Review

- $f\uparrow \Leftrightarrow f'(x)\ge 0$;
- f严格$\uparrow \Leftrightarrow f'(x)\ge 0$, 且在任意$(c,d)$上$f'(x)$不恒为0.
- $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(2n-1)}(x_0)=0$, 则

  $f^{(2n)}(x_0)>(<)0 \Rightarrow x_0$为$f$的极小(大)值点.
- $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(2n)}(x_0)=0,\ f^{(2n+1)}(x_0)\ne 0$

  $\Rightarrow x_0$不是极值点.

- $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(2n)}(x_0)=0,\ f^{(2n+1)}(x)$在$x_0$的两侧异号,则$x_0$是$f$的极值点, 且

$$f^{(2n+1)}(x)\begin{cases}\le(<)0, & x<x_0\\ \ge(>)0, & x>x_0\end{cases}\Rightarrow x_0\text{是}f\text{的(严格)极小值点;}$$

$$f^{(2n+1)}(x)\begin{cases}\ge(>)0, & x<x_0\\ \le(<)0, & x>x_0\end{cases}\Rightarrow x_0\text{是}f\text{的(严格)极大值点.}$$

- f在$[a,b]$上、$\mathbb{R}$上的极值和最值问题.

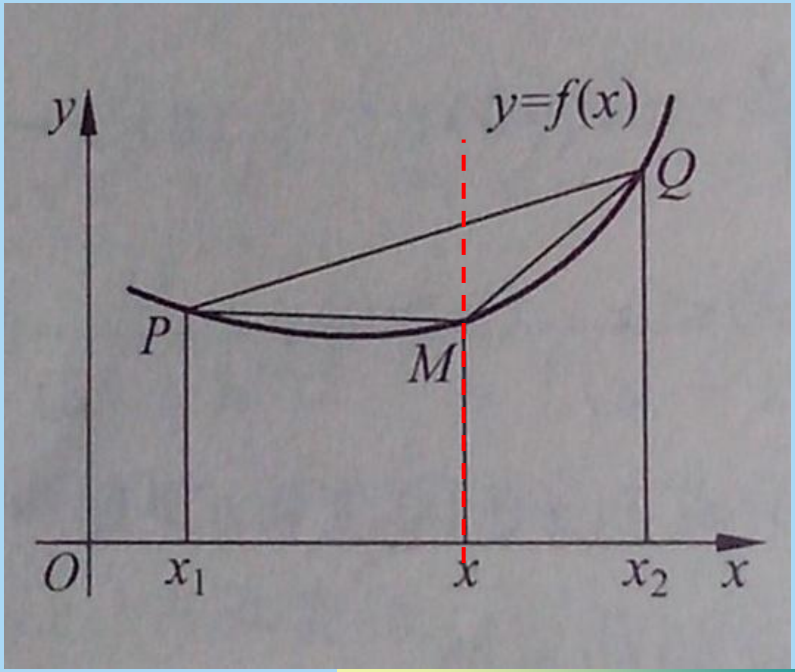
§5.函数的凸凹性

Def. f在区间I上定义,若$\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in (0,1)$,都有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le (\ge) \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

则称f为I上的下凸(上凸)函数.

Remark.下凸函数的几何意义?



Thm. f 为 I 上的下凸函数，当且仅当 $\forall x_1,\cdots,x_n\in I$，以及满足 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$ 的正数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，都有

$$f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n).$$

Proof. 充分性显然，下证必要性.

$n=1,2$ 时，显然.

