

· 竞赛园地 ·

第 32 届全国中学生物理竞赛预赛第 3 题探讨

潘 路

(南京航空航天大学附属高级中学, 江苏 南京 210007)

摘 要: 对第 32 届全国中学生物理竞赛预赛第 3 题进行了深入的分析, 使选项得以清晰呈现. 同时针对题目设计的理想模型, 研究了外力做正功时, 系统内两种势能的变化相互竞争、相互影响的关系.

关键词: 物理竞赛; 预赛; 解法探讨

1 题目

如图 1, 一半径为 R 的固定的光滑绝缘圆环, 位于竖直平面内; 环上有两个相同的带电小球 a 和 b (可视为质点), 只能在环上移动, 静止时两小球之间的距离为 R . 现用外力缓慢推左球 a 使其到达圆环最低点 c , 然后撤除外力. 下列说法正确的是

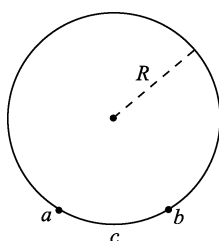


图 1

(A) 在左球 a 到达 c 点的过程中, 圆环对 b 球的支持力变大.

(B) 在左球 a 到达 c 点的过程中, 外力做正功, 电势能增加.

(C) 在左球 a 到达 c 点的过程中, a 、 b 两球的重力势能之和不变.

(D) 撤除外力后, a 、 b 两球在轨道上运动过程中系统的能量守恒.

2 解析

设固定的光滑绝缘圆环的圆心为 O ; a 、 b 两球的质量均为 m , 带电荷

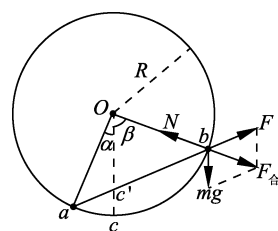


图 2

项(B)、(C)、(D)正确.

例 4. (2009 年全国卷 I 卷高考题) 质量为 M 的物块以速度 v 运动, 与质量为 m 的静止物块发生正碰, 碰撞后两者的动量正好相等, 两者质量之比 $\frac{M}{m}$ 可能为

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

解析: 我们只需要考察撞击球 M , 由题可知其碰撞后的动量为 $\frac{Mv}{2}$, 即碰撞后其速度变为 $\frac{v}{2}$, 又因为质心的速度为 $v_c = \frac{Mv_M + mv_m}{M+m} = \frac{Mv}{M+m}$, 根据以质心为速度参考点的恢复系数可列,

$$e = \frac{v_c - v_1'}{v_1 - v_c} = \frac{\frac{Mv}{M+m} - \frac{v}{2}}{\frac{Mv}{M+m} - \frac{Mv}{M+m}},$$

因此 $0 \leq \frac{\frac{Mv}{M+m} - \frac{v}{2}}{\frac{Mv}{M+m} - \frac{Mv}{M+m}} \leq 1$, 解得 $1 \leq \frac{M}{m} \leq 3$, 选项

(A)、(B)正确.

3 结语

可以看出以质心为速度参考点的恢复系数不仅形式上具有很强的简洁性、对称性, 而且针对很多实际问题与传统的牛顿恢复系数一样具有很好的应用价值, 笔者查阅了相关的大中学教材以及相关文献, 发现目前还没有此种定义方式, 鉴于此, 笔者撰写本文, 希望可以抛砖引玉, 引起广大的大中学物理教师的重视并进一步挖掘其使用价值, 进而能更好地服务于物理教学, 促进基础教育的进步与发展.

参考文献:

- 李逸良, 邱信明, 张雄. 恢复系数的不同定义及其适用性分析[J]. 力学与实践, 2015(06): 773-777.
- 漆安慎, 杜婵英. 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005: 138-145.
- 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教材. 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 128-131.
- 陈长. 恢复系数在一维碰撞中的巧妙运用[J]. 物理教师, 2017(9): 91-92.

