微积分A(1)

教师：晏平
email: yanping@mail.tsinghua.edu.cn
office: 数学系荷二办公室219
Tel:　　62798584，13521977278

◆ 教材:

《高等微积分教程》（上册），章纪民、闫浩、刘智新编，清华大学数学科学系。

◆考核方式:

平时(作业、习题课、答疑)20%

期中30%

期末50%

◆答疑：周四8:00-10:00 ,荷二219

◆关于作业

习题课上当堂收发作业.

没带作业的,下一次习题课当堂补交,只有一次补交机会! 补交作业正常批改,正常给分,错过补交机会的作业记零分.多次补交作业将会影响平时成绩。

习题课上请一定领走自己的作业,助教不负责保管,如有丢失概不负责.

◆习题课(填写纸质选课表)

◆期中考试：

11月9日(第9周周六)19:20-21:20

（考到Taylor公式?）

- 17世纪后半叶

  直观微积分 Newton & Leibniz

  "无穷小"（冥王星的预测）

- 19世纪上半叶

  极限理论 Cauchy & Weierstrass

- 19世纪下半叶

  实数的连续性 Cantor & Dedekind

  （确界原理）

第一章 实数与极限

§1. 实数系

自然数集$\mathbb{N}$

整数集$\mathbb{Z}$

实数集$\mathbb{R}$ $\begin{cases} \text{有理数集}\mathbb{Q} \\ \text{无理数集}\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

$\forall$: 对任意(Any)

$\exists$: 存在(Exist)

s.t. 使得(subject to)

Thm. (有理数在$\mathbb{R}$中的稠密性)

$$\forall a,b\in\mathbb{R}, a<b, \exists r\in\mathbb{Q}, \text{s.t. } a<r<b.$$

Def. (上界、下界、有界、无界)

设A为$\mathbb{R}$的非空子集. 若$\exists M\in\mathbb{R}$, s.t. $\forall x\in A$, 有$x\le M$, 则称M为A的一个上界. 若$\exists m\in\mathbb{R}$, s.t. $\forall x\in A$, 有$x\ge m$, 则称m为A的一个下界. 若A既有上界又有下界,则称A有界,否则称A无界.

Def. (最大值、最小值)

设A为$\mathbb{R}$的非空子集. 若$\lambda\in A$且λ是A的一个上界,则称λ为A的最大值, 记作$\lambda=\max A=\max\limits_{x\in A}x$. 若$\mu\in A$且$\mu$是A的一个下界,则称$\mu$为A的最小值, 记作$\mu=\min A=\min\limits_{x\in A}x$.

Def. (上确界$\sup \mathrm{A}$、下确界$\inf \mathrm{A}$)

设A为$\mathbb{R}$的非空子集. 称A的最小上界ξ为A的上确界,记作$\xi = \sup \mathrm{A} = \sup\limits_{x\in \mathrm{A}} x$. 称A的最大下界$\eta$为A的下确界,记作$\eta = \inf \mathrm{A} = \inf\limits_{x\in \mathrm{A}} x$.

Remark. ($\sup \mathrm{A}, \inf \mathrm{A}$的等价定义)

$\xi = \sup \mathrm{A}$的充要条件:

ξ是A的上界, 且$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathrm{A}, \text{s.t. } x > \xi - \varepsilon$.

$\eta = \inf \mathrm{A}$的充要条件:

η是A的下界, 且$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathrm{A}, \text{s.t. } x < \eta + \varepsilon$.

Thm. (确界原理 — 实数的连续性)

非空有上(下)界的集合必有上(下)确界.

Ex. $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2\le 2\}$,

$\sup A$ $\underline{=\sqrt{2}}$, $\max A$ $\underline{=\sqrt{2}}$,

$\inf A$ $\underline{=-\sqrt{2}}$, $\min A$ $\underline{=-\sqrt{2}}$.