设 $n=k$ 时结论成立，当 $n=k+1$ 时，

$$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}+\frac{\lambda_2}{1-\lambda_{k+1}}+\cdots+\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}=1,$$

$$f(\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_{k+1}x_{k+1})=f\left(\lambda_{k+1}x_{k+1}+(1-\lambda_{k+1})\frac{\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k}{1-\lambda_{k+1}}\right)$$

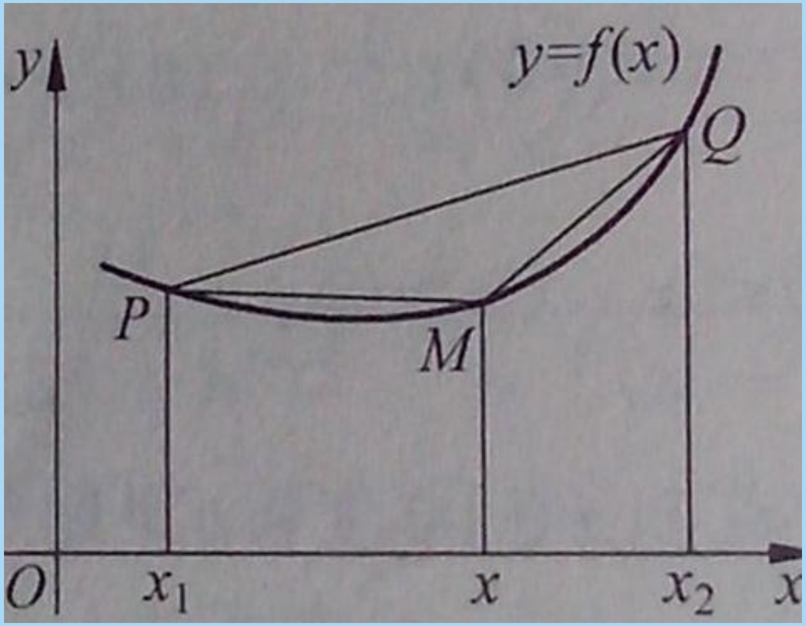
$$\le \lambda_{k+1}f(x_{k+1})+(1-\lambda_{k+1})f\left(\frac{\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k}{1-\lambda_{k+1}}\right)$$

$$\le \lambda_{k+1}f(x_{k+1})+(1-\lambda_{k+1})\left(\frac{\lambda_1 f(x_1)}{1-\lambda_{k+1}}+\cdots+\frac{\lambda_k f(x_k)}{1-\lambda_{k+1}}\right)$$

$$=\lambda_1 f(x_1)+\cdots+\lambda_k f(x_k)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1}).\square$$

Thm. f 为 I 上的下凸函数, 当且仅当 $\forall x_1, x_2 \in I$ 及 $x \in (x_1, x_2)$,

有 $$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$



Remark. 几何意义.

$$k_{PM} \le k_{PQ} \le k_{MQ}.$$

Remark. 我们证明以下更强的定理.

Thm. 以下各命题等价：(1) f 为 I 上的下凸函数;

(2) $\forall x_1, x_2 \in I$ 及 $x \in (x_1, x_2)$, 有

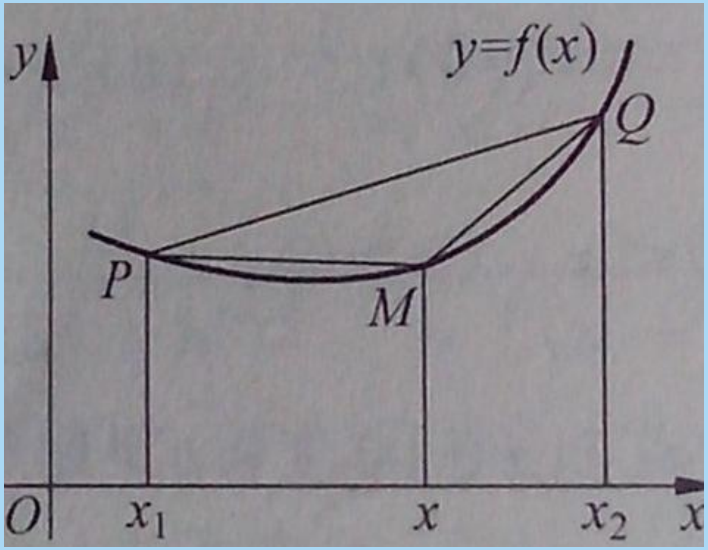
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1};$$

(3) $\forall x_1, x_2 \in I$ 及 $x \in (x_1, x_2)$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x};$$

(4) $\forall x_1, x_2 \in I$ 及 $x \in (x_1, x_2)$, 有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$



