# Review

- 无穷大量与无穷小量 (同阶,等价,高阶)
- 重要结论 Thm. 当$x \to 0$时:

$$(1)\ \sin x \sim \tan x \sim x;$$

$$(2)\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2;$$

$$(3)\ \ln(1+x) \sim x;$$

$$(4)\ e^x - 1 \sim x,\ \ a^x - 1 \sim x\ln a\ (a>0);$$

$$(5)\ (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

- 求函数极限的技巧

  极限的四则运算

  极限典式

  指数-对数变换

  复合函数的极限(变量替换)

  等价因子替换

  $o(\cdot)$的运用

  挟挤原理

## §5. 函数的连续与间断

Def.(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则称$f$在点$x_0$处连续;

(2)若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$,则称$f$在点$x_0$处右连续;

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$,则称$f$在点$x_0$处左连续;

Remark. $f$在点$x_0$处连续, 即$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,s.t.$

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\quad \forall|x-x_0|<\delta.$$

Thm. $f$在点$x_0$处连续$\Leftrightarrow$ $f$在点$x_0$处左、右连续.

Def. $f$在点$x_0$处不连续, 则称$f$在点$x_0$处间断.

(1)若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 但$f$在点$x_0$处无定义或$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$, 则称$x_0$为$f$的可去间断点.

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$存在, 但$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, 则称$x_0$为$f$的跳跃间断点.可去间断点与跳跃间断点统称为第一类间断点.

(3)若$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$或$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$至少有一个不存在, 则称$x_0$为$f$的第二类间断点.

Ex. $f(x)=[x]$在每个整数点处右连续, 但不左连续, 左、右极限存在但不相等(跳跃间断点); 在其它点处连续.

Ex. $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$在任一点$x_0$处既不左连续, 又不右连续, 左、右极限均不存在(第二类间断点).

Ex. $x_0=0$是$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$可去点断点.

Ex. $x_0=0$是$\sin\dfrac{1}{x}$和$e^{1/x}$的第二类间断点.

Ex.$(a,b)$上的单调函数的间断点都是跳跃间断点.

Proof. 设$f$ $(a,b)$上单增, $x_0\in(a,b)$为$f$的间断点.由于单调函数在每一点处的左右极限都存在, 必有

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)\neq f(x_0) \quad \text{或} \quad \lim_{x\to x_0+} f(x)\neq f(x_0).$$

$f$单增,由函数极限的保序性,有

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)\le f(x_0), \qquad \lim_{x\to x_0+} f(x)\ge f(x_0).$$

因此, 必有

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) < \lim_{x\to x_0+} f(x).$$

故$x_0$为跳跃间断点.□

Ex. $\sin x, \cos x, \ln x, e^x$在其定义域中任一点$x_0$处连续.

Thm. $f, g$在点$x_0$处连续, $c \in \mathbb{R}$, 则

(1) $cf, f \pm g, f \cdot g$在点$x_0$处连续;

(2) 若$g(x_0) \neq 0$, 则$\dfrac{f}{g}$在点$x_0$处连续.

Ex. $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$在其定义域中任一点$x_0$处连续.

Thm. $g$在$t_0$处连续, $f$在$x_0 = g(t_0)$处连续, 则$f \circ g$在$t_0$处连续.

Ex. $a > 0, a \neq 1, a^x = e^{x \ln a}$在其定义域中任一点$x_0$处连续.

Ex. $a \in \mathbb{R}, x^a = e^{a \ln x}$在其定义域中任一点$x_0$处连续.

Ex. Riemann函数$R(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ 1/q & x=p/q,\ p,q\text{互质},q>0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0,\forall x_0\in\mathbb{R}$.(无理点连续, 有理点间断)

Proof. $\forall\varepsilon>0,\exists N,s.t.1/N<\varepsilon$. 在$U(x_0,1)$中仅存在有限个有理数$p/q$,满足:$p,q$互质,$0<q\le N$. 记这有限个有理数到$x_0$的最小距离为$\delta$, 则$\delta>0$,且对$U(x_0,\delta)$中任意有理数$x$,有$R(x)<1/N<\varepsilon$. 而对$U(x_0,\delta)$中任意无理数$x$,有$R(x)=0$.

