# 练习卷参考答案

一． 填空题：

1． $\underline{6}$　　2． $\underline{c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}}$　　3． $\underline{\iint_D |f(x,\ y)|dxdy}$

4． $\underline{0}$　　5． $\underline{4\sqrt{2}}$　　6． $\underline{\dfrac{1}{x}}$

7． $-2$　　8． $C_1e^{2x}+C_2$　　9． $2\sqrt{2}\pi$

10． $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$　　11． $\underline{-2}$　　12． $\underline{e^{\sqrt{2}}-1}$

13． $\underline{C_1e^{-2x}+C_2e^{5x}}$　　14． $\underline{\dfrac{\pi}{5}}$　　15． $\underline{\int_0^1 dy\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx}$

二、选择题：

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1． C | 2． C | 3. D | 4. D | 5. A |
| 6. A | 7． B | B. D | 9. C | 10. D |
| 11. C | 12. A | 13. B | 14. C | 15. D |

三．计算题

1. 解： $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos(x-y)(-1)\cdot e^{(x+y)} + \sin(x-y)\cdot e^{(x+y)}$

$$= e^{(x+y)}(\sin(x-y)-\cos(x-y))$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = e^{(x+y)}(\sin(x-y)-\cos(x-y)) + e^{(x+y)}(\sin(x-y)+\cos(x-y))$$

$$= 2e^{(x+y)}\sin(x-y)$$

2. 解： $\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 2} e^{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_{\substack{1\le r\le\sqrt{2}\\ 0\le\theta\le 2\pi}} e^{r^2}rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} re^{r^2}dr$

$$= \int_0^{2\pi}[\frac{1}{2}e^{r^2}]_1^{\sqrt{2}}d\vartheta = 2\pi\cdot\frac{1}{2}(e^2-e) = \pi\cdot e\cdot(e-1)$$

3． 解：因为 $L:3x^2+4y^2=12$ 的周长为 $a$

$$\oint_L 2xy+3x^2+4y^2ds = \oint_L 2xyds + \oint_L 3x^2+4y^2ds = 0+\oint_L 12ds = 12a$$

4． 解： $L: x = y^2$ 其中 $y$从 -1到1

$$\int_L xydx = \int_{-1}^{1} y^2 \cdot y \cdot 2ydy \quad = \int_{-1}^{1} 2y^5 dy \ = [\frac{2}{5}y^5]_{-1}^{1} = \frac{4}{5}$$

5. 解：取 $F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(x+y+z-12)$

那么，有 $F_x = yz + \lambda = 0$

$$F_y = xz + \lambda = 0$$

$$F_z = xy + \lambda = 0$$

$$F_\lambda = x + y + z - 12 = 0$$

得唯一的驻点 $(4,4,4)$.

由该问题的实际意义，得三个正数之积的最大值是 $w(4,4,4) = 64$

6. 解： $P(x,y) = 2xy - y^4 + 3,\qquad Q(x,y) = x^2 - 4xy^3$

由于 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x = \frac{\partial P}{\partial y}$，所以，曲线积分的值与路径无关

取 $L: x = 2t; y = 2t.$其中$t$从0到1　该积分等于：

$$\int_0^1 \{[2(2t)(2t) - (2t)^4 + 3] \cdot 2 + [(2t)^2 - 4(2t)(2t)^3] \cdot 2\} dt$$

$$= \int_0^1 (6 + 24t^2 - 160t^4) dt \quad = [6t + 8t^3 - 32t^5]_0^1 = -18$$

7. 解：（1） $a_n = n+1 \qquad \rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+2}{n+1} \right| = 1$

所以　收敛半径　$R = \frac{1}{\rho} = 1;$

（2）因为 当

当$x = 1$时，原来的幂级数化为 $\sum_{n=0}^{\infty} n+1,$注意，

一般项$u_n = n+1$不趋于0，所以该级数发散。

当$x = -1$时，原来的幂级数化为 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n+1,$注意，

一般项$u_n = (-1)^n n+1$不趋于0，所以该级数发散。

所以　收敛域　$(-1,1)$.

