19-20-1 学期高数 A 期末练习卷参考答案

一．选择题:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
A	**C**	**B**	**D**	**A**	**B**	**B**
8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
A	**C**	**C**	**B**	**A**	**B**	
15	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
C	**D**	**B**	**A**	**C**	**A**	

二．填空题

1	**2**	**3**	**4**
0	$-\frac{f'(x_0)}{2}$	$f'(e^{2x}-e^{-2x})(2e^{2x}+2e^{-2x})dx$	$y^*=ax^2e^x$
5	**6**	**7**	**8**
$\frac{15}{2}\pi$	$(-1)^k$	$\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$	$\frac{1}{6}$
9	**10**	**11**	**12**
$4f'(1)$	$\frac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}dx$	$\frac{1}{2}f^2(x)+C$	$\frac{4}{3}$
13	**14**	**15**	**16**
$\frac{\pi}{2}(e^2-e^{-2})$	$\frac{1}{3}(y+1)^3=\sin x+C$	e^{-2}	-3
17	**18**	**19**	**20**
0	$\frac{\pi}{2}$	>1	$y=(C_1+C_2x)e^{-x}$，C_1,C_2为任意常数

21	**22**	**23**	**24**
单调增加			

三．计算题

1．解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2}{\cos x}=1.$

2．解：原式两边对 x 求导 $3x^2+3y^2\dfrac{dy}{dx}=3y+3x\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{y^2-x}，\quad 故 \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{3}{2}}=-1\quad ，$$

切线方程为 $x+y-3=0$；法线方程为 $y-x=0$.

3．解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(t-\arctan t)'}{\left[\ln(1+t^2)\right]'}=\dfrac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$$

4．解：$\int_1^4 \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx \overset{t=\sqrt{x}}{=} \int_1^2 \dfrac{\ln t^2}{t}\cdot 2tdt=4\int_1^2 \ln tdt=4(t\ln t|_1^2-\int_1^2 td\ln t)$

$=8\ln 2-4\int_1^2 dt=8\ln 2-4$.

5．解：$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+4x+5}dx=\int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{x^2+4x+5}dx+\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+4x+5}dx$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+4x+5}dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^0\frac{1}{(x+2)^2+1}dx=\lim_{t\to-\infty}\arctan(x+2)\Big|_t^0$$

$$=\arctan 2-\lim_{t\to-\infty}\arctan(t+2)=\arctan 2+\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+5}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1}{(x+2)^2+1}dx=\lim_{t\to+\infty}\arctan(x+2)\Big|_0^t$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\arctan(t+2)-\arctan 2=\frac{\pi}{2}-\arctan 2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+5}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+4x+5}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+5}dx=\pi$$

6. 解：（方法一）此为标准的一阶线性非齐次方程，由公式可知方程的通解为：

$$y=e^{-\int-\frac{2}{x+1}dx}[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{\int-\frac{2}{x+1}dx}dx+C]=(x+1)^2[\int(x+1)^{\frac{1}{2}}dx+C]$$

$$=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}+C(x+1)^2$$

（方法二）或者使用常数变易法

7. 解：$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x+4})^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x+4})^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x\ln(1-\frac{2}{x+4})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+4}}=e^{-4}$.

8. 解：$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}(e^{t^2}-1)dt}{\sqrt{x^3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^x-1)}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{3x}=\frac{1}{3}$.

9. 解：$\int x\operatorname{arccot}x\,dx=\frac{1}{2}\int\operatorname{arccot}x\,dx^2=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arccot}x+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arccot}x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\arctan x+C$.

10. 解：$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}dx\overset{x=\sin t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos2t)dt=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos2td2t)$

$=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin2t|_0^{\frac{\pi}{6}})=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4})$.

11. 解：$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+t^2}\Big/\frac{t}{1+t^2}=\frac{1}{t}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{t})=-\frac{1}{t^2}\Big/\frac{t}{1+t^2}=-\frac{1+t^2}{t^3}$.

12. 解：$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(\arctan x)^2}=\int_1^{+\infty}\frac{d\arctan x}{(\arctan x)^2}=-\frac{1}{\arctan x}\Big|_1^{+\infty}=\frac{2}{\pi}$.

13. 解：方程的特征方程为$r^2-5r+6=0$，解得特征根$r_{1,2}=2,3$

所以对应齐次方程的通解为$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$，

又$\lambda=1$不是单特征根，所以方程有形如$y^*=(Ax+B)e^x$的特解.

将y^*代入原方程，解得$A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{3}{4}$.

所以，原方程的通解为$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4})e^x$.