故$0\le R(x)<\varepsilon,\forall x\in U(x_0,\delta)$. 从而有$\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$.□

# § 6. 闭区间上连续函数的性质

Def. 若$f$在$(a,b)$上任一点处连续, 则称$f$在$(a,b)$上连续, 记作$f \in C(a,b)$.若$f \in C(a,b)$, 且$f$在点$a$右连续, 在点$b$左连续, 则称$f$在$[a,b]$上连续, 记作$f \in C[a,b]$.

Question. 如何定义$f \in C(a,b]$和$f \in C[a,b)$?

Thm. $f \in C[a,b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$, 则$\exists \xi \in (a,b)$, $s.t.\ f(\xi)=0$.

Proof.不妨设$f(a)<0<f(b)$. 二分区间$[a,b]$,若$f(\frac{a+b}{2})\geq 0$, 记$[a_1,b_1]=[a,\frac{a+b}{2}]$;若$f((a+b)/2)<0$, 记$[a_1,b_1]=[\frac{a+b}{2},b]$.

于是 $f(a_1)<0, f(b_1)\ge 0, b_1-a_1=(b-a)/2.$

同理, 再二分区间$[a_1,b_1]$, 构造$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$, $s.t.$

$$f(a_2)<0, f(b_2)\ge 0, b_2-a_2=(b-a)/2^2.$$

继续下去, 构造$[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$, $s.t.$

$$f(a_n)<0, f(b_n)\ge 0, b_n-a_n=(b-a)/2^n.$$

由闭区间套定理, $\exists\xi\in\bigcap_{n\ge1}[a_n,b_n]\subset[a,b]$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi.$

$f\in C[a,b]$, 则 $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\xi)=\lim_{n\to\infty}f(b_n).$

而$f(a_n)<0\le f(b_n)$, 由极限的保序性得$f(\xi)=0$. 又$f(a)<0$ $<f(b)$, 因此$\xi\ne a,b$, $\xi\in(a,b)$. □

**Thm.(介值定理)** $f\in C[a,b]$, $f(a)\neq f(b)$, 则对任意介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的 $c$, $\exists \xi\in(a,b)$, s.t. $f(\xi)=c$.

**Proof.** 令 $g(x)=f(x)-c$, 则 $g\in C[a,b]$, $g(a)\cdot g(b)<0$. 由前面的定理, $\exists \xi\in(a,b)$, s.t. $g(\xi)=0$, $f(\xi)=c$. □

**Ex.** $m>0$ 为奇数, $f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$ 至少有一个实根, 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为实数.

**Proof.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^m}=1$, $\exists M>0$, s.t. $\dfrac{f(x)}{x^m}>\dfrac{1}{2}$, $\forall |x|\geq M$. 于是,

$$f(M)>\frac{1}{2}M^m>0,\quad f(-M)<\frac{1}{2}(-M)^m<0.$$

由介值定理, $\exists \xi\in(-M,M)$, s.t. $f(\xi)=0$. □

Thm. $f$在$(a,b)$上单调, $J$为$f$的值域, 则$f \in C(a,b) \Leftrightarrow J$为区间.

Proof. 不妨设$f$单增.

设$f \in C(a,b)$. 任取$y_1, y_2 \in J, y_1 < y_2$. $\exists a < x_1 < x_2 < b, s.t.$

$$y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\quad f \in C[x_1, x_2].$$

由介值定理, $\forall y_0 \in (y_1, y_2), \exists x_0 \in (x_1, x_2), s.t. f(x_0) = y_0$. $J$为区间.

设$J$为区间. $f$单增, 若$f \notin C(a,b)$, 则$\exists$跳跃间断点$x_0 \in (a,b)$.

