



Review

- $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx.$

- $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow p > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow p < 1$$



§ 2. 广义积分判断法

广义积分判断与函数极限的判别相关, 我们先回顾函数极限存在的Cauchy准则:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 存在

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, s.t. |F(A_2) - F(A_1)| < \varepsilon, \forall A_2 > A_1 > A.$$

$\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ 存在

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$$

$$|F(b - \delta_2) - F(b - \delta_1)| < \varepsilon, \forall 0 < \delta_2 < \delta_1 < \delta.$$



•无穷限积分分判敛

Thm. (Cauchy收敛原理) $f \in R[a, b]$, $\forall b > a$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

收敛的充分必要条件是：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > a, s.t. \forall A_2 > A_1 > M, \text{有} \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Proof. 令 $F(t) = \int_a^t f(x)dx$,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) \text{ 存在.}$$

由函数极限存在的Cauchy收敛原理即证定理. \square



Ex. $f \in R[a, b], \forall b > a, \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

Proof. $\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| \leq \int_{A_1}^{A_2} |f(x)| dx. \square$

Def. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛; 此时也称 f 在 $[a, +\infty)$ 上广义绝对可积.

若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 发散, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 条件收敛.



Thm. (比较判敛法) $f, g \in R[a, b], \forall b > a$. 若 $\exists K > a$, s.t.

$|f(x)| \leq Cg(x), \forall x > K$, 则

(1) $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛;

(2) $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散.

Proof. (1) $\int_{A_1}^{A_2} |f(x)| dx \leq C \int_{A_1}^{A_2} g(x) dx.$

(2) 若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则由(1)知 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛, 矛盾. \square



Thm. (比较判敛法-极限形式)

设 f, g 非负; $f, g \in R[a, b]$, $\forall b > a$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C$.

(1) 若 $C > 0$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散;

(2) 若 $C = 0$, 且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(3) 若 $C = +\infty$, 且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

Remark. “ f, g 非负” 可以放宽为

$\exists M > 0$, 使得 f, g 在 $[M, +\infty)$ 上不变号.



Proof. f, g 非负, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C$.

(1) 若 $C > 0$, 则 $\exists K, s.t. \frac{C}{2}g(x) \leq f(x) \leq 2Cg(x), \forall x \geq K$.

故 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散.

(2) 若 $C = 0$, 则 $\exists K, s.t. f(x) \leq g(x), \forall x \geq K$. 而 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 故 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

(3) 若 $C = +\infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 由(2) 中结论知 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 与已知矛盾. \square



Ex. 判别广义积分的收敛性

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx, \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{e^x + x}, \int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x^3 + 2x + 1}}, \int_2^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x(\ln x + 9)}.$$

解:(1) $\frac{|\sin x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ 收敛, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ 绝对收敛.

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x + x} \Big/ \frac{1}{x^2} = 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 收敛, $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{e^x + x}$ 收敛.

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3 + 2x + 1}} \Big/ \frac{1}{x^{5/4}} = 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/4}}$ 收敛, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x^3 + 2x + 1}}$ 收敛.

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x(\ln x + 9)} \Big/ \frac{1}{x} = 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ 发散, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x(\ln x + 9)}$ 发散.



Thm.(积分第二中值定理) 设 $f \in R[a,b]$, g 在 $[a,b]$ 上单调,
则 $\exists \xi \in [a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

Proof. 只证 $f \in C[a,b]$, $g' \in R[a,b]$ 的情形. $F(t) \triangleq \int_a^t f(x)dx$, 则
 $F \in C^1[a,b]$, g 单调, g' 在 $[a,b]$ 上不变号,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)dF(x) = g(x)F(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

由积分第一中值定理, $\exists \xi \in [a,b]$, s.t.

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)dx = F(\xi)(g(b) - g(a)).$$



$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= g(x)F(x)\Big|_a^b - F(\xi)(g(b)-g(a)) \\ &= g(b)F(b) - F(\xi)g(b) + F(\xi)g(a) \\ &= g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \quad \square\end{aligned}$$

Thm. (Dirichlet判别法) 设

(1) $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界,

(2) $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.



Proof. $\forall A_2 > A_1 > a$, 由积分第二中值定理, $\exists \xi \in [A_1, A_2]$, s.t.

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx = g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)dx + g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)dx.$$

$F(t) = \int_a^t f(x)dx$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, $\exists C$, s.t. $|F(t)| < C, \forall t > a$.

