18-19-2 学期期末练习卷

一．选择题

1. 曲面 $x^2+9y^2+2z^2=9$ 与平面 $x+z=3$ 交线在 yoz 平面上的投影方程为(　　　).

(A) $\begin{cases} x^2+9y^2+2z^2=9 \\ x+z=3 \end{cases}$;　　(B) $\begin{cases} 9y^2+2z^2=9 \\ x=0 \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} 3y^2+(z-1)^2=1 \\ x=0 \end{cases}$;　　(D) $\begin{cases} 3y^2+(z-1)^2=1 \\ x+z=3 \end{cases}$.

2. 设 $y\sin xdx-\cos xdy$ 是 $u(x,y)$ 的全微分，则（　　）.

(A) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\cos x$;　　(B) $u(x,y)=\int_0^x y\sin xdx-\int_0^y \cos xdy+C$;

(C) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\cos x$;　　(D) $u(x,y)=\int_0^y (y\sin x-\cos x)dy+C$.

3. 设 $I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$, $I_2=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)d\sigma$, $I_3=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$,

其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则(　　　).

(A) $I_3>I_2>I_1$;　　(B) $I_1>I_2>I_3$;

(C) $I_2>I_1>I_3$;　　(D) $I_3>I_1>I_2$.

4. 下列结论正确的是(　　　).

(A)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-2v_n)$ 也收敛;

(B)若 $u_n\le v_n\ (n\in N)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散;

(C)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ 存在且小于等于 1;

(D)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ 存在且大于 1，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必发散.

5. 方程 $x^2-y^2=z$ 表示（　　　）.

(A) 柱面;　(B) 单叶双曲面;　(C) 双曲抛物面;　(D) 旋转抛物面.

6. 如果 $f(x,y)$ 在点 $P=(x_0,y_0)$ 不可微，则下列命题中一定不成立的是(　　　).

(A) $f(x,y)$ 在点 P 不连续;　　(B) $f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)$ 都存在且连续;

(C) $f(x,y)$ 在点 P 连续；　　(D) $f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)$ 都存在.

7. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & -\pi\le x<0; \\ \pi - x^2/\pi, & 0\le x<\pi. \end{cases}$， $s(x)$ 是其傅里叶级数展开式的和函数，则 $s(2\pi)$ 的值等于（　　）.

(A) 2π；　(B) $\pi/2$；　(C) 0；　(D) 2.

8.

9. 曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的交线是（　　）

(A) 抛物线　　(B) 双曲线
(C) 圆周　　(D) 椭圆

10. 直线 $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 与平面 $4x-2y-2z-3=0$ 的夹角是（　　）

(A) $\frac{\pi}{2}$　(B) $\frac{\pi}{3}$　(C) $\frac{\pi}{6}$　(D) 0

11. 函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续是 $f(x,y)$ 在该点可微的(　　)

(A) 充分但非必要条件　　(B) 充分必要条件
(C) 必要但非充分条件　　(D) 既非充分又非必要条件

12. 设 D: 由 $x+y=1$、x 轴和 y 轴围成的三角形区域，则 $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ (　　)

(A)1　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{4}$　(D) $\sqrt{2}$

13. 下列选项中与命题“若 G 是单连通区域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 G 内有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关 (其中 L 为 G 内任一分段光滑曲线)”等价的是（　　）

(A) $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 G 内恒成立　　(B) $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$ 在 G 内恒成立

(C) 存在封闭曲线 C，使得 $\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$

(D) 存在可微函数 $u=u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u=Q\mathrm{d}x+P\mathrm{d}y$ 在 G 内恒成立

14. 已知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=-3$ 收敛，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=3$ 处(　　)。

(A) 条件收敛　(B) 绝对收敛　(C) 发散　(D) 敛散性不能确定

15. 设 $f(x)=x,(-\pi\le x<\pi)$ 是以 2π 为周期的函数，$s(x)$ 是其傅里叶级数展开式的和函数，则 $s(\pi)$ 的值等于（　　）。

(A) 0　　(B) 1　　(C) π　　(D) 2π

16.

17. 曲面 $z=x^4+y^2$ 被曲面 $x^2+y^2=1$ 所截的部分面积为(　　)，其中 D 为区域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$.

