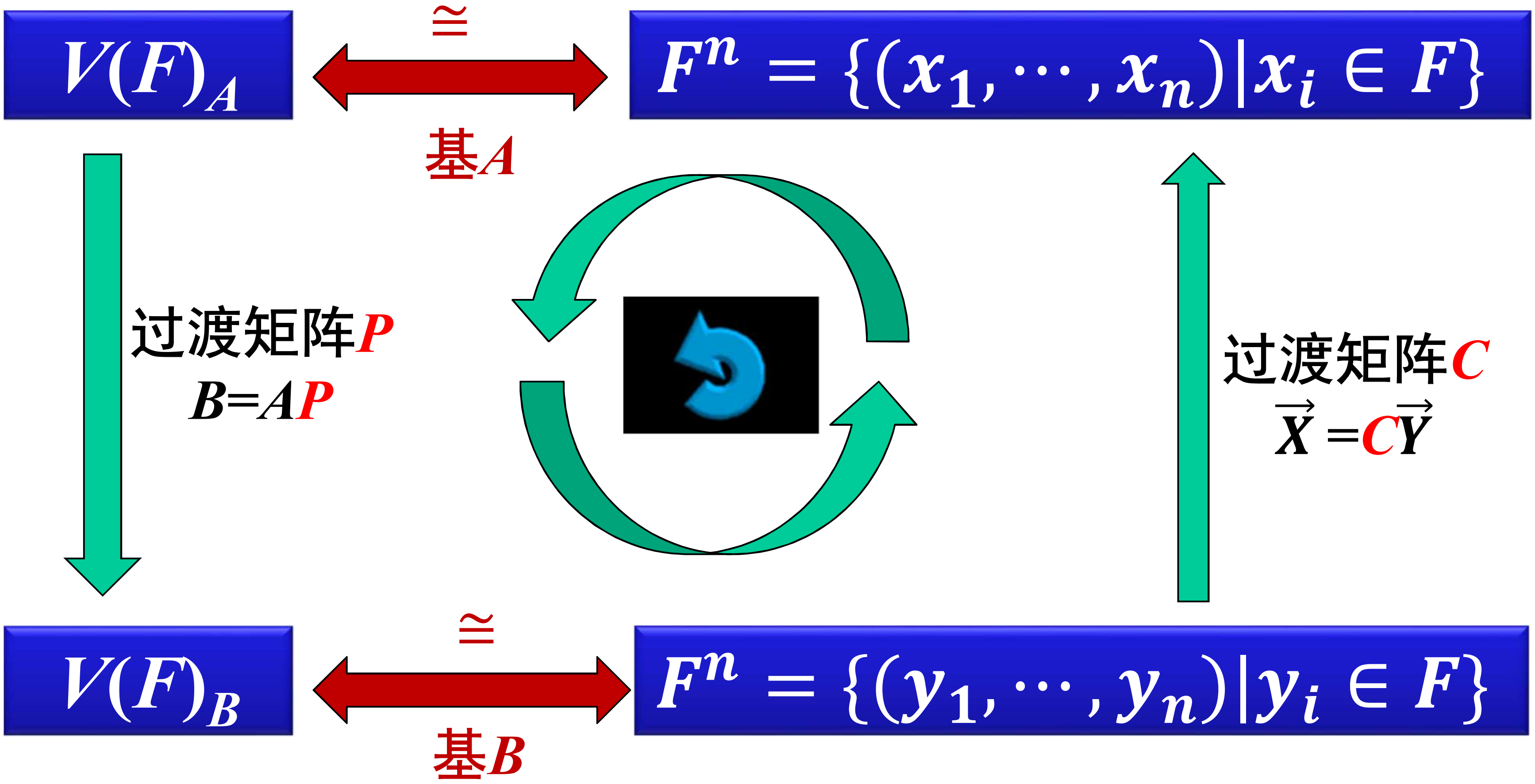
《线性代数》

第六章 线性空间

6-2 线性子空间

2019年
秋

杨晶 主讲



- 上一节, 把F^n中向量之间的线性关系推广到了抽象的线性空间$V(F)$中.
- 本节, 我们将从整体的角度, 把向量空间F^n中的子空间结构, 推广到线性空间$V(F)$中来.

