## 一、选择题(每题 3 分，共 21 分)

**1.** 方程 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在空间表示(　　).

A. 椭球面，　　B. 上半球面，　　C. 上半圆锥面，　　D. 双曲面.

**2.** 根据二重积分的几何意义，$\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}d\sigma=$（　　　），

其中 $D: x^2+y^2\le a^2, a\ge 0$.

A. $\frac{1}{3}\pi a^3$,　　B. $\frac{2}{3}\pi a^3$,　　C. $\frac{1}{3}\pi a^2$,　　D. $\frac{4}{3}\pi a^3$

**3.** 曲面 $z=2-x^2-y^2$ 被平面 $z=1$ 所截的部分面积为(　　), 其中 $D$ 为区域 $x^2+y^2\le 1$.

A. $\iint\limits_D (2-x^2-y^2)dxdy$,　　B. $\iint\limits_D (2-r^2)drd\theta$,

C. $\iint\limits_D \sqrt{1+4r^2}drd\theta$,　　D. $\iint\limits_D \sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}dxdy$.

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a^n}$ 收敛，则 $a$ 满足（　　　）

A. $|a|>1$,　　B. $|a|\le 1$,　　C. $1<a<3$,　　D. $-1<a<2$

**5.** 如果 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 可微，则 $f(x,y)$ 在点 $P$ 点必（　　）.

A. 连续，　　B.不连续，　　C. 偏导存在且连续，　　D.不可导.

**6.** 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为数项级数,下列结论正确的是(　　)

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l, l<1$,级数绝对收敛，　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l, l=1$,级数发散，

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l, l<1$,级数绝对收敛　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l, l<1$,级数条件收敛.

**7.** 已知三个平面的方程为:

$\pi_1: x-5y+2z+1=0$, $\pi_2: 3x-2y+5z+8=0$, $\pi_3: 4x+2y+3z-9=0$,则必有

(　　).

A. $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 平行,　　B. $\pi_1$ 与 $\pi_3$ 垂直,　　C. $\pi_2$ 与 $\pi_3$ 垂直,　　D. $\pi_2$ 与 $\pi_3$ 平行.

## 二、填空题(每题 3 分，共 24 分)

**1.** 向量$\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k},\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$,则$\vec{a}\times\vec{b}=$__________.

**2**. 函数$z=\dfrac{\ln(x+y)}{\sqrt{x-1}}$的定义域为 ______________________.

**3**. 设$z=\sin\dfrac{x}{y}+xe^{-xy}$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$___________________.

**4**. 极限$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\arctan(x+y^2)}{\sqrt[5]{x^3+y}}=$___________________.

5. 二重积分$I=\iint\limits_{D}\sin(x^2+y^2)d\sigma$,积分区域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$,将$I$化为极坐标形式下的二次积分为(不需计算结果):________________

**6.** 设$l$为椭圆$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$,其周长为$a$,则$\oint_l(3x^2+2y^2)ds=$__________________.

**7**. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}3\left(\dfrac{x}{4}\right)^n$收敛，则$x$满足：_________________.

**8**. 空间曲面$z=x\ln y-y\ln x$在点$(1,1,0)$处的切平面方程为为_______________**.**

## 三、计算题(每题 7 分，共 42 分 )

1、求函数$z=4x^2-y^2+16x+8y+2$的极值。

2、计算$\iint\limits_{D}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由$y=2,y=x,y=2x$所围成的区域. (**要求画出积分区域!**).

**3**、计算$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)z\,\mathrm{d}v$，其中 $\Omega$由$z=4-x^2-y^2$及$z=0$围成的有界闭区域。

**4**、计算曲线积分$I=\int_L(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy$，其中$L$为从点$A(0,0)$沿曲线$y=\sin x$到$B(\pi,0)$的一段弧。

**5.** 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+4)}$的收敛半径和收敛域**.**

**6.** 设函数$z=z(x,y)$由方程$e^z+z-x^2y=1$所确定，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

**四、应用题（7 分）**

求曲线$x=\dfrac{t^2}{4},y=\dfrac{t^3}{3},z=\dfrac{t^2}{2}$在$t=1$处的切线与法平面方程。

**五、证明题(本题 6 分)**

求证：正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$是收敛的。

一、选择题(每题 3 分，共 21 分)

1．**(C)** 2．**(B)** 3．**(D)** 4．**(A)** 5．**(A)** 6．**(C)** 7．**(B)**

二、填空题(每题 3 分，共 24 分)

1．$5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$ 2．$\{(x,y)\,|\,x+y>0, x>1\}$ 3．$\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}+e^{-xy}-xye^{-xy}$

4．$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$ 5．$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\sin r^2 dr$ 6．$\boldsymbol{6a}$ 7．$-4<x<4$ 8．$x-y+z=0$

三．试解下列各题(**每题 7 分，共 42 分**)

1．求函数 $z=4x^2-y^2+16x+8y+2$ 的极值。;

解：函数无不可导点，由 $\begin{cases} z_x=8x+16=0 \\ z_y=-2y+8=0 \end{cases}$ 解得驻点为 $(-2,4)$ ·········3 分

又 $f_{xx}(-2,4)=8, f_{xy}(-2,4)=0, f_{yy}(-2,4)=-2$，

即 $AC-B^2=-16<0$， ·········6 分

故函数在 $(-2,4)$ 处不取得极值，此函数无极值 . ············7 分

2．**解：** 原式$=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+y^2-x)dx$ ············4 分

$$=\int_0^2\left(\frac{19}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2\right)dy=\frac{13}{6},$$ ············7 分

3．**解：** $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)z\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{4-r^2}r^2zdz$， ············4 分

$=\pi\int_0^2 r^3(4-r^2)^2dr=\frac{32}{3}\pi$ ············7 分

4．**解：由** $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-2y=\frac{\partial P}{\partial y}$,故曲线积分与路径无关,取从点 $A(0,0)$ 到 $B(\pi,0)$ 的直线路径 ············3 分

$I=\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{\pi^3}{3}$. ············7 分

5．**解：由于** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$

收敛半径 $R=1$ ············4 分

当 $x=1$ 时,由于 $\frac{1}{n(n+4)}\le\frac{1}{n^2}$,由比较审敛法知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$ 收敛.

…………5 分

当 $x=-1$ 时,由莱布尼兹判别法知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+4)}$ 收敛.

故级数的收敛域为 $[-1,1]$ …………7 分

6．解：方程两边对 $x$ 求偏导可得 $e^z\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}-2xy=0$,

可得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy}{e^z+1}$. …………4 分

方程两边对 $y$ 求偏导可得 $e^z\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}-x^2=0$,

得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{e^z+1}$.. …………7 分

## 四．应用题(7 分)

**1**．解：当 $t=1$ 时,对应点为 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$,

切向量为 $\vec{s}=\{1,2,2\}$. …………3 分

故切线方程为 $\frac{x-\frac{1}{4}}{1}=\frac{y-\frac{1}{3}}{2}=\frac{z-\frac{1}{2}}{2}$,

法平面方程为 $x-\frac{1}{4}+2(y-\frac{1}{3})+2(z-\frac{1}{2})=0$,即 $x+2y+2z-\frac{23}{12}=0$ …………7 分

## 五．证明题(本题 6 分)

证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$,

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4}<1$$ ………4 分

由比值审敛法知级数收敛. ………6 分