A. $\iint\limits_D (x^4+y^2)dxdy$，　　B. $\iint\limits_D r^4 drd\theta$，

C. $\iint\limits_D r^2(r^2\cos^2\theta+\sin^2\theta)rdrd\theta$，　　D. $\iint\limits_D \sqrt{1+(4x^3)^2+(2y)^2}dxdy$.

18. 方程 $x^2+2y^2=4$ 在空间表示(　　).

A. 椭圆，　B. 椭圆柱面，　C. 抛物柱面，　D. 旋转抛物面.

19. $D=\{(x,y)\mid 0<x<0.3,\ 0<y<0.5\}$，$I_1=\iint\limits_D (x+y)^2 dx$，$I_2=\iint\limits_D (x+y)^{1/2}dx$，$I_3=\iint\limits_D (x+y)dx$，则它们的大小关系为：

A. $I_1<I_2<I_3$，　B. $I_3<I_2<I_1$，　C. $I_3<I_1<I_2$，　D. $I_1<I_3<I_2$.

20. 级数 T 为：$1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}+\cdots$，级数 S 为：$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$，则

A. 级数 T 收敛，级数 S 发散，　B. 级数 T 收敛，级数 S 收敛，

C. 级数 T 发散，级数 S 收敛，　D. 级数 T 发散，级数 S 发散.

21. 如果 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 不连续，则下列命题中一定不成立的是(　　).

A. $f(x,y)$ 在点 P 可微，　B. $f(x,y)$ 在点 P 不可微，

C. $f(x,y)$ 在点 P 可导，　D. $f(x,y)$ 在点 P 不可导.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是两个正项级数，对于任意 n，$u_n\le v_n$，则（　　）

A. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，

C. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散。

23. 直线$\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{3}$与平面$x-2y-2z=1$的关系是（　　）.

A. 直线平行于平面，　　　　B. 相交但不垂直，

C. 垂直相交，　　　　D. A, B, C 都不对.

二．填空题：

1、计算$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}=$ ______________ .

2、已知$|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2$且$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，则以向量$\vec{a}$、$\vec{b}$为边的三角形面积为______.

3、设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径为$2$，则该幂级数在$x=1$的敛散性为：________.

4、若$-1\le f(x,y)\le 1$，D的面积为$\sqrt{2}$，则根据估值不等式$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$必落在区间____________.

5、函数$z=\sqrt{\ln(x^2+y^2)-1}$的定义域为 ___________________ .

6、设L为$y^2=x$上连接点$(2,-4)$到$(2,4)$的一段弧，则$\int_L y^3 ds=$__________ .

7. 计算$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}=$ _______________ 。

8. 过点$(-1,2,5)$且与平面$3x-7y+2z-11=0$垂直的直线方程为_______________。

9. 曲面$x^2+y^2=2z^2$ 在点$(1,1,-1)$处的切平面方程为__________________ 。

10. 函数$z=e^{xy}$在点（1,2）处的全微分为_______________________________。

11. 交换二次积分的次序，$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy=$ _________________________。

12. 设L为圆周$x^2+y^2=a^2\ (x\ge 0, y\ge 0)$上的一段弧，则$\int_L (x^2+y^2)ds=$_________ 。

13. 已知两向量$\vec{a}=(-1,-2,\lambda)$，$\vec{b}=(2,4,-1)$平行，则$\lambda=$________.

14. 函数$z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\ln(x^2+y^2-1)$的定义域为 ___________________.

15. 设 $z=\dfrac{x+\ln y}{x\sin y}$，则 $z'_x=$____________________.

16. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^3+\sin y)\cos\dfrac{1}{xy}=$____________________.

17. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分区域为 $\{(x,y)\,|\,0\le x\le$____， $x\le y\le$____$\}$.

18. $\int_l (x^2+y^2)ds=$______________，其中 $l:x^2+y^2=2$.

19. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a(q-1)^n$ 收敛（a 为非零常数），则 q 必满足 _________________.

20. 空间曲线 $\boldsymbol{x=t,y=-t^2,z=t^3}$，在 $\boldsymbol{t=1}$ 处的切向量为_________________.

三．试解下列各题

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=1+\ln(x+y)-e^z$ 所确定，其中当 $x=1,\ y=0$ 时，$z=0$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$，$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}$.

2. 求二重积分 $\int_0^3 dx\int_a^1 \dfrac{\sqrt{1-y^3}}{y}dy$ 的值，其中 $a=\sqrt[3]{\dfrac{x}{3}}$（注：开立方）.