$B=\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2\le 2\}$,

$\sup B$ $\underline{=\sqrt{2}}$, $\max B$ 不存在,

$\inf B$ $\underline{=-\sqrt{2}}$, $\min B$ 不存在.

Ex. A为非空有界数集, 记 $-\mathrm{A}=\{-x: x\in \mathrm{A}\}$, 则

$\sup(-\mathrm{A})=$ $\underline{\quad -\inf \mathrm{A} \quad}$, $\inf(-\mathrm{A})=$ $\underline{\quad -\sup \mathrm{A} \quad}$.

Proof. 记 $\eta=\inf \mathrm{A}$, 则

$$\forall x\in \mathrm{A}, \text{有 } \eta\le x;\ \text{且 } \forall\varepsilon>0, \exists y\in \mathrm{A}, \text{s.t. } y<\eta+\varepsilon.$$

于是, $\forall -x\in -\mathrm{A}$, 有 $-\eta\ge -x$ ($-\eta$是集合 $-\mathrm{A}$ 的上界); 且 $\forall\varepsilon>0$, $\exists -y\in -\mathrm{A}$, s.t. $-y>-\eta-\varepsilon$ ($\forall\varepsilon>0, -\eta-\varepsilon$不是集合 $-\mathrm{A}$ 的上界).

由上确界的定义知 $\sup(-\mathrm{A})=-\eta=-\inf \mathrm{A}$.

同理可证 $\inf(-\mathrm{A})=-\sup \mathrm{A}$. □

Remark. 若非空集合A无上界, 则记$\sup A = +\infty$;

若非空集合A无下界, 则记$\inf A = -\infty$.

Ex. A,B为非空有界集合, $A \cap B$非空, 则

$\sup(A \cup B)$ $\underline{= \max\{\sup A, \sup B\}}$,

$\inf(A \cup B)$ $\underline{= \min\{\inf A, \inf B\}}$,

$\sup(A \cap B)$ $\underline{\le \min\{\sup A, \sup B\}}$,

$\inf(A \cap B)$ $\underline{\ge \max\{\inf A, \inf B\}}$.

如何证明?

§ 2. 数列极限的概念

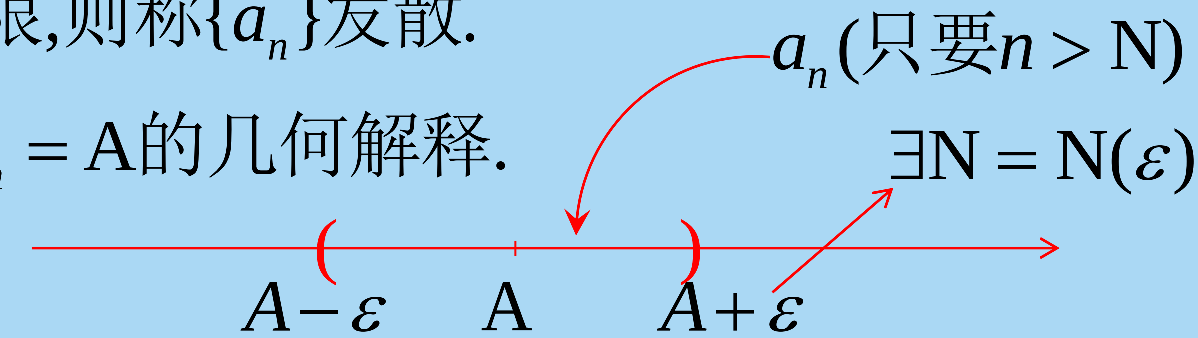
$\{a_n\}$：$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$.　$\{\sin(2+3^{-n})\}$的极限为<u>$\sin 2$</u>.

Def. 若$\exists A\in\mathbb{R}, \forall \varepsilon>0, \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, s.t. 当$n>N$时,有 $|a_n - A|<\varepsilon$,则称$\{a_n\}$有极限A,也称$\{a_n\}$收敛到A,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ 或 } a_n \to A \ (n\to\infty).$$

若$\{a_n\}$没有极限,则称$\{a_n\}$发散.

