# 2020 -2021 学年第一学期 概率论与数理统计 A 综合练习

## 一、填空题

**1**、已知 $P(A)=1/2, P(B)=1/3,$，且 $A$、$B$ 相互独立，则 $P(A\overline{B})=$________ .

**2**、设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=a/N$，  $k=1$，2，…，$N$，则常数 $a=$______.

**3**、设随机变量 X 服从区间[0，5]上的均匀分布，则 $\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}\le\mathbf{3}\}=$_________.

**4**、设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2,\rho)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $\rho=$___.

**5**、设随机变量 $\boldsymbol{X}\sim\boldsymbol{B}(10,0.6)$，则 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})=$_________.

**6**、设总体 $X\sim N(0,\ 1)$，$X_1, X_2,\cdots,X_n$ 为样本，则统计量 $\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 的抽样分布为_____.

**7**、设总体 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$，且 $\mu$ 未知，设 $(X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n)$ 为来自该总体的一个样本，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $\mu$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间公式是___________ .

## 二、选择题

1、10 个人依次排队抓 10 个阄，10 个阄中有 4 个有物之阄，问第 5 个人抓到有物之阄的概率为(　　　).

$(A)$ 0；　　$(B)$ $\dfrac{1}{4}$；　　$(C)$ $\dfrac{2}{5}$；　　$(D)$ $\dfrac{3}{5}$.

2、设随机变量变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $P\{X\le c\}=P\{X>c\}$，则 $c$ =（　　）。

$(A)$ 0；　　$(B)$ $\mu$；　　$(C)$ $-\mu$；　　$(D)$ $\sigma$.

3、设 $X,Y$ 是相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，则 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数是（　　）

（A）$F_Z(z)=\max[F_X(z),F_Y(z)]$；　　（B）$F_Z(z)=\min[F_X(z),F_Y(z)]$；

（C）$F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$；　　（D）$F_Z(z)=F_Y(y)$.

4、向上抛掷一枚硬币 **n** 次, 正面向上出现次数为 $X$，正面向下出现次数为 $Y$；则 $X$ 和 $Y$ 的相关系数 $\boldsymbol{\rho_{XY}}=$（　　）.

$(A)$ **0;**；　　$(B)$ **0.5;**；　　$(C)$ **1;**；　　$(D)$ **−1**.

5、设随机变量 $X$ 与 $Y$ 都服从标准正态分布，则（　　　）。

（A） $X+Y$ 服从正态分布；　　　　　　　　　（B） $X^2+Y^2$ 服从 $\chi^2$ 分布；

（C） $X^2$ 与 $Y^2$ 均服从 $\chi^2(1)$ 分布；　　　　　（D） $X^2/Y^2$ 服从 $F$ 分布。

6、已知总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\sigma^2$ 已知，而 $\mu$ 未知，设 $X_1,X_2,X_3$ 是取自总体 $X$ 的样本，下面哪个不是统计量（　　　）。

$(A)$ $X_1+X_2+X_3$；　$(B)$ $X_1-3\mu$；　$(C)$ $\max\{X_1,X_2,X_3\}$；　$(D)$ $X_1+X_2+2\sigma$

7、在假设检验中，第Ⅰ类错误是指（　　　）。

$(A)$ 当原假设正确时拒绝原假设；　　　$(B)$ 当原假设错误时拒绝原假设；

$(C)$ 当备择假设正确时未拒绝备择假设；　$(D)$ 当备择假设不正确时拒绝备择假设.

## 三、计算与应用题

1、设随机变量 $X$ 的分布律为

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.2 | 0.3 | 0.5 |

（1）求 $X$ 的分布函数；（2）求 $X$ 的方差 $D(X)$.

2、设随机变量 $X$ 服从 $(0,1)$ 内的均匀分布，求随机变量函数 $Y=e^X$ 的概率密度函数.

3、设 $(X,Y)$ 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} Axy, & 0<x<1, 0<y<x, \\ 0, & others. \end{cases}$，

求（1）常数 $A$ 的值；（2）判断 $X$、$Y$ 的独立性；(3) $P\{X+Y<1\}$.

4、由 100 个相互独立起作用的部件组成的一个系统在运行过程中，每个部件能正常工作的概率都为 90% . 为了使整个系统能正常运行，至少必须有 85%的部件在正常工作，求整个系统能正常运行的概率.（利用中心极限定理，$\Phi(1.67)=0.9525$，$\Phi(1.96)=0.975$）

5、设总体 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta-1}, 1<x<\theta; \\ 0, \quad 其它. \end{cases}$ 其中 $\theta>1$ 是未知参数，分别用矩估计法和极大似然估计法求 $\theta$ 的估计量。