3. 若积分 $I=\int_L (2y^2+3x^2\cos y)dx+(4xf(y)-x^3\sin y)dy$ 与路径无关,，试计算 I 的值，其中 L 为沿曲线 $x^2+y^2=1$ 逆时针由点 $A(1,0)$ 到点 $B(-1,0)$ 的弧段.

4. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n}$ 是否收敛？若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

5. $\iint\limits_{\Sigma}(2-4x-y-z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为 xOy 平面上适合 $4x+y\le 2, x\ge 0, y\ge 0$ 的部分.

6. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 Ω：由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的闭区域。

7. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的收敛区间，并求其和.

8. 求函数 $f(x,y)=x^3-3x^2+y^2-9x-4y+2$ 的极值。

9. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y^2+z^3-xy-2z=0$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 。

10. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$ 的敛散性。

11. 将函数 $\frac{1}{x+3}$ 展开为 x 的幂级数，并求出幂级数的收敛域。

12. 计算 $I=\int_L (\mathrm{e}^x\cos y-y)\mathrm{d}x+(x-\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{d}y$， 其中 L 为沿上半圆周 $x^2+y^2=1,(y\geq 0)$ 由点 $A(1,0)$ 到点 $B(-1,0)$ 的一弧段。

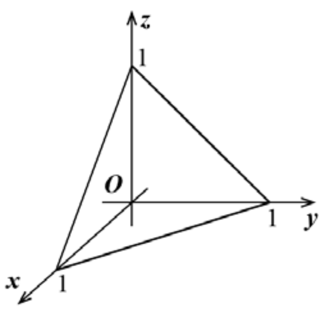
13. 计算 $\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ： 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上 $z\geq\frac{1}{2}$ 的部分。

14. 计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}v$，其中 Ω： 由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的闭区域。

15. 求函数 $z=x^4-y^3+2x^2+3y$ 的极值。

16. 计算 $\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:1\leq x^2+y^2\leq 4, y\geq 0, x\geq 0$（**要求画出积分区域!**）.

17. 计算 $\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由平面 $x+y+z=1$ 及三个坐标面围成，如图所示。



18. 计算曲线积分 $I=\int_L (e^x\sin^2 y+x^2+y)dx+[e^x\sin(2y)+x]dy$，其中 L 为从点 $A(1,0)$ 沿曲线 $y=1-x^2$ 到 $B(-1,0)$ 的一段弧。

19. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{2^n n}$ 的收敛半径和收敛域.

20. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y^2+z^3-xy=2z$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

四、应用题

1. 某汽车销售公司可通过电台及报纸两种方式做销售车辆的广告，根据统计，若电台广告费用为 x（万元）与报纸广告费用为 y（万元），则所得利润为

$L(x,y)=15+9x+25y-8xy-2x^2-10y^2$.

若提供的广告费用为 2 万元，则电台广告与报纸广告费用应分别投入多少使得利润最大。

2. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 2$ 在抛物面 $z=x^2+y^2$ 上方部分的立体区域的体积。

3. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(1,2,3)$ 处的切平面。

五、证明题

1. 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$，证明：当点 (x,y) 沿直线 $y=mx$（$m\neq 0$）趋于 $(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 存在极限，且极限相等。但是，此函数在原点不存在极限.

2. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 发散，其中 $b_n>0$（$(n=1,2,\cdots)$ 单调递减，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(1+b_n)^n}$ 绝对收敛。

3. 求证：交错级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 是收敛的。

参考答案

一．选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
C	C	A	D	C	B	B	
9	10	11	12	13	14	15	16
C	D	A	B	A	B	A	
17	18	19	20	21	22	23	24
D	B	D	C	A	C	B	

二. 填空题

1	2	3
1	$3\sqrt{3}/2$	收敛
4	5	6
$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$	$\{(x,y)\mid x^2+y^2\geq e\}$	0
7	8	9
$\frac{1}{2}$	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z-5}{2}$	$x+y+2z-6=0$
10	11	12
$e^2(2dx+dy)$	$\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$	$\frac{\pi}{4}a^2$
13	14	15
$\frac{1}{2}$	$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leq 4\}$	$-\frac{\ln y}{x^2\sin y}$
16	17	18
0	1，1	$4\sqrt{2}\pi$
19	20	21
$\lvert q-1\rvert<1$或$0<q<2$	$(1,-2,3)$	

三.试解下列各题

1. 解：两边求导得：$z'_x=\dfrac{1}{x+y}-e^z z'_x$，将 $x=1,\ y=0$， $z=0$ 代入，得

$z'_x(1,0)=1-z'_x(1,0)$，故 $z'_x(1,0)=1/2$.