不妨设$\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) < f(x_0)$. 当$x < x_0$时, $f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) < f(x_0)$;

当$x \ge x_0$时, $f(x) \ge f(x_0)$. 因而, $\forall y \in (\lim\limits_{x \to x_0-} f(x), f(x_0))$, 不存在$x \in (a,b), s.t. f(x) = y$. 与$J$为区间矛盾. $\square$

**Remark.** 以上定理中$(a,b)$可以取为无穷区间. 定理中$(a,b)$可替换为$[a,b],[a,b)$和$(a,b]$.

$$\text{记} < a,b > \text{为}(a,b),[a,b],[a,b)\text{或}(a,b].$$

**Thm.** $f$在$< a,b >$上连续且严格单调, 则$f$的值域为一区间$< c,d >$, 且反函数$f^{-1}$在$< c,d >$上连续.

**Proof.** 此定理可以视为上一定理的推论.$\square$

**Ex.** $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \cdots$在各自定义域中连续.

**Thm.** 基本初等函数(幂、三角、反三角、指数、对数)在各自定义域中连续.

**Thm.** 当$x \to 0$时, $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$.

**Proof.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y} = 1.$$

**Remark.**

$$\arcsin x \sim x (x\to 0) \quad \Rightarrow \quad \arcsin x = x + o(x) (x \to 0)$$

$$\arctan x \sim x (x\to 0) \quad \Rightarrow \quad \arctan x = x + o(x) (x \to 0)$$

**Thm.(有界性定理)** $f \in C[a,b]$,则$f$在$[a,b]$上有界.

**Proof.** 若$f$在$[a,b]$上无上界,则$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a,b], s.t.$

$$f(x_n) > n.$$

由列紧性定理,$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$,设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. 则

$x_0 \in [a,b]$. $f$在点$x_0$连续,则

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0).$$

$\{f(x_{n_k})\}$为收敛列, 有界, 与$f(x_{n_k}) > n_k$矛盾.□

**Thm.(最大最小值定理)** $f\in C[a,b]$,则$f$在$[a,b]$上有最大、最小值, 即$\exists\xi,\eta\in[a,b], s.t.$

$$f(\xi)=\max_{a\le x\le b}\{f(x)\},\quad f(\eta)=\min_{a\le x\le b}\{f(x)\}.$$

**Pf.** $f\in C[a,b]$, $f$在$[a,b]$上有界,从而有上确界 $M=\sup\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\}$.

由上确界定义, $\forall n\in\mathbb{N},\exists x_n\in[a,b], s.t. M-\dfrac{1}{n}\le f(x_n)\le M$.

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=M$.有界列$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi$,

$\xi\in[a,b]$. $f$在$\xi$连续,则

$$f(\xi)=\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=M=\max_{a\le x\le b}\{f(x)\}.$$

同理,$\exists\eta\in[a,b], s.t. f(\eta)=\min\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\}$.□

清華大學

Ex. $f\in C[0,1]$, $f(0)=f(1)$, 则对任意正整数$n$, $\exists\xi\in[0,1]$, $s.t.\ f(\xi)=f(\xi+1/n)$.

Proof. 令$g(x)=f(x)-f(x+1/n)$, 则$g\in C[0,1-1/n]$.

$$0=\frac{f(0)-f(1)}{n}=\frac{g(0)+g(1/n)+\cdots+g((n-1)/n)}{n}$$

$$\in[\min_{0\le x\le 1-1/n} g(x),\ \max_{0\le x\le 1-1/n} g(x)].$$

由介值定理, $\exists\xi\in[0,(n-1)/n]\subset[0,1]$, $s.t.\ g(\xi)=0$, 即

$$f(\xi)=f(\xi+1/n).\square$$

Question. 将$1/n$换成$c\in(1/2,1)$, 结论是否仍然成立? 否

$c\in(0,1/2)$? 否（不一定）

Ex. $f\in C[0,1],\ f(0)=f(1)$, 则对任意正整数$n$, $\exists\xi\in[0,1]$,

$$s.t.\ \ f(\xi)=f(\xi+1/n).$$

Proof. 令$g(x)=f(x)-f(x+1/n)$, 则$g\in C[0,1-1/n]$.

