具体解法如下：

A球和B球的运动是自由落体运动加简谐运动，因此解此题的关键要求出A、B相对于质心任意时刻的位置.

根据质量关系，质心在AB间到B的距离为$\frac{l}{3}$处.从质心看，A球相当于连接长度为$\frac{2l}{3}$的弹簧，B球相当于连接长度为$\frac{l}{3}$的弹簧，根据受力和伸长的关系，A球连接的弹簧劲度系数为$k_A=\frac{3k}{2}$，B球连接的弹簧劲度系数为$k_B=3k$.

因此，两个弹簧振子的振动角频率分别为：

A振子的周期为

$$\omega_A=\sqrt{\frac{k_A}{m_A}}=\sqrt{\frac{3k}{2m}},$$

B振子的周期为

$$\omega_B=\sqrt{\frac{k_B}{m_B}}=\sqrt{\frac{3k}{2m}},$$

显然，　　$\omega_A=\omega_B$.

松手前，两个弹簧振子都处于最大伸长量(即振幅)，其中，A球连接的弹簧振子振幅为

$$A_A=\frac{2mg}{k_A}=\frac{4mg}{3k},$$

B球连接的弹簧振子振幅为

$$A_B=\frac{2mg}{k_B}=\frac{2mg}{3k}.$$

简谐运动可以看做是半径为振幅A的圆周运动的投影运动，其中A球的运动为半径为$\frac{4mg}{3k}$、角速度为$\omega_A=\sqrt{\frac{3k}{2m}}$的圆周运动的投影运动，$B$球的运动为半径为$\frac{2mg}{3k}$、角速度为$\omega_B=\sqrt{\frac{3k}{2m}}$的圆周运动的投影运动.

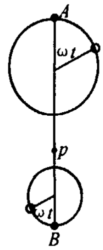

图3

考虑的质心的自由落体运动和A、B球的简谐运动，结合A、B球的初始坐标，参考图3，A球和B球的任意时刻的坐标分别为：

A球的位置坐标为

$$x_A=\frac{1}{2}gt^2+A_A(1-\cos\omega_A t),$$

即 $$x_A=\frac{1}{2}gt^2+\frac{4mg}{3k}[1-\cos(\sqrt{\frac{3k}{2m}}t)],$$

B球的位置坐标为

$$x_B=\frac{1}{2}gt^2+l-A_B(1-\cos\omega_B t),$$

即 $$x_B=l+\frac{1}{2}gt^2-\frac{2mg}{3k}[1-\cos(\sqrt{\frac{3k}{2m}}t)].$$

从本题的解法可以看出，质心参考系的运用可以使物体的受力和运动变为简单，而参考圆的运用可以使解题变得直接.

第27届全国中学生物理竞赛预赛第18题的几种解法

李灵龙
(舟山市舟山中学　浙江 舟山　316000)

第18题是最后一题，分值为20分，题目是：

超声波流量计是利用液体流速对超声波传播速度的影响来测量液体流速，再通过流速来确定流量的仪器.一种超声波流量计的原理示意如图1所示.在充满流动液体(管道横截面上各点流速相同)管道两侧外表面上P_1和P_2处(与管道轴线在同一平面内)，各置一超声波脉冲发射器T_1、T_2和接收器R_1、R_2.位于P_1处的超声波脉冲发射器T_1向被测液体发射超声脉冲，当位于P_2处的接收器R_2接收到超声脉冲时，发射器T_2立即向被测液体发射超声脉冲.如果知道了超声脉冲从P_1传播到P_2所经历的时间t_1，和超声脉冲从P_2传播到P_1所经历的时间t_2，又知道了P_1、P_2两点的距离l以及l沿管道轴线的投影b，管道中液体的流速u便可求得.试求u.

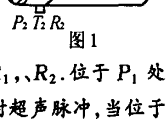

图1

除了标准答案给出的两种解法以外，还有五种不同的解法，介绍如下：

解法一　利用速度的分解

设超声波速度为v，

从$P_1\to P_2$，v与P_1P_2成α角，把v和u分解到P_1P_2方向上：有

$$(v\cos\alpha-u\cos\theta)t_1=l \tag{1}$$

从$P_2\to P_1$，v与P_1P_2成β角，把v和u也分解到P_1P_2方向

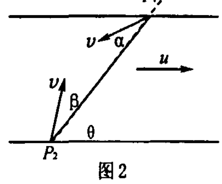

图2

上:有

$$(v\cos\beta + u\cos\theta)t_2 = l \qquad (2)$$

把 V 和 u 再分解到垂直 P_1P_2 方向上:

$$v\sin\alpha = u\sin\theta \qquad (3)$$

$$v\sin\beta = u\sin\theta \qquad (4)$$

利用(3)、(4) 两式可得　$\alpha = \beta$　(5)