(收稿日期: 2017-11-14)

量均为 q ; 用外力缓慢推左球 a 使其到达圆环最低点 c 的过程中, 某一状态 (Oa 与 Oc 夹角为 α , Ob 与 Oc 夹角为 β) 时, 球 b 的受力情况如图 2 所示, 由 b 球处于平衡状态知 $F_{\text{合}} = N$; 连接 ab 交 Oc 于点 c' .

由三角形相似得 $\frac{N}{R} = \frac{mg}{Oc'}$, 当球 a 缓慢向最低点 c 靠近时, Oc' 逐渐增大, 所以 N 逐渐减小; 当球 a 到达最低点 c 时, $Oc' = R$ 达到最大, 此时 $N_{\min} = mg$; 所以 (A) 选项错误.

设 $\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}$, 由正弦定理得

$$\frac{mg}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{F}{\sin\beta} = \frac{N}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \beta\right)};$$

$$\text{即 } \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{F}{\sin\beta} = \frac{N}{\cos(\beta - \theta)};$$

得

$$F = \frac{mg \sin\beta}{\cos\theta}. \quad (1)$$

$$N = \frac{mg \cos(\beta - \theta)}{\cos\theta}. \quad (2)$$

初始时 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$, 由平衡条件得

$$\frac{kq^2}{R^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} mg. \quad (3)$$

一般位置时, 有

$$F = \frac{kq^2}{(2R \sin\theta)^2}. \quad (4)$$

联立 (1)、(3)、(4) 式得

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{3} \cos\theta}{12 \sin^2\theta}. \quad (5)$$

由题设得

$$\alpha = 2\theta - \beta. \quad (6)$$

由 (5)、(6) 两式可知, 若 θ 单调减小, 则 β 单调增大, α 单调减小. 反推可得: 当 α 单调减小时, θ 单调减小, β 单调增大; 球 a 缓慢向最低点 c 靠近时, α 单调减小, θ 单调减小, 由 (4) 式知 F 单调增大. 所以 a, b 两球间距离减小, 电场力做负功, 电势能增加; (B) 选项正确.

如图 3 所示, 设初始时 a, b 两球的重心为 O_1 ; 球 a 到达圆环最低点 c 时, a, b 两球的重心为 O_2 , 两球间距为 x . 由几何关系知

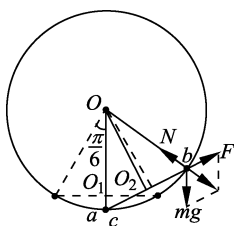


图 3

$$OO_1 = R \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} R = 0.866R. \quad (7)$$

由三角形相似得

$$\frac{mg}{R} = \frac{F}{x} = \frac{kq^2}{x^3}. \quad (8)$$

联立 (3)、(8) 两式得 $x = \frac{R}{3^{\frac{1}{6}}}$;

OO_2 之间的竖直距离为

$$\sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \cos \angle COO_2 = \left(1 - \frac{1}{4 \times 3^{\frac{1}{3}}}\right) R = 0.827R. \quad (9)$$

比较 (7)、(9) 两式可知球 a 到达圆环最低点 c 时两球的重心位置相比初始时两球的重心位置升高, 两球的重力势能之和变大. (C) 选项错误.

撤除外力后, 只有重力和电场力做功, a, b 两球在轨道上运动过程中系统的能量守恒. (D) 选项正确.

综上所述, 本题正确选项为 (B)、(D).