Proof. $\forall x_1, x, x_2 \in I, x_1 < x < x_2$, 记$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, 则

$$\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in (0,1),\ 1-\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

(1) $\Leftrightarrow$ (2):

$$f\text{下凸} \Leftrightarrow f(x) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_1) \le (1-\lambda)(f(x_2) - f(x_1))$$

$$= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1)),$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

$$\boxed{\begin{gathered} x \in (x_1, x_2), x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \\ \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in (0,1), \quad 1-\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \end{gathered}}$$

$(1) \Leftrightarrow (3):$

$$f\text{下凸} \Leftrightarrow f(x) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_2) \le \lambda (f(x_1) - f(x_2))$$

$$= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}(f(x_1) - f(x_2))$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

$$\boxed{x\in(x_1,x_2),\ x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ \lambda=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}\in(0,1),\ 1-\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.}$$

$(1)\Leftrightarrow(4):$

$$f\text{下凸}\Leftrightarrow f(x)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \lambda f(x)+(1-\lambda)f(x)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

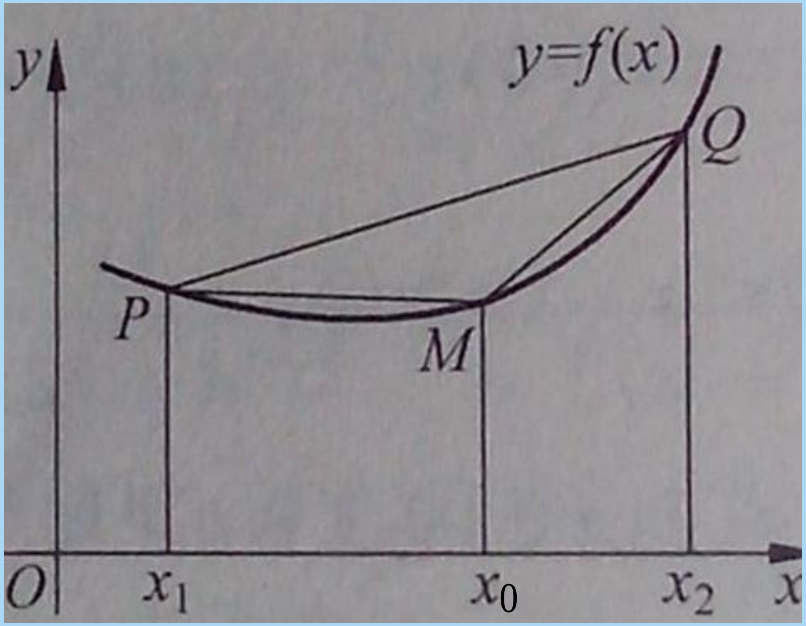
$$\Leftrightarrow \lambda(f(x)-f(x_1))\le(1-\lambda)(f(x_2)-f(x))$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2-x}{x_2-x_1}(f(x)-f(x_1))\le\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(f(x_2)-f(x))$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Remark. f 在 I 上下凸, $U_\delta(x_0)\subset I$, 则

$\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ 关于 $x_1<x_0$ 单增，有上界 $\dfrac{f(x_0)-f(x_2)}{x_0-x_2}$,



故 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

存在 $(\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0))$, 且

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le f'_-(x_0),\quad \forall x<x_0, x\in I,$$

$$f(x)\ge f(x_0)+f'_-(x_0)(x-x_0),\quad \forall x<x_0, x\in I.$$

Corollary.开区间I上的（上、下）凸函数每一点处左右导数存在。闭区间？

Corollary.开区间I上的（上、下）凸函数连续。

闭区间？（左右端点处不一定连续）

Thm. f在(a,b)上可导,则f在$[a,b]$下凸的充要条件是:

$\forall x_0 \in (a,b), \forall x \in [a,b]$,有

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

即曲线$y = f(x)$上的每一点的切线在曲线下方.

Thm. $f \in C[a,b]$, f在(a,b)上可导,则

f在$[a,b]$下(上)凸 $\Leftrightarrow$ f'在(a,b)单调递增(递减).

