

Review

- 常系数齐次线性ODE的特征解法

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0$$

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

特征根	重数	线性无关解
$\lambda(\text{实})$	1	$e^{\lambda t}$
$\lambda(\text{实})$	k	$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$
$\alpha \pm i\beta$	1	$e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t$
$\alpha \pm i\beta$	k	$e^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \cos \beta t,$ $e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \sin \beta t$

- 常系数非齐次线性ODE的待定系数法

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t)$$

$f(t)$	special solution $x(t)$
$p(t)e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}$ p real polynomial,	$q(t)t^k e^{\lambda t}, q$ real polynomial, $\deg(q) \leq \deg(p),$ k : multiplicity of λ as an eigenvalue
$p(t)e^{\lambda t},$ $\lambda \in \mathbb{C}, p$ real	$q(t)t^k e^{\lambda t}, q$ complex , $\deg(q) \leq \deg(p), k = \text{multiplicity of } \lambda$
$p(t)e^{\alpha t} \cos \beta t$ or $p(t)e^{\alpha t} \sin \beta t$ $p(t), \alpha, \beta$ real	$t^k [P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t] e^{\alpha t},$ k : multiplicity of $\lambda = \alpha + i\beta,$ P, Q real , $\deg(P) \leq \deg(p), \deg(Q) \leq \deg(p),$

§ 6. 线性常微分方程组

1. 解的叠加原理及存在唯一性定理

$$\text{矩阵函数 } A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{pmatrix} \text{ 可简}$$

记为 $A(t) = (a_{ij}(t))_{m \times n}$. 分别定义其导数和积分为

$$\frac{dA(t)}{dt} \triangleq A'(t) \triangleq (a'_{ij}(t))_{m \times n},$$

$$\int_{t_0}^t A(s) ds = \left(\int_{t_0}^t a_{ij}(s) ds \right)_{m \times n}.$$



$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

可以记作

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad (1)$$

其中 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T$, $A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$,

$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))^T$.

若 $f(t) = 0$, 则得到齐次线性方程组

$$x'(t) = A(t)x(t). \quad (2)$$



$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad (1)$$

$$x'(t) = A(t)x(t). \quad (2)$$

Thm.(解的叠加原理)

(I)若 $\varphi(t), \psi(t)$ 为齐次线性方程组(2)的解,则

$\alpha\varphi(t) + \beta\psi(t)$ 也为(2)的解, 其中 α, β 为任意常数.

(II)若 $\varphi^*(t)$ 为非齐次线性方程组(1)的特解, 则(1)的任意一个解 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t) = \varphi^*(t) + \psi(t),$$

其中 $\psi(t)$ 为(2)的一个解.□



Thm.(解的存在唯一性定理)

设矩阵函数 $A(t)$ 和向量值函数 $f(t)$ 在区间 I 上连续,

$t_0 \in I$. 则 $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 初值问题

$$x'(t) = A(t)x + f(t), \quad x(t_0) = \xi$$

在区间 I 上存在唯一解.

2. 线性方程组解的结构

由解的叠加原理, 齐次线性方程组(2)的解集合是一个线性空间. 我们需要知道这个解空间的维数, 并求出一组基. 为此, 需要引入向量值函数线性无关的概念.

Def. 称向量值函数

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= (\varphi_{11}(t), \varphi_{21}(t), \cdots, \varphi_{n1}(t))^T, \\ &\vdots \\ \varphi_n(t) &= (\varphi_{1n}(t), \varphi_{2n}(t), \cdots, \varphi_{nn}(t))^T,\end{aligned}$$

在区间 I 上线性相关,若存在不全为零的常数 c_1, \cdots, c_n ,
使得 $\forall t \in I$,

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) \equiv 0.$$

否则,称 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 在 I 上线性无关.



Def. 设区间 I 上有向量值函数

$$\varphi_k(t) = (\varphi_{1k}(t), \varphi_{2k}(t), \dots, \varphi_{nk}(t))^T, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

称以这些向量值函数为列的行列式

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

为向量值函数 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 的 Wronsky 行列式, 记作

$$W(t) = W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t).$$



Thm. 若向量值函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ 在区间 I 上线性相关, 则 Wronsky 行列式 $W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t) \equiv 0, \forall t \in I$.

Proof: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 在 I 上线性相关, 则存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \dots, c_n, s.t. \forall t \in I,$

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) \equiv 0.$$

于是, $\forall t \in I, c_1, c_2, \dots, c_n$ 是下面线性方程组的非零解.

$$\begin{cases} c_1\varphi_{11}(t) + c_2\varphi_{12}(t) + \dots + c_n\varphi_{1n}(t) = 0 \\ c_1\varphi_{21}(t) + c_2\varphi_{22}(t) + \dots + c_n\varphi_{2n}(t) = 0 \\ \vdots \\ c_1\varphi_{n1}(t) + c_2\varphi_{n2}(t) + \dots + c_n\varphi_{nn}(t) = 0 \end{cases}$$

故方程组的系数矩阵 $W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t) \equiv 0, \forall t \in I. \square$

Thm. 设齐次线性方程组 $x'(t) = A(t)x(t)$ 有 n 个解

$$\varphi_k(t) = (\varphi_{1k}(t), \varphi_{2k}(t), \dots, \varphi_{nk}(t))^T, (k = 1, 2, \dots, n.)$$

则以下条件等价:

I) $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 在区间 I 上线性相关.

