19-20-2 学期期末练习卷

一．选择题

1. 曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的交线是（　　）

(A) 抛物线　　(B) 双曲线
(C) 圆周　　(D) 椭圆

2. 直线 $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 与平面 $4x-2y-2z-3=0$ 的夹角是（　　）

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) $\frac{\pi}{3}$　　(C) $\frac{\pi}{6}$　　(D) 0

3. 函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续是 $f(x,y)$ 在该点可微的(　　)

(A) 充分但非必要条件　　(B) 充分必要条件
(C) 必要但非充分条件　　(D) 既非充分又非必要条件

4. 设 D: 由 $x+y=1$、x 轴和 y 轴围成的三角形区域，则 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ (　　)

(A)1　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\sqrt{2}$

5. 下列选项中与命题“若 G 是单连通区域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 G 内有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关 (其中 L 为 G 内任一分段光滑曲线)”等价的是（　　）

(A) $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 G 内恒成立　　(B) $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$ 在 G 内恒成立

(C) 存在封闭曲线 C，使得 $\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$

(D) 存在可微函数 $u=u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u=Q\mathrm{d}x+P\mathrm{d}y$ 在 G 内恒成立

6. 已知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 收敛，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=3$ 处(　　)。

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛　　(C) 发散　　(D) 敛散性不能确定

7. 设 $f(x)=x,(-\pi\le x<\pi)$ 是以 2π 为周期的函数，$s(x)$ 是其傅里叶级数展开式的和函数，则 $s(\pi)$ 的值等于（　　）。　　本题类型今年不作要求。

(A) 0　　(B) 1　　(C) π　　(D) 2π

8.

9. 曲面 $z = x^4 + y^2$ 被曲面 $x^2 + y^2 = 1$ 所截的部分面积为(　　)，其中 D 为区域 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

A. $\iint\limits_D (x^4 + y^2) dxdy$,　　B. $\iint\limits_D r^4 drd\theta$,

C. $\iint\limits_D r^2 (r^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta) rdrd\theta$,　　D. $\iint\limits_D \sqrt{1 + (4x^3)^2 + (2y)^2} dxdy$.

10. 方程 $x^2 + 2y^2 = 4$ 在空间表示(　　).

A. 椭圆，　B. 椭圆柱面，　C. 抛物柱面，　D. 旋转抛物面.

11. $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 0.3,\ 0 < y < 0.5\}$ ，$I_1 = \iint\limits_D (x + y)^2 dx$ ，$I_2 = \iint\limits_D (x + y)^{1/2} dx$ ，$I_3 = \iint\limits_D (x + y) dx$，则它们的大小关系为：

A. $I_1 < I_2 < I_3$ ，　B. $I_3 < I_2 < I_1$ ，　C. $I_3 < I_1 < I_2$ ，　D. $I_1 < I_3 < I_2$.

12. 级数 *T* 为：$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n} + \cdots$，级数 *S* 为：$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$，则

A. 级数 *T* 收敛，级数 *S* 发散,　　B. 级数 *T* 收敛，级数 *S* 收敛,

C. 级数 *T* 发散，级数 *S* 收敛,　　D. 级数 *T* 发散，级数 *S* 发散.

13. 如果 $f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 不连续，则下列命题中一定不成立的是(　　).

A. $f(x, y)$ 在点 P 可微，　　B. $f(x, y)$ 在点 P 不可微，

C. $f(x, y)$ 在点 P 可导，　　D. $f(x, y)$ 在点 P 不可导.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，对于任意 n，$u_n \le v_n$，则（　　）

A. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，

C. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散。

15. 直线 $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$ 与平面 $x - 2y - 2z = 1$ 的关系是（　　）.

A. 直线平行于平面，　　B. 相交但不垂直，

C. 垂直相交，　　D. A, B, C 都不对.

16.

17. 在空间直角坐标系中， $x^2+y^2=0$ 的图形是（ ）

（A）球面 （B）圆柱面 （C）圆周 （D）直线

18. 空间曲线 $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切向量为（ ）

（A） $(1,2,3)$ （B） $(3,2,1)$ （C） $(-1,-2,3)$ （D） $(0,1,2)$

19. 函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 的邻域内（ ）

（A）不连续 （B）偏导数存在 （C）偏导数连续 （D）连续

20. 微分形式 $(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$ 是下列哪个函数的全微分（ ）

（A） $(x^2+y^2)e^x+C$ （B） x^2+y^2+C

（C） $x^2\cos y+y^2\cos x+C$ （D） $(\cos x+\cos y)e^x+C$

21. 函数在点 (x_0,y_0) 处连续，且两个偏导数 $f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)$ 存在且连续是 $f(x,y)$ 在该点可微的（ ）.