Proof. $\Rightarrow$: 任取$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, f下凸,则

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \quad \forall x \in (x_1, x_2).$$

分别令$x \to x_1, x \to x_2$,得

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2).$$

故$f'(x_1) \le f'(x_2)$, $f'(x)$单调递减.

$\Leftarrow$: 任取$x_1, x, x_2 \in I, x_1 < x < x_2$, 由Cauchy中值定理,

$\exists \xi_1 \in (x_1, x), \xi_2 \in (x, x_2), s.t.$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1), \qquad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2).$$

f'单调递增, $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, 则

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

故f下凸.□

Thm. $f \in C[a,b]$, f在(a,b)上二阶可导,则

f在$[a,b]$下(上)凸$\Leftrightarrow$在(a,b)中$f''(x) \ge (\le) 0$.

Proof. 此为上一定理之推论.□

Def. 若$y = f(x)$在$(x_0, f(x_0))$两侧有不同的凸凹性,则称$(x_0, f(x_0))$为曲线$y = f(x)$的拐点.

Thm. $(x_0, f(x_0))$为$y = f(x)$的拐点, $f''(x_0)$存在,则$f''(x_0) = 0$.

Proof. $f''(x_0)$存在,则f'在x_0的邻域中有定义. $(x_0, f(x_0))$为拐点,则$f'(x)$在x_0两侧有不同的单调性, x_0为$f'(x)$的极值点,故$f''(x_0) = 0$.□

Ex. $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$, 则 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

Proof. 令 $f(x) = \ln x$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

故 f 上凸,

$$\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n}{n} \le \ln \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \square$$

Ex. 曲线$x = t - \sin t, y = 1 - \cos t \ (0 \le t \le 2\pi)$的凸凹性.

解: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x} = \frac{\left(\dfrac{\sin t}{1 - \cos t}\right)'}{x'(t)} = \frac{-1}{(1 - \cos t)^2} < 0.$$

故曲线在$t \in [0, 2\pi]$上上凸.□

§6.函数作图

Def.(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$,则称$x=x_0$为$y=$

$f(x)$的一条竖直渐近线;

(2)若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$,则称$y=a$为$y=f(x)$

的一条水平渐近线;

(3)若$\exists a\neq 0$及b,使得

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b)=0 \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax-b)=0,$$

则称$y=ax+b$为$y=f(x)$的一条斜渐近线.

Remark. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b)=0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \ \ \& \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b.$$

函数作图关键因素:

(1)定义域;　　(2)奇偶性、周期性、对称性

(3)渐近线

(4)极值点与增减区间

(5)拐点与凸凹性

(6)特殊点, 如$f(x_0)=0$, 极值点, 拐点的函数值

Ex.作图$y=\dfrac{(x-1)^3}{2(x+1)^2}$.

解:定义域: $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to-1} y(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\pm\infty} y(x)=\pm\infty,$$

有竖直渐近线 $x=-1$, 无水平渐近线.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{2x(x+1)^2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(y(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{2(x+1)^2}=-\frac{5}{2}.$$

有斜渐近线: $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$.