Remark. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$的几何解释.



$\forall \varepsilon>0, \{a_n\}$中只有有限项落在$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$之外！

Ex. $0<|q|<1$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof. $\forall \varepsilon > 0$, 为使 $|q^n - 0| < \varepsilon$, 因 $0<|q|<1$, 只要 $n > \log_{|q|} \varepsilon$ 即可. 取 $\mathrm{N} = \left[\log_{|q|} \varepsilon\right] + 1$. 当 $n > \mathrm{N}$ 时, 有 $n > \log_{|q|} \varepsilon$, 从而 $|q^n - 0| < \varepsilon$. 由极限的定义知 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. □

Remark. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Remark. 关于数列极限的分析或证明, 着手点是

$$|a_n - \mathrm{A}| < \varepsilon,$$

求解n所满足的条件, 找出极限定义中所需的$N = N(\varepsilon)$.

Ex. $a_n = \dfrac{2n^2+n+2}{n^2-3}$.证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2.$

Proof. 当$n>8$时, $|a_n-2| = \dfrac{n+8}{n^2-3} \le \dfrac{2n}{\frac{1}{2}n^2} = \dfrac{4}{n}.$

$\forall \varepsilon > 0$, 求解$\dfrac{4}{n} < \varepsilon$, 得$n > \dfrac{4}{\varepsilon}$, 任意取定$\mathrm{N} > \max\{8, \dfrac{4}{\varepsilon}\}$,

当$n > \mathrm{N}$时, $|a_n - 2| < \varepsilon$. 故$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n+2}{n^2-3} = 2.$□

Remark. $\mathrm{N}=\mathrm{N}(\varepsilon)$的选取不唯一.可以通过放缩不等式$|a_n - \mathrm{A}| < \varepsilon$,简化计算,选取合适的N.

Remark. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{N}\in\mathbb{N}, \text{s.t. 当} n > \mathrm{N}\text{时,有} |a_n - \mathrm{A}| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{N}\in\mathbb{N}, \text{s.t. 当} n \geq \mathrm{N}\text{时,有} |a_n - \mathrm{A}| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{N}\in\mathbb{N}, \text{s.t. 当} n > \mathrm{N}\text{时,有} |a_n - \mathrm{A}| < \varepsilon/2$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in (0,1), \exists \mathrm{N}\in\mathbb{N}, \text{s.t. 当} n \geq \mathrm{N}\text{时,有} |a_n - \mathrm{A}| \leq 2\varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in\mathbb{N}, \exists \mathrm{N}=\mathrm{N}(k)\in\mathbb{N}, \text{s.t. 当} n \geq \mathrm{N}\text{时,有} |a_n - \mathrm{A}| \leq \frac{1}{k}.$$

Question. 如何用ε-N语言描述$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq \mathrm{A}$?

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq \mathrm{A} \Leftrightarrow \exists \varepsilon>0, \forall \mathrm{N}\in\mathbb{N}, \exists n > \mathrm{N}, \text{s.t.} |a_n - \mathrm{A}| > \varepsilon.$$

Ex. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

Proof. 记$a_n=\sqrt[n]{n}-1\ (>0)$, 则$\sqrt[n]{n}=1+a_n$,

$$n=(1+a_n)^n>C_n^2a_n^2=\frac{n(n-1)}{2}a_n^2,$$

$$a_n^2<\frac{2}{n-1}<\frac{4}{n},\quad a_n<\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 求解$\dfrac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$得$n>\dfrac{4}{\varepsilon^2}$. 取$\mathrm{N}=\left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right]+1$, 当$n>\mathrm{N}$时,

$$a_n<\varepsilon,\quad 即\ \left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon.$$

由极限的定义, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$ □

Ex. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$.证明:(1) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\mathrm{A}}$;(2)若$\mathrm{A}>0, a_n>0$,则