本讲提要 线性子空间

一、线性子空间

二、子空间的交、和及维数公式(1)

三、子空间的直和

一、线性子空间

首先, 引入线性子空间的概念:

定义1 设 V 是 F 上的线性空间, W 为 V 的非空子集, 如果 W 对于 V 和 F 上的 $+, \cdot$ 仍为线性空间, 则称 W 是 V 的 **(线性)子空间(subspace)**.

$\{0\}$ 和 V 称为平凡子空间.

注: 根据定义, 要验证一个子集合为子空间, 需要逐一验证 11 条性质是否满足.

多选题 2分

设置

➤ 线性子空间的例子

例1 齐次线性方程组$A_{m\times n}\vec{X}=\vec{0}$ 的解集合 **N(A),** 是否为 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间?

是

否

例2 $V=\{(x,-x,0)^{\mathrm{T}}\,|\,x\in\mathbb{R}\}$ 是否为$\mathbb{R}^3$ 的线性子空间?

是

否

提交

多选题 2分

设置

例3 $V=\{(1,0,-z)^{\mathrm{T}} \mid z\in\mathbb{R}\}$ 是否为$\mathbb{R}^3$的子空间.

是

否

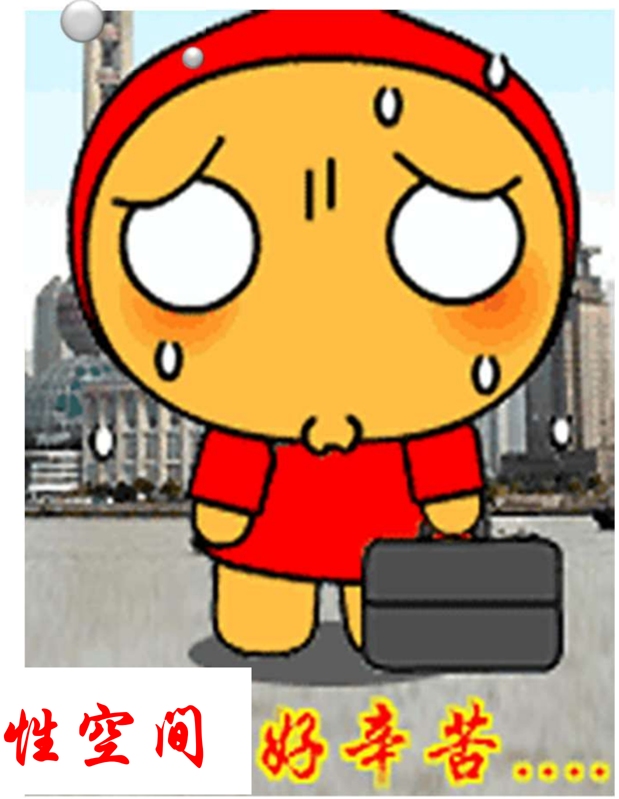
例4 $\mathbb{R}^n$ 是否为复线性空间 $\mathbb{C}^n$ 的线性子空间?

是

否

提交

简单一点的方法，
有木有？！



逐条验证线性空间

定理1 设 W 是线性空间 V 的非空子集，那么 W 是 V 的子空间的充要条件是 W 对 V 中定义的加法和数乘运算封闭.

证明 只需证明充分性：已知 W 非空，且 W 对加法，数乘封闭：即对任何 W 中元素 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 及任意 $k\in F$，有

为什么只需要验证两条？

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}\in W, k\vec{\alpha}\in W,$$

即可在 W 和 F 上定义加法与数乘，且 $\forall\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}\in W, \forall\, k, l\in F$，有 (1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$, (2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})$, (5) $1\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$,

(6) $(kl)\vec{\alpha}=k(l\vec{\alpha})$, (7) $k(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=k\vec{\alpha}+k\vec{\beta}$, (8) $(k+l)\vec{\alpha}=k\vec{\alpha}+l\vec{\alpha}$

下证：(3) V 的零元属于W，(4) $\forall\vec{\alpha}\in W, \vec{\alpha}$ 的负元属于W.

