

练习卷

一. 填空题:

1. 已知 $\overleftarrow{a} \cdot \overleftarrow{b} = \sqrt{2}$ 且 $\left| \overleftarrow{a} \times \overleftarrow{b} \right| = 2$ 那么 $\left| \overleftarrow{a} \right|^2 \cdot \left| \overleftarrow{b} \right|^2 =$ _____
2. 二阶常系数齐次线性常微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0$ 的通解是 _____
3. 由 xOy 平面区域 D 为底, 任意连续曲面 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积为 _____。
4. 二重积分 $\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x + y) dx dy$ 的值等于 _____。
5. 对弧长的曲线积分 $\oint_{|x| + |y| = 1} (|x| + |y|) ds$ 的值等于 _____。
6. 函数 $z = x \ln(xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$ _____。
7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{1-xy}-1} =$ _____。
8. 微分方程 $y'' - 2y' = 0$ 的通解是 _____。
9. 设 Γ 为螺旋线 $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ 上相应于 t 从 0 到 2π 的一段弧, 则 $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) ds =$ _____。
10. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是 _____。
11. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{2 - e^{x^2 y^2}} - 1}$ 的值为 _____。
12. 设 L 为直线 $y = x$ 上从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段, 则 $\int_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$ _____。
13. 微分方程 $y'' - 3y' - 10y = 0$ 的通解为 _____。
14. $y = x^2, x = 1, y = 0$ 所围图形绕 x 轴旋转生成的旋转体的体积为 _____。
15. 交换二次积分 $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ 的积分次序后, 变为 _____

二. 选择题:

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 的值等于 ()

- (A) 0; (B) 1; (C) $\ln 2$; (D) $-\ln 2$.

2. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=2$ 处发散。

那么, 该幂级数的收敛域是 ()

- (A) $(0, 2)$; (B) $(0, 2]$; (C) $[0, 2)$; (D) $[0, 2]$.

3. 已知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, 那么, 根据莱布尼兹判别法, 该级数 ()

- (A) 绝对收敛; (B) 发散; (C) 无法判定; (D) 条件收敛.

4. 一阶变量可分离的常微分方程 $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ 满足 $y(0) = -1$ 的特解为 ()

- (A) $e^{x+y} = 1$; (B) $e^x + e^y = 1$;
(C) $e^x + e^{-y} + e + 1 = 0$; (D) $e^x + e^{-y} - e - 1 = 0$.

5. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 13$ 在点 $P_0(1, 2, 3)$ 处的切平面和法线方程分别为 ()

(A) $x + 2y + 3z = 14$ 和 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$;

(B) $2x + y + 3z = 14$ 和 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$;

(C) $x + 2y + 3z = 28$ 和 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$;

(D) $3x + 2y + z = 14$ 和 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

6. 经过点 $A(1, 2, 3)$, 法向量为 $\vec{n} = (3, 2, 1)$ 的平面方程是

- (A) $3(x-1) + 2(y-2) + (z-3) = 0$; (B) $(x-3) + 2(y-2) + 3(z-1) = 0$;

$$(C) \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}; \quad (D) \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

7. 将曲线 $\begin{cases} y = \sqrt{\sin x}, \\ z = 0 \end{cases} (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 绕着 x 轴旋转一周所形成的旋转曲面的方程为

$$(A) y^2 = \sin x; \quad (B) y^2 + z^2 = \sin x; \quad (C) y^2 + z^2 = \sin(x^2); \quad (D) y = \sin(\pm\sqrt{x^2 + z^2}).$$

8. 设 $I_1 = \iint_D \sin(x+y) dx dy$, $I_2 = \iint_D (x+y) dx dy$, $I_3 = \iint_D \ln(x+y) dx dy$, 其中 D 由

$x=0$, $y=0$, $x+y=\frac{1}{2}$ 和 $x+y=1$ 所围成, 则 I_1, I_2, I_3 的大小顺序为

$$(A) I_1 \leq I_2 \leq I_3; \quad (B) I_2 \leq I_3 \leq I_1; \quad (C) I_3 \leq I_2 \leq I_1; \quad (D) I_3 \leq I_1 \leq I_2.$$

9. 设平面闭区域 D 的正向边界闭曲线为 L (分段光滑), 根据格林公式, 下列各式中错误的是

$$(A) -\iint_D 2e^y dx dy = \oint_L e^y dx - xe^y dy; \quad (B) \iint_D 2e^y dx dy = \oint_L e^y dx - xe^y dy;$$

$$(C) \iint_D \cos y dx dy = \oint_L \cos y dx + \sin y dy; \quad (D) \iint_D \sin y dx dy = \oint_L \cos y dx + \sin y dy.$$

10. 对于级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 (2) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 当 $u_n \leq v_n$ 时, 可得如下结论

(A) 如果级数(1)收敛, 那么级数(2)也收敛; (B) 如果级数(2)收敛, 那么级数(1)也收敛;
(C) 如果级数(1)发散, 那么级数(2)也发散; (D) 以上说法都不对.