8. 解：通解为

$$y = e^{-\int \cot x dx}\left[\int 5e^{\int \cot x dx} dx + C\right] = \frac{1}{\sin x}[-5\cos x + C]$$

即 $y\sin x + 5\cos x = C$

把初始条件代入，得 $C = -4$ ，故所求特解为 $y\sin x + 5\cos x + 4 = 0$

9．解一：过已知点且与平面 $2x - 3y + 2z = 0$ 平行的平面为

$$2(x+2) - 3(y-3) + 2(z-1) = 0, \quad 即 \quad 2x - 3y + 2z + 11 = 0$$

过已知点且与平面 $x - 2z = 0$ 平行的平面为

$(x+2) - 2(z-1) = 0$，即 $x - 2z + 4 = 0$

故 所求直线的一般式方程为 $\begin{cases} 2x - 3y + 2z + 11 = 0 \\ x - 2z + 4 = 0 \end{cases}$

解二：取所求直线的方向向量为

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3(2,2,1)$$

故 所求直线的对称式方程为 $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{1}$

10．解： 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} + y\cos x$ ， $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x^y \ln x + \sin x$

所以 $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = (yx^{y-1} + y\cos x)dx + (x^y \ln x + \sin x)dy$

$$dz\big|_{(1,2)} = (2 + 2\cos 1)dx + \sin 1 dy$$

11．解：两曲线的交点为 $(0,0)$, $(1/2, 1/4)$ ，积分区域为 $D: \begin{cases} x^2 \le y \le x - x^2, \\ 0 \le x \le 1/2 \end{cases}$

$$\iint_D xy d\sigma = \int_0^{\frac{1}{2}} x dx \int_{x^2}^{x-x^2} y dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x[(x-x^2)^2 - x^4]dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(x^3 - 2x^4)dx = \frac{1}{640}$$

12．解：设 $P = x^2 + 2xy^3$, $Q = 3x^2y^2 - 2y$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$，且为整式函数，所以曲线积分在整个 $xoy$ 面内与路径无

关

选择路径$O(0,0)\to A(1,0)\to B(1,2)$，得

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)}(x^2+2xy^3)dx+(3x^2y^2-2y)dy$$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_0^2(3y^2-2y)dy \quad =\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+(y^3-y^2)\Big|_0^2=\frac{13}{3}$$

13．解：由$\lim\limits_{n\to\infty} n\left|(-1)^n\frac{\ln n}{n}\right|=\infty$得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$发散

即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$非绝对收敛；

又 $\frac{\ln n}{n}>\frac{\ln(n+1)}{n+1}$， 且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$

根据莱布尼茨判别法可得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$收敛，

从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$为条件收敛。

14．解： $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{n+1}{n}=1$

收敛区间为$-1<x-2<1$，即$1<x<3$

当$x=1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，　　当$x=3$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$收敛，

故幂级数的收敛域为 $(1,3]$ .

15、解：令$F(x,y,z)=e^{2z}-xyz-1$，则

$$F_x=-yz,F_y=-xz,F_z=2e^{2z}-xy,$$

于是$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{2e^{2z}-xy},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{2e^{2z}-xy}$

$$dz=\frac{yz}{2e^{2z}-xy}dx+\frac{xz}{2e^{2z}-xy}dy=\frac{z}{2e^{2z}-xy}(ydx+xdy)$$

16、 解：$\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}dxdy=\int_0^1\frac{\sin y}{y}dy\int_{y^2}^{y}dx$

$$=\int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy=\int_0^1 \sin y dy-\int_0^1 y\sin y dy$$

$$=-\cos y\Big|_0^1-(-y\cos y+\sin y)\Big|_0^1=1-\sin 1.$$

17、解： $\iint\limits_D x^2 dxdy=\iint\limits_D r^3\cos^2\theta drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta\int_0^3 r^3 dr$

$$=\frac{81}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{81}{4}\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{81}{16}\pi$$

18、解：通解 $y=e^{\int -\frac{1}{x}dx}\left[C+\int\frac{\cos x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right]=\frac{1}{x}\left(C+\int\cos x dx\right)=\frac{1}{x}(C+\sin x)$

代入初始条件 $y(\pi)=\pi$ 得 $C=\pi$，所以所求特解为 $y=\frac{1}{x}(\pi+\sin x)$

19、 解：设 $u_n=\frac{\cos n\alpha}{(\ln 10)^n}$， $|u_n|=\left|\frac{\cos n\alpha}{(\ln 10)^n}\right|\le\frac{1}{(\ln 10)^n}$，

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln 10)^n}$ 是收敛的等比级数，

所以由比较审敛法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n\alpha}{(\ln 10)^n}\right|$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{(\ln 10)^n}$ 绝对收敛.

20、解：设 $P=e^x\cos y, Q=-e^x\sin y$， 则 $\frac{\partial P}{\partial y}=-e^x\sin y=\frac{\partial Q}{\partial x}$，

所以曲线积分在整个 $xoy$ 面内与路径无关

选择路径 $O(0,0)\to A(\frac{\pi}{2},0)\to B(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$， 得

$$\int_L e^x(\cos y dx-\sin y dy)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\pi}{2}}(-\sin y)dy=\mathbf{-1}$$

21、解：所给直线方向向量 $\vec{s}=(3,2,-1)$，所给平面法向量 $\vec{n_1}=(1,2,-3)$，

$$\vec{s}\times\vec{n_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=(-4,8,4),$$

由条件，所求平面法向量 $\vec{n}$ 可取为 $(1,-2,-1)$，
所以所求平面方程为： $(x-2)-2(y-1)-(z-1)=0$，
即 $x-2y-z+1=0$.

