# Review

- 一阶ODE的初等解法
- 一阶线性ODE $\dfrac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$

$$y(x) = e^{\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int -p(x)dx}dx + C\right).$$

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left(y(x_0) + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)dt}ds\right).$$

(1)常数变易法　　(2)积分因子法

- Bernoulli方程、Riccati方程

# § 3. 线性常微分方程解的结构

## 1.线性ODE解的性质

Thm1.(叠加原理) 若$x_1(t)$和$x_2(t)$是

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (1)$$

的解, 则$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$也是(1)的解. 若 $x_1(t)$和$x_2(t)$是

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \qquad (2)$$

的解, 则$x_1(t)-x_2(t)$是(1)的解.□

Remark: 类比线性代数中线性方程组的理论.

Remark: 由解的叠加原理, 齐次线性ODE(1)的解集合对线性运算封闭,是一个线性空间. 另外, 若已知非齐次线性ODE(2)的一个特解$\varphi_0(t)$,则(2)的通解为

$$x(t) = \varphi(t) + \varphi_0(t),$$

其中$\varphi(t)$是(2)所对应的齐次方程(1)的通解.

换言之, 要求解(2), 只要找出它的一个特解,并求出对应的齐次常微分方程(1)的通解.

Question: 如何求$n$次齐次线性ODE

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (1)$$

的通解? (1)的解集合是一个线性空间,这个线性空间的维数是多少? 如何求出空间的一组基?

Question: 如何求$n$次非齐次线性ODE

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \qquad (2)$$

的一个特解?

先解决第一个问题, 为此, 需要引入函数组线性相关与线性无关的概念.

## 2.函数组的线性相关与线性无关

Def. 设$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$是定义在区间$I$上的函数，若存在不全为0的常数$c_1,c_2,\cdots,c_m$，使得

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_m\varphi_m(t)\equiv 0,\ \forall t\in I,$$

则称$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$在区间$I$上线性相关，否则称$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$在区间$I$上线性无关.

例：设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R}$两两互不相等，则$e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_m t}$在任意区间上线性无关.(常用结论!)

证明:任取区间$I$,设有常数$c_1, c_2, \cdots, c_m, s.t.$

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_m e^{\lambda_m t} \equiv 0, \qquad \forall t \in I.$$

上式两边对$t$求导, 则$c_1, c_2, \cdots, c_m$满足方程组

$$\begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_m e^{\lambda_m t} \equiv 0, \\ \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + \lambda_m c_m e^{\lambda_m t} \equiv 0, \\ \quad \vdots \\ \lambda_1^{m-1} c_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^{m-1} c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + \lambda_m^{m-1} c_m e^{\lambda_m t} \equiv 0. \end{cases}$$

此方程组的系数矩阵行列式为

$$
\det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_m t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_m e^{\lambda_m t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{m-1} e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_m^{m-1} e^{\lambda_m t} \end{pmatrix}
$$

$$
= e^{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k t} \prod_{1\le i<j\le m} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0, \qquad \forall t \in I.
$$

因此方程组只有零解,即$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0.$

故$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_m t}$线性无关.□.

Remark: $\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{R}$, 则

1) $1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n$ 线性无关;

2) $1, e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \cdots, x^n e^{\lambda x}$ 线性无关;

3) $1, \sin\alpha x, \cos\alpha x, \cdots, \sin n\alpha x, \cos n\alpha x$ 线性无关;

4) $1, e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,$
$\cdots, x^n e^{\alpha x}\sin\beta x, x^n e^{\alpha x}\cos\beta x$ 线性无关.

下面给出判断函数组 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$ 在区间 $I$ 上线性相关的法则.

Def. 定义函数组$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m\in C^{m-1}(I)$在区间$I$上的Wronsky行列式为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{W}(t) &= W[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m](t)\\
&= \det\begin{pmatrix}
\varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_m\\
\varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_m'\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\varphi_1^{(m-1)} & \varphi_2^{(m-1)} & \cdots & \varphi_m^{(m-1)}
\end{pmatrix}(t).
\end{aligned}
$$

Thm2. 函数组$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m\in C^{m-1}(I)$在区间$I$上线性相关的必要条件是$\mathrm{W}(t)=\mathrm{W}[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m](t)\equiv 0.$

Proof:$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$在区间$I$上线性相关,则存在不全为0的常数$c_1,c_2,\cdots,c_m$,使得

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_m\varphi_m(t)\equiv 0,\quad \forall t\in I.$$

