

数理统计复习自测题

一、单项选择题

1、设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， μ 未知，而 σ^2 已知， (X_1, X_2, \dots, X_n) 为一样本，

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ， $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ，则以下样本的函数为统计量的是

(A) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ ； (B) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ； (C) $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ ； (D) $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}}$ 。

2、设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是取自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本，则可作为 σ^2 无偏估计量的是

(A) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ； (B) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i$ ； (C) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ ； (D) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 。

3、设总体 X 的二阶矩存在， (X_1, X_2, \dots, X_n) 为一样本， $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，

$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ，则 $E(X^2)$ 的矩估计为

(A) \bar{X} ； (B) S_0^2 ； (C) $\frac{n}{n-1} S_0^2$ ； (D) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 。

4、设 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的一个估计量，若 $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ ，则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的

(A) 极大似然估计； (B) 矩估计； (C) 有效估计； (D) 有偏估计。

5、设随机变量 $X \sim N(0, 1)$ ，而 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$ ，若 $P\{|X| < x\} = \alpha$ ，则 $x =$

(A) $u_{\alpha/2}$ ； (B) $u_{1-\alpha/2}$ ； (C) $u_{1-2\alpha}$ ； (D) $u_{(1-\alpha)/2}$ 。

6、设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， μ 及 σ^2 未知，若样本容量和样本值不变，则 μ 的双侧置信区间的长度 L 与置信度 $1-\alpha$ 的关系是

(A) 当 $1-\alpha$ 减少时 L 增大； (B) 当 $1-\alpha$ 减少时 L 缩短；

(C) 当 $1-\alpha$ 减少时 L 不变； (D) 以上三个选项都不对。

7、假设检验时，当样本容量一定，若缩小犯第一类错误的概率，则犯第二类错误的概率

(A) 变小； (B) 变大； (C) 不变； (D) 不确定。

二、填空题

1、设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, (X_1, X_2, \dots, X_n) 为一样本, 则 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim$ _____,

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \text{_____}, \quad t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim \text{_____},$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \text{_____}, \quad \chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \text{_____}.$$

2、设总体 X 在 $(\theta, \theta+1)$ 上服从均匀分布, (X_1, X_2, \dots, X_n) 为一样本,

则 θ 的矩估计为_____。

3、设 (X_1, X_2) 为 X 的一样本, 则 $d_1 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$, $d_2 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$ 都是 $E(X)$ 的 _____ 估计, _____ 更有效。

4、样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 为总体均值 μ 的 _____ ,

样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 总体方差 σ^2 的 _____。

5、在假设检验中, 显著性水平 α 的不同会导致不同的判断结果, 显著性水平 α 是用来控制犯第 _____ 类错误的概率。

6、设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知, (X_1, X_2, \dots, X_n) 为一样本, 则 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为 _____; 检验假设 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ 时采用的统计量是 _____, H_0 的拒绝域为 _____。

7、在检验假设 H_0 的过程中, 若检验结果是接受 H_0 , 则可能犯第 _____ 类错误; 若检验结果是否定 H_0 , 则可能犯第 _____ 类错误。

三、计算及证明题

1、设总体 $X \sim N(1, 4)$, X_1, X_2, X_3 是 X 的样本, 试求 $E(X_1^2 X_2^2 X_3^2)$, $D(X_1 X_2 X_3)$ 。

2、设总体 X 服从方差为 4 的正态分布, (X_1, X_2, \dots, X_n) 是一样本, 求 n 使样本均值与总体均值之差的绝对值不超过 0.1 的概率不小于 0.95。

3、设总体 $X \sim N(4,4)$, $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$ 为 X 的简单随机样本, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 为样本

均值, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 为样本方差,

(1) 求 $P\{S > 2.908\}$; (2) 若 $S = 2.5$, 求 $P\{\bar{X} > 6.569\}$ 。

4、设总体 X 的概率密度 $f(x, \theta) = \begin{cases} \theta \cdot x^{\theta-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ (x_1, x_2, \dots, x_n) 为一样本, 试求

θ 的矩估计及最大似然估计。

5、设总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$, (x_1, x_2, \dots, x_n) 为一样本, 试求 σ^2 的最大似然估计。

6、设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 都是 θ 的无偏估计量, 且 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 相互独立, $D(\hat{\theta}_1) = 2D(\hat{\theta}_2)$, 求常数 C_1, C_2 使

$\hat{\theta} = C_1 \hat{\theta}_1 + C_2 \hat{\theta}_2$ 为 θ 的无偏估计, 并使 $D(\hat{\theta})$ 达到最小。

7、从一批产品中随机地抽取 40 件进行检验, 发现有 3 件废品, 试用最大似然估计法估计该批产品的废品率。

8、设在正常条件下某种纤维的纤度服从正态分布, 现从一批成品中抽取 10 根测得纤度为: 1.47, 1.42, 1.36, 1.53, 1.39, 1.43, 1.37, 1.44, 1.30, 1.45

求① 均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间; ② 方差 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间。

9、设机床生产的某种零件的尺寸(mm)服从正态分布, 规定零件的标准长度为 32.50, 标准差为 1.1; 现从某日生产的零件中抽取 6 件, 测得尺寸为:

32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 31.87, 31.03

问: 该日机床的工作是否正常? ($\alpha = 0.01$)