_{231})a_{12}a_{23}a_{31} + \det(P_{312})a_{13}a_{21}a_{32} + \det(P_{213})a_{12}a_{21}a_{33} + \det(P_{231})a_{12}a_{23}a_{31} + \det(P_{132})a_{11}a_{23}a_{32}$$

低阶行列式性质的进一步分析

这里, $P_{j_1j_2j_3}$称为3阶**置换矩阵(permutation matrix)**, 它们可由单位阵I_3经过若干次**列对换**而得到:

$$P_{123}=I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad P_{231}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\xleftarrow{c_2\leftrightarrow c_3}P_{321}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xleftarrow{c_3\leftrightarrow c_1}I_3$$

$$P_{312}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\xleftarrow{c_3\leftrightarrow c_2}P_{213}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xleftarrow{c_1\leftrightarrow c_2}I_3$$

$$\Rightarrow \det(P_{j_1j_2j_3})=\begin{cases}1, & \text{当}P_{j_1j_2j_3}\text{由}I_3\text{经过偶数次列对换所得时;}\\ -1, & \text{当}P_{j_1j_2j_3}\text{由}I_3\text{经过奇数次列对换所得时.}\end{cases}$$

$$P_{132}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\xleftarrow{c_2\leftrightarrow c_3}I_3$$

一. n 阶行列式的表达公式

将对低阶行列式的分析推导, 施行于n阶行列式, 不难得到如下表达式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n\in P_n}\det(P_{j_1j_2\cdots j_n})\cdot a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

1. 表达式中共有 $n!$ 项.
2. 每一项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积.
3. 每一项可以写成$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$(正负号除外), 其中$j_1j_2\ldots j_n$是1, 2, …, n 的某个排列.
4. $\det(P_{j_1j_2\cdots j_n})=\begin{cases}1, & \text{当}P_{j_1j_2\cdots j_n}\text{由}I_n\text{经过偶数次列对换所得时;} \\ -1, & \text{当}P_{j_1j_2\cdots j_n}\text{由}I_n\text{经过奇数次列对换所得时.}\end{cases}$ $\Rightarrow$ 称$P_{j_1j_2\cdots j_n}$是偶的. $\Rightarrow$ 称$P_{j_1j_2\cdots j_n}$是奇的.

问题: 置换矩阵$P_{j_1j_2\cdots j_n}$的奇偶性如何确定?

例如, 置换矩阵 $P_{453162}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$是奇的, 还是偶的?

回答: 可对I_6依次进行$c_1\leftrightarrow c_4$, $c_6\leftrightarrow c_5$, $c_5\leftrightarrow c_2$的列对换而得到P_{453162}, 故它P_{453162}是奇的.

追问: 还有没有别的列对换方法, 使得 $I_6\to P_{453162}$?
对更大的n, 如何处理?

二. n 元排列及其逆序数

定义 把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的 **n元排列 (permutation)**. 全体n元排列构成的集合，通常用P_n表示.

显然, n 元排列一共有 $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$ 种.

对于n 元排列，规定从小到大为**标准序**或**自然序**.

定义 当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就称这两个元素组成一个**逆序 (inverse order)**.

例如，在排列32514中，

逆序

3 2 5 1 4

逆序 逆序

问题：还能找到其它逆序吗？

答：2和1，3和1也构成逆序.

定义 排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**(inverse number).
排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数通常记为: $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

奇排列：逆序数为奇数的排列.

偶排列：逆序数为偶数的排列.

思考题：自然排列$12\cdots n$是奇排列还是偶排列?

答：自然排列$12\cdots n$的逆序数等于零，因而是偶排列.

计算排列的逆序数的方法

考虑排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 先看有多少个比 i_1大的数排在它前面, 记为 t_1;
再看有多少个比 i_2大的数排在它前面，记为 t_2; ……直至t_n.

则此排列的逆序数为

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$$

往前数大

也可等价地往后数小

练习1： 求排列 32514 的逆序数.

解： $\tau(32514) = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5$

练习2： 求排列 453162 的逆序数.

答案： $\tau = 3+3+2+0+1=9$

练习3： 求排列 $n(n-1)\ldots 21$ 的逆序数.

答案：

$$\tau(n(n-1)\ldots 21) = 0 + 1 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

再看三阶行列式的列下标的集合

$$P_3 = \{123, 231, 312, 321, 213, 132\}$$

有 $\tau(123) = 0, \tau(231) = 2, \tau(312) = 2;$

$\tau(321) = 3, \tau(213) = 1, \tau(132) = 1;$

因为, 逆序数为偶数的排列为偶排列;

逆序数为奇数的排列为奇排列.

则 123, 231, 312 为偶排列;

321, 213, 132 为奇排列.

三. 排列中的对换及其性质

定义. 在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做**对换 (swapping)**.

将相邻两个元素对换，叫做**相邻对换 (adjacent swapping)**.

例如

$$a_1\cdots a_l\ a\ b\ b_1\cdots b_m \quad\longrightarrow\quad a_1\cdots a_l\ b\ a\ b_1\cdots b_m$$

$$a_1\cdots a_l\ a\ b_1\cdots b_m b\ c_1\cdots c_n \quad\longrightarrow\quad a_1\cdots a_l\ b\ b_1\cdots b_m a\ c_1\cdots c_n$$

注: 1. 连续施行两次相同的对换，则排列还原.

2. 一般的对换可以通过一系列的相邻对换来实现.

$$a_1\cdots a_l\ a\ b_1\cdots b_m b\ c_1\cdots c_n \xrightarrow{m\text{ 次相邻对换}} a_1\cdots a_l\ a\ b\ b_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m+1\text{次相邻对换}} a_1\cdots a_l\ b\ b_1\cdots b_m a\ c_1\cdots c_n$$

对换与排列奇偶性的关系

定理1 1次对换改变排列的奇偶性.