（A）充分条件，但非必要条件； （B）必要条件，但非充分条件；
（C）既非充分条件，也非必要条件；（D）充分必要条件.

22. 设 L 为 $|x|+|y|=1$ 曲线，取顺时针方向，则 $\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$ 的值是______.

（A） 1； （B） -2； （C） -1； （D） 2.

二．填空题：

1. 计算 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}=$ ________________ 。

2. 过点 $(-1,2,5)$ 且与平面 $3x-7y+2z-11=0$ 垂直的直线方程为________________。

3. 曲面 $x^2+y^2=2z^2$ 在点 $(1,1,-1)$ 处的切平面方程为____________________ 。

4. 函数 $z=e^{xy}$ 在点（1,2）处的全微分为________________________________。

5. 交换二次积分的次序， $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy=$ __________________________。

6. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2\ (x\ge 0, y\ge 0)$ 上的一段弧，则 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$__________ 。

7. 已知两向量 $\vec{a}=(-1,-2,\lambda)$，$\vec{b}=(2,4,-1)$ 平行，则 $\lambda=$________.

8. 函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\ln(x^2+y^2-1)$ 的定义域为 ____________________.

9. 设 $z=\dfrac{x+\ln y}{x\sin y}$，则 $z'_x=$____________________.

10. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^3+\sin y)\cos\dfrac{1}{xy}=$____________________.

11. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分区域为 $\{(x,y)\,|\,0\le x\le$____，$x\le y\le$____$\}$.

12. $\int_l (x^2+y^2)ds=$______________，其中 $l: x^2+y^2=2$.

13. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a(q-1)^n$ 收敛（a 为非零常数），则 q 必满足 _________________.

14. 空间曲线 $\boldsymbol{x=t, y=-t^2, z=t^3}$，在 $\boldsymbol{t=1}$ 处的切向量为_________________.

15. 函数 $\boldsymbol{z=\sqrt{\ln(x+y)}}$ 的定义域为 ______________.

16. 若级数 $\boldsymbol{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}}$ 收敛，则 $\boldsymbol{p}$ 满足的条件是_______________.

17. 设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是平面 $\boldsymbol{x+y+z=1}$ 在第一卦限部分，则 $\boldsymbol{\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=}$ __________.

18. 与两向量 $\boldsymbol{\vec{a}=(1,-1,0),\ \vec{b}=(0,1,-1)}$ 垂直的单位向量是________________.

19. $\boldsymbol{I_1=\iint\limits_D yx^3d\sigma}$，$\boldsymbol{I_2=\iint\limits_D y^2x^3d\sigma}$，$\boldsymbol{I_3=\iint\limits_D y^{1/2}x^3d\sigma}$，其中 $\boldsymbol{D: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1}$，他们的大小关系是____________________.

20. 原点到平面 $\boldsymbol{x+y+z=1}$ 的距离为__________.

21. $\boldsymbol{\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=}$___________，其中 $\boldsymbol{L:\ y=\sqrt{1-x^2},\ -1\le x\le 1}$.

三．试解下列各题

1. 求函数 $f(x,y)=x^3-3x^2+y^2-9x-4y+2$ 的极值。

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y^2+z^3-xy-2z=0$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 。

3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 的敛散性。

4. 将函数 $\frac{1}{x+3}$ 展开为 x 的幂级数，并求出幂级数的收敛域。

5. 计算 $I=\int_L(\mathrm{e}^x\cos y-y)\mathrm{d}x+(x-\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{d}y$， 其中 L 为沿上半圆周

   $x^2+y^2=1,(y\ge 0)$ 由点 $A(1,0)$ 到点 $B(-1,0)$ 的一弧段。

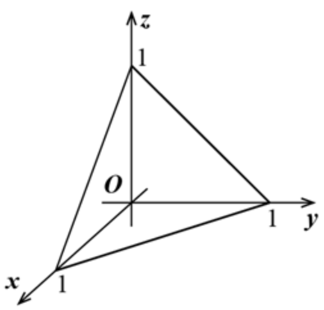
6. 计算 $\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ：球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上 $z\ge\frac{1}{2}$ 的部分。

7. 计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}v$，其中 Ω：由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的闭区域。

8. 求函数 $z=x^4-y^3+2x^2+3y$ 的极值。

9. 计算 $\iint_D\frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:1\le x^2+y^2\le 4,y\ge 0,x\ge 0$（**要求画出积分区域!**）.