(3) 因为 $W\neq\varnothing$，所以 $\exists\vec{\alpha}\in W\subseteq V$, 由于 V 是一个线性空间, 所以 $0\vec{\alpha}=\vec{0}$，又因为 W 对数乘的封闭性，有 $\vec{0}=0\vec{\alpha}\in W$,

(4) $\forall\vec{\alpha}\in W$，$\exists-\vec{\alpha}\in V$，使 $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$, 由于 V 是一个线性空间,

所以 $(-1)\vec{\alpha}=-\vec{\alpha}$，又因为 W 对数乘的封闭性，有 $-\vec{\alpha}=(-1)\vec{\alpha}\in W$，$\therefore W$ 是 V 的一个子空间.

\我是一棵秋天的树

\你可知道我曾经枝繁叶茂的样子？

定义3 设 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m$ 属于数域 F 上的线性空间 V, 则子集

$$L(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m)=\left\{\sum_{i=1}^{m}k_i\vec{\alpha}_i \,\middle|\, k_i\in F, i=1,2,\cdots,m\right\}$$

是 V 的一个子空间，称为由 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m$ 生成的子空间.

定义4 设 $A\in M_{m,n}(F)$, 由 A 的n个列向量生成的子空间称为 A 的列空间，记为 Col(A). 类似地, A的行空间记为Row(A).

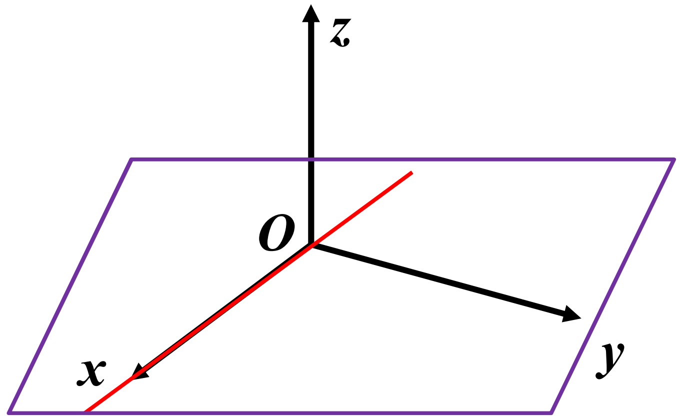
注：● 生成子空间$\mathrm{L}(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m)$是包含$\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m\}$的最小子空间.

即, 若U是子空间, 且$\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m\}\subseteq U$, 则$\mathrm{L}(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m)\subseteq U$.

● 生成子空间是部分(向量)组在整体结构上的表现.

例5 $V=\mathbb{R}^3$ 的中的自然基$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, 则

$L(\vec{e}_1)=Ox$直线, $L(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=Oxy$平面, $L(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\mathbb{R}^3$空间.



结论:

- 向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m$生成子空间的维数等于该向量组的秩, 即

$$\dim L(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m)=\mathrm{r}(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m)$$

- 向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m$与它的极大无关组的生成子空间相同, 即

$$L(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m)=L(\vec{\alpha}_{i_1},\cdots,\vec{\alpha}_{i_r})$$

- 两个向量组等价的充要条件是它们的生成子空间相同, 即

$$\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m\}\sim\{\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_n\} \Leftrightarrow L(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m)=L(\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_n)$$

定理2 (基扩充定理) 设V为有限维线性空间, W为V的子空间, 则由W的任一组基可以扩充得到整个线性空间V的一组基，即

$$W=L(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m) \Longrightarrow V=L(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m,\vec{\alpha}_{m+1},\cdots,\vec{\alpha}_n).$$

证明：若$m=n$, 则$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m$就是空间$V$的一组基.

若$m<n$, 则必存在V中向量$\vec{\alpha}_{m+1}\notin W$, 即$\vec{\alpha}_{m+1}$不能由$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m$线性表出, 从而有$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m,\vec{\alpha}_{m+1}$线性无关.

此时, 若$m+1=n$, 则定理得证, 否则必存在V中向量

$$\vec{\alpha}_{m+2}\notin L(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m,\vec{\alpha}_{m+1})\ \ldots\ldots$$

重复上述过程, 在有限步之内可得

$$V=L(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m,\vec{\alpha}_{m+1},\cdots,\vec{\alpha}_n). \qquad \blacksquare$$

基扩充的思想很重要！
后文还会用到！

例6 设 $V=M_2(\mathbb{R})$, $W=L\left(\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\5&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6&3\\9&6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&3\\12&9\end{bmatrix}\right)$,
求 W 的一组基.