上式两边对$t$求导,则$c_1,c_2,\cdots,c_m$是方程组

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_m\varphi_m(t)\equiv 0, \\ c_1\varphi_1'(t)+c_2\varphi_2'(t)+\cdots+c_m\varphi_m'(t)\equiv 0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ c_1\varphi_1^{(m-1)}(t)+c_2\varphi_2^{(m-1)}(t)+\cdots+c_m\varphi_m^{(m-1)}(t)\equiv 0. \end{cases}$$

的非零解.于是, 方程组的系数矩阵行列式

$$W(t)=W[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m](t)\equiv 0.\square$$

Remark: 一般情况下,定理的逆命题不成立.原因在于, 尽管由系数矩阵行列式$W(t)=0$可以推出非零解$c_1,c_2,\cdots,c_m$的存在性, 但$c_1,c_2,\cdots,c_m$是$t$的函数,不一定是一组不依赖于$t$的不全为零的常数.例如

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ t^2, & t>0,\end{cases}\qquad \psi(t)=\begin{cases}t^2, & t\le 0,\\ 0, & t>0.\end{cases}$$

则Wronsky行列式$W[\varphi,\psi](t)\equiv 0,\forall t\in\mathbb{R}$.而$\varphi(t),\psi(t)$在$\mathbb{R}$上线性无关. 事实上, 设

$$c_1\varphi(t)+c_2\psi(t)\equiv 0,\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

分别令$t>0$和$t\le 0$,得$c_1=c_2=0$.

Remark: 当$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n \in C^n(I)$为$n$次齐次线性ODE的$n$个解时, Thm2的逆命题也成立. 这时,解的存在唯一性定理起了重要作用.

## 3.线性常微分方程解的结构

Thm3. 设函数$a_k(t)\in C(I)(k=1,2,\cdots,n)$, $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n \in C^n(I)$为$n$次齐次线性ODE

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=0 \quad (1)$$

的$n$个解,则以下命题等价:

(1) $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$在区间$I$上线性相关.

(2) $W(t)=W[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t)\equiv 0, \forall t\in I$.

(3) 存在$t_0\in I$,使得$W(t_0)=0$.

Proof:(1) $\Rightarrow$ (2)即Thm2,(2) $\Rightarrow$ (3)显然.下证(3) $\Rightarrow$ (1).

因$W(t_0)=0$,存在不全为0的常数$c_1, c_2, \cdots, c_n$, s.t.

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \cdots & \varphi_n(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \cdots & \varphi_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{n-1}(t_0) & \varphi_2^{n-1}(t_0) & \cdots & \varphi_n^{n-1}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0.$$

令

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t).$$

由解的叠加原理,$x(t)$为(1)的解.上面的方程组可写成

$$x(t_0) = x'(t_0) = \cdots = x^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

由解的存在唯一性定理, $x(t) \equiv 0$.

综上, 存在不全为0的常数$c_1, c_2, \cdots, c_n$, 使得

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)\equiv 0.$$

故$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$线性相关.□

Remark: $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \in C^n(I)$为(1)的$n$个解, $t_0 \in I$.则

(1) $\quad \mathrm{W}[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n](t_0)=0$

$\Leftrightarrow \mathrm{W}[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n](t)=0, \forall t \in I.$

$\Leftrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$在$I$上线性相关.

(2) $\quad \mathrm{W}[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n](t_0)\neq 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{W}[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n](t)\neq 0, \forall t \in I.$

$\Leftrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$在$I$上线性无关.□

至此,不难得出$n$次齐次线性ODE解空间的结构:

Thm4. $n$次齐次线性常微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0\ (t\in I),\qquad (1)$$

的所有解构成的集合是连续函数空间$C(I)$的一个$n$维线性子空间. 即存在(1)的$n$个线性无关的解$\varphi_1$, $\varphi_2,\cdots,\varphi_n$, 使得 $x(t)$为(1)的解当且仅当

$$x(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t),$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$为常数.

Proof:取$\mathbb{R}^n$中自然基$e_1,e_2,\cdots,e_n$.记$\varphi_k\,(k=1,2,\cdots,n)$为(1)的满足以下初值条件的解:

$$(\varphi_k(t_0), \varphi_k'(t_0), \cdots, \varphi_k^{(n-1)}(t_0)) = e_k.$$

于是$W[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n](t_0) = \det I_n = 1 \neq 0$,由$Thm3$知 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$为(1)在区间$I$上的$n$个线性无关的解.