10. 计算 $\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由平面 $x+y+z=1$ 及三个坐标面围成，如图所示。



11. 计算曲线积分 $I=\int_L(e^x\sin^2 y+x^2+y)dx+[e^x\sin(2y)+x]dy$，其中 L 为从点 $A(1,0)$ 沿曲线 $y=1-x^2$ 到 $B(-1,0)$ 的一段弧。

12. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{2^n n}$ 的收敛半径和收敛域.

13. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y^2+z^3-xy=2z$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$。

14. 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)}$.

15. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

16. 设 $z=x\ln(xy)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

17. 已知 $I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dx$，（1）画出积分区域；（2）交换 I 的积分次序；（3）求 I 的值。

18. 已知 $I=\int_L(\sin x+xy^4)dx+(2x^2y^3+2y\cos y^2)dy$，其中 L 为从点 $A(-\pi,0)$ 沿曲线 $y=\sin x$ 到 $B(\frac{\pi}{2},1)$ 的一段弧。（1）I 与积分路径有关吗？说明你的理由；（2）计算曲线积分 I 的值.

19. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\sqrt{n}}$ 的收敛半径与收敛域.

20. 求 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 围成的立体.

四、应用题

1. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 2$ 在抛物面 $z=x^2+y^2$ 上方部分的立体区域的体积。

2. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(1,2,3)$ 处的切平面。

3. 将正数 27 分成三个正数 x, y, z，利用拉格朗日乘数法，求出这三个正数，使得 $f(x,y,z)=3\ln x+2\ln y+4\ln z$ 最大.

4. 求半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与旋转抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成的有界区域的体积。

五、证明题

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 发散，其中 $b_n>0$ （$(n=1,2,\cdots)$ 单调递减，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(1+b_n)^n}$ 绝对收敛。

2. 求证：交错级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 是收敛的。

3. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ 收敛，并说明是绝对收敛还是条件收敛.

==

参考答案

一. 选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
C	D	A	B	A	B	A	
9	10	11	12	13	14	15	16
D	B	D	C	A	C	B	
17	18	19	20	21	22	23	24
D	A	D	C	A	B		

二. 填空题

1	2	3
$\frac{1}{2}$	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z-5}{2}$	$x+y+2z=0$
4	5	6
$e^2(2dx+dy)$	$\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$	$\frac{\pi}{2}a^3$
7	8	9

$\frac{1}{2}$	$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\le 4\}$	$-\frac{\ln y}{x^2\sin y}$
10	**11**	**12**
0	$1,\quad 1$	$4\sqrt{2}\pi$
13	**14**	**15**
$\lvert q-1\rvert<1$或$0<q<2$	$(1,-2,3)$	$\{(x,y)\mid x+y\ge 1\}$
16	**17**	**18**
$p>1$	$\sqrt{3}/2$	$\pm(1,1,1)/\sqrt{3}$
19	**20**	**21**
$I_2<I_1<I_3$	$1/\sqrt{3}$	π

三.试解下列各题

1. 解：由 $\begin{cases} f_x = 3x^2-6x-9=0, \\ f_y = 2y-4=0, \end{cases}$ 得驻点为$(3,2),(-1,2)$

又 $A=f_{xx}=6x-6, B=f_{xy}=0, C=f_{yy}=2,\quad \therefore AC-B^2=12(x-1),$

当 $x=-1, AC-B^2=12(x-1)=-24<0,$ 不是极值点。

当 $x=3, AC-B^2=12(x-1)=24>0,$ 且 $A=6x-6=12>0,$ 为极小值点

$\therefore$ $f(x,y)$ 在点$(3,2)$取得极小值 $m=-29$.