6、水泥厂用自动打包机包装化肥。现在随机抽取 9 包，测得各袋水泥质量（kg）为：

49.7，49.8，50.3，50.5，49.7，50.1，49.9，50.5，50.4，（其中 $\bar{x}=50.1$，$S^2=0.1125$）；设每包水泥的质量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，在显著性水平 α=0.05 下试问：是否可以认为包装的每包水泥平均质量为 50（kg）？（$\Phi(1.96)=0.975$，$t_{0.025}(8)=2.31$，$t_{0.025}(9)=2.26$）

## 四、证明题

1、已知事件 $A$ 与事件 $B$ 相互独立，证明事件 $A$ 与事件 $\overline{B}$ 相互独立。

2、设总体 $X$ 的均值和方差分别为 $\mu$ 和 $\sigma^2$，证明 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$ 是 $\sigma^2$ 的无偏估计量。

# 参考答案

## 一、填空题

1、$\underline{1/3}$；2 、$\underline{1}$；3、$\underline{3/5}$；4、$\underline{0}$ ； 5、$\underline{2.4}$；6、$\underline{\chi^2(n)}$；7、$\underline{(\overline{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}},\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}})}$

## 二、选择题

1、( C )　2、（B）　3、（C）　4、( D )　5、（C）　6、（B）　7、（A）

## 三、计算与应用题

1、解:（1） $\boldsymbol{X}$ 的分布函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0, & \boldsymbol{x}<0,\\ 0.2, & 0\le \boldsymbol{x}<1,\\ 0.5, & 1\le \boldsymbol{x}<2,\\ 1, & 2\le \boldsymbol{x}.\end{cases}$

（2） $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})=0\times0.2+1\times0.3+2\times0.5=1.3;$ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^2)=0^2\times0.2+1^2\times0.3+2^2\times0.5=2.3;$

所以 $\boldsymbol{X}$ 的方差 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})=2.3-1.3^2=0.61.$

2、解：因为 $X$ 服从 $(0,1)$ 内的均匀分布，所以分布函数 $F_X(x)=\begin{cases}1, & x\ge1,\\ x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

Y 的分布函数 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ P(X\le\ln y)=\ln y, & 1\le y\le e,\\ 1, & y>e.\end{cases}$

所以 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}1/y, & 1\le y\le e,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

3、解：　(1)由归一性得 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy==\int_0^1dx\int_0^x Axydy=\frac{A}{8}\overset{令}{=}1$，得 $A=8$；

(2) 因为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 8xydy=4x^3, & 0<x<1,\\ 0\ , & other.\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 8xydx=4y(1-y^2), & 0<y<1,\\ 0\ , & other.\end{cases}$

$f(x,y)\ne f_X(x)\times f_Y(y)$， 所以 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 不独立；

(3) $P\{X+Y<1\}=\iint\limits_{x+y<1}8xydxdy=\int_0^{1/2}dy\int_y^{1-y}8xydx=\int_0^{1/2}4y(1-2y)dy=\frac{1}{6}$

4、**解**：设 100 个相互独立起作用的部件能正常工作的件数为 $X$，则 $X \sim B(100,0.9)$，

由中心极限定理得 $\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\dfrac{X-90}{3}$ 近似服从 $N(0,1)$，

所求概率为 $P(X \ge 85)=1-P(\dfrac{X-100}{3}<-\dfrac{5}{3}) \approx 1-\Phi(-\dfrac{5}{3})=\Phi(\dfrac{5}{3}) \approx \Phi(1.67)=0.9525$

5、解：矩估计：$\because E(X)=\dfrac{\theta+1}{2}, \therefore \theta=2E(X)-1,$ 得 $\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\bar{X}-1$。

极大似然估计：极大似然函数为 $L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\theta-1)^n}, 1<x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n<\theta, \\ 0, \text{其它}.\end{cases}$

其最大值点为 $\theta=\max(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$，

所以 $\theta$ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}=\max(X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n)$

6、解： 假设 $H_0:\mu=50$， $H_1:\mu \ne 50$，

取统计量 $t=\dfrac{\bar{X}-50}{S/\sqrt{9}}$， 拒绝域为 $\{|t| \ge t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.31\}$ ；

而 $\bar{x}=50.1$， $S^2=0.1125$， $|t|=0.894<2.31$，所以接受 $H_0$，
即可以认为包装的每包化肥平均质量为 50 kg

## 四、证明题

1、证明：因为 $A$ 与 $B$ 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$，

$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)P(\bar{B})$，所以 $A$ 与 $\bar{B}$ 相互独立。

2、证明：因为 $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2, E(\bar{X})=\mu, D(\bar{X})=\dfrac{\sigma^2}{n},$

所以 $E(S^2)=E(\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2)=\dfrac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2)$

$=\dfrac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^{n}X_i-\bar{X})^2=\dfrac{1}{n-1}E[(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)-n(\bar{X})^2] \quad =\dfrac{1}{n-1}[(n-1)\sigma^2]=\sigma^2$，

所以 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是 $\sigma^2$ 的无偏估计量。