再求导得 $z''_{xx}=\dfrac{-1}{(x+y)^2}-e^z(z'_x)^2-e^z z''_{xx}$，将 $x=1,\ y=0$， $z=0$ 代入，得

$z''_{xx}(1,0)=-1-(z'_x(1,0))^2-z''_{xx}(1,0)$，即 $z''_{xx}(1,0)=-\dfrac{5}{8}$.

2. 解：由题设可知积分区域为 $\{0\le x\le 3,\ \sqrt[3]{\dfrac{x}{3}}\le y\le 1\}$，也就是为

$\{0\le y\le 1,\ 0\le x\le 3y^3\}$，所以 $\int_0^3 dx\int_{\sqrt[3]{\frac{x}{3}}}^1 \dfrac{\sqrt{1-y^3}}{y}dy=\int_0^1 dy\int_0^{3y^3}\dfrac{\sqrt{1-y^3}}{y}dx$

$=\int_0^1\dfrac{\sqrt{1-y^3}}{y}(3y^3-0)dy=-\int_0^1\sqrt{1-y^3}\,d(1-y^3)=-\dfrac{2}{3}(1-y^3)^{3/2}\Big|_0^1=\dfrac{2}{3}$.

3. 解:因积分与路径无关,故有 $\dfrac{\partial(2y^2+3x^2\cos y)}{\partial y}=\dfrac{\partial(4xf(y)-x^3\sin y)}{\partial x}$,即 $f(y)=y$。

由于积分与路径无关,因此选择沿 x 轴从 A 到 B 的直线段 $AB: x=x, y=0, -1\le x\le 1$,

于是 $I=\int_1^{-1}(2\cdot 0+3x^2\cdot 1)dx=-2$。

4. 解：当 $n\ge 3$ 时，$\dfrac{\ln n}{n}>\dfrac{1}{n}$，所以该级数非绝对收敛。

因原级数是交错级数，而 $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0,\ (\because x\ge 3)$，因此 $\{\dfrac{\ln n}{n}\}$ 随 n 单调递减。

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，满足莱布尼茨交错级数收敛定理条件，故原级数收敛，也就是原级数条件收敛。

5. 解：$\Sigma:\ z=0,\ \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， Σ 在 xoy 面上的投影为 $D:\ 4x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$，

$\iint\limits_{\Sigma}(2-4x-y)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}(2-4x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D}(4x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2-\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{2-4x}(4x+y)\mathrm{d}y=1-\int_0^{\frac{1}{2}}[4x(2-4x)+\dfrac{1}{2}(2-4x)^2]\mathrm{d}x$

$$=1-\int_0^{\frac{1}{2}}(2-8x^2)\mathrm{d}x=1-1+\frac{8}{3}x^3\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

6. 解：曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 的交线在 xoy 平面上的投影柱面方程为 $1=x^2+y^2$，

使用柱面坐标。$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z$，则

$$I=\iiint_\Omega(x^2+y^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^1 r^2dz=2\pi\int_0^1 r^3(1-r)dr=2\pi(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})=\frac{\pi}{10}.$$

7. 解：收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)}=1$，对于 $x=1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$，它是发散的。

对于 $x=-1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$，它也是发散的。

因此该级数的收敛区间为 $(-1,1)$。

在区间 $(-1,1)$，即 $|x|<1$ 时，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)'=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n)'=(\frac{x}{1-x})'$，所以，其和函数为 $\frac{1}{(1-x)^2}$.

8. 解：由 $\begin{cases} f_x=3x^2-6x-9=0, \\ f_y=2y-4=0, \end{cases}$ 得驻点为 $(3,2),(-1,2)$

又 $A=f_{xx}=6x-6, B=f_{xy}=0, C=f_{yy}=2,\quad \therefore AC-B^2=12(x-1),$

当 $x=-1, AC-B^2=12(x-1)=-24<0,$ 不是极值点。

当 $x=3, AC-B^2=12(x-1)=24>0,$ 且 $A=6x-6=12>0,$ 为极小值点

$\therefore f(x,y)$ 在点 $(3,2)$ 取得极小值 $m=-29$.

