

对计算山体极限高度的探讨

——第 33 届全国中学生物理竞赛预赛第 12 题的剖析

靳玉保

(焦作市基础教育教学研究室, 河南 焦作 454000)

摘要: 本文通过对第 33 届全国中学生物理竞赛预赛第 12 题的分析, 在考虑高度对重力加速度的影响下, 山体极限高度的计算思路会发生相应变化, 计算结果也会有较大差异.

关键词: 山体高度; 重力加速度; 物理竞赛

2016 年第 33 届全国中学生物理竞赛预赛落下了帷幕, 试卷注重理论联系实际, 注重模型的建立. 但就本试卷上的第 12 题, 笔者认为解法不够严谨, 下面谈谈自己的一些看法.

原题. 一固体星球可近似看作半径为 R (足够大) 的球形均匀的固体, 构成星球的物质的密度为 ρ , 引力常量为 G .

(1) 考虑星球表面山体的高度. 如果山高超出某一限度, 山基便发生流动 (可认为是山基部分物质熔化的结果, 相当于超出山的最高限的那块固体物质从山顶移走了), 从而使山的高度减低. 山在这种情况下其高度的小幅减低可视为一小块质量的物质从山顶移至山底. 假设该小块物质重力势能的减少与其全部熔化所需要的能量相当, 山体由同一种物质构成, 该物质的熔化热为 L , 不考虑温度升到熔点所需要能量, 也不考虑压强对固体熔化热的影响. 试估计由同一种物质构成的山体高度的上限.

(2) 若由同一种物质构成的山高的上限不大于 $\frac{R}{10}$, 试估计在此条件下由同一种物质构成的星球半径的下限.

(3) 月亮是一个固体星球, 其密度和半径分别为 $3.34 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 和 $1.7 \times 10^6 \text{ m}$. 假设月亮全由 SiO_2 构成, SiO_2 的熔化热为 $2.4 \times 10^5 \text{ J/kg}$. 已知 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. 估计月球上的山体高度与月球半径比值的上限.

此题能很好地考查学生的审题能力、建模能力, 是一道难得的好题. 解决此题的关键是突破第 (1) 问, 第 (2)、(3) 是第 (1) 问导出结果的变形和代入数据. 我们不妨先看一下参考答案.

原解析: (1) 由于星球是均匀球体, 且山体的高

度 h 远小于球体的半径 R . 按题模型有 $mgh_{\max} = mL$.

式中 h_{\max} 是由同样物质构成的山体高度上限, m 是会熔化掉的那一小块物质的质量. 在星球表面由引力产生的加速度为 $g = \frac{GM}{R^2}$, 式中 M 是星体的质量.

根据题设有 $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, 联立上式得

$$h_{\max} = \frac{3L}{4\pi G \rho R}.$$

故该星球上山体的高度满足 $h \leq \frac{3L}{4\pi G \rho R}$.

(2) 按题设要求 $h_{\max} \leq \frac{R}{10}$, 得 $R \geq \sqrt{\frac{15L}{2\pi G \rho}}$.

(3) 将 (1) 问题结论变形得 $\frac{h}{R} \leq \frac{3L}{4\pi G \rho R^2}$, 代入

数据可得

$$\frac{h}{R} \leq 0.09.$$

命题者在设计此题时, 都是以星球半径足够大为模型进行求解的. 如果认为星球半径足够大 (即无限大), 则山的高度可以忽略, 重力加速度 g 也就不会随山的高度而变化. 然而笔者认为, 如果星球半径足够大, 则星球半径与山高就不具有可比性, 这就与本题的第 (2) 问星球半径最小是山高的 10 倍相矛盾. 可见, 星球对山体而言不能看作无限大. 高度为 $\frac{R}{10}$ 的山体顶端与底端的重力加速

度应该有明显的差别, 山体高度对重力加速度的影响自然就不能忽略, 因此解决此题的思路也必将发生变化. 由于重力加速度随着高度将发生变化, 故重力势能的表达式 mgh 将不能使用. 我们只好使用天体的重力势能表达式 (下转第 66 页)

关于学科基地的建设. 学科基地建在教研组, 目的是将学科建设落到实处. 政府投入资金建设学科基地, 学校获得学科教学环境的改变. 教研组通过基地建设, 不断改善教学实践, 实现理论知识实践化与实践知识理论化的互相转化. 这样可以让学科基地引领学科教学. 笔者所在学校为江苏省的物理实验教学基地. 我们发现, 基地建设惠及了每一个学生的学习成长, 惠及了每一个教师的专业成长, 也惠及了周围每一个学校的学科教学. 专家们现场评价是: 专家型的团队建成了有显著学科学术成果的专家型的基地, 基地建设对江苏省的物理教学的引领效果是显著的.