2. 解：方程两边关于 x 求偏导，得 $1+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-y-2\frac{\partial z}{\partial x}=0,$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y-1}{3z^2-2}$，(或者利用公式解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{y-1}{3z^2-2}$。)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y-1}{3z^2-2}\right)=-\frac{y-1}{(3z^2-2)^2}\cdot\left(6z\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{6z(y-1)^2}{(3z^2-2)^3}。$$

3. 解：$\lim\limits_{n\to\infty}2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}\Big/2^n\sin\frac{\pi}{3^n}=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{3^{n+1}}\Big/\frac{\pi}{3^n}=\frac{2}{3}<1,$

$\therefore$由比值审敛法知原级数收敛。

4. 解：$f(x)=\frac{1}{3\left(1+\frac{x}{3}\right)}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}x^n$

幂级数收敛域 $\left|\frac{x}{3}\right|<1,\ x\in(-3,3).$

5. 解：$P(x,y)=e^x\cos y-y$ ，$Q(x,y)=x-e^x\sin y$，

$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$，可应用格林公式

取积分路径 $L_1: y=0, x:-1\to 1,$ 则 $L+L_1$ 构成上半圆盘区域 D 的正向边界

$$\oint_{L+L_1} Pdx+Qdy=(\int_L+\int_{L_1})Pdx+Qdy=\iint_D 2dxdy=\pi$$

所以 $I=\pi-\int_{L_1}Pdx+Qdy=\pi-\int_{-1}^{1}e^x dx=\pi-e^x\Big|_{-1}^{1}=\pi-e+\frac{1}{e}.$

6. 解：由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$ 得曲面 Σ 在 xoy 平面的投影区域为 D: $x^2+y^2\le\frac{3}{4}$,

由 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 得：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$,

则 $dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}dxdy=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\frac{1}{z}dxdy,$

而由于曲面Σ关于yoz和xoz平面的对称性，可得

$$\iint_\Sigma xdS=\iint_\Sigma ydS=0,\quad \therefore I=\iint_\Sigma zdS=\iint_D dxdy=\frac{3\pi}{4}.$$

7. 解：$I=\iiint_\Omega \mathrm{x}dxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz$

$$=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2dx=\frac{1}{24}(6x^2-8x^3+3x^4)\Big|_0^1=\frac{1}{24}.$$

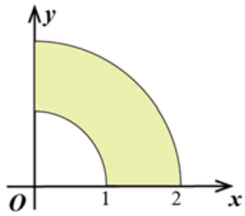
8. 解：由 $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3+4x=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-3y^2+3=0$ 得驻点为 $P(0,1),Q(0,-1)$；

而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2+4,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$

对于点 P，$AC-B^2<0$，所以点 P 不是极值点；

对于点 Q，$AC-B^2>0,\ A>0$，所以点 Q 是极小值点，且极小值为 $z=-2$。

9. **解**：区域如右图所示：



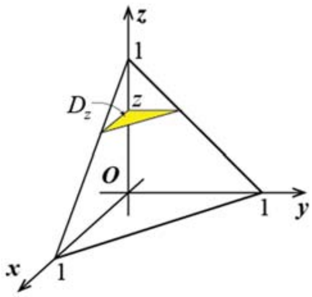
使用极坐标变换 $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$，

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_1^2\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}rdr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta d\theta\int_1^2 rdr=\frac{1}{4}(-\cos(2\theta))\Big|_0^{\pi/2}\frac{1}{2}r^2\Big|_1^2=\frac{3}{4}.$$

$$或=\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\sin\theta\int_1^2 rdr=\frac{1}{2}(\sin^2\theta)\Big|_0^{\pi/2}\frac{1}{2}r^2\Big|_1^2=\frac{3}{4}.$$

10. 解 1：截面法（先二后一）将 Ω 投影到 z 轴上，则 $0\le z\le 1;\ \forall z\in[0,1]$，平面 $z=z$ 与 Ω 的截面 D_z 为由平面 $z=z$ 上三条直线 $x+y=1-z$ 和 $x=0,\ y=0$ 围成的区域（或如图）。则



$$\iiint_\Omega z\,dxdydz=\int_0^1 zdz\iint_{D_z}dxdy$$

$$=\int_0^1 z\times\frac{1}{2}(1-z)\times(1-z)dz=\frac{1}{2}\int_0^1(z^3-2z^2+z)dz=\frac{1}{24}.$$

解 2:（先一后二）如图，将 Ω 向 xoy 面上的投影为 $D:0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$，

