

学会应试还是很重要的

SE LGJ

2019 年 12 月 11 日

这些只局限于本人学校高等数学考试的考试难度 (根据往年经验来看的话)

处理微积分的技巧有很多，这里我们只讨论最常见的几种

1. 部分分式理论

给定真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $Q(x)$ 是 n 次多项式, 且 $Q(x)$ 总可分解为: $Q(x) = b_0(x-a)^\alpha \cdots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\lambda \cdots (x^2+rx+s)^\mu$, (其中 $p^2 - 4q < 0, \dots, r^2 - 4s < 0$), 那么真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可以分解成如下部分分式之和:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \cdots + \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b} + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^\lambda} + \cdots + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{x^2+px+q} + \cdots + \frac{R_1 x + S_1}{(x^2+rx+s)^\mu} + \frac{R_2 x + S_2}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}} + \cdots + \frac{R_\mu x + S_\mu}{x^2+rx+s}$$

其中 $A_i, \dots, B_i, M_i, N_i, \dots, R_i, S_i$ 都是常数.

可见有理函数的积分可化为如下四种类型的积分:

$$\int \frac{A}{x-a} dx \quad \int \frac{A}{(x-a)^n} dx \quad \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx \quad \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$$

三角函数有理式的不定积分 万能代换公式: 令 $u = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, dx = \frac{2du}{1+u^2}$ 从而有 $\int R(\sin x, \cos x,)dx = \int R(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}) \frac{2du}{1+u^2}$, 将原式化为有理函数的积分

无理函数不定积分 这里我们只讨论简单无理函数的积分

(1). $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \cdots \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$

令 $t^N = \frac{ax+b}{cx+d}$ (N , 为 n_1, \dots, n_k 的最小公倍数)

(2). $\int R(\sqrt{a-x}, \sqrt{b-x}) dx$

令 $\sqrt{a-x} = \sqrt{b-a} \tan u$

(3). $\int R(\sqrt{x-a}, \sqrt{b-x}) dx$

令 $\sqrt{x-a} = \sqrt{b-a} \sin u$

(4). $\int R(\sqrt{x-a}, \sqrt{x-b}) dx$

令 $\sqrt{x-a} = \sqrt{b-a} \sec u$

下面是一部分练习题, 已获授权

1. $\int \frac{1}{5x+3} dx \quad 2. \int e^{2x+3} dx \quad 3. \int xe^{x^2} dx \quad 4. \int x\sqrt{1-x^2} dx \quad 5. \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx \quad 6. \int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad 7. \int \frac{1}{x(1+x^6)} dx \quad 8. \int \cos(2x) dx$

9. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}} dx \quad 10. \int \tan^4 x dx \quad 11. \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx \quad 12. \int \frac{1}{1+e^x} dx \quad 13. \int \frac{1}{x \ln^2 x} dx \quad 14. \int \frac{1}{x(1+2\ln x)} dx \quad 15. \int \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$

16. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx \quad 17. \int \frac{1}{a^2-x^2} dx \quad 18. \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \quad 19. \int \sin^3 x dx \quad 20. \int \sin^5 x dx \quad 21. \int \cos^3 x dx \quad 22. \int \sin^4 x dx \quad 23. \int \sin^2 x \cos^5 x dx$

24. $\int \sec x dx \quad 25. \int \sec^3 x \tan^5 x dx \quad 26. \int \tan^5 x \sec^4 x dx \quad 27. \int \frac{\ln(\tan x)}{\sin x \cos x} dx \quad 28. \int \cos 3x \cos 2x dx \quad 29. \int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx \quad 30. \int \frac{1}{\sin 2x \cos x} dx$

31. $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx \quad 32. \int \frac{1+\ln x}{2+(x \ln x)^2} dx \quad 33. \int \frac{2x-3}{x^2-3x+1} dx \quad 34. \int \frac{x+1}{x^2-3x+1} dx \quad 35. \int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} dx \quad 36. \int \sqrt{a^2-x^2} dx (a > 0) \quad 37. \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx \quad 38. \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$

39. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx \quad 40. \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \quad 41. \int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+2x-5}} dx \quad 42. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx \quad 43. \int \frac{1}{x^6(1+x^2)} dx \quad 44. \int \sqrt{1+\sqrt{x}} dx \quad 45. \int x \cos x dx \quad 46. \int x^2 \cos x dx \quad 47. \int x e^x dx \quad 48. \int x^2 e^x dx \quad 49. \int x^2 \cos^2 \frac{x}{2} dx$

50. $\int x \tan^2 x dx \quad 51. \int x \ln x dx \quad 52. \int \ln x dx \quad 53. \int \frac{1}{1+\cos x} dx \quad 54. \int \frac{1}{1+\sin x} dx \quad 55. \int \frac{x}{4+x^4} dx \quad 56. \int \frac{x^2+2}{(x+1)^3} dx \quad 57. \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad 58. \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx \quad 59. \int x(1-2x)^{99} dx \quad 60. \int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx \quad 61. \int \frac{x^7}{x^4+2} dx \quad 62. \int (\arcsin x)^2 dx$

63. $\int \sec^3 x dx \quad 64. \int_{\pi/4}^{pi/3} \frac{\tan x}{\ln(\cos x)} dx \quad 65. \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad 66. \int \frac{1}{2+\sin x} dx \quad 67. \int_0^{pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx \quad 68. \int_0^{pi/2} \frac{\sin x}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta \quad 69. \int_0^{pi/2} e^x \sin x dx \quad 70. \int \frac{x^3}{x^8-2} dx \quad 71. \int \arctan x dx$

72. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1} dx$

鉴于本人水平有限, 难免有疏漏, 欢迎讨论指正。