随机变量的数字特征与中心极限定理复习自测题解答

一、单项选择题

1、（D）。 2、（B）。 3、（B）。 4、（C）。 5、（D）。 6、（D）。

二、填空题

1、$\underline{N(\mu,\sigma^2/3)}$ ， $\underline{N(1-2\mu, 4\sigma^2/3)}$ 。 2、$\underline{\ 1\ }$。 3、$\underline{\ 3\ }$， $\underline{\ 2/3\ }$。

4、$\underline{\int_{1/2}^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1}}$。 5、$\underline{\ 0.9\ }$。 6、$\underline{\ 6\ }$。 7、$\underline{E(Y^2)-[E(Y)]^2 = 1-(1/3)^2 = 8/9}$。

8、$\underline{\ 21/20\ }$， $\underline{\ 1/2\ }$， $\underline{\ -3/20\ }$。 9、$\underline{\ \Phi(x)\ }$。

三、计算及证明题

1、解：设保险费为 x 元，收益 Y 元，则 $Y = \begin{cases} x，A\text{发生}, \\ x-a，A\text{不发生}, \end{cases}$ Y 的分布律为

Y	**x**	**x-a**
P	**1-p**	**p**

故 $E(Y) = x - ap \overset{\text{令}}{=} \dfrac{a}{10}$，求得 $x = ap + \dfrac{a}{10}$。

2、解：（1）由归一性得 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 ax\,\mathrm{d}x + \int_2^4 (bx+c)\mathrm{d}x = 2a+6b+2c \overset{\text{令}}{=} 1$；

而 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 x\cdot ax\,\mathrm{d}x + \int_2^4 x(bx+c)\mathrm{d}x = \dfrac{8a}{3} + \dfrac{56b}{3} + 6c \overset{\text{令}}{=} 2$；

$P\{1 < X < 3\} = \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 ax\mathrm{d}x + \int_2^3 (bx+c)\mathrm{d}x = \dfrac{3a}{2} + \dfrac{5b}{2} + c \overset{\text{令}}{=} \dfrac{3}{4}$；

解得 $a = \dfrac{1}{4},\ b = -\dfrac{1}{4},\ c = 1$

（2）$E(\mathrm{e}^X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^x \cdot \dfrac{x}{4}\mathrm{d}x + \int_2^4 \mathrm{e}^x (1-\dfrac{x}{4})\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^4 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \dfrac{1}{4}$。

3、解：(X, Y) 的概率密度为 $f(x,y) = \begin{cases} 2,\ 0 \le x \le 1,\ \ 1-x \le y \le 1, \\ 0,\ \text{其它}, \end{cases}$

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^1 (x+y)2\mathrm{d}y = \int_0^1 (x^2+2x)\mathrm{d}x = \frac{4}{3},$$

$E[(X+Y)^2]==\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-x}^1 (x+y)^2 2\mathrm{d}y=\int_0^1 \frac{2}{3}[(x+1)^3-1]\mathrm{d}x=\frac{11}{6}$，

$D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2=\frac{1}{18}$。

4、解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 x(x+y)\mathrm{d}y=7/12$，

$E(X^2)=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 x^2(x+y)\mathrm{d}y=5/12$，$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=11/144$；

由对称性得 $E(Y)=\frac{7}{12},\ D(Y)=\frac{11}{144}$；而 $E(XY)=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 xy(x+y)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$，

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{144}$，　$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\frac{1}{11}$。

5、解：设 X 为同一时刻被使用的邮箱数，则 $X\sim B(1000, 0.05)$，

由 De Moivre-Laplace 中心极限定理得 $\frac{X-50}{\sqrt{47.5}}$ 近似服从 $N(0,1)$，

所求概率为 $P\{40\le X\le 60\}=P\{\frac{-10}{\sqrt{47.5}}\le\frac{X-50}{\sqrt{47.5}}\le\frac{10}{\sqrt{47.5}}\}\approx 2\Phi(\frac{10}{\sqrt{47.5}})-1$

$\approx 2\Phi(1.45)-1=0.853$。

6、解：设 Y 为该包装工完成 100 件包装需要的时间（单位：分），X_i 为该包装工包装第 i 件所用时间（单位：分）(i=1,2,⋯,100)，则 $X_1,\cdots,X_{100}$ 独立同分布，$X_i\sim e(1/3)$，

故 $E(X_i)=3$，$D(X_i)=9$，$E(Y)=300$，$D(Y)=900$，

由中心极限定理得 $\frac{Y-300}{30}$ 近似服从 $N(0,1)$，

所求概率为 $P\{300\le Y\le 360\}=P\{0\le\frac{Y-300}{30}\le 2\}\approx\Phi(2)-\Phi(0)=0.4772$。

7、证：左式化简并结合 X 与 Y 相互独立得，

左式$=\{D(X)+[E(X)]^2\}D(Y)+[E(Y)]^2D(X)=E(X^2)D(Y)+[E(Y)]^2D(X)$

$=E(X^2)\{E(Y^2)-[E(Y)]^2\}+[E(Y)]^2\{E(X^2)-[E(X)]^2\}$

$=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)E(Y)]^2=E[(XY)^2]-[E(XY)]^2=D(XY)$。