14. 解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x te^{2t^2}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^{2x^2}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x^2}}{2}=\frac{1}{2}$

15. 解：令 $\sqrt{x}=t$， 则 $dx=d(t^2)$

原式 $=\int \ln(1+t)\mathrm{d}(t^2)=t^2\ln(1+t)-\int\frac{t^2}{1+t}dt=t^2\ln(1+t)-\int(t-1+\frac{1}{1+t})dt$

$=t^2\ln(1+t)-\frac{1}{2}t^2+t-\ln(1+t)+C=x\ln(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2}x+\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})+C$

16. 解：$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2}{1-\frac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)$ ，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6t}{1-\frac{1}{1+t^2}}=\frac{6(1+t^2)}{t}$

17. 解：方程两边关于 x 求导，得 $\cos y-x\sin y\cdot y'+\mathrm{e}^y\cdot y'=0$

将 $x=0, y=0$ 代入，得 $y'|_{(0,0)}=-1$， 从而所求切线方程为 $y=-x$

18. 解：原式 $=-\frac{1}{3}\int xd(\cos 3x)$ $=-\frac{1}{3}(x\cos 3x-\int\cos 3xdx)$

$=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$

19. 解：$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2+1}dx=\int_1^{+\infty}\arctan x d\arctan x=\left[\frac{(\arctan x)^2}{2}\right]_1^{+\infty}$ $=\frac{3\pi^2}{32}$

20. 解：化为一阶线性方程 $y'+\frac{2}{x}y=\frac{\cot x}{x^2}$ ，$P=\frac{2}{x}$，$Q=\frac{\cot x}{x^2}$

则 $y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(\int\frac{\cot x}{x^2}e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{x^2}\left(\int\cot xdx+C\right)=\frac{1}{x^2}\left(\ln|\sin x|+C\right)$.

四．应用题

1. 解：该曲线过原点的切线方程为 $y=ex$

所围成的平面图形的面积 $S=\int_0^1(e^x-ex)dx=e^x-\frac{1}{2}ex^2\Big|_0^1=\frac{e}{2}-1$.

2. 解：设 BD 之间的距离为 xkm，则 AD 之间的距离和 CD 之间的距离分别为

$|AD|=\sqrt{x^2+20^2}, |CD|=100-x,$ 设公路运费为 a 元/公里，则铁路运费为

3/5a 元/公里，故从原料站 C 途经中转站 D 到工厂 A 的总费用为

$y=\frac{3}{5}a(100-x)+a\sqrt{x^2+20^2},(0\le x\le 400)$

$$y' = -\frac{3}{5}a + \frac{ax}{\sqrt{x^2+20^2}} = \frac{a(5x-3\sqrt{x^2+20^2})}{5\sqrt{x^2+20^2}}$$

$y'=0$，可得 $a(5x-3\sqrt{x^2+20^2})=0$，即 $x=15$ 或 $x=-15$（舍去）

$x=15$ 是唯一的驻点，故当 BD 间距离为 15km 时费用最省.

3. 解：因为 $y'=\frac{1}{2}x$，所以曲线在点 $(-2,1)$ 处的法线方程为 $y=x+3$，

曲线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 与法线 $y=x+3$ 的交点为 $(-2,1)$，$(6,9)$，

从而所围成的平面图形的面积 $S=\int_{-2}^{6}(x+3-\frac{1}{4}x^2)dx=\frac{64}{3}$.

4. 解： 等式两边求导，得 $2f(2x)=8x^3-6x$，解得 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$，

令 $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}=0$，得 $x=\pm 1$， 又 $f(0)=0$， $f(1)=-1$， $f(2)=1$，

所以 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上的最大值为 $f(2)=1$，最小值为 $f(1)=-1$.

5. 解：两曲线的交点为 $(0,0)$; $(1,1)$

所以 $V=\int_0^1\pi\left(\sqrt{x}\right)^2dx-\int_0^1\pi\left(x^2\right)^2dx=\pi\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 =\frac{3}{10}\pi$

6. 解：由题意，有 $f(1)=1+a+b=-2$，$f'(1)=3+2a+b=0$，解得 $a=0$，$b=-3$.

从而 $f(x)=x^3-3x$， $f'(x)=3x^2-3$， $f''(x)=6x$，

又当 $x<0$ 时， $f''(x)<0$；当 $x>0$ 时， $f''(x)>0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是凸的，在 $[0,+\infty)$ 上是凹的，点 $(0,0)$ 是其拐点.

五．证明题

1. 证：令 $\varphi(x)=(x-1)f(x)$，得 $\varphi(1)=0,\varphi(0)=-f(0)=0$，

则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件，

故在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使得 $\varphi'(\xi)=0$。

又 $\varphi'(x)=(x-1)f'(x)+f(x)$，由 $\varphi'(\xi)=0$ 得， $f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{1-\xi}$.

2. 证：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 及最小值 m

从而有 $m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$，

又 $g(x)>0$，所以 $\int_a^b g(x)dx>0$，从而有 $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$

由连续函数的介值定理知，在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$，即有 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

3. 证：令 $\boldsymbol{F(x)=f(x)\cos x}$，则 $\boldsymbol{F(x)}$ 在 $\boldsymbol{[0,\frac{\pi}{2}]}$ 上连续，在 $\boldsymbol{(0,\frac{\pi}{2})}$ 内可导，且

$\boldsymbol{F(0)=F(\frac{\pi}{2})=0}$.

即 $\boldsymbol{F(x)}$ 在 $\boldsymbol{[0,\frac{\pi}{2}]}$ 上满足 Rolle 定理的条件，从而存在 $\boldsymbol{\xi\in(0,\frac{\pi}{2})}$，使得

$\boldsymbol{F'(\xi)=0}$.

又 $\boldsymbol{F'(x)=f'(x)\cos x-f(x)\sin x}$，所以 $\boldsymbol{F'(\xi)=f'(\xi)\cos\xi-f(\xi)\sin\xi=0}$，

即 $\boldsymbol{f'(\xi)\cdot\cot\xi=f(\xi)}$.