数理统计复习自测题参考答案

一、单项选择题

1、（B）。 **2**、（C）。 **3**、（D）。 **4**、（D）。 **5**、（D）。 **6**、（B）。 **7**、（B）。

二、填空题

1、$\underline{N(\mu,\sigma^2/n)}$；$\underline{N(0,1)}$；$\underline{t(n-1)}$；$\underline{\chi^2(n)}$；$\underline{\chi^2(n-1)}$。

2、$\underline{\overline{X}-\frac{1}{2}}$。 **3**、_无偏_，$\underline{d_2}$。**4**、_无偏估计_，_无偏估计_。 **5**、_一_。

6、$\underline{(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}})}$；$\underline{U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}}$，$\underline{\{|U|\ge u_{\alpha/2}\}}$。 **7**、_二_；_一_。

三、计算及证明题

1、解：X_1,X_2,X_3独立且都服从$N(1,4)$，得$E(X_i)=1$，$E(X_i^2)=D(X_i^2)+[E(X_i)]^2=5$，

$i=1,2,3$；从而$E(X_1^2X_2^2X_3^2)=E(X_1^2)E(X_2^2)E(X_3^2)=125$，

$$D(X_1X_2X_3)=E(X_1^2X_2^2X_3^2)-[E(X_1X_2X_3)]^2=125-[E(X_1)E(X_2)E(X_3))]^2=124$$

2、解：样本均值$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{4}{n})$，$\frac{\overline{X}-\mu}{2/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，从而

$P\{|\overline{X}-\mu|\le 0.1\}=P\{|\frac{\overline{X}-\mu}{2/\sqrt{n}}|\le 0.05\sqrt{n}\}=2\Phi(0.05\sqrt{n})-1$，欲使$2\Phi(0.05\sqrt{n})-1\ge 0.95$，

则$\Phi(0.05\sqrt{n})\ge 0.975$，$0.05\sqrt{n}\ge 1.96\ \Rightarrow n\ge 1536.64$，得$n$至少为1537。

3、解：（1）因为$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{9S^2}{4}\sim\chi^2(9)$，所以$P\{S>2.908\}=P\{\frac{9S^2}{4}>19.027\}$，

而$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$，故$P\{S>2.908\}\approx 0.025$；

（2）因为$\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}\sim t(n-1)$，得$\frac{\overline{X}-4}{2.5/\sqrt{10}}\sim t(9)$，所以

$P\{\overline{X}>6.569\}=P\{\frac{\overline{X}-4}{2.5/\sqrt{10}}>3.2496\}$，而$t_{0.005}(9)=3.2498$，故$P\{\overline{X}>6.569\}\approx 0.005$

4、解：矩估计：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot\theta x^{\theta-1}\mathrm{d}x=\frac{\theta}{\theta+1}$，

解得$\theta=\dfrac{E(X)}{1-E(X)}$，从而得$\theta$的矩估计$\hat{\theta}=\dfrac{\overline{x}}{1-\overline{x}}$；

最大似然估计：似然函数$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\ \theta)=\begin{cases}\theta^n(x_1\cdots x_n)^{\theta-1},\ 0<x_1,\cdots,x_n<1,\\ 0,\ 其它.\end{cases}$

当$0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le 1$时，$L(\theta)>0$，取对数得$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\ln(x_1x_2\cdots x_n)$,

从而令$\dfrac{d}{dx}(\ln L)=\dfrac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，得$\theta$的最大似然估计为$\hat{\theta}=-n\Big/\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

5、解：总体 X 的概率密度 $f(x,\sigma^2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$，

似然函数$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma^2)=(2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}$，

取对数得$\ln L=-\dfrac{n}{2}\ln 2\pi-\dfrac{n}{2}\ln\sigma^2-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，

从而令$\dfrac{d\ln L}{dx}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$，得$\sigma^2$的最大似然估计为$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

6、解：由$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$都是$\theta$的无偏估计得$E(\hat{\theta}_1)=\theta,E(\hat{\theta}_2)=\theta$，

而$E(\hat{\theta})=C_1E(\hat{\theta}_1)+C_2E(\hat{\theta}_2)=(C_1+C_2)\theta$，欲使$\hat{\theta}$成为$\theta$的无偏估计，则$C_1+C_2=1$；

$D(\hat{\theta})=C_1^2D(\hat{\theta}_1)+C_2^2D(\hat{\theta}_2)=(2C_1^2+C_2^2)D(\hat{\theta}_2)$，欲使$D(\hat{\theta})$达到最小，则需$2C_1^2+C_2^2$达到最小；从而问题转化为在$C_1+C_2=1$下求$C_1,C_2$使$2C_1^2+C_2^2$取最小，

可求出满足要求的$C_1=1/3,C_2=2/3$

7、 解：设样本为 $(X_1,X_2,\cdots,X_{40})$，$(x_1,x_2,\cdots,x_{40})$ 为样本值， 其中$X_i=\begin{cases}1,\ 第i件为废品,\\ 0,\ 否则,\end{cases}$

($i=1,2,\cdots,40$)；设废品率为 p，则$P\{X_i=x_i\}=p^{x_i}(1-p)^{1-x_i},i=1,\cdots,40,$

似然函数$L(p)=\prod_{i=1}^{40}P\{X_i=x_i\}=p^{\sum_{i=1}^{40}x_i}(1-p)^{40-\sum_{i=1}^{40}x_i}$，

$\ln L=\sum_{i=1}^{40}x_i\,\ln p+(40-\sum_{i=1}^{40}x_i)\ln(1-p)$，求导令导数为零，得 p 的最大似然估计

$\hat{p}=\sum_{i=1}^{40}x_i\Big/40$；由样本值代入，得 p 的最大似然估计值为 $\hat{p}=3/40=0.075$

8、解：设纤维的纤度为 X，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，未知 μ 及 σ^2，

由样本值算得 $\overline{x}=1.416$，$s\approx 0.0643$；而 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(9)=2.2622$，

$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(9)=2.7$，$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(9)=19.023$，

得 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 $\left(\overline{x}\pm\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)\approx(1.37,\ 1.462)$，

σ^2 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 $\left(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)\approx(0.00195\ ,\ 0.01379)$，

9、解：设该种零件的尺寸为 X，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，未知 μ 及 σ^2，在 $\alpha=0.01$ 下检验

① $H_0:\mu=32.50$　② $H_0':\sigma^2=1.1^2$，

由样本值算得 $\overline{x}=31.127$，$s^2=1.26$ $(s\approx 1.123)$，

①取统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-32.50}{S/\sqrt{6}}$，

因 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.005}(5)=4.032$，得 H_0 的拒绝域为 $\{|t|\ge 4.032\}$，

而由样本值算得 $t\approx -2.995$，落在接受域中，故在 $\alpha=0.01$ 下接受 H_0；

② 取统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{5S^2}{1.1^2}$，

因 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.995}(5)=0.412$，$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.005}(5)=16.75$，

得 H_0' 的拒绝域为 $\{\chi^2\le 0.412\}\cup\{\chi^2\ge 16.75\}$，

而由样本值算得 $\chi^2\approx 5.207$，落在接受域中，故在 $\alpha=0.01$ 下接受 H_0'；

所以在 $\alpha=0.01$ 下可认为该日机床的工作正常。

注：　严格一点，②中应检验 $H_0'':\sigma^2\le 1.1^2$，

此时的拒绝域为 $\{\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.01}(5)=15.086\}$，

$\chi^2\approx 5.207$ 落在接受域中，故在 $\alpha=0.01$ 下接受 H_0''。