$$g(0)+g(1/n)+\cdots+g((n-1)/n)=f(0)-f(1)=0.$$

$$0=\frac{1}{n}\big(g(0)+g(1/n)+\cdots+g((n-1)/n)\big)$$

$$\in[\min_{0\le x\le 1-1/n}g(x),\ \max_{0\le x\le 1-1/n}g(x)].$$

由介值定理, $\exists\xi\in[0,(n-1)/n]\subset[0,1]$, $s.t.$

$$g(\xi)=0,\ \text{即} f(\xi)=f(\xi+1/n).\square$$

Remark. $\forall c\in(0,1),\exists\xi\in[0,1]$, $s.t.$

$$f(\xi)=f(\xi+c)\ \text{或}\ f(\xi)=f(\xi+c-1).$$

Def.(一致连续) $f$在区间$I$上有定义,若$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon, \quad \forall |u - v| < \delta, u, v \in I,$$

则称$f$在区间$I$上一致连续.

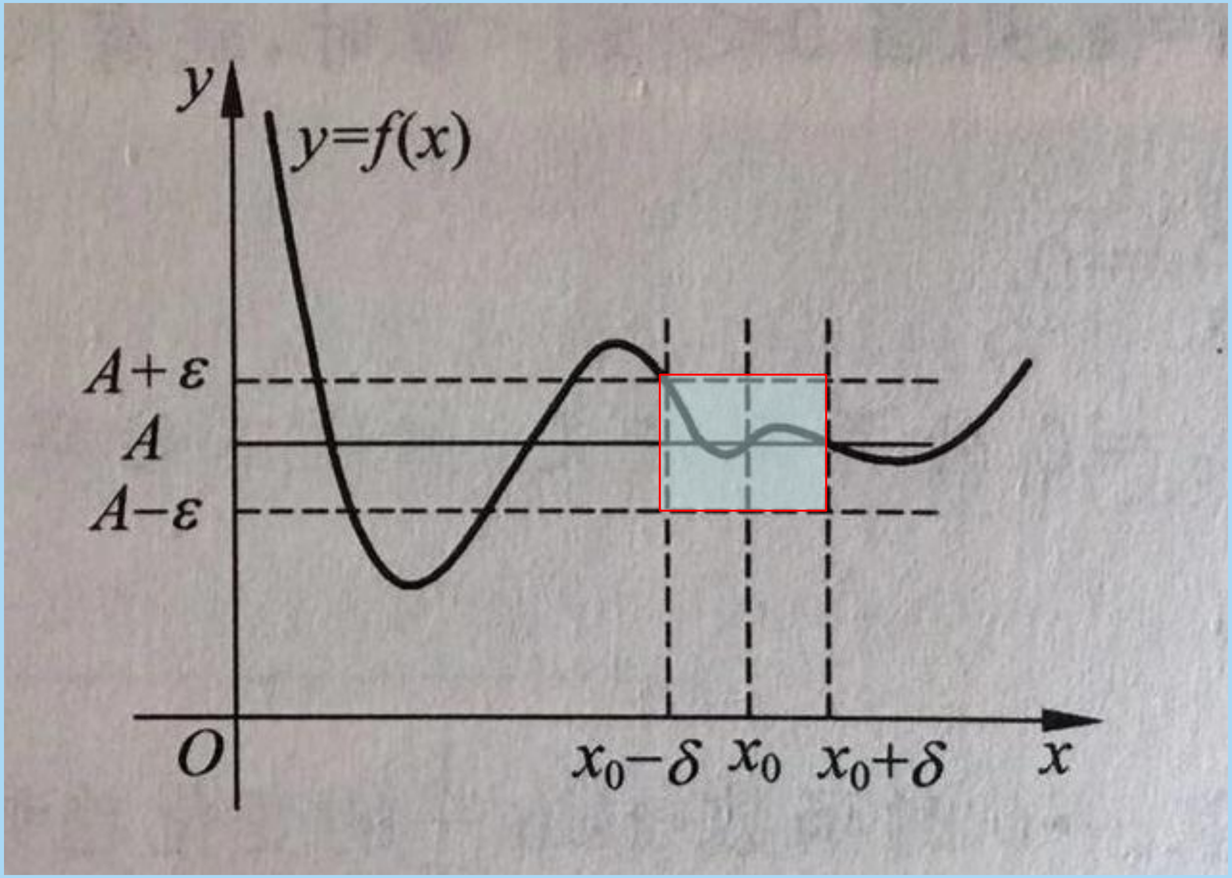
Ex. $f(x) = \sin x$在$(-\infty, +\infty)$一致连续.