3 进阶研究

设 $m = 1 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $R = 1 \text{ m}$. 由前面分析知当 α 单调减小时, θ 单调减小. 当 $\alpha_{\min} = 0$ 时, θ 最小. 最小值可由 Mathcad 计算如下.

$$2\theta - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3} \cdot \cos(\theta)}{12 \cdot \sin(\theta)^2}\right) = 0,$$

可得

$$\theta_{\min} = 0.429; \text{ 当 } \alpha_{\max} = \frac{\pi}{6} \text{ 时, } \theta_{\max} = \frac{\pi}{6}.$$

取最低点 c 所在水平面为重力势能零势能面, 一般位置时 a, b 两球的重力势能之和为

$$E_{p1} = mgR(2 - \cos\alpha - \cos\beta). \quad (10)$$

取两带电小球相距无限远时电势能为 0, 一般位置时 a, b 两带电小球的相互作用电势能为

$$E_{p2} = \frac{kq^2}{2R \sin\theta}. \quad (11)$$

联立 (3)、(11) 两式得

$$E_{p2} = \frac{\sqrt{3} mg R}{6 \sin\theta}; \quad (12)$$

则两带电小球的总势能为

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} = mgR(2 - \cos\alpha - \cos\beta) + \frac{\sqrt{3} mg R}{6 \sin\theta}. \quad (13)$$

由 (1)、(2)、(5)、(6)、(10)、(12)、(13) 式所述关系, 可用 Mathcad (代码如图 4 所示) 做出 $\theta, \beta, N, F, E_{p1}, E_{p2}, E_p, \frac{E_{p1}}{E_p}, \frac{E_{p2}}{E_p}$ 随 α 变化的图像, 如图

5~11 所示.

$$\begin{aligned} m_{\text{球}} &:= 1 & g_{\text{球}} &:= 10 & R_{\text{球}} &:= 1 & \theta &:= 0.429, 0.42901, \frac{\pi}{6} \\ \alpha(\theta) &:= 2\theta - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3} \cdot \cos(\theta)}{12 \cdot \sin(\theta)^2}\right) & \beta(\theta) &:= \arcsin\left(\frac{\sqrt{3} \cdot \cos(\theta)}{12 \cdot \sin(\theta)^2}\right) \\ N_{\text{球}}(\theta) &:= m \cdot g \cdot \frac{\cos(\beta(\theta) - \theta)}{\cos(\theta)} & F_{\text{球}}(\theta) &:= \frac{m \cdot g \cdot \sin(\beta(\theta))}{\cos(\theta)} \\ E_{p1}(\theta) &:= m \cdot g \cdot R \cdot (2 - \cos(\alpha(\theta)) - \cos(\beta(\theta))) & E_{p2}(\theta) &:= \frac{\sqrt{3} \cdot m \cdot g \cdot R}{6 \cdot \sin(\theta)} \\ E_p(\theta) &:= E_{p1}(\theta) + E_{p2}(\theta) \end{aligned}$$