11. 抛物线 $\begin{cases} z = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3} \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的旋转曲面为 ().

$$(A) x^2 + y^2 + 1 = -3z; \quad (B) x^2 + y^2 - 1 = -3z;$$

$$(C) x^2 + y^2 + 1 = 3z; \quad (D) x^2 + y^2 - 1 = 3z.$$

12. 微分方程 $2y'' + y' = 3x^2 + 1$ 的特解 y^* 可设为 ().

$$(A) x(Ax^2 + Bx + C); \quad (B) x(Ax^2 + B);$$

$$(C) Ax^2 + Bx + C; \quad (D) Ax^2 + B.$$

13. 直线 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-4}$ 与平面 $x+y+z=1$ 的关系是 ().

(A) 平行; (B) 直线在平面上; (C) 垂直; (D) 相交但不垂直.

14. $\oint_L (x-2y)dx + (4x+3y)dy = -9$, 其中 L 是 xOy 平面内沿顺时针方向绕行的简单闭曲线, 则 L 所围成的平面闭区域 D 的面积等于 ().

- (A) 1; (B) 2; (C) $\frac{3}{2}$; (D) $\frac{1}{2}$.

15. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2} (x-1)^n$ 的收敛域为().

- (A) $(0,2)$; (B) $(0,2]$; (C) $[0,2)$; (D) $[0,2]$.

三. 计算题:

1. 已知 $z = e^{(x+y)} \sin(x-y)$, 求 (1) $\frac{\partial z}{\partial y}$; (2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

2. 计算二重积分 $\iint_{1 \leq x^2+y^2 \leq 2} e^{x^2+y^2} dx dy$

3. 计算对弧长的曲线积分 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds$, 其中 L 为椭圆曲线:

$3x^2+4y^2=12$, 其周长为常数 a .

4. 计算对坐标的曲线积分 $\int_L xy dx$, 其中 L 是沿曲线 $x=y^2$ 从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的有向弧段。

5. 已知三个正数 x, y, z 之和等于 12, 求三个正数之积 $w = xyz$ 的最大值。

6. 计算曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(2,2)} (2xy-y^4+3)dx + (x^2-4xy^3)dy$ 的值。

7. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots$

求 (1) 收敛半径 R ; (2) 收敛域。

8. 求微分方程满足所给初始条件的特解 $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5, y \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -4$.

9. 求过点 $(-2,3,1)$ 且与直线 $\begin{cases} 2x-3y+2z=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$ 平行的直线方程.

10. 求函数 $z = x^y + y \sin x$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分.

11. 计算 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 由两条抛物线 $y = x - x^2, y = x^2$ 所围成的闭区域.
12. 证明曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,2)} (x^2 + 2xy^3)dx + (3x^2y^2 - 2y)dy$ 在整个 xoy 面内与路径无关, 并计算积分值.
13. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 是否收敛. 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?
14. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} (x-2)^n$ 的收敛半径及收敛域.
15. 由方程 $e^{2z} - xyz = 1$ 所确定的隐函数为 $z = f(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, dz$
16. 计算 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$, 其中 D 是由 $y = x, x = y^2$ 所围成的闭区域.
17. 计算 $\iint_D x^2 dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$.
18. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x}$ 满足初始条件 $y(\pi) = \pi$ 的特解.
19. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{(\ln 10)^n}$ 是否收敛, 若收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?
20. L : 从点 $(0,0)$ 到点 $A(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的任一有向曲线, 证明曲线积分 $\int_L e^x (\cos y dx - \sin y dy)$ 在整个 xoy 面内与路径无关, 并计算积分值.
21. 求过点 $(2,1,1)$, 平行于直线 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ 且垂直于平面 $x + 2y - 3z + 5 = 0$ 的平面方程.

四、应用题

1. 求函数 $z = x^4 + y^4 - xy$ 的极值.
2. 求由曲线 (星形线) $\begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}$, 其中 $a > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$, 所围平面图形的面积.
3. 计算由曲线 $y^2 = x$ 和直线 $y = x - 2$ 所围成的平面图形的面积.
4. 从斜边长为 a 的一切直角三角形中, 求周长最大的直角三角形两直角边的长.

5. 计算球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 所截得的(含在圆柱面内的部分)立体的体积 V .
6. 计算由抛物线 $y = 2 - x^2$ 与直线 $y = x$ 所围成的平面图形的面积.
7. 求内接于球 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 且具有最大体积的长方体, 并求出相应的体积.

五. 证明题

1. 设数列 u_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (u_n + u_{n+1})$ 收敛.