II) $W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t) \equiv 0, \forall t \in I.$

III) 存在 $t_0 \in I$, 使得 $W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t_0) = 0.$

Proof: (I) \Rightarrow (II) 即上一定理, (II) \Rightarrow (III) 显然. 只要证 (III) \Rightarrow (I).

设存在 $t_0 \in I$, 使得 $W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t_0) = 0.$ 则方程组

$$\begin{cases} c_1\varphi_{11}(t_0) + c_2\varphi_{12}(t_0) + \cdots + c_n\varphi_{1n}(t_0) = 0 \\ c_1\varphi_{21}(t_0) + c_2\varphi_{22}(t_0) + \cdots + c_n\varphi_{2n}(t_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1\varphi_{n1}(t_0) + c_2\varphi_{n2}(t_0) + \cdots + c_n\varphi_{nn}(t_0) = 0 \end{cases}$$

有非零解. 即存在不全为0的 c_1, c_2, \dots, c_n , 使得

$$c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) + \cdots + c_n\varphi_n(t_0) = 0.$$

令 $x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t),$

由解的叠加原理, $x(t)$ 为齐次方程组的解, 且满足初值条件 $x(t_0) = 0$. 由解的存在唯一性定理, $x(t) \equiv 0$, 即

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) \equiv 0 (t \in I). \square$$

Remark: 设 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in C^n(I)$ 为 n 次齐次线性常微分方程组的 n 个解, $t_0 \in I$. 则

$$(1) \quad W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t) = 0, \forall t \in I.$$

$$\Leftrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \text{ 在 } I \text{ 上线性相关.}$$

$$(2) \quad W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t_0) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t) \neq 0, \forall t \in I.$$

$$\Leftrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \text{ 在 } I \text{ 上线性无关.} \square$$

至此, 不难得出 $x'(t) = A(t)x(t)$ 的解空间的结构.

Thm. $A(t)$ 为区间 I 上连续的 $n \times n$ 矩阵函数, 则1阶齐次线性常微分方程组

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in I \quad (2)$$

的解集合是一个 n 维线性空间.

Proof: 我们要找出(2)的 n 个线性无关的解, 并证明(2)的任意一个解都可以由这 n 个解线性表出.

设 $\varphi_k(t)$ 是初值问题 $\frac{dx}{dt} = A(t)x, x(t_0) = e_k$ 的唯一解, 其中 e_k 为 \mathbb{R}^n 中列向量, 第 k 个分量为1, 其它分量都为0. 则

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t_0) = 1.$$

由上一定理, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 在区间 I 上线性无关.

其次, 设 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ 是齐次方程组 (2) 的一个解. 令

$$y(t) = x_1(t_0)\varphi_1(t) + x_2(t_0)\varphi_2(t) + \dots + x_n(t_0)\varphi_n(t),$$

则 $y(t)$ 是方程组 (2) 的解, 且满足初值条件

$$y(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)).$$

由解的存在唯一性定理,

$$x(t) = y(t)$$

$$= x_1(t_0)\varphi_1(t) + x_2(t_0)\varphi_2(t) + \dots + x_n(t_0)\varphi_n(t),$$

即 $x(t)$ 可以由 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 线性表出. \square

Def. 齐次线性常微分方程组(2)的 n 个线性无关解

$$\varphi_k(t) = (\varphi_{1k}(t), \varphi_{2k}(t), \dots, \varphi_{nk}(t))^T, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

称为(2)的一个**基本解组**. 称矩阵

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

为齐次方程组(2)的一个**基本解矩阵**.

Remark: 已知(2)的一个基本解矩阵 $\Phi(t)$, 则(2)的通解可以表示为 $x(t) = \Phi(t)c$. 其中 $c \in \mathbb{R}^n$ 为常向量.

例. $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ 和 $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t + te^t & te^t \\ e^t & e^t \end{pmatrix}$ 都是方程组 $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$ 的基本解矩阵. 事实上,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t + e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix},$$

即 $\Phi(t)$ 的列向量都是方程组的解. 而 $\Psi(t)$ 的列向量都是 $\Phi(t)$ 的列向量的线性组合, 因而也都是的解. 又

$$\det \Phi(0) = 1 \neq 0, \det \Psi(0) = 1 \neq 0,$$

故 $\Phi(t)$ 和 $\Psi(t)$ 的列向量都构成基本解组, 而 $\Phi(t)$ 和 $\Psi(t)$ 都是基本解矩阵. \square

Remark: 齐次方程组

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad (2)$$

的基本解组和基本解矩阵都不唯一. 这是因为基本解组实际上是(2)的解空间的一组基, 而线性空间有不同的基. 事实上, 设 $\Phi(t)$ 是(2)的一个基本解矩阵, T 为任意一个 $n \times n$ 可逆矩阵, 则 $\Phi(t)T$ 也是(2)的一个基本解矩阵. 反之, 任给(2)的两个基本解矩阵 $\Phi(t), \Psi(t)$, 必存在可逆矩阵 T (T 由 Φ, Ψ 唯一确定), s.t., $\Psi(t) = \Phi(t)T$. \square