## 四、应用题

1. 解：由于 $\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=4x^3-y;\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=4y^3-x.\end{aligned}$ 令 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 。

得驻点 $(0,\ 0);(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2});(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2})$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2.$$

在 $(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2})$ 处，$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})}=3$ $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})}=-1$ $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})}=3$

$$\Delta=AC-B^2=8>0,\text{又}A>0$$

所以，$(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$ 是极小值点，极小值是：$-\frac{1}{8}$

在 $(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2})$ 处，$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2})}=3$ $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2})}=-1$ $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2})}=3$

$$\Delta=AC-B^2=8>0,\text{又}A>0$$

所以，$(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2})$ 是极小值点，极小值是：$-\frac{1}{8}$

在 $(0,\ 0)$ 处，$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,\ 0)}=0$ $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,\ 0)}=-1$ $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0,\ 0)}=0$

$$\Delta=AC-B^2=8>0,\text{又}A>0$$

所以，$(0,\ 0)$ 不是极小值点。

2. 解：面积 $S=\frac{1}{2}\int_{L^+}xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3\theta\cdot 3a\sin^2\theta(\cos\theta)-a\sin^3\theta 3a\cos^2\theta(-\sin\theta)]d\theta$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta os^2\theta d\theta\quad=\frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta=\frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)d\theta\quad=\frac{3a^2}{8}\pi.$$

注：此题可以应用其它方法求解。

3. 解：两曲线的交点为 $\mathbf{(1,-1),\ (4,2)}$

$$A=\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy \quad =\left[\frac{1}{2}y^2+2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{2} \quad =\frac{9}{2}$$

解二：平面区域为 $D:\begin{cases} y^2\le x\le y+2, \\ -1\le y\le 2 \end{cases}$

$$A=\iint_D dxdy=\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}dx=\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy=\left[\frac{1}{2}y^2+2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{2}=\frac{1}{2}$$

4. 解：设直角三角形的两条直角边分别为 $x, y$，则有 $x^2+y^2-a^2=0$

直角三角形的周长为 $l(x, y)=x+y+a$

设 $F=x+y+a+\lambda(x^2+y^2-a^2)$

令 $\begin{cases} F_x=1+2\lambda x=0, \\ F_y=1+2\lambda y=0, \\ F_\lambda=x^2+y^2-a^2=0 \end{cases}$ 解得 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

5．解一：由对称性，所求体积为以坐标面 $xoy$ 上的圆 $D$：$x^2+y^2\le 1$ 为底，以球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 为顶的曲顶柱体体积的两倍，即

$$V=2\iint_D\sqrt{2-x^2-y^2}d\sigma \quad =2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{2-r^2}rdr$$

$$=4\pi(-\frac{1}{3})(2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \quad =\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi$$

解二：可按旋转体体积计算，所求体积为

$$V=2\left[\pi+\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-x^2)dx\right] \quad =\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi$$

6、解：先 $x$ 为积分变量，它的变化区间为 $[-2,1]$，

所以面积 $A=\int_{-2}^{1}\left[\left(2-x^2\right)-x\right]dx \quad =\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$

7、解：设球的内接长方体在第一卦限内的顶点坐标为 $(x,y,z)$，则此长方体的长宽高分别为 $2x,2y,2z$，体积为 $V=8xyz$，

令 $L(x,y,z)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$，

由$\begin{cases} L_x = 8yz + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 8xz + 2\lambda y = 0 \\ L_z = 8xy + 2\lambda z = 0 \end{cases}$，得 $x = y = z = \dfrac{R}{\sqrt{3}}, \lambda = -\dfrac{4R}{\sqrt{3}}$，

$(\dfrac{R}{\sqrt{3}}, \dfrac{R}{\sqrt{3}}, \dfrac{R}{\sqrt{3}})$ 为惟一可能的极值点，而内接于球且具有最大体积的长方体必定存在，所以当长方体的长宽高都为$\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$时，体积达到最大，为$\dfrac{8\sqrt{3}}{9}R^3$.

## 五．证明题

证明：部分和 $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(u_k + u_{k+1}) = u_1 + (-1)^{n+1}u_{n+1}$，

由于$\lim_{n\to\infty} nu_n = 1$，所以$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，

因此$\lim_{n\to\infty} s_n = u_1$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(u_n + u_{n+1})$ 收敛.