一方面, 由解的叠加原理, 若

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t),$$

则$x(t)$为(1)的解.另一方面,任取(1)的一个解$x(t)$,设

$$(x(t_0), x'(t_0), \cdots, x^{(n-1)}(t_0)) = (d_1, d_2, \cdots, d_n).$$

令 $$y(t) = d_1\varphi_1(t) + d_2\varphi_2(t) + \cdots + d_n\varphi_n(t).$$

则$y(t)$也是方程(1)的满足相同初值条件的解.由解的存在唯一性定理得

$$x(t) = y(t) = d_1\varphi_1(t) + d_2\varphi_2(t) + \cdots + d_n\varphi_n(t).\square$$

Corollary. 设$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$为

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (1)$$

的$n$个线性无关的解, $\varphi_0(t)$为

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \qquad (2)$$

的一个特解, 则(2)的通解为

$$x(t)=\varphi_0(t)+\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(t),$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$为任意常数.

Remark: $n$阶非齐次线性ODE(2)的解集合不再是一个线性空间. 这是因为$x(t)\equiv 0$不是解. 由上面的推论知,(2)有$n+1$个线性无关的解:

$$\varphi_0(t)\text{及}\varphi_0(t)+\varphi_k(t)(k=1,2,\cdots,n).$$

反之,任给(2)的$n+1$个线性无关的解$\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$,(2)的通解可以表示为

$$x(t)=\varphi_0(t)+\sum_{k=1}^{n}c_k(\varphi_k(t)-\varphi_0(t)),$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$为任意常数.□

例:求非齐次方程$x'' + \omega^2 x = a$的通解及满足初值条件$x(0)=1, x'(0)=0$的特解.

解:不难验证方程有特解$x = a/\omega^2$，而对应的齐次方程$x'' + \omega^2 x = 0$有两个线性无关的解$\sin\omega t, \cos\omega t$.

于是,非齐次方程的通解为:

$$x(t) = a/\omega^2 + c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t.$$

由$x(0)=1, x'(0)=0$得, $a/\omega^2 + c_2 = 1, c_1\omega = 0$.因此, $c_2 = 1 - a/\omega^2, c_1 = 0$, 满足初值条件$x(0)=1, x'(0)=0$的特解为

$$x(t) = a/\omega^2 + (1 - a/\omega^2)\cos\omega t. \square$$

Remark: 推论中(2)的特解$x_0(t)$可取为

$$x_0(t)=\sum_{k=1}^{n}\left[\varphi_k(t)\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{W_k(s)}{W(s)}f(s)ds\right],$$

其中, $W(s)=W[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](s)$为$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$的Wronsky行列式, 而$W_k(s)$是$W(s)$的第$n$行第$k$列元素的代数余子式(这一结论将在后面"线性常微分方程组"一节中给出证明).由此,(2)的通解形如

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\varphi_k(t),$$

其中

$$c_k(t)=\int\frac{W_k(s)}{W(s)}f(s)ds,(k=1,2,\cdots n).$$

这为用常数变易法求非齐次方程(2)的通解提供了理论依据.
同时也可以看出,求解线性ODE的关键是找出齐次方程的解.

## 4.二阶线性ODE的常数变易法

若已知齐次线性ODE(1)的线性无关解$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$,则(1)一定有解形如

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k(t),$$

其中$c_k (k = 1, 2, \cdots, m)$为任意常数.将常数$c_k$变易为函数$c_k(t)$,并设对应的非齐次线性ODE的通解形如

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t) \varphi_k(t),$$

然后确定$c_k(t)(k = 1, 2, \cdots, m)$,以求得(2)的通解.这种求解非齐次线性ODE的方法称为常数变易法.

# Case1.已知齐次线性ODE的两个线性无关解

设$x_1(t), x_2(t)$是齐次线性ODE

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \tag{3}$$

的两个线性无关解. 则非齐次线性ODE

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t) \tag{4}$$

的通解具有如下形式:

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t).$$

下面的任务是确定$c_1(t)$和$c_2(t)$.

$$x' = c_1'x_1 + c_2'x_2 + c_1x_1' + c_2x_2'.$$

为避免$x''$中出现$c_1''$和$c_2''$, 假设

(稍后解释合理性) $c_1'x_1 + c_2'x_2 = 0.$ (5) 无解？少解？

于是 $$x' = c_1x_1' + c_2x_2'.$$

$$x'' = c_1'x_1' + c_2'x_2' + c_1x_1'' + c_2x_2''.$$

将$x, x', x''$代入方程(4),注意到$x_1, x_2$为(3)的解,则

$$c_1'x_1' + c_2'x_2' = f(t). \tag{6}$$

联立(5),(6),解得

$$c_1'(t) = -\frac{x_2(t)f(t)}{W(t)}, \quad c_2'(t) = \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)},$$

其中$W(t) = W[x_1, x_2](t)$为Wronsky行列式.求出 $c_1, c_2$,进而可以求出非齐次线性ODE(4)的通解.