证明: 先考虑相邻对换的情形.

$$\tau = t_{a_1} + \cdots + t_{a_l} + t_a + t_b + t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}$$

往前数大

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m$$

$$\tau' = t_{a_1} + \cdots + t_{a_l} + r_b + r_a + t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}$$

注意到除 a,b 外，其它元素的逆序数不改变.

当 $a<b$ 时，$r_a = t_a + 1$，$r_b = t_b$，

$$\tau' = \tau + 1.$$

当 $a>b$ 时，$r_a = t_a$，$r_b = t_b - 1$，

$$\tau' = \tau - 1.$$

因此一次相邻对换改变排列的奇偶性.

对一般的对换

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b_1 \cdots b_m \; b \; c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{2m+1\text{次相邻对换}}$$

$$a_1 \cdots a_l \; b \; b_1 \cdots b_m \; a \; c_1 \cdots c_n$$

因此，一个排列中的任意两个元素对换，排列的奇偶性改变.

推论1. 全部 $n\ (\geq 2)$ 元排列中奇偶排列各占一半.

证明:

$$\text{奇排列 } s \text{ 个} \;\underset{(1,2)\text{对换, 则}s\geq t}{\overset{(1,2)\text{对换, 则}s\leq t}{\rightleftarrows}}\; \text{偶排列 } t \text{ 个} \qquad \Rightarrow s=t$$

例如 S_2中有 21→12; S_3中有 132→231, 213→123, 321→312

推论2. 存在非负整数t, 使得 $j_1j_2\cdots j_n \xrightarrow{t\text{ 次对换}} 12\cdots n$

其中, t 的奇偶性与排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性相同.

证明: 存在性易证. 下证奇偶性: 由每次对换都改变奇偶性，而$\tau(12\ldots n)=0$为偶, 故得证.

推论3. 置换矩阵$P_{j_1j_2\cdots j_n}$的奇偶性等价于排列$j_1j_2\ldots j_n$的奇偶性.

阶段小结

定义+性质

- 0、转置不变（行列等价）
- 1、单位归一
- 2、行(列)加法拆项法则
- 3、倍乘可提出
- 4、对换取反
- 5、倍加不变

- 推论1. 同列化零
- 推论2. 零列化零
- 推论3. 同比化零

- 推论可由性质3,4推出
- 性质2+性质3+推论3 $\Rightarrow$ 性质5
- 还缺行列等价性

代数表达式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} \det(P_{j_1 j_2 \cdots j_n}) \cdot a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

- $n!$ 项代数和
- 每项不同行不同列的n个元素之积
- 每项符号由逆序数的奇偶性确定

四. 用表达式计算行列式

例1 写出四阶行列式展开式中同时含 a_{13} 与 a_{32} 的项, 并确定正负号.

解: 对四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

按定义展开后，同时含 a_{13} 与 a_{32} 的项的一般形式为

其中 j_2j_4 为 1与4 的排列，共两种: 14, 41， 对应的两项为

$$(-1)^{\tau(3124)} a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} = a_{13}a_{21}a_{32}a_{44},$$

$$(-1)^{\tau(3421)} a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} = -a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}.$$

思考：对角线法则对四阶行列式是否成立？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

如此只能得到8项(正负各4项)

四阶行列式应该有4!=24项

思考：对角线法则对四阶行列式是否成立？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

另一个角度:

同时含a_{13}与 a_{32} 的对角线是不存在的，这与刚刚例1的结论不符.

六个结论：

(1) 对角行列式

(3) 上三角行列式

(5) 下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2)反对角行列式

(4) 反上三角行列式

(6) 反下三角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \boxed{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}} \cdot a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

五. n 阶行列式的行列等价性

思考： 若行列式表达式展开项中的行指标不按自然排列的顺序，此项的符号应如何确定？

设定义求和式中一项为$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，其符号为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

因为数的乘法具有交换性，所以可把此项中的元素任意交换次序.

每做一次元素的对换

- 行指标与列指标的排列同时都做了一次对换
- 行指标排列与列指标排列的奇偶性同时发生变化
- 行指标排列与列指标排列的逆序数之和奇偶性不变

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \xrightarrow{\text{若干次对换后}} a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$$

则，有如下的等式

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}.$$

特别地，若把每一项的列指标都按自然顺序排列时，即取

$$k_1k_2\cdots k_n=12\cdots n$$

则有

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}.$$

故得,行列式的等价计算表达式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n\in P_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n\in P_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

等价表达式说明：行列式中行和列地位相同.

本讲小结

定义+性质

- 0、行列等价
- 1、单位归一
- 2、行(列)加法拆项法则
- 3、倍乘可提出
- 4、对换取反
- 5、倍加不变

- 推论1. 同列化零
- 推论2. 零列化零
- 推论3. 同比化零

- 推论可由性质3,4推出
- 性质2+性质3+推论3 $\Rightarrow$ 性质5

代数表达式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} \det(P_{j_1 j_2 \cdots j_n}) \cdot a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in P_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

- $n!$ 项代数和
- 每项不同行不同列的n个元素之积
- 每项符号由逆序数的奇偶性确定

本讲小结

- n 元排列的逆序数 $\tau(j_1j_2\dots j_n)$, 及其计算方法.
- 排列的奇偶性: 由排列逆序数的奇偶性决定.
- 对换及其对奇偶性的影响
  - ✓ 结论1. 对换改变排列的奇偶性
  - ✓ 结论2. 奇偶排列各占一半
  - ✓ 结论3. 奇(偶)排列经过奇(偶)数次对换后可化为自然排列