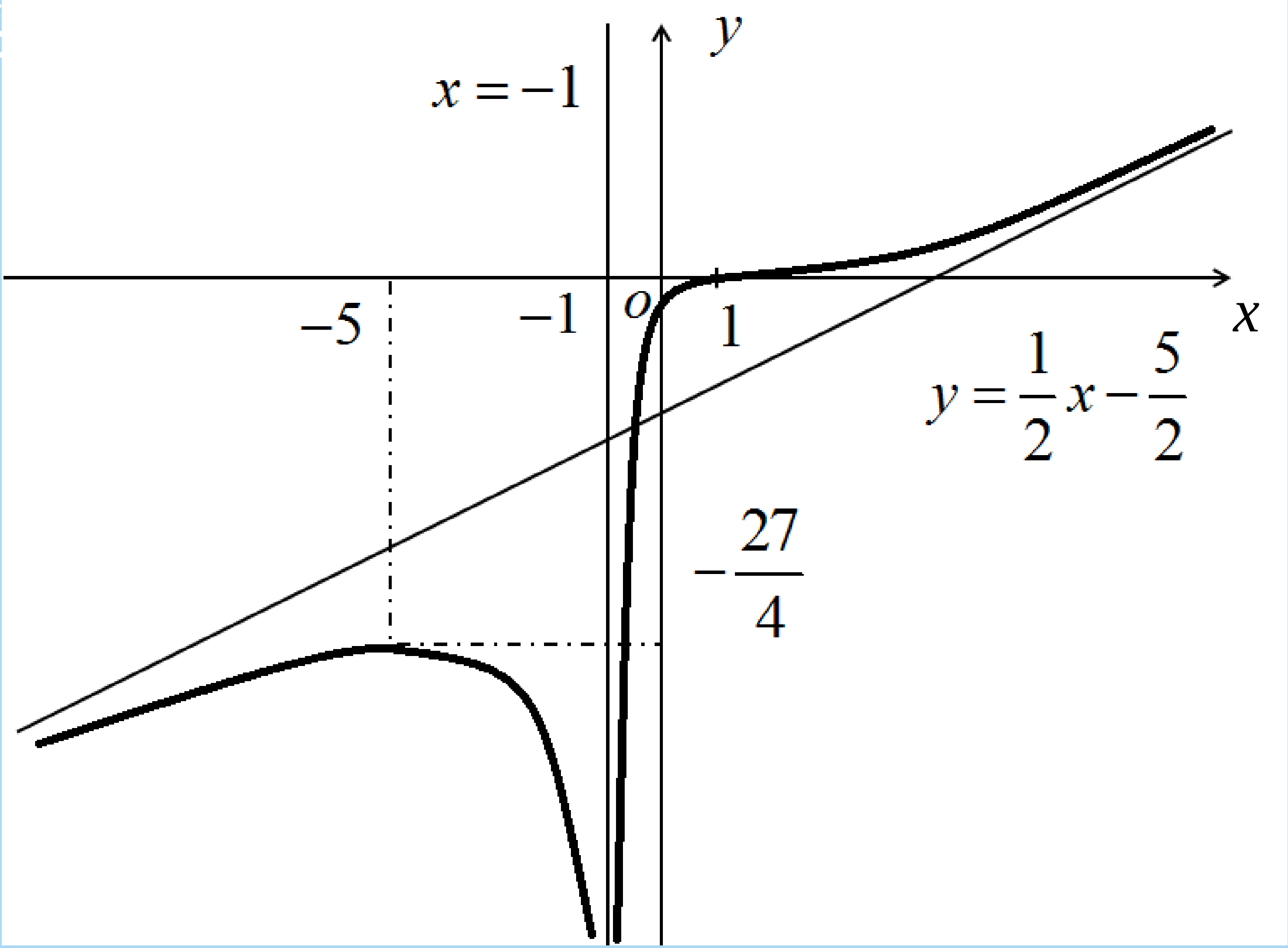
$$\ln|y| = 3\ln|x-1| - 2\ln|x+1| - \ln 2,\quad \frac{y'}{y} = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{x+5}{x^2-1},$$

$$y' = \frac{x+5}{x^2-1}y = \frac{(x+5)(x-1)^2}{2(x+1)^3},\ \cdots,\ y'' = \frac{12(x-1)}{(x+1)^4},$$

$$y'(-5) = y'(1) = 0.\quad y''(1) = 0.$$

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	无	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	定	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{-27}{4}$	$\searrow$	义	$\nearrow$	0	$\nearrow$

极大　　　　　　　　拐点



y
$x=-1$
-5
-1
o
1
x
$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$
$-\frac{27}{4}$

Ex. $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 有__2__条渐近线.

解: $x\neq\pm1$ 时, $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$.

$y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 是由双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 向右平移一个单位, 再向上平移一个单位得到, 因此它有两条渐近线: $x=1, y=1$. □

Question. 如何求隐函数、参数函数的函数渐近线?

作业：习题4.5 No.2,4,5,9

习题4.6 No.1,2(2,3,8)