且 $0\le z\le 1-x-y$。则

$$\iiint_\Omega z\,dxdydz=\iint_D dxdy\int_0^{1-x-y}zdz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}zdz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}(x+y-1)^2dy=\frac{1}{6}\int_0^1(x+y-1)^3\Big|_0^{1-x}dx=-\frac{1}{6}\int_0^1(x-1)^3dx=\frac{1}{24}.$$

11. 解：因为 $P=e^x\sin^2 y+x^2+y,\ Q=e^x\sin(2y)+x$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^x\sin 2y+1=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故积分与路径无关。

因此选择从 A 到 B 的直线段 AB，这样

$$I=\int_{AB}(e^x\sin^2 y+x^2+y)dx+(e^x\sin(2y)+x)dy=\int_1^{-1}x^2dx=-\frac{2}{3}.$$

12. 解： $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$，所以收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=2$，

当 $x=-2$ 时，原级数化为 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，它是发散的，

当 $x=2$ 时，级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，它是收敛的，

所以收敛域为 $(-2,2]$.

13. 解：方程两边关于 x 求导得：$1+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-y=2\frac{\partial z}{\partial x}$，于是 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y-1}{3z^2-2}$

再方程两边关于 y 求导得：$2y+3z^2\frac{\partial z}{\partial y}-x=2\frac{\partial z}{\partial y}$，于是 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-2y}{3z^2-2}$。

14. 解：令 $x=r\cos\theta,\ y=\sin\theta$，则 原式$=\lim\limits_{r\to 0}\frac{\ln(1+r^2)}{\sin r^2}=\lim\limits_{r\to 0}\frac{r^2}{r^2}=1$.

15. 解：令 $F(x,y,z)=x+2y+z-2\sqrt{xyz}$，则有

$$F_x=1-\sqrt{x^{-1}yz},\ F_y=2-\sqrt{xy^{-1}z},\ F_z=1-\sqrt{xyz^{-1}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1-\sqrt{x^{-1}yz}}{1-\sqrt{xyz^{-1}}}=\frac{xz-z\sqrt{xyz}}{x\sqrt{xyz}-zx}=\frac{\sqrt{xyz}-yz}{xy-\sqrt{xyz}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2-\sqrt{xy^{-1}z}}{1-\sqrt{xyz^{-1}}}=\frac{2yz-z\sqrt{xyz}}{y\sqrt{xyz}-yz}=\frac{2\sqrt{xyz}-xz}{xy-\sqrt{xyz}}.$$

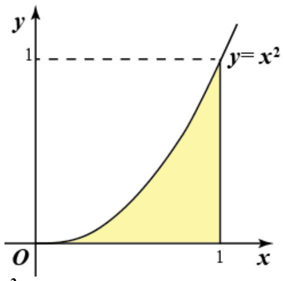
或解：$1+z'_x-\sqrt{x^{-1}yz}-\sqrt{xyz^{-1}}z'_x=0$，即 $z'_x=\frac{\sqrt{xyz}-yz}{xy-\sqrt{xyz}}$；

$2+z'_y-\sqrt{xy^{-1}z}-\sqrt{xyz^{-1}}z'_y=0$，即 $z'_y=\frac{2\sqrt{xyz}-xz}{xy-\sqrt{xyz}}$.

16. 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=\ln(xy)+1$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{1}{xy}\cdot x=\frac{x}{y}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(\ln(xy)+1)=\frac{1}{xy}\cdot x=\frac{1}{y}.$$

17. 解：（1）



（2） $I=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}dy$

（3） $I=\int_0^1\sqrt{x^3+1}\cdot x^2dx=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{x^3+1}d(x^3+1)=\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$

18. 解： （1）由 $\frac{\partial Q}{\partial x}=4xy^3=\frac{\partial P}{\partial y}$， 可知曲线积分与路径无关。

（2）选取折线路径可得 $I=\int_{-\pi}^{\pi/2}\sin xdx+\int_0^1(\frac{\pi^2}{2}y^3+2y\cos y^2)dy$

$$=-\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi/2}+(\frac{\pi^2}{8}y^4+\sin y^2)\Big|_0^1=-1+\frac{\pi^2}{8}+\sin 1.$$

19. 解：因为 $a_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}$， 所以收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{3/2}}{n^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{3/2}=1.$$

