一题多解欣赏
—— 第 30 届全国中学生物理竞赛复赛第 2 题评析

陈东波
(绍兴市上虞中学　浙江 绍兴　312300)

(收稿日期:2014 - 06 - 10)

【题目】质量均为 m 的小球 1 和 2,由一质量可忽略、长度为 l 的刚性轻杆连接,竖直地靠在墙角,小球 1 在杆的上端,如图 1 所示.假设墙和地面都是光滑的,初始时给小球 2 一个微小的向右的初速度.问在系统运动过程中,当杆和竖直墙之间的夹角等于何值时,小球 1 开始离开竖直墙面?

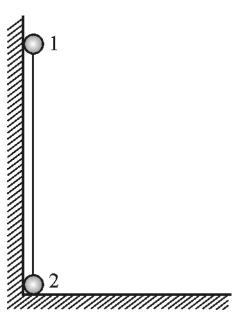

图 1

参考解答:如图 2,在小球 1 未离开竖直墙面之前,杆与竖直墙之间的夹角为 θ 时,小球 1 的坐标为

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = l\cos\theta \tag{1}$$

小球 2 的坐标为

$$x_2 = l\sin\theta \qquad y_2 = 0 \tag{2}$$

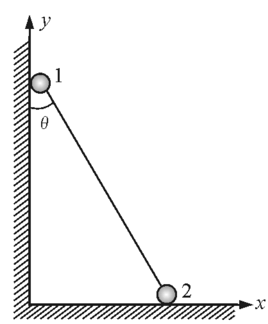

图 2

我们发现,这两个问题蕴含了数学中“极限”的思想,利用极限思想,其解唾手可得,有兴趣的读者可参阅文献[7].

4　结语

本文对全国部分地区大学生物理竞赛电磁学试题进行了统计,分析了各条知识的占比情况,剖析了典型的解题方法.电磁学试题要求考生具有较好的数学能力,涉及的方法与技巧较多.我们也希望在以后的竞赛中,命题组能够多设计一些与生活实际、工程技术或科学前沿相联系的试题,以培育学生的科学素养,增强他们的发展潜力.

参 考 文 献

1　刘家福,张昌芳.大学生物理竞赛及其试题特色.物理与工程,2008,18(4):65

2　刘家福,张昌芳.大学生物理竞赛试题赏析(Ⅰ)—— 力学部分.物理通报,2014(10):54 ～ 56

3　教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会物理基础课程教学指导分委员会.理工科类大学物理课程教学基本要求(2010 年版).北京:高等教育出版社,2010.1

4　工科物理编辑部.全国部分地区非物理类专业大学生物理竞赛题解汇编(第 1 ～ 13 届).北京:工科物理,1997.35,92,101,45,73

5　北京物理学会.第 25 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷.2008.5,3

6　工科物理编辑部.全国部分地区非物理类专业大学生物理竞赛题解(第 15 届).北京:工科物理,1998.2,4

7　汪斌,刘家福.数列的极限及其应用分析.数学的实践与认识,2006,36(8):367

小球 1 的速度为

$$v_{1x}=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=0 \qquad v_{1y}=\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=-\omega l\sin\theta \tag{3}$$

式中 $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$是杆的转动角速度.小球 2 的速度为

$$v_{2x}=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\omega l\cos\theta \qquad v_{2y}=\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=0 \tag{4}$$

由机械能守恒定律,有

$$mgl=\frac{1}{2}m(v_{1x}^2+v_{1y}^2)+\frac{1}{2}m(v_{2x}^2+v_{2y}^2)+$$

$$mgl\cos\theta=\frac{1}{2}ml^2\omega^2+mgl\cos\theta \tag{5}$$

由式(5)得

$$\omega=\sqrt{\frac{2g(1-\cos\theta)}{l}} \tag{6}$$

这里考虑到随着时间 t 的增加,θ 变大,因此 $\omega>0$.

系统质心 C 的 x 坐标为

$$x_C=\frac{mx_1+mx_2}{2m}=\frac{1}{2}l\sin\theta \tag{7}$$

质心速度的 x 分量为

$$v_{Cx}=\frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\omega l\cos\theta \tag{8}$$

质心加速度的 x 分量为

$$a_{Cx}=\frac{\mathrm{d}v_{Cx}}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}\omega^2 l\sin\theta+\frac{1}{2}l\cos\theta\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

由式(6)得

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\omega\sin\theta\sqrt{\frac{2g}{l(1-\cos\theta)}}=\frac{g}{l}\sin\theta \tag{10}$$

在得到上述结果时又利用了式(6),把式(6)、(10)代入式(9),得

$$a_{Cx}=\frac{\mathrm{d}v_{Cx}}{\mathrm{d}t}=-g\sin\theta(1-\cos\theta)+$$

$$\frac{1}{2}g\sin\theta\cos\theta=g\sin\theta\left(\frac{3}{2}\cos\theta-1\right) \tag{11}$$

设竖直墙面对小球 1 的正压力为 T,质心 C 在 x 方向上的运动满足

$$T=2ma_{Cx} \tag{12}$$

由式(12)可知,当 $a_{Cx}=0$ 时,$T=0$.

此时,小球 1 开始离开竖直墙面,且 $\theta=0$ 为运动的初始时刻,即可得

$$\theta=\arccos\frac{2}{3}$$

此即小球 1 离开竖直墙面时,杆与墙面的夹角.