因此 $\forall x_2 > x_1 > a$, $\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| = |F(x_2) - F(x_1)| \leq 2C$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, 因此 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K > a$, 当 $x > K$ 时, $|g(x)| < \varepsilon$.

综上, $A_2 > A_1 > K$ 时,

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx \right| \leq 2C(|g(A_1)| + |g(A_2)|) \leq 4C\varepsilon. \square$$



Thm. (Abel判别法) 设

(1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, (2) $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

Proof. $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界, 从而收敛. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$.

由 Dirichlet 判别法, $\int_a^{+\infty} f(x)(g(x) - b)dx$ 收敛. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,
故

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)(g(x) - b)dx + b \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

收敛. \square



Ex. $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x - \ln x} dx$ 的收敛性.

解: $\frac{1}{x - \ln x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \ln x} = 0$.

$$\begin{aligned} \left| \int_1^A (-1)^{[x]} dx \right| &\leq \left| \int_1^{[A]} (-1)^{[x]} dx \right| + \left| \int_{[A]}^A (-1)^{[x]} dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{[A]-1} (-1)^k \right| + |A - [A]| \leq 2. \end{aligned}$$

由Dirichlet判别法, $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x - \ln x} dx$ 收敛. \square



Ex. $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\ln x} dx$ 与 $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\ln x} \arctan x dx$ 的收敛性.

解: (1) $\frac{1}{\ln x}$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$; $\left| \int_2^A \sin x dx \right| \leq 2$.

由 Dirichlet 判别法, $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\ln x} dx$ 收敛.

(2) $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\ln x} dx$ 收敛, $\arctan x$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调有界,

由 Abel 判别法, $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\ln x} \arctan x dx$ 收敛. □



Ex. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ 与 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ 的收敛性与绝对收敛性?

解: 当 $\alpha > 1$ 时, $\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$, $\left| \frac{\cos x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ 收敛, 故

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ 绝对收敛, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ 绝对收敛.

当 $\alpha \leq 0$ 时, 对任意正整数 k ,

$$\left| \int_{2k\pi + \pi/4}^{2k\pi + 3\pi/4} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| \geq \frac{\sqrt{2}\pi}{4}, \quad \left| \int_{2k\pi - \pi/4}^{2k\pi + \pi/4} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx \right| \geq \frac{\sqrt{2}\pi}{4},$$

由 Cauchy 收敛原理, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ 发散, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ 发散.



当 $0 < \alpha \leq 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty$. 由Dirichlet判别法,

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ 收敛, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ 收敛, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^\alpha} dx$ 收敛;

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^\alpha} dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^\alpha} dx = +\infty,$$

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^\alpha} \right| dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^\alpha} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^\alpha} dx = +\infty,$$

故 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ 条件收敛, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ 条件收敛. \square



例. $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$

解: 由广义积分的Dirichlet判别法, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ 收敛. 于是

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\lambda\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{t} dt.$$

恒等式 $\frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt$ 两边在 $[0, \pi]$ 上积分, 得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$



令 $g(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}$, 往证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin(n+1/2)t dt = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{t}{2} - t}{2t \sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{2t \sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3!}t^3 + o(t^3)}{2t \left(t - \frac{1}{3!}t^3 + o(t^3) \right)} = 0.\end{aligned}$$

故 $t = 0$ 是 $g(t)$ 的可去间断点. 由 Riemann-Lebesgue 引理,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin(n+1/2)t dt = 0. \square$$



●瑕积分判敛

Thm.(Cauchy收敛原理) $f \in R[a, c], \forall c \in (a, b)$. 则瑕积分

$\int_a^b f(x)dx$ (b 为唯一瑕点) 收敛的充分必要条件是: $\forall \varepsilon > 0$,
 $\exists \delta \in (0, b - a), s.t.$

$$\left| \int_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon, \quad \forall 0 < \delta_2 < \delta_1 < \delta.$$

Ex. $f \in R[a, c], \forall c \in (a, b), b$ 为 f 的瑕点, 则

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 收敛.}$$



Def. b 为 f 的瑕点. 若 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛, 则称 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛, 也称 f 在 $[a, b]$ 上广义绝对收敛; 若 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, $\int_a^b |f(x)|dx$ 发散, 则称 $\int_a^b f(x)dx$ 条件收敛.

Thm. (比较判敛法) b 为 f 的瑕点, 且 $f \in R[a, c]$, $\forall c \in (a, b)$. 若 $|f(x)| \leq Cg(x)$, $\forall x \in (b - \delta, b)$, 则

(1) $\int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛;

(2) $\int_a^b |f(x)|dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ 发散.