Poof. $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right|$$

$$\leq 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leq |x - y|. \square$$

Remark.连续函数的"十字架"与一致连续的"十字架".



Question. 如何描述$f$在区间$I$上不一致连续?

$f$在$I$上不一致连续

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists u, v \in I, s.t. |u - v| < \delta, |f(u) - f(v)| > \varepsilon_0.$$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n, v_n \in I, s.t.$$

$$|u_n - v_n| < \frac{1}{n}, \ |f(u_n) - f(v_n)| > \varepsilon_0.$$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \exists I\text{中点列}\{u_n\}, \{v_n\}, s.t.$$

$$\lim_{n \to \infty}(u_n - v_n) = 0, \quad |f(u_n) - f(v_n)| > \varepsilon_0.$$

Ex. $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$不一致连续.

Proof.法一：$\exists\varepsilon_0=1,\forall\delta\in(0,1),\exists x=\delta, y=\delta/2, s.t.$

$$|x-y|=\delta/2<\delta,\quad \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{|x-y|}{xy}=\frac{1}{\delta}>1.$$

法二：$\exists\varepsilon_0=1, x_n=\dfrac{1}{n}, y_n=\dfrac{1}{2n}, s.t.$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0,\qquad \left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{y_n}\right|=n\geq\varepsilon_0.\square$$

Thm.(一致连续性) $f\in C[a,b]$,则$f$在$[a,b]$上一致连续.

Proof.反证法. 假设$f$在$[a,b]$上不一致连续,则$\exists\varepsilon_0>0$及$[a,b]$中点列$\{x_n\},\{y_n\}$, s.t.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0,\quad |f(x_n)-f(y_n)|>\varepsilon_0,\ \forall n.(*)$$

由列紧性定理(Bolzano-Weirstrass定理),$\{x_n\}$有收敛子列,

设$\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_j}=\xi\in[a,b]$. 而$\lim\limits_{j\to\infty}(x_{n_j}-y_{n_j})=0$,所以$\lim\limits_{j\to\infty}y_{n_j}=\xi$.

由$f$的连续性得$\lim\limits_{j\to\infty}f(x_{n_j})=\lim\limits_{j\to\infty}f(y_{n_j})=f(\xi)$,与(*)矛盾.□

Ex. $f,g\in C[a,b],\{x_n\}\subset[a,b],g(x_n)=f(x_{n+1}),\forall n\in\mathbb{N},$ 且$f(x_1)\le g(x_1)$. 证明: $\exists\xi\in[a,b],s.t.f(\xi)=g(\xi)$.

Proof. 若$\exists x_{n_0},s.t.f(x_{n_0})>g(x_{n_0})$, 令$h(x)=f(x)-g(x)$,则

$h\in C[a,b]$,且

$$h(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\le 0,$$

$$h(x_{n_0})=f(x_{n_0})-g(x_{n_0})>0,$$

由介值定理, $\exists\xi\in[a,b],s.t.h(\xi)=0$,即$f(\xi)=g(\xi)$.

若$\forall n,f(x_n)\le g(x_n)$, 由已知条件得

$$f(x_n)\le g(x_n)=f(x_{n+1})\le g(x_{n+1}),\quad \forall n.$$

$\{f(x_n)\},\{g(x_n)\}$均为单增数列. 由闭区间上连续函数的有界性定理, $\{f(x_n)\},\{g(x_n)\}$均为有界列, 从而均收敛.

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=a$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{n+1})=a$.