Remark: (条件(5)的合理性)　在上面的常数变易法中，假设了条件(5)后，$c_1'(t), c_2'(t)$(进而$c_1(t), c_2(t)$)仍有解. 记

$$c_1(t)=u(t)+\lambda_1, c_2(t)=v(t)+\lambda_2,$$

其中$\lambda_1,\lambda_2$为任意常数. 于是

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t) \\ &= [u(t)x_1(t)+v(t)x_2(t)]+[\lambda_1 x_1(t)+\lambda_2 x_2(t)]. \end{aligned}$$

其中$u(t)x_1(t)+v(t)x_2(t)$就是(4)的一个特解$x_0(t)$, 而$\lambda_1 x_1(t)+\lambda_2 x_2(t)$是(3)的通解. 因此常数变易法中假设条件(5)是合理的,加入该条件后求出的仍然是非齐次线性ODE(4)的通解. 事实上, 条件(5)是必要的.这一点在后面的章节将给出解释.□

例:已知$t$和$e^t$为齐次线性ODE $(t-1)x''-tx'+x=0$的两个线性无关解,求以下非齐次线性ODE的通解

$$(t-1)x''-tx'+x=(t-1)^2.$$

解:设非齐次线性ODE的通解为$x(t)=u(t)t+v(t)e^t$,

且满足 $$u'(t)t+v'(t)e^t=0. \qquad (*)$$

于是 $$x'=u(t)+v(t)e^t,\ x''=u'(t)+v'(t)e^t+v(t)e^t.$$

将$x, x', x''$代入非齐次方程,并注意$t$和$e^t$为对应的齐次方程的解,有 $$u'(t)+v'(t)e^t=t-1. \qquad (**)$$

联立$(*)(**)$得 $$u'=-1, v'=te^{-t}.$$

积分得 $$u=-t+c_1, v=-e^{-t}-te^{-t}+c_2.$$

因此非齐次方程的通解为

$$x(t)=(-t+c_1)t+(-e^{-t}-te^{-t}+c_2)e^t.\square$$

## Case2.已知齐次方程的一个非零解

已知齐次线性ODE $$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad (3)$$

的一个非零解$x_0(t)$. 设非齐次线性ODE

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t) \quad (4)$$

的通解形如 $x(t) = c(t)x_0(t)$.

将$x$及$x' = c'x_0 + cx_0', x'' = c''x_0 + 2c'x_0' + cx_0''$代入(4)得

$$x_0c'' + [2x_0' + px_0]c' + [x_0'' + px_0' + qx_0]c = f(t).$$

$$x_0c'' + [2x_0' + p(t)x_0]c' = f(t). \quad (7)$$

方程(7)中不含未知函数$c$, 令$u(t) = c'(t)$, 则(7)降阶为

$$x_0u' + [2x_0' + p(t)x_0]u = f(t). \quad (8)$$

求解此方程, 得出$u(t)$, 再利用$u(t) = c'(t)$求出$c(t)$,

从而得到(4)的通解$x(t) = c(t)x_0(t)$.

Remark: 尽管只知道2次齐次线性ODE(3)的一个非零解$x_0(t)$, 常数变易法求出的解

$$x(t)=c(t)x_0(t)$$

仍然是非齐次线性ODE(4)的通解. 要证明这一点, 只要验证这样求出来的解可以表示成如下形式

$$x(t)=\psi(t)+\lambda x_0(t)+\mu x_1(t),$$

其中,$\lambda$,$\mu$为任意常数,而$x_0(t)$, $x_1(t)$为(3)的两个线性无关解(这样一来,$\psi(t)$一定是(4)的一个特解).事实上,这里的两个任意常数$\lambda$和$\mu$来源于从方程(8)求解$u(t)=c'(t)$和进而积分求解$c(t)$. 具体证明略.□

例: 已知$x_0(t)=e^t$为方程$x''-2x'+x=0$的解. 求$x''-2x'+x=e^t/t$的通解.

解: 设通解为$x(t)=c(t)e^t$,则

$$x'=(c+c')e^t,\qquad x''=(c''+2c'+c)e^t.$$

将$x,x',x''$代入非齐次方程得$c''=1/t$. 于是

$$c(t)=t\ln|t|+\lambda_1 t+\lambda_2.$$

通解为 $$x(t)=\lambda_1 te^t+\lambda_2 e^t+te^t\ln|t|.\square$$

Question:要求二阶非齐次线性ODE的通解,是已知对应齐次线性ODE的一个非零解来得简单,还是已知对应齐次线性ODE的两个线性无关解简单?

作业：习题7.4 No.1,4,5,7