关于国内外的学术交流. 我们教研组曾与国内外姐妹学校教师, 也与 ALEVEL、IB 课程的教师, 以及国内外高校教师交流了在中学物理实验教育上的研究和见解, 获得了他们的尊重与好评. 我们希望教研组的教育实践与研究不仅在国内有影响, 而且在国际上也要有广泛影响.

总之, 见贤思齐、和而不同、同舟共济、好学敏行和志存高远是基于实践的教研组文化建设的方向, 也是基于实践的教研组文化建设的主要内容. 教研组是我国特有的. 我们希望, 大家都能从实践或者实践性理论的角度来加强教研组的文化建设.

谚语说: “如果你想走得快, 一个人走, 如果你想走得远, 一群人走”. 基于实践的教研组文化的力量值得凝视.

参考文献:

- 1 左岚. 跨越理论与实践的鸿沟[J]. 全球教育展望, 2016(1): 39-47.
- 2 余慧娟等. 上海教育密码[J]. 人民教育, 2016(8): 6-19.
- 3 刘旭东等. 教育的学术品格与教育实践[J]. 教育研究, 2015(9): 10-16.
- 4 钟启泉. 为了未来教育家的成长[J]. 教育发展研究, 2011(18): 20-26.

(收稿日期: 2016-06-12)

(上接第 59 页)

$E_p = -\frac{GMm}{r}$, 式中 r 是物体到天体球心的距离, M 是天体的质量, m 是物体的质量, 并取无限远处重力势能为 0.

鉴于以上分析, 若考虑天体表面高度对重力加速度的影响, 此题解法如下.

(1) 由于星球是均匀球体, 重力势能的表达式为

$$E_p = -\frac{GMm}{r}. \quad (1)$$

式中 r 是物体到天体球心的距离, 按题模型有

$$-\frac{GMm}{R+h_{\max}} - \left(-\frac{GMm}{R}\right) = mL. \quad (2)$$

式中 h_{\max} 是由同样物质构成的山体高度上限, m 是会熔化掉的那一小块物质的质量.

根据题设有

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho. \quad (3)$$

由(2)、(3)式得

$$h_{\max} = \frac{3RL}{4\pi G\rho R^2 - 3L}. \quad (4)$$

故该星球上山体的高度满足

$$h \leq \frac{3RL}{4\pi G\rho R^2 - 3L}. \quad (5)$$

(2) 按题设要求,

$$h_{\max} \leq \frac{R}{10}. \quad (6)$$

由(4)、(6)式得

$$R \geq \sqrt{\frac{33L}{4\pi G\rho}}. \quad (7)$$

(3) 将(5)式变形得

$$\frac{h}{R} \leq \frac{3L}{4\pi G\rho R^2 - 3L}. \quad (8)$$

代入题给数据得

$$\frac{h}{R} \leq 0.098. \quad (9)$$

在最为核心的第(1)问中, 笔者所得结果

$$h_{\max} = \frac{3RL}{4\pi G\rho R^2 - 3L}, \text{ 变形后为 } h_{\max} = \frac{3L}{4\pi G\rho R - \frac{3L}{R}},$$

通过与原答案比较可以看出, 分母上多了 $-\frac{3L}{R}$ 项.

正是此项将影响第(2)、(3)问的结果, 使其有所不同.

通过以上分析可以看出, 笔者计算的山体最大高度是 0.098 倍的天体半径, 而原参考答案计算的山体最大高度是 0.09 倍的天体半径. 两者计算结果相差将近 10%, 显然是不能忽略的. 那么为什么笔者计算的山体高度会更高呢? 这是因为随着高度的增加, 重力加速度 g 减小, 同样高度笔者计算的某物体重力势能就比原参考答案计算的重力势能要小, 而要让山基部分同等质量的物质熔化, 在重力加速度 g 减小的情况下, 只有增加山的高度才能使山顶物质的重力势能达到应有的大小, 从而使山基部分物质熔化. (收稿日期: 2016-09-04)