9. 解：方程两边关于 x 求偏导，得 $1+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-y-2\frac{\partial z}{\partial x}=0,$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y-1}{3z^2-2}$，(或者利用公式解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{y-1}{3z^2-2}$。)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y-1}{3z^2-2})=-\frac{y-1}{(3z^2-2)^2}\cdot(6z\frac{\partial z}{\partial x})=-\frac{6z(y-1)^2}{(3z^2-2)^3}。$$

10. 解：$\lim\limits_{n\to\infty}2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}\Big/2^n\sin\frac{\pi}{3^n}=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{3^{n+1}}\Big/\frac{\pi}{3^n}=\frac{2}{3}<1,$

$\therefore$ 由比值审敛法知原级数收敛。

11. 解：$f(x)=\dfrac{1}{3\left(1+\frac{x}{3}\right)}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{3})^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}x^n$

幂级数收敛域 $\left|\frac{x}{3}\right|<1,\ x\in(-3,3).$

12. 解：$P(x,y)=e^x\cos y-y$ ，$Q(x,y)=x-e^x\sin y$，

$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$，可应用格林公式

取积分路径 $L_1: y=0,\ x:1\to -1,$ 则 $L+L_1$ 构成上半圆盘区域 D 的正向边界

$$\oint_{L+L_1} Pdx+Qdy=(\int_L+\int_{L_1})Pdx+Qdy=\iint_D 2dxdy=\pi$$

所以 $I=\pi-\int_{L_1} Pdx+Qdy=\pi-\int_1^{-1}e^x dx=\pi-e^x\Big|_1^{-1}=\pi+e-\frac{1}{e}.$

13. 解：由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ z=\frac{1}{2}\end{cases}$ 得曲面 Σ 在 xoy 平面的投影区域为 D: $x^2+y^2\le\frac{3}{4}$,

由 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 得: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$,

则 $dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}dxdy=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\frac{1}{z}dxdy,$

而由于曲面Σ关于yoz和xoz平面的对称性，可得

$$\iint_\Sigma xdS=\iint_\Sigma ydS=0,\quad \therefore I=\iint_\Sigma zdS=\iint_D dxdy=\frac{3\pi}{4}.$$

14. 解：$I=\iiint_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz$

$$=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2dx=\frac{1}{24}(6x^2-8x^3+3x^4)\Big|_0^1=\frac{1}{24}.$$

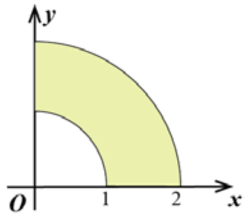
15. 解：由 $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3+4x=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-3y^2+3=0$ 得驻点为 $P(0,1),Q(0,-1)$；

而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2+4,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$

对于点 P，$AC-B^2<0$，所以点 P 不是极值点；

对于点 Q，$AC-B^2>0,\ A>0$，所以点 Q 是极小值点，且极小值为 $z=-2$。

16. **解：** 区域如右图所示：



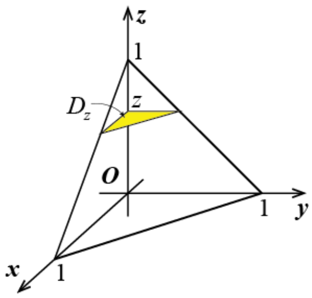
使用极坐标变换 $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$，

$$\iint\limits_{D}\frac{xy}{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_1^2\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}rdr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta d\theta\int_1^2 rdr=\frac{1}{4}(-\cos(2\theta))\Big|_0^{\pi/2}\frac{1}{2}r^2\Big|_1^2=\frac{3}{4}.$$

或 $=\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\sin\theta\int_1^2 rdr=\frac{1}{2}(\sin^2\theta)\Big|_0^{\pi/2}\frac{1}{2}r^2\Big|_1^2=\frac{3}{4}.$

17. 解 1：截面法（先二后一）将 Ω 投影到 z 轴上，则 $0\le z\le 1;\ \forall z\in[0,1]$，平面 $z=z$ 与 Ω 的截面 D_z 为由平面 $z=z$ 上三条直线 $x+y=1-z$ 和 $x=0,\ y=0$ 围成的区域（或如图）。则



$$\iiint\limits_{\Omega}z\,dxdydz=\int_0^1 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy$$

$$=\int_0^1 z\times\frac{1}{2}(1-z)\times(1-z)dz=\frac{1}{2}\int_0^1(z^3-2z^2+z)dz=\frac{1}{24}.$$