解: $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 为 V 的一组基，把 W 的四个生成向量在这组基下的坐标均写成列向量，排成一个矩阵的四列，用初等行变换把这个矩阵化为阶梯形矩阵 U

$$\begin{bmatrix}3&0&6&3\\1&1&3&3\\2&5&9&12\\1&4&6&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&2\\0&5&5&10\\0&4&4&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=U$$

所以 W 的前两个生成向量即为 W 的一组基.

二、子空间的交与和

- 子空间的引入，使得线性空间在包含意义下有了一个**偏序结构$(V, \subseteq)$**.
- 不同子空间直接有何**关系**和**运算**呢？
- 为此，我们引入子空间的交与和(**Intersection & summation of subspaces**)的定义. 它们是构造新的子空间的常用方法.

定义2 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间，则

$W_1 \cap W_2 = \{\vec{\alpha} \mid \vec{\alpha} \in W_1, \vec{\alpha} \in W_2\}$ 称为 **W_1与W_2的交**.

$W_1 + W_2 = \{\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 \mid \vec{\alpha}_1 \in W_1, \vec{\alpha}_2 \in W_2\}$ 称为 **W_1与W_2的和**.

定理4 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间，则 $W_1 \cap W_2$与 $W_1 + W_2$ 仍是 V 的线性子空间.

问题：为什么不考虑$W_1 \cup W_2$？它保持线性子空间的性质吗？

证明: 只需验证非空性与封闭性.

(1) 因为 $\vec{0}\in W_1$, $\vec{0}\in W_2$, 所以

$$\vec{0}\in W_1\cap W_2=\{\vec{\alpha}\mid\vec{\alpha}\in W_1\text{且 }\vec{\alpha}\in W_2\},$$

所以 $W_1\cap W_2=\{\vec{\alpha}\mid\vec{\alpha}\in W_1\text{且 }\vec{\alpha}\in W_2\}$ 非空,

$$\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in W_1\cap W_2,\vec{\alpha}+\vec{\beta}\in W_1\cap W_2.$$

$$\forall k\in F,\quad k\vec{\alpha}\in W_1\cap W_2.$$

所以 $W_1\cap W_2$ 是 V 的一个子空间.

(2) 因为 $\vec{0}\in W_1$, $\vec{0}\in W_2$, 所以 $\vec{0}\in W_1+W_2$, 所以 W_1+W_2 非空,

设 $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in W_1+W_2$,

则 $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$, $\vec{\alpha}_1\in W_1$, $\vec{\alpha}_2\in W_2$, $\vec{\beta}=\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2$, $\vec{\beta}_1\in W_1$, $\vec{\beta}_2\in W_2$,

$$\therefore\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(\vec{\alpha}_1+\vec{\beta}_1)+(\vec{\alpha}_2+\vec{\beta}_2)\in W_1+W_2.$$

$$k\vec{\alpha}=k\vec{\alpha}_1+k\vec{\alpha}_2\in W_1+W_2.\qquad\square$$

子空间的容斥原理

定理5 [维数公式(1)] 设 W_1, W_2 为 V 的两个子空间，则

$$\dim W_1+\dim W_2 = \dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2).$$

证明 设 $\dim(W_1\cap W_2)=t$, $\dim W_1=r$, $\dim W_2=s$, $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_t$ 是 $W_1\cap W_2$ 的一组基，把 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_t$ 扩充为 W_1 的一组基 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_t,\vec{\beta}_{t+1},\cdots,\vec{\beta}_r$. 把 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_t$ 扩充为 W_2 的一组基 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_t,\vec{\gamma}_{t+1},\cdots,\vec{\gamma}_s$ 由和空间的定义可知 W_1+W_2 中向量均为 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_t,\vec{\beta}_{t+1},\cdots,\vec{\beta}_r,\vec{\gamma}_{t+1},\cdots,\vec{\gamma}_s$ 的线性组合，以下只需证明 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_t,\vec{\beta}_{t+1},\cdots,\vec{\beta}_r,\vec{\gamma}_{t+1},\cdots,\vec{\gamma}_s$ 是线性无关的，从而是 W_1+W_2 的一组基. 设

$$\underbrace{\lambda_1\vec{\alpha}_1+\cdots\lambda_t\vec{\alpha}_t+\lambda_{t+1}\vec{\beta}_{t+1}+\cdots+\lambda_r\vec{\beta}_r}_{\vec{\delta}\in W_1}+\underbrace{\mu_{t+1}\vec{\gamma}_{t+1}+\cdots+\mu_s\vec{\gamma}_s}_{-\vec{\delta}\in W_2}=\vec{0} \quad (1)$$