把(5) 式代入到(1)、(2) 得

$$v\cos\alpha - u\cos\theta = \frac{l}{t_1},$$

$$v\cos\alpha + u\cos\theta = \frac{l}{t_2},$$

两式相减得:　$2u\cos\theta = \frac{l}{t_1} - \frac{l}{t_2}$,

而 $\cos\theta = b/l$,代入到上式,得

$$u = \frac{1}{2}(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1})\frac{l^2}{b}.$$

解法二　利用 P_1、P_2 两点的距离在管道轴线上的投影来解

设超声波速度为 v,从 $P_1 \to P_2$,v 与 P_1P_2 成 α 角,把 v 和 u 分解到水平方向和垂直方向上:

$$[v\cos(\theta - \alpha) - u]t_1 = b \qquad (1)$$

$$v\sin(\theta - \alpha)t_1 = l\sin\theta \qquad (2)$$

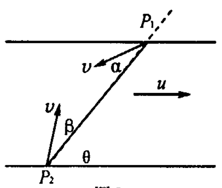

图3

从 $P_2 \to P_1$,v 与 P_1P_2 成 β 角,把 v 和 u 同样分解到水平方向和垂直方向上:

$$[v\cos(\theta + \beta) + u]t_2 = b \qquad (3)$$

$$v\sin(\theta + \beta)t_2 = l\sin\theta \qquad (4)$$

利用解法一,得到的结论 $\alpha = \beta$,

由(1)、(2) 两式得

$$(\frac{l\sin\theta}{t_1})^2 + (u + \frac{b}{t_1})^2 = 1 \qquad (5)$$

由(3)、(4) 两式得

$$(\frac{l\sin\theta}{t_2})^2 + (\frac{b}{t_2} - u)^2 = 1 \qquad (6)$$

(5)、(6) 两式相减:可得

$$u = \frac{1}{2}(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1})\frac{l^1}{b}.$$

解法三　利用速度的叠加原理

设超声波速度为 v,v_1,v_2 表示在 P_1P_2 上的合速度,则

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u},$$

在 P_1P_2 方向上叠加

$$v_1 = \frac{l}{t_2} = v\cos\alpha + u\cos\theta,$$

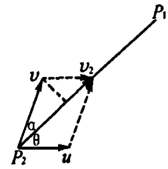

图4

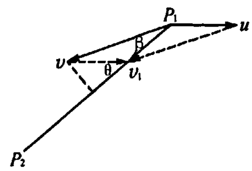

图5

$$v_2 = \frac{l}{t_1} = v\cos\beta - u\cos\theta,$$

由解法一可知:　$\alpha = \beta$.

两式相减可得:

$$\frac{l}{t_2} - \frac{l}{t_1} = 2u\cos\theta,$$

再把 $\cos\theta = \frac{b}{l}$ 代入到上式,得

$$u = \frac{1}{2}(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1})\frac{l^2}{b}.$$

解法四　利用速度的矢量性

设超声波速度为 v,v_1,v_2 表示在 P_1P_2 上的合速度,则

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{u} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{u} \qquad (2)$$

把 u 分解到 P_1P_2 方向上,考虑 u 方向性,而且

$$v_1 = \frac{l}{t_1}, v_2 = \frac{l}{t_2}$$

分别代入,可得

则　$\frac{l}{t_2} - u\cos\theta = \frac{l}{t_1} + u\cos\theta$,

移项,并把 $\cos\theta = \frac{b}{l}$ 代入到上式,得

$$u = \frac{1}{2}(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1})\frac{l^2}{b}.$$

解法五　利用位移图象解

设超声波速度为 v,t_1 表示超声波从 P_1 传到 P_2 的时间,t_2 表示超声波从 P_2 传到 P_1 的时间.

由图6得　$(vt_2)^2 = l^2 + (ut_2)^2 - 2lut_2\cos\theta$,

同理:由图7得

$$(vt_1)^2 = l^2 + (ut_1)^2 - 2lut_1\cos(\pi - \theta),$$

两式相除,再化简得

$$u = \frac{(t_2 - t_1)l^2}{2lt_1t_2\cos\theta},$$

把 $\cos\theta = \frac{b}{l}$ 代入,可得

$$u = \frac{1}{2}(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1})\frac{l^2}{b}.$$

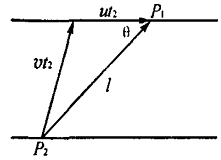

图6

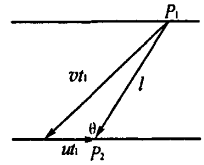

图7