另解 1

假设小球 1 被某种水平外力 T 束缚,使其只能在竖直平面内运动,则当杆与竖直墙面夹角为 θ 时,小球 1 与小球 2 的速度在沿杆方向的分速度必然有

$$v_1\cos\theta=v_2\sin\theta$$

由机械能守恒定律可得

$$mgl(1-\cos\theta)=$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2\cos^2\theta}mv_2^2$$

$$v_2=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)\cos^2\theta}$$

由系统牛顿运动定律,小球 1 在水平方向所受合外力为零,则系统在水平方向所受合外力为

$$T=m\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}=m\sqrt{2gl}\cdot$$

$$\frac{2\cos\theta(-\sin\theta)-3\cos^2\theta(-\sin\theta)}{2\sqrt{\cos^2\theta-\cos^3\theta}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

上式中,随着时间增加,θ 角增加,故$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}>0$.且由于 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,有

当 $\cos\theta>\frac{2}{3}$ 时,$T>0$,即小球 1 所受水平力向右;

当 $\cos\theta=\frac{2}{3}$ 时,$T=0$,即小球 1 所受水平力为零;

当 $\cos\theta<\frac{2}{3}$ 时,$T<0$,即小球 1 所受水平力向左,显然,在题给条件下这是不可能的,也就是当 $\cos\theta=\frac{2}{3}$ 时,小球 1 离开墙面.

另解 2

设轻杆的中点为 O,该点同时也是两球与轻杆构成系统的质心,在小球 1 离开墙面之前,轻杆与地面墙面围成的三角形为直角三角形,O 点与墙角 P 的连线即为直角三角形斜边上的中线,其长度为轻杆长度一半,也就是 O 在以 P 为圆心,$\frac{l}{2}$ 长度为半

径的圆上做变速圆周运动，如图 3.

现假设墙面对小球 1 的弹力为 T_1，此时小球 1 沿竖直平面运动，水平方向合力为零，轻杆弹力必为

$$N=\frac{T_1}{\sin\theta}$$

小球 2 沿水平平面运动，则水平地面对小球 2 的支持力为

$$T_2=mg+N\cos\theta=mg+\frac{T_1\cos\theta}{\sin\theta}$$

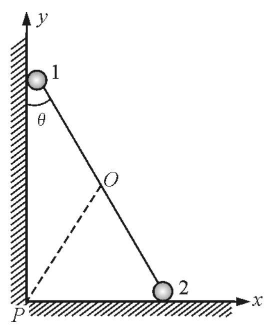

图 3

以做圆周运动的质心 O 为参考系与转动轴，系统转动惯量为 $I=\frac{ml^2}{2}$，其所受重力与惯性力的合力矩为零，墙面弹力与地面弹力合力矩为

$$M=M_2-M_1=T_2\frac{l}{2}\sin\theta-T_1\frac{l}{2}\cos\theta=$$

$$\left(mg+\frac{T_1\cos\theta}{\sin\theta}\right)\frac{l}{2}\sin\theta-T_1\frac{l}{2}\cos\theta=$$

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta$$

可得系统绕 O 转动的角加速度为

$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{M}{I}=\frac{mgl\sin\theta}{ml^2}=\frac{g\sin\theta}{l}$$

上式整理可得

$$\mathrm{d}\omega=\frac{g\sin\theta}{l}\mathrm{d}t$$

左右都乘以 ω

$$\omega\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\omega^2\right)=\frac{g\sin\theta}{l}\omega\mathrm{d}t=$$

$$\frac{g\sin\theta}{l}\mathrm{d}\theta=\frac{g\mathrm{d}(-\cos\theta)}{l}$$

考虑到在零时刻，ω 和 θ 都为零，则有

$$\frac{1}{2}\omega^2-0=-\frac{g}{l}(\cos\theta-\cos 0)=\frac{g}{l}(1-\cos\theta)$$

在小球 1 离开墙面之前，考虑到直角三角形的中线性质，OP 与竖直墙面的夹角始终等于轻杆与竖直墙面的夹角，则 O 点运动的角速度与角加速度大小都等于轻杆转动的角速度与角加速度的大小，则可以得到 O 的法向加速度与切向加速度分别为

$$a_n=\omega^2 r=\frac{2g(1-\cos\theta)}{l}\frac{l}{2}=g(1-\cos\theta)$$

$$a_t=\beta r=\frac{g\sin\theta}{l}\frac{l}{2}=\frac{g\sin\theta}{2}$$

当小球 1 离开墙面时，系统在水平方向不受外力，O 点在水平方向加速度为零，即

$$a_{/\!/}=a_n\sin\theta-a_t\cos\theta=$$

$$g(1-\cos\theta)\sin\theta-\frac{g\sin\theta}{2}\cos\theta=0$$

化简可得

$$\cos\theta=\frac{2}{3}$$

另解 3

如另解 2 分析，O 点运动的角速度大小等于轻杆转动的角速度 ω，则有机械能守恒定律及柯尼系定律可得

$$mgl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}\cdot 2mv_O^2+\frac{1}{2}I\omega^2=$$

$$m\left(\frac{\omega l}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2\omega^2=\frac{m\omega^2 l^2}{2}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{2g(1-\cos\theta)}{l}}$$

可得 O 点运动所需向心力为

$$F=2m\omega^2 r=2mg(1-\cos\theta)$$

这个力等于系统所受重力、墙面弹力、地面弹力在沿 OP 方向分力的矢量和.再利用另解 2 中墙面弹力、地面弹力的关系可得

$$F=(2mg-T_2)\cos\theta-T_1\sin\theta=$$

$$\left(mg-\frac{T_1\cos\theta}{\sin\theta}\right)\cos\theta-$$

$$T_1\sin\theta=mg\cos\theta-\frac{T_1}{\sin\theta}$$

即

$$T_1=(3mg\cos\theta-2mg)\sin\theta$$

因为墙面弹力 T_1 取负值不合题意，故可得答案.