$\therefore \vec{\delta} \in W_1 \bigcap W_2$, 故存在 $\mu_1, \cdots, \mu_t \in F$ 使,

$$\vec{\delta} = -\mu_{t+1}\vec{\gamma}_{t+1} \cdots - \mu_s\vec{\gamma}_s = \mu_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + \mu_t\vec{\alpha}_t$$

$$\therefore \mu_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + \mu_t\vec{\alpha}_t + \mu_{t+1}\vec{\gamma}_{t+1} + \cdots + \mu_s\vec{\gamma}_s = \vec{\mathbf{0}}$$

$\because \vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_t, \vec{\gamma}_{t+1}, \cdots, \vec{\gamma}_s$ 为 W_2 的一组基, $\therefore \mu_i = 0,\ i = 1 \cdots s.$

代入(1)式得 $\lambda_1\vec{\alpha}_1 + \cdots \lambda_t\vec{\alpha}_t + \lambda_{t+1}\vec{\beta}_{t+1} + \cdots + \lambda_r\vec{\beta}_r = \vec{\mathbf{0}},$

$\because \vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_t, \vec{\beta}_{t+1}, \cdots, \vec{\beta}_r$ 为 W_1 的一组基, $\therefore \lambda_i = 0,\ i = 1, \cdots r.$

$\therefore \vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_t, \vec{\beta}_{t+1}, \cdots, \vec{\beta}_r, \vec{\gamma}_{t+1}, \cdots, \vec{\gamma}_s$ 恰是 W_1+W_2 的一组基.

$$\begin{aligned} \therefore \dim W_1 + \dim W_2 &= r + s = (r + s - t) + t \\ &= \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \bigcap W_2). \end{aligned}$$

□

例7 设 $\vec{\alpha}_1=[2,0,1,3,-1]^T,\vec{\alpha}_2=[0,-2,1,5,-3]^T,\vec{\alpha}_3=[-2,-4,1,7,-5]^T$;

$\vec{\beta}_1=[1,1,0,-1,1]^T,\vec{\beta}_2=[1,-3,2,0,5]^T$

$W_1=L(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)$, $W_2=L(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2)$, 求 W_1+W_2 和 $W_1\cap W_2$ 的维数与基.

解 易知$\vec{\alpha}_3=-\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2$, $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$是$W_1$的一组基, 即$W_1=L(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)$.

$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2$是$W_2$的一组基，$\dim W_1=\dim W_2=2$.

$W_1+W_2=L(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2)=L(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,-\vec{\beta}_1,-\vec{\beta}_2)$, 于是考虑

$$\begin{bmatrix}2&0&-1&-1\\0&-2&-1&3\\1&1&0&-2\\3&5&1&0\\-1&-3&-1&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1/2&0\\0&1&1/2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

简化阶梯形已包含了所有结论！为什么？

因此$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\beta}_2$是$W_1+W_2=$的一组基，即$W_1+W_2=L(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\beta}_2)$,

$\dim W_1+W_2=3$. 由维数公式，有$\dim W_1\cap W_2=2+2-3=1$.

下求 $W_1 \cap W_2$ 的一组基.

设 $\vec{\delta} \in W_1 \cap W_2$，则 $\vec{\delta} = k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 = l_1\vec{\beta}_1 + l_2\vec{\beta}_2$，$(k_1, k_2), (l_1, l_2) \neq (0,0)$

$k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 - l_1\vec{\beta}_1 - l_2\vec{\beta}_2 = \vec{0}$，对应系数矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{解得}} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此 $\vec{\delta} = k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 = l_1\vec{\beta}_1 + l_2\vec{\beta}_2 = (1,1,0,-1,1)^T$.

是 $W_1 \cap W_2$ 的一组基.

*三、子空间的直和

- 子空间的直和是子空间的和的一个重要的特殊情况.
- 如果能够将一个线性空间分解为几个子空间的直和, 则整个线性空间的研究就可以归结为几个较为简单的子空间的研究.

定义5 设 W_1 和 W_2 是 V 的子空间, 如果 $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$, 则称 W_1+W_2 为W_1 与 W_2 的直和, 记为 $W_1 \oplus W_2$.