解 2:（先一后二）如图，将 Ω 向 xoy 面上的投影为 $D:0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$，且 $0\le z\le 1-x-y$。则

$$\iiint\limits_{\Omega}z\,dxdydz=\iint\limits_{D}dxdy\int_0^{1-x-y}zdz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}zdz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}(x+y-1)^2dy=\frac{1}{6}\int_0^1(x+y-1)^3\Big|_0^{1-x}dx=-\frac{1}{6}\int_0^1(x-1)^3dx=\frac{1}{24}.$$

18. 解：因为 $P=e^x\sin^2 y+x^2+y,\ Q=e^x\sin(2y)+x$，$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\sin 2y+1=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故积分与路径无关。

因此选择从 A 到 B 的直线段 AB，这样

$$I=\int_{AB}(e^x\sin^2 y+x^2+y)dx+(e^x\sin(2y)+x)dy=\int_1^{-1}x^2dx=-\frac{2}{3}.$$

19. 解： $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{1}{2}$，所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}=2$，

当 $x=-2$ 时，原级数化为 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，它是发散的，

当 $x=2$ 时，级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$，它是收敛的，

所以收敛域为 $(-2,2]$.

20. 解：方程两边关于 x 求导得：$1+3z^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-y=2\dfrac{\partial z}{\partial x}$，于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y-1}{3z^2-2}$

再方程两边关于 y 求导得：$2y+3z^2\dfrac{\partial z}{\partial y}-x=2\dfrac{\partial z}{\partial y}$，于是 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x-2y}{3z^2-2}$。

四．应用题

1. 解：这是在限制条件 $x+y=2$ 下求条件极值的问题，用拉格朗日乘数法，作辅助函数

$F(x,y,\lambda)=15+9x+25y-8xy-2x^2-10y^2+\lambda(x+y-2)$.

令 $\begin{cases}F_x=9-8y-4x+\lambda=0,\\ F_y=25-8x-20y+\lambda=0,\\ F_\lambda=x+y-2=0.\end{cases}$ 解方程组得唯一驻点 $x=1=y$，

所以，电台广告和报纸广告费用分别投入 1 万元时则利润最大。

2. **解**：由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\ z=x^2+y^2\end{cases}$ 得交线为 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1\end{cases}$

则立体区域在 xoy 平面上的投影区域为 $D:x^2+y^2\le 1.$

所求体积 $V=\iint\limits_D[\sqrt{2-x^2-y^2}-(x^2+y^2)]dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\sqrt{2-r^2}-r^2)rdr=2\pi\left[-\frac{(2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{r^4}{4}\right]\Big|_0^1=(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{7}{6})\pi.$$

3. **解**：令 $F(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-16$，

则 $F_x'(x,y,z)=6x,\ F_y'(x,y,z)=2y,\ F_z'(x,y,z)=2z$，于是过 $(1,2,3)$ 的切平面的法线向量为 $\vec{n}=(6,\ 4,\ 6)$，

所以所求切平面为 $6(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$ 或者 $3x+2y+3z-16=0$.

五．证明题

1. 证明：设 $y=mx$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{m^4x^8}{(x^4+m^2x^2)^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{m^4x^2}{(x^2+m^2)^3}=0$.

故当点 (x,y) 沿直线 $y=mx$（$m\neq0$）趋于 $(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 存在极限，且极限均为零。

若取 $y=x^2$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{12}}{(x^4+x^4)^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{12}}{8x^{12}}=\dfrac{1}{8}$.

因此，该函数在原点不存在极限。

2. 证明：$\because b_n>0$ 且单调递减，$\therefore b_n\to b\geq0$

若 $b=0$，由莱布尼茨定理可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 收敛，与已知矛盾。

$\therefore b>0$

对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{(1+b_n)^n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1+b_n)^n}$，$\because \sqrt[n]{\dfrac{1}{(1+b_n)^n}}=\dfrac{1}{1+b_n}\to\dfrac{1}{1+b}<1$，

故由柯西审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{(1+b_n)^n}\right|$ 收敛。故原级数绝对收敛。

3. 证明：考虑 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 的一般项绝对值 $|u_n|=\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}=0$，

又设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$，则 $f'(x)=-\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$，

当 $x>1$ 时，$f(x)<0$，于是 $u_{n+1}<u_n$，根据莱布尼茨判别法，

得交错级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛。