19-20-1 学期高数 A 期末练习卷

一．选择题

1. 当 $x\to 0$ 时 $(1-\cos x)\sin x$ 是 x^3 的（　　　）
   (A) 同阶无穷小，但不是等价无穷小　　(B)等价无穷小
   (C)高阶无穷小　　(D)低阶无穷小

2. 下列结论中，正确的是(　　　)
   (A) 极值点一定是驻点　　(B) 驻点一定是极值点
   (C) 极值点可能不可导　　(D) 驻点可能不可导

3. 设 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=(x-1)(2x+1), x\in(-\infty,+\infty)$，则在 $(\frac{1}{2},1)$ 内 $f(x)$ 单调（　　）
   (A) 增加,曲线 $y=f(x)$ 为凹的　　(B) 减少,曲线 $y=f(x)$ 为凹的
   (C) 减少,曲线 $y=f(x)$ 为凸的　　(D) 增加,曲线 $y=f(x)$ 为凸的

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x-x\sin\frac{1}{x} & x<0\\ x^2+1 & x\geq 0\end{cases}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　)
   (A)可去间断点　　(B)跳跃间断点　　(C)振荡间断点　　(D)连续点

5. 心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 的全长可用定积分表示为(　　)
   (A) $s=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$
   (B) $s=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$
   (C) $s=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$
   (D) $s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$

6. 微分方程 $y''+6y'+13y=0$ 的通解是(　　)
   (A) $y=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$　　(B) $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$
   (C) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$　　(D) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$

7. 利用定积分的几何意义，求得 $\int_1^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的值为(　　　)
   (A) π　　(B) $\frac{\pi}{4}$　　(C) $\frac{\pi}{8}$　　(D) $\frac{\pi}{16}$

8. 下列各式中，正确的是（　　）.
   (A) $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{x}=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$

(C) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{-x}=-\mathrm{e}$ (D) $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}$

9. 设 $f(x)=\ln(1-x^2)$，$g(x)=1-\cos 2x$，则当 $x\to 0$ 时，且 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）.

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小

(C) 同阶非等价无穷小 (D) 等价无穷小

10. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ 的间断点为 $x=1$、$x=2$，则（　　）.

(A) $x=1$，$x=2$ 都是第一类间断点
(B) $x=1$，$x=2$ 都是第二类间断点
(C) $x=2$ 是第一类间断点，$x=1$ 是第二类间断点
(D) $x=1$ 是第一类间断点，$x=2$ 是第二类间断点

11. 设 e^{2x} 的麦克劳林公式为 $\mathrm{e}^{2x}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o(x^n)$，则

$a_n=$（　　）.

(A) $\dfrac{2^n}{n}$ (B) $\dfrac{2^n}{n!}$ (C) $(-1)^n\dfrac{2^n}{n}$ (D) $(-1)^n\dfrac{2^n}{n!}$

12. 设 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)\neq 0$，$f''(x_0)=0$，则（　　）.
(A) x_0 不是 $f(x)$ 的极值点 (B) 点 $(x_0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
(C) x_0 是 $f(x)$ 的极值点 (D) 点 $(x_0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

13. 下列微分方程中，（　　）是线性方程.

（A） $(y')^2+\dfrac{y}{x}=3\ln x$ （B） $x^2y''+xy'+y=3x$

（C） $y'-\dfrac{2y}{x+1}=xy^2$ （D） $y'=\dfrac{x+y}{2x-y}$.

14.

15. 函数 $\boldsymbol{f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}}$（　　）.

（A）当 $\boldsymbol{x\to\infty}$ 时为无穷大 （B）当 $\boldsymbol{x\to\infty}$ 时无穷小
（C）当 $\boldsymbol{x\to\infty}$ 时极限为 $\mathbf{1}$ （D）以上结论都不对

16. 已知 $\boldsymbol{f(a)=0, f'(a)=1}$，则极限 $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}nf(a-\dfrac{1}{n})=}$（　　）.

（A） $\boldsymbol{\infty}$ （B） $\mathbf{0}$ （C） $\mathbf{1}$ （D） $\mathbf{-1}$

17. 下列等式中**不正确**的是（　　）.

(A) $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$　　　　(B) $\int df(x) = f(x)$

(C) $d\int f(x)dx = f(x)dx$　　　　(D) $\int f'(x)dx = f(x)+C$

18. 可导函数的极值点是该函数驻点的（　　）.
(A）充分条件　　　　(B）必要条件
(C）充要条件　　　　(D）无法确定

19. 微分方程 $y''-3y'+2y = xe^{2x}$ 有以下形式的特解（　　）.

(A) $y^* = b_0x+b_1$　　　　(B) $y^* = (b_0x+b_1)e^{2x}$

(C) $y^* = x(b_0x+b_1)e^{2x}$　　　　(D) $y^* = x^2(b_0x+b_1)e^{2x}$

20. 设 $f(x)=1-\cos x$，$g(x)=x^2-\sin x$，则当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　)

(A)高阶无穷小　　　　(B) 同阶无穷小，但非等价无穷小
(C)低阶无穷小　　　　(D) 等价无穷小

二．填空题

1. 定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\dfrac{1-x}{1+x}dx$ 的值为________________.

2. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x} =$__________.

3. 设 $f(u)$ 为可导函数，$y(x) = f(e^{2x}-e^{-2x})$, 则 $\mathrm{d}y =$________________.

4. 微分方程 $y''-2y'+y = 2e^x$ 的待定特解的形式为________________(设出特解形式即可,不需要求出具体的系数).

5. 由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=1, x=4, y=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为______________.

6. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 的麦克劳林展开式 $\dfrac{1}{1+x} = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+R_n(x)$ 中

$a_k =$______________$(k=1,2,\cdots,n)$.

7. 不定积分 $\int\dfrac{1}{1+\sqrt{2x}}\mathrm{d}x =$______________.

8. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续，且 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{2x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，则 $a =$______.

9. 设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h}=$____________.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}-xy=1$ 确定，则 $dy=$ ____________.

11. 已知 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)g(x)dx=$____________.

12. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x\sin^2 x+\cos^3 x)dx=$____________.

13. 曲线 $y=\ln x$ 与 $y=-1$， $y=1$ 以及 $x=0$ 所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体体积为____________.

14. 方程 $(y+1)^2\dfrac{dy}{dx}-\cos x=0$ 的通解为______________________.

15. $\lim\limits_{t\to 0}(1-2t)^{\frac{1}{t}}=$_________________.

16. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & 0\le x\le 1, \\ \dfrac{x^2+bx+2}{x-1}, & x>1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，则 $b=$____________.

17. 设 $f(x)=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$，则 $f'(0)=$________________.

18. 定积分 $\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2}+x\cos^3 x)\mathrm{d}x=$ ________________.

19. 当 p _________时，广义积分 $\int_{1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx$ 收敛.

20. 方程 $y''+2y'+y=0$ 通解为 ______________________.

21. 函数 $f(x)=x-\int_0^x\dfrac{1}{1+t}\mathrm{d}t$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的单调性是 ____________ .

三．计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{\sin x}$.

2. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^3+y^3=3xy$ 所确定,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ 处的切线方程和法线方程.

3. 求由参数方程$\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t. \end{cases}$所确定的函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

4. 求定积分$\int_1^4 \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

5. 计算反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2+4x+5}dx$.

6. 求微分方程$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$的通解.

7. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+2}{x+4})^{2x}$.

8. 求极限$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^{\sqrt{x}} (e^{t^2}-1)dt}{\sqrt{x^3}}$.

9. 求不定积分$\int x\operatorname{arccot} x\, dx$.

10. 求定积分$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$.

11. 设$\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

12. 求$\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{(1+x^2)(\arctan x)^2}$.

13. 求方程$y''-5y'+6y=xe^x$的通解.

14. 计算 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x te^{2t^2}dt}{\ln^2(1+x)}$.

15. 求不定积分$\int \ln(1+\sqrt{x})dx$.

16. 求由参数方程$\begin{cases} x=t-\arctan t \\ y=t^3+1 \end{cases}$所表示的函数$y=y(x)$的一阶导数及二阶导数.

17. 设$y=f(x)$由方程$x\cos y+e^y=1$所确定，求曲线$y=f(x)$在点$(0,0)$处的切线方程.

18. 计算不定积分$\int x\sin 3x dx$.

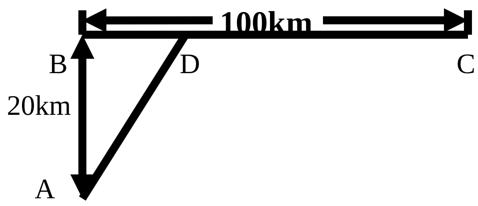
19. 计算广义积分 $\int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1} dx$.

20. 求微分方程 $xy' + 2y = \frac{\cot x}{x}$ 的通解.

四．应用题

1. 求由曲线 $y = e^x$ 下侧，该曲线过原点的切线的左侧，以及 y 轴右侧所围成的平面图形的面积.

2. 设工厂 A 到铁路线的垂直距离为 20km，垂足为 B。铁路线上距离 B 为 100km 处有一原料供应站 C，如图所示。现在要在铁路 BC 中间 D 处修建一个原料中转车站，再由车站 D 向工厂修一条公路。如果已知每公里的铁路运费与公路运费分别为 $3a, 5a$ 元每公里（其中 a 为比例系数），那么，D 应该选在何处，才能使从原料供应站 C 运货到工厂 A 所需的运费最省？



3. 求曲线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 与其在点 $(-2,1)$ 处的法线所围的平面图形的面积.

4. 已知 $f(x)$ 为连续函数，且满足 $\int_0^{2x} f(t)dt = 2x^4 - 3x^2$，求 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上的最大值与最小值.

5. 计算由曲线 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = x^2$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

6. 已知 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x = 1$ 处有极值 -2，试确定 a、b 的值，并求曲线的凹凸区间与拐点.

五．证明题

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，又 $f(0) = 0$，证明在 $(0,1)$ 内至少存在一

点ξ，使$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{1-\xi}$.

2. 设函数$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，且$g(x)>0$， 证明：在$[a,b]$上至少存在一点ξ，使得$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

3. 设 $\boldsymbol{f(x)}$ 在$\boldsymbol{[0,\frac{\pi}{2}]}$上连续，在$\boldsymbol{(0,\frac{\pi}{2})}$内可导，且 $\boldsymbol{f(0)=0}$，证明：在$\boldsymbol{(0,\frac{\pi}{2})}$内至少有一点$\boldsymbol{\xi}$，使得 $\boldsymbol{f'(\xi)\cdot\cot\xi = f(\xi)}$.