例8 设 W_1, W_2 分别是 $\mathbb{R}^3$ 中过原点的直线和平面(直线不在平面上)上的全体向量构成的子空间, 则

$$W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}, \ W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3.$$

定理6 设 W_1, W_2 为 V 的两个子空间, $V = W_1+W_2$, 则下面的四个命题等价:

(1) $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$,

(2) $\vec{0}$ 表示成 W_1与W_2 中元素和的方法唯一.

(3) V 中任意元素表示成 W_1与 W_2 中元素和的方法唯一.

(4) $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 若 $0 = \vec{\alpha}+\vec{\beta}$, 这里 $\vec{\alpha} \in W_1, \vec{\beta} \in W_2$,

则 $\vec{\alpha} = -\vec{\beta} \in W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$, 故 $\vec{\alpha} = \vec{0} = \vec{\beta}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 若 $\vec{\alpha} = \vec{\beta}_1 + \vec{\gamma}_1 = \vec{\beta}_2 + \vec{\gamma}_2$, 这里 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 \in W_1, \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2 \in W_2$.

则 $(\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2) + (\vec{\gamma}_1 - \vec{\gamma}_2) = \vec{0}$, 这里 $\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2 \in W_1, \vec{\gamma}_1 - \vec{\gamma}_2 \in W_2$.

故 $\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2 = \vec{\gamma}_1 - \vec{\gamma}_2 = \vec{0}$, 所以 $\vec{\beta}_1 = \vec{\beta}_2, \vec{\gamma}_1 = \vec{\gamma}_2$.

(3) $\Rightarrow$ (4) 反证法, 若不然, 由维数公式有 $\dim(W_1 \cap W_2) \neq 0$,

所以 $W_1 \cap W_2 \neq \{\vec{0}\}$, 所以存在 $\vec{0} \neq \vec{\alpha} \in W_1 \cap W_2$, 故 $-\vec{\alpha} \in W_2$,

且 $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{\alpha} + (-\vec{\alpha})$, 与(3)矛盾.

(4) $\Rightarrow$ (1) 由维数公式有 $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, 故 $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$. ■

推论 设 W_1, W_2 为 V 的两个子空间, $V = W_1+W_2$, $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 为 W_1 的一组基, 而 $\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_t$ 为 W_2 的一组基, 则

$$V = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s,\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_t \text{ 为 } V \text{ 的一组基.}$$

证明 **必要性** 由定理6(4) $\dim V = s+t$, 而 V 中向量均可由 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s,\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_t$ 线性表出, 所以 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s,\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_t$ 为 V 的一组基.

充分性 因为 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s,\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_t$ 为 V 的的一组基,

由定理5(1)可知 $V = W_1 \oplus W_2.$ ■

例9 设 W_1 是 V 的一个子空间, 由基扩充的思想可知存在一个子空间 W_2 使得 $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$, 且 $W_1 + W_2 = V$, W_2 称为 W_1 的补空间. 注意: 补空间不是唯一的.

例10 设 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 为两个线性无关的空间向量, 它们生成的过原点的平面记为 $W_1 = \mathrm{L}(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2)$, 设 $\vec{\alpha}_3 \notin W_1$, 则 $W_2 = \mathrm{L}(\vec{\alpha}_3)$ 是 W_1 的补空间, W_1 的补空间有无穷多个, 任意一个不在平面 W_1 上的过原点的直线均为其补空间.

本讲小结

1、概念

- 子空间：验证1+10个条件，可简化为验证1+2个条件.
- 生成子空间:包含向量组的最小子空间，基扩充定理
- 矩阵的列空间、行空间：Col(A), Row(A)
- 齐次方程组的解空间：N(A)
- 子空间的交与和：$W_1 \cap W_2$、$W_1 + W_2$
- *子空间的直和：$W_1 \oplus W_2$ (若 $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$)

维数公式(1) $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$.

2、重要结论

- 重要思想：基扩充，
- 难点：如何求 $(W_1 \cap W_2)$的基

直和等价命题： (1) $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$,

(2) $\vec{0}$ 表示成 W_1与W_2 中元素和的方法唯一.

(3) V 中任意元素表示成 W_1与 W_2 中元素和的方法唯一.

(4) $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$.