图 4 Mathcad 代码

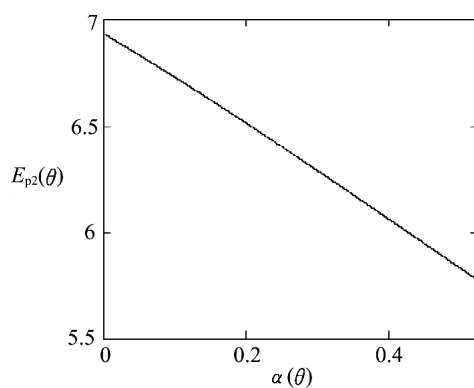


图 8

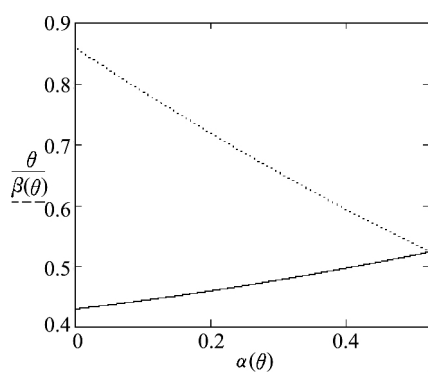


图 5

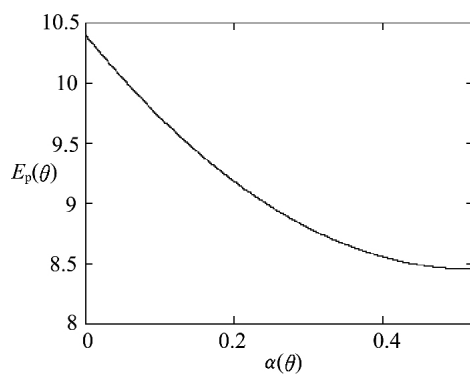


图 9

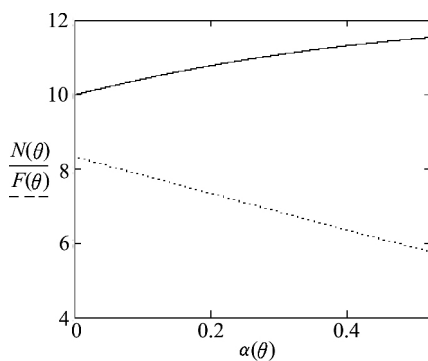


图 6

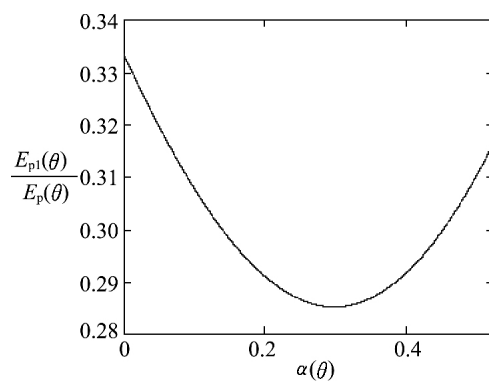


图 10

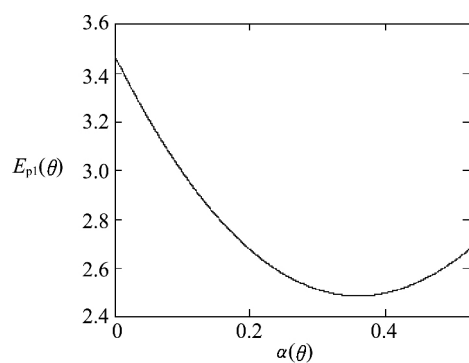


图 7

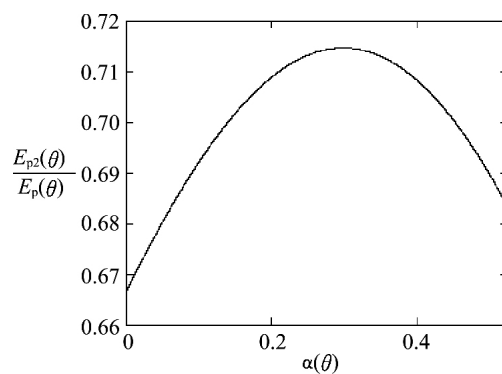


图 11

对一道电容器的电容竞赛题的变式分析

高 飞

(安徽省界首第一中学, 安徽 界首 236500)

摘 要: 在高中物理竞赛中, 电容器的电容求解是一个常考的问题, 也是难点问题. 本文以全国第 33 届物理预赛中一题关于电容器电容的求解为例, 从易到难, 由浅入深, 进而提升到采用积分和微分的思想来求解非常规电容器的问题, 很好地阐述积分和微分思想在物理竞赛中的应用.

关键词: 电容器; 电容; 微积分

第 33 届物理预赛原题. 真空中平行板电容器两极板的面积均为 S , 相距为 d , 上、下极板所带电荷量分别为 $+Q$ 和 $-Q$ ($Q > 0$). 现将一厚度为 t , 面积

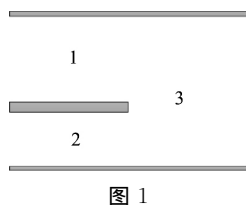


图 1

为 $\frac{S}{2}$ (宽度和原来的极板相同, 长度是原来极板的一半) 的金属片在上极板的正下方平行插入电容器, 将电容器分成如图 1 所示的 1、2、3 部分. 不考虑边缘效应, 静电力常量为 k , 试求: (1) 插入金属板以后电容器的电容. (2)~(4) 略.

