随机变量及其分布复习自测题

一、单项选择题

1、（B）。 **2**、（B）。 **3**、（C）。 **4**、（A）。 **5**、（C）。 **6**、（A）。 **7**、（D）。

二、填空题

1、$a=\underline{\ 1/6\ }$，$b=\underline{\ 5/6\ }$，X 的分布为

X	－1	1	2
P	1/6	2/6	1/2

2、$a=\underline{\ 1\ }$，$b=\underline{\ 1\ }$，$P\{-1<X<2\}=\underline{\ 3/4\ }$，$X$ 的概率密度 $\underline{f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}, & x>1,\\ 0, & x\le 1.\end{cases}}$

3、$X\sim\underline{B(10,1/6)}$，$X$ 的概率分布为 $\underline{P\{X=k\}=C_{10}^{k}(\frac{1}{6})^{k}(\frac{5}{6})^{10-k},k=0,1,\cdots,10.}$

4、$a=\underline{1/\sqrt[4]{2}}$ 。

5、$\underline{\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=2\Phi(0.8)-1=0.5762}$ 。

6、$\mu=\underline{-3}$，$\sigma=\underline{\sqrt{2}}$。

7、 X 的分布律为

X	1	2	3
P	1/2	a+1/9	b+1/18

Y 的分布律为

Y	1	2
P	1/3	a+b+1/3

$P\{X=Y\}=\underline{a+\frac{1}{6}}$ ；　　$a=\underline{\ 2/9\ }$, $b=\underline{\ 1/9\ }$ 时， X 与 Y 相互独立。

8、X 与 Y 的联合分布律为

Y \ X	－3	－2	－1
1	1/10	1/10	1/5
2	1/20	1/20	1/10
3	1/10	1/10	1/5

$Z=X+Y$ 的分布律为

Z	−2	−1	0	1	2
P	1/10	3/20	7/20	1/5	1/5

9、 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, 1\le x\le e^2, & 0\le y\le \frac{1}{x},\\ 0, 其它.\end{cases}$

10、 $N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ 。

11、 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y}, -1<x<1, & y>0,\\ 0, 其它.\end{cases}$ Z 的分布为

Z	0	1
P	1−1/2e	1/2e

三、计算题

1、解: X 的分布律为

X	1	2	3	4
P	$(4^3-3^3)/4^3$	$(3^3-2^3)/4^3$	$(2^3-1)/4^3$	$1/4^3$

2、解: 令疵点数为 X， $X\sim\pi(\lambda)$，分布律为 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,\cdots$,

已知 $P\{X=0\}=0.4493$，故 $e^{-\lambda}=0.4493$， $\lambda=-\ln 0.4493\approx 0.8$，

所求为 $P\{X>4\}=1-\sum_{k=0}^{4}P\{X=k\}=1-0.4493\sum_{k=0}^{4}\frac{0.8^k}{k!}\approx 0.0091$

3、解: (1) 由归一性得 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_1^e\frac{a}{x}dx=a\ln x\Big|_1^e=a\overset{令}{=}1$,

(2) $P\{2<X<4\}=\int_2^4 f(x)dx=\int_2^e\frac{1}{x}dx=1-\ln 2$

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}0, & x<1,\\ \int_1^x\frac{1}{x}dx=\ln x, & 1\le x\le e,\\ 1, & x>e.\end{cases}$

4、解: 设某人造卫星偏离预定轨道的距离为 X，5 次独立观测中“失败”的次数为 Y，

则 $X \sim N(0,4^2)$，每次观测“失败”的概率为 $P\{|X|>10\}=1-P\{\left|\frac{X}{4}\right|\le 2.5\}$

$=2-2\Phi(2.5)=0.0124$，由此得 $Y \sim B(5,0.0124)$，所求概率为

$$P\{Y\ge 2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}=1-(0.9876)^5-C_5^1(0.0124)(0.9876)^4\approx 0.0015$$

5、解: (1) 由归一性得 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2(x^2+kxy)\mathrm{d}y=\int_0^1(2x^2+2kx)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}+k\overset{令}{=}1,\ 得\ k=\frac{1}{3}$$

(2) $P\{X+Y\ge 1\}=\iint\limits_{x+y\ge 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^2(x^2+\frac{xy}{3})\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1(\frac{x}{2}+\frac{4x^2}{3}+\frac{5x^3}{6})\mathrm{d}x=\frac{65}{72}$$

(3) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^2(x^2+\frac{xy}{3})\mathrm{d}y=2x^2+\frac{2x}{3}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1(x^2+\frac{xy}{3})\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{y}{6}, & 0\le y\le 2,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

在 $f(x,y)$ 的非零区域内 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立。

6、证明: Y 的分布函数 $F_Y(y)=P\{1-\mathrm{e}^{-2X}\le y\}=P\{\mathrm{e}^{-2X}\ge 1-y\}$

$$=\begin{cases}1, & y\ge 1,\\ P\{X\le -\frac{\ln(1-y)}{2}\}=F_X[-\frac{\ln(1-y)}{2}], & y<1.\end{cases}$$

$y<1$ 时，$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X[-\frac{\ln(1-y)}{2}]\cdot\frac{1}{2(1-y)}=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 所以 $Y=1-\mathrm{e}^{-2X}\sim U(0,\ 1)$