也就是若 $|x-2|<1$ （即 $1<x<3$），则原级数绝对收敛。

而且又由于 $x=3$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛； $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ 也收敛，故 原级数的 收敛域为 $[1,3]$。

20. 解法一：使用截面法（先二后一），立体 Ω 在 z 轴上的投影为区间 $[0,1]$，对于任意的在该区间内的 z，过 z 作垂直于 z 轴的平面，与 Ω 的截面为 $D_z: x^2+y^2\le 1$ ，则有

$$\iiint_\Omega z\,dv=\int_0^1 zdz\iint_{D_z}dxdy=\int_0^1 z\pi z^2dz=\frac{\pi}{4}.$$

解法二：两个曲面的交线所在的投影柱面为 $x^2+y^2=1$，可知 Ω 在 xoy 面上的投影为 $x^2+y^2\le 1$，故由柱面法得

$$\iiint_\Omega z\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^1 zdz=\pi\int_0^1 r(1-r^2)dr=\frac{\pi}{4}.$$

四．应用题

1. 解：由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ 得交线为 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$

则立体区域在 xoy 平面上的投影区域为 $D: x^2+y^2\le 1.$

所求体积 $V=\iint\limits_D [\sqrt{2-x^2-y^2}-(x^2+y^2)]dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\sqrt{2-r^2}-r^2)rdr=2\pi\left[-\frac{(2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{r^4}{4}\right]\Bigg|_0^1=(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{7}{6})\pi.$$

2. 解：令 $F(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-16$，

则 $F_x'(x,y,z)=6x,\ F_y'(x,y,z)=2y,\ F_z'(x,y,z)=2z$，于是过 $(1,2,3)$ 的切平面的法线向量为 $\vec{n}=(6,\ 4,\ 6)$，

所以所求切平面为 $6(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$ 或者 $3x+2y+3z-16=0$.

3. 解：设 $F=3\ln x+2\ln y+4\ln z+\lambda(x+y+z-27)$，

令 $\begin{cases} F_x=3/x+\lambda=0 \\ F_y=2/y+\lambda=0 \\ F_z=4/z+\lambda=0 \\ F_\lambda=x+y+z-27=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=9, \\ y=6, \\ z=12 \end{cases}$

由于连续，且在边界上 $f(x,y,z)=0$，所以的最大值应在区域内部取得.

函数在闭区域上的最大值显然存在，而在区域上只有唯一一个驻点，所以该点必是的最大值点，从而函数有最大值

$f(9,6,12)=3\ln 9+2\ln 6+4\ln 12=12\ln 3+10\ln 2$.

4. 解：两曲面交线为 $\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$，设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3\}$，

则 $V=\iint\limits_D(\sqrt{4-x^2-y^2}-\frac{1}{3}(x^2+y^2))d\sigma$.

设$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，则 $D = \left\{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le \sqrt{3}\right\}$，

所以 $V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-r^2} - \frac{1}{3}r^2)\cdot rdr = \pi\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-r^2} - \frac{1}{3}r^2)\cdot dr^2$

$= \pi[-\frac{2}{3}(4-r^2)^{3/2} - \frac{1}{6}r^4]_0^{\sqrt{3}} = \frac{19\pi}{6}$.

五．证明题

1. 证明：$\because b_n > 0$ 且单调递减，$\therefore b_n \to b \ge 0$

若 $b=0$，由莱布尼茨定理可知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$收敛，与已知矛盾。

$\therefore b > 0$

对于$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(1+b_n)^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+b_n)^n}$，$\because \sqrt[n]{\frac{1}{(1+b_n)^n}} = \frac{1}{1+b_n} \to \frac{1}{1+b} < 1$，

故由柯西审敛法知$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(1+b_n)^n}\right|$收敛。故原级数绝对收敛。

2. 证明：考虑$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$的一般项绝对值$|u_n| = \frac{\sqrt{n}}{n-1}$，显然$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0$，

又设 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$，则 $f'(x) = -\frac{1+x}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$，

当 $x>1$ 时，$f(x)<0$，于是 $u_{n+1} < u_n$，根据莱布尼茨判别法，

得交错级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$收敛。

3. 证明：$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}\right| / \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+n} = 2$，

所以，该级数不可能绝对收敛。

因一般项的绝对值为$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$，显然是单调递减，并且趋于零（$n\to\infty$）。由莱布尼茨交错级数判别法，得知，原级数条件收敛。