$\{x_n\}\subset[a,b]$为有界列,有收敛子列$x_{n_k}$, 设 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}=\xi$,

则$\xi\in[a,b]$. 由$f,g$的连续性得

$$f(\xi)=\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k})=\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$$

$$=\lim_{n\to+\infty} g(x_n)=\lim_{k\to+\infty} g(x_{n_k})=g(\xi).\square$$

作业：习题2.5 No. 4,6,7

习题2.6 No. 2,4,9,10

习题5.1 No.15

附录:

Thm.(Weirstrass第一逼近定理) $f\in C[a,b]$,则$\forall\varepsilon>0$,
存在多项式$P(x)$, $s.t.$

$$\left|f(x)-P(x)\right|<\varepsilon,\forall x\in[a,b].$$

Proof. 不失一般性,设$[a,b]=[0,1]$.

记$\mathrm{X}=C[0,1]$, $\mathrm{Y}$为$[0,1]$上多项式构成的集合,定义映射

$$\mathrm{B}_n:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$$

$$g(t)\mapsto\mathrm{B}_n(g)(x)=\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k},$$

$\mathrm{B}_n(g)$是$g\in\mathrm{X}$在映射$\mathrm{B}_n$下的像, $\mathrm{B}_n(g)(x)$是以$x$为自变量的$n$次多项式, 称为Bernstein多项式.

映射$\mathrm{B}_n$有如下性质:

(1) $\mathrm{B}_n$是线性映射,即对任意$g,h\in \mathrm{X},\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$,有

$$\mathrm{B}_n(\alpha g+\beta h)=\alpha\mathrm{B}_n(g)+\beta\mathrm{B}_n(h);$$

(2) $\mathrm{B}_n$具有单调性,即$g,h\in \mathrm{X},g\le h$,有$\mathrm{B}_n(g)\le \mathrm{B}_n(h)$;

(3) $\mathrm{B}_n(1)(x)=1,\mathrm{B}_n(t)(x)=x,\mathrm{B}_n(t^2)(x)=x^2+\dfrac{x-x^2}{n}$.事实上

$$\mathrm{B}_n(1)(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=[x+(1-x)]^n=1,$$

$$\mathrm{B}_n(t)(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=x\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$=x\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}=x[(x+(1-x)]^{n-1}=x,$$

$$\mathrm{B}_n(t^2)(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{n-1}C_{n-1}^{k-1}x^{k-2}(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}$$

$$=\frac{n-1}{n}x^2+\frac{x}{n}=x^2+\frac{x-x^2}{n}.$$

由$\mathrm{B}_n$的性质，给定$s\in[0,1]$，函数$(t-s)^2$在$\mathrm{B}_n$映射下的像为

$$\mathrm{B}_n((t-s)^2)(x)=\mathrm{B}_n(t^2)(x)-2s\mathrm{B}_n(t)(x)+s^2\mathrm{B}_n(1)(x)$$

$$=x^2+\frac{x-x^2}{n}-2sx+s^2=\frac{x-x^2}{n}+(x-s)^2.$$

现在可以利用$\mathrm{B}_n$完成定理证明了. $f\in C[0,1]$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0, s.t.$

$$|f(t)-f(s)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall|t-s|<\delta, t,s\in[0,1].$$

$f\in C[0,1]$，则$\exists M>0, s.t. |f(t)|<M, \forall t\in[0,1]$.从而

$$|f(t)-f(s)|<2M\le\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2,\ \forall|t-s|\ge\delta, t,s\in[0,1].$$

因此$\forall t, s \in [0,1]$,有

$$-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2 < f(t)-f(s) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2.$$

任意固定$s \in [0,1]$,由$\mathrm{B}_n$的性质,有

$$-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{2M}{\delta^2}\left[\frac{x-x^2}{n}+(x-s)^2\right] < \mathrm{B}_n(f)(x)-f(s)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}\left[\frac{x-x^2}{n}+(x-s)^2\right].$$

令$s = x$,得

$$\left|\mathrm{B}_n(f)(x)-f(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n\delta^2}(x-x^2) \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\delta^2}, \forall x \in [0,1].$$

任意取定$n > \dfrac{M}{\delta^2 \varepsilon}$,有

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \forall x \in [0,1]. \square$$