由图 5~11 可见, 在 α 从 $\frac{\pi}{6}$ 减小到 0 的过程中: θ 单调减小; β 单调增大; N 单调减小至 $N_{\min} = mg$; F 单调增大; a 、 b 两球的总重力势能 E_{p1} 先减小至最小 (利用 Mathcad 可以得到 E_{p1} 在 $\alpha = 0.3580 \text{ rad} = 20.5^\circ$ 时取最小值) 后再逐渐增大, 且末态值大于初态值; a 、 b 两带电小球的相互作用电势能 E_{p2} 单调增大. 以上结果与前面解答中的分析结果完全吻合.

由图 9~11 可见在 α 从 $\frac{\pi}{6}$ 减小到 0 的过程中, 两带电小球的总势能 E_p 单调增大; 总重力势能 E_{p1} 在总势能 E_p 中所占的比例 $\frac{E_{p1}}{E_p}$ 先减小后增大, 利用 Mathcad 可以得到 $\frac{E_{p1}}{E_p}$ 在 $\alpha = 0.2969 \text{ rad} = 17^\circ$ 时取最小值; 相互作用电势能 E_{p2} 在总势能 E_p 中所占的比例 $\frac{E_{p2}}{E_p}$ 先增大后减小, 利用 Mathcad 可以得到 $\frac{E_{p2}}{E_p}$ 在 $\alpha = 0.2969 \text{ rad} = 17^\circ$ 时取最大值.

原因分析: 针对题目设计的理想模型, 外力对动态平衡的 a 、 b 两带电小球系统做正功, 则 a 、 b 两带电小球系统的总能量应该增加. 由于 a 、 b 两带电小球系统的总动能始终为 0, 所以 a 、 b 两带电小球系统的总势能应该增加. 总势能包括总重力势能与相互作用电势能, 这两种势能的改变相互竞

争、相互影响. 从图 10、图 11 可见, α 从 $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ 减为 $0.2969 \text{ rad} = 17^\circ$ 的过程中, 总重力势能 E_{p1} 在总势能 E_p 中所占的比例 $\frac{E_{p1}}{E_p}$ 逐渐减小至最小; 相互作用电势能 E_{p2} 在总势能 E_p 中所占的比例 $\frac{E_{p2}}{E_p}$ 逐渐增大至最大, 说明此阶段相互作用电势能 E_{p2} 在竞争中处于优势地位. α 从 $0.2969 \text{ rad} = 17^\circ$ 减为 0 的过程中, 总重力势能 E_{p1} 在总势能 E_p 中所占的比例 $\frac{E_{p1}}{E_p}$ 逐渐增大; 相互作用电势能 E_{p2} 在总势能 E_p 中所占的比例 $\frac{E_{p2}}{E_p}$ 逐渐减小, 说明此阶段总重力势能 E_{p1} 在竞争中抢占了优势地位.

由前述已知 E_{p1} 在 $\alpha = 0.3580 \text{ rad} = 20.5^\circ$ 时取最小值, 而 $\frac{E_{p1}}{E_p}$ 在 $\alpha = 0.2969 \text{ rad} = 17^\circ$ 时取最小值, 两个最小值并不在同一个位置取得. 究其原因, α 从 $0.3580 \text{ rad} = 20.5^\circ$ 减为 $0.2969 \text{ rad} = 17^\circ$ 的过程中, 虽然总重力势能 E_{p1} 扭转了减小的趋势, 但在与相互作用电势能 E_{p2} 的竞争中仍处于劣势地位; 直到 α 减小到 $0.2969 \text{ rad} = 17^\circ$ 时, 总重力势能 E_{p1} 才开始在竞争中抢占到优势地位.

(收稿日期: 2017-10-23)