Thm.(比较判敛法-极限形式) 设 f, g 在 $(b-\delta, b)$ 中不

变号; $f, g \in R[a, c]$, $\forall c \in (a, b)$; $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = C$.

(1) 若 $C > 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛散;

(2) 若 $C = 0$, 且 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

(3) 若 $C = +\infty$, 且 $\int_a^b g(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.



Thm. 设 b 为瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的唯一瑕点.

(1) (Dirichlet判别法) 若 $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ 在 $[a, b)$ 上有界, $g(x)$ 在 $[a, b)$ 上单调且 $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$, 则 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

(2) (Abel判别法) 若 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a, b)$ 上单调有界, 则 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.



Ex. $\int_0^1 \sqrt{\cot x} dx$ 的收敛性.

解: $x=0$ 是瑕点.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\cot x}}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\cos x \cdot \frac{x}{\sin x}} = 1,$$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 收敛,

故 $\int_0^1 \sqrt{\cot x} dx$ 收敛. \square



Ex. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p} dx$ ($p > 0$) 的收敛性.

解: $x = 0$ 是瑕点.

$p \geq 1$ 时, $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ 发散, $\frac{-x^{-p} \ln x}{x^{-p}} = -\ln x \geq 1, \forall x \in (0, 1/e)$.

由比较判敛法, $\int_0^1 \frac{-\ln x}{x^p} dx$ 发散, 从而 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p} dx$ 发散.

$0 < p < 1$ 时, 取 $q \in (p, 1)$, 则 $\int_0^1 \frac{1}{x^q} dx$ 收敛; 而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^{-p} \ln x}{x^{-q}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{q-p} \ln x = 0.$$

由比较判敛法(极限形式), $\int_0^1 \frac{-\ln x}{x^p} dx$ 收敛, $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p} dx$ 收敛. \square



Ex. $\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$ 的收敛性与绝对收敛性.

解: $x=0$ 是瑕点.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_1^{1/\delta} \frac{1}{t} \sin t dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \sin t dt, \text{ 收敛.}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right| dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_1^{1/\delta} \left| \frac{1}{t} \sin t \right| dt = \int_1^{+\infty} \left| \frac{1}{t} \sin t \right| dt, \text{ 发散.}$$

故 $\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$ 条件收敛. \square

Remark. $\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx \xrightarrow{t=1/x} - \int_{+\infty}^1 \frac{1}{t} \sin t dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \sin t dt.$



Ex. $\int_0^1 \frac{\cos x}{x} \cdot \sin \frac{1}{x} dx$ 的收敛性.

解: $x = 0$ 是瑕点.

$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$ 收敛,

$\cos x$ 在 $(0, 1)$ 上单调有界,

由 Abel 判别法, $\int_0^1 \frac{\cos x}{x} \cdot \sin \frac{1}{x} dx$ 收敛. \square



Ex. $p > 0$, 讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 的收敛性.

解: $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛

$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 与 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 同时收敛.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{p-1} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^p} = 1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^{p-1}} dx$ 收敛 $\Leftrightarrow p-1 < 1$,

故 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛 $\Leftrightarrow p < 2$.



当 $0 < p \leq 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 发散, 从而 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 发散.

当 $p > 1$ 时, $\forall q \in (1, p)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^q \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^p} = 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^q} dx$ 收敛,

从而 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛.

综上, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛 $\Leftrightarrow 1 < p < 2$. \square



Ex. Beta函数 $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ 的收敛性.

解: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{x^{\alpha-1}} = 1, \int_0^{1/2} x^{\alpha-1} dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \alpha > 0,$

故 $\int_0^{1/2} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \alpha > 0.$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{(1-x)^{\beta-1}} = 1, \int_{1/2}^1 (1-x)^{\beta-1} dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \beta > 0,$

故 $\int_{1/2}^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \beta > 0.$

综上, $B(\alpha, \beta)$ 收敛 $\Leftrightarrow \alpha > 0$ 且 $\beta > 0.$ □



Ex. Gamma 函数 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 的收敛性.

解: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{x^{\alpha-1}} = 1,$

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow \int_0^1 x^{\alpha-1} dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow \alpha > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{1/x^2} = 0,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \text{ 收敛}.$$

综上, $\Gamma(\alpha)$ 收敛 $\Leftrightarrow \alpha > 0.$ □



作业：习题6.2 No.4-5(单),9

$$6.2 \text{ No.5(3)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{p_0} |x-1|^{p_1} |x-2|^{p_2}}$$