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln \mathrm{A}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0.$

Proof.(1) $\forall \varepsilon \in (0, e^{\mathrm{A}})$,

$$\left|e^{a_n} - e^{\mathrm{A}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|e^{a_n-\mathrm{A}} - 1\right| < \varepsilon e^{-\mathrm{A}}$$

$$\Leftrightarrow 1-\varepsilon e^{-\mathrm{A}} < e^{a_n-\mathrm{A}} < 1+\varepsilon e^{-\mathrm{A}}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-\varepsilon e^{-\mathrm{A}}) < a_n - \mathrm{A} < \ln(1+\varepsilon e^{-\mathrm{A}}) \qquad (*)$$

令$\delta = \min\{-\ln(1-\varepsilon e^{-\mathrm{A}}), \ln(1+\varepsilon e^{-\mathrm{A}})\}$,则$\delta>0$.由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$,
$\exists N, s.t. \forall n > N$,有$|a_n - \mathrm{A}| < \delta$. 于是$n>N$时 $(*)$ 成立, 由极限的定义得$\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\mathrm{A}}$.

(2) $\left|\ln a_n - \ln A\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \ln\dfrac{a_n}{A} < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow e^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{A} < e^{\varepsilon} \Leftrightarrow Ae^{-\varepsilon} < a_n < Ae^{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow A(e^{-\varepsilon}-1) < a_n - A < A(e^{\varepsilon}-1) \quad (**)$$

$\forall\varepsilon>0$,令$\delta=\min\{-A(e^{-\varepsilon}-1), A(e^{\varepsilon}-1)\}\ (>0)$.由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\exists N, s.t. \forall n > N$,有$\left|a_n - A\right| < \delta$. 于是$n > N$时$(**)$成立, 由极限的定义得$\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n = \ln A$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{n} = \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right) = \ln 1 = 0.$ □

Ex. $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$.证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \mathrm{A}$.

Remark.

分步确定N.

Proof. $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$,则$\forall \varepsilon>0$,$\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $s.t.$

$$|a_n - \mathrm{A}| < \varepsilon, \quad \forall n > N_1.$$

对此N_1,$\exists N > N_1$, $s.t.$

$$\frac{|a_1-\mathrm{A}|+\cdots+|a_{N_1}-\mathrm{A}|}{n} < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

于是, 当$n > N$时, 有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - \mathrm{A}\right| = \left|\frac{(a_1-\mathrm{A})+(a_2-\mathrm{A})+\cdots+(a_n-\mathrm{A})}{n}\right|$$

$$\le \frac{|a_1-\mathrm{A}|+\cdots+|a_{N_1}-\mathrm{A}|}{n} + \frac{|a_{N_1+1}-\mathrm{A}|+\cdots+|a_n-\mathrm{A}|}{n} < 2\varepsilon. \square$$

Ex. $a_n>0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = A$.

Proof. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\exp\left\{\dfrac{\ln a_1+\ln a_2\cdots+\ln a_n}{n}\right\}$

$$= \exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2\cdots+\ln a_n}{n}\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{n\to\infty}\ln a_n\right\} = \exp\left\{\ln\lim_{n\to\infty} a_n\right\} = e^{\ln A} = A. \square$$

Question. $a_n>0, A=0$时结论是否成立?给出证明或反例.

(结论仍成立, 但ln0无意义, 例中证法失效)

Def. 称$\{a_n\}$发散到$+\infty$, 记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 若

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当} n > N \text{时}, a_n > M.$$

称$\{a_n\}$发散到$-\infty$, 记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 若

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当} n > N \text{时}, a_n < -M.$$

称$\{a_n\}$发散到∞, 记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 若

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当} n > N \text{时}, |a_n| > M.$$

Question. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$及$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$的几何意义?

作业：

习题1.1 No. 2

习题1.2 No.3(单),4,5