Remark: $\Phi(t)$ 是 $x'(t) = A(t)x(t)$ 的基本解组矩阵, 则

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t).$$

3.常数变易法

设 $\Phi(t)$ 为

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad (2)$$

的基本解矩阵,则(2)的通解为 $x(t) = \Phi(t)u$,其中 u 为 \mathbb{R}^n 中任意常向量.假设

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t) \quad (1)$$

的通解为

$$x(t) = \Phi(t)u(t),$$

其中 $u(t)$ 为 n 维向量值函数,待定. 将该通解代入(1),得

$$\Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u'(t) = A(t)\Phi(t)u(t) + f(t).$$

注意到 $\Phi(t)$ 是(2)的基本解矩阵,即 $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$,

有
$$\Phi(t)u'(t) = f(t),$$

即
$$u'(t) = \Phi^{-1}(t)f(t), \quad (3)$$

其中 $\Phi^{-1}(t)$ 是 $\Phi(t)$ 的逆矩阵.于是,

$$u(t) = c + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds,$$

其中 $c \in \mathbb{R}^n$ 为任意常向量.于是(1)的通解为

$$x(t) = \Phi(t)u(t) = \Phi(t)c + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

Thm. 设 $\Phi(t)$ 是齐次方程组 $x'(t) = A(t)x(t)$ 的一个基本解矩阵, 则非齐次方程组 $x'(t) = A(t)x(t) + f(t)$ 的通解为

$$x(t) = \Phi(t)c + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds,$$

其中 $c \in \mathbb{R}^n$ 为任意常向量; 且初值问题

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), x(t_0) = \xi \in \mathbb{R}^n$$

的解为

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\xi + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds. \square$$



例: 求解初值问题 $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, x(0) = (-1, 1)^T$.

解: 前面的例子已验证 $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ 是 $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$

的一个基本解矩阵. 由常数变易法得初值问题的解

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\xi + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds \\ &= \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \int_0^t e^{-s} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} -e^t + te^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2s} \\ 0 \end{pmatrix} ds = (te^t - (e^t + e^{-t})/2, e^t). \square \end{aligned}$$

4. 常微分方程组的幂级数解法.

$$x'(t) = ax(t), a \in \mathbb{R} \Rightarrow x(t) = ce^{at}$$

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{n!} a^n t^n + \cdots$$

推广: 对方阵 A , 定义 $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$,

$$\begin{aligned} \text{则 } (e^{tA})' &= \left(I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n A^n}{n!} + \cdots \right)' \\ &= A + tA^2 + \frac{t^2 A^3}{2!} + \cdots + \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} + \cdots = Ae^{tA} \end{aligned}$$

Thm. 常系数齐次线性常微分方程组 $x' = Ax$ 有基本解矩阵

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n A^n}{n!} + \cdots.$$

Remark. $A \in M_n$, 若 $(A - \lambda I)\vec{r} = 0$, 则 $x' = Ax$ 有解

$$\begin{aligned} e^{tA}\vec{r} &= \left(I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n A^n}{n!} + \cdots\right)\vec{r} \\ &= \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^n t^n}{n!} + \cdots\right)\vec{r} = e^{\lambda t}\vec{r} \end{aligned}$$

若 A 有 n 个线性无关的实特征向量 \vec{r}_i , $A\vec{r}_i = \lambda_i \vec{r}_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$, 则 $x' = Ax$ 有 n 个线性无关的解 $e^{\lambda_i t} \vec{r}_i$, $i = 1, \cdots, n$.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, e^{a+b} = e^a e^b = e^b e^a.$$

Prop. 若 $AB = BA$, 则 $e^A e^B = e^B e^A \triangleq e^{A+B}$.

Remark. λ 为 A 的特征值, 若 $\exists k \in \mathbb{N}, (A - \lambda I)^k \vec{r} = 0$ (此时称 \vec{r} 为 A 的属于特征值 λ 的根向量), 则 $x' = Ax$ 有解

$$\begin{aligned} e^{tA} \vec{r} &= e^{\lambda t I} e^{t(A - \lambda I)} \vec{r} \\ &= e^{\lambda t} \left(I + t(A - \lambda I) + \cdots + \frac{t^n}{n!} (A - \lambda I)^n + \cdots \right) \vec{r} \\ &= e^{\lambda t} \left(I + t(A - \lambda I) + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (A - \lambda I)^{k-1} \right) \vec{r} \end{aligned}$$

λ 为 n 阶方阵 A 的 k 重特征值, 则

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n : \exists m \in \mathbb{N}, s.t. (A - \lambda I)^m \vec{r} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I)^k \vec{r} = 0 \right\} \end{aligned}$$

是 \mathbb{R}^n 的 k 维线性子空间, 称为 A 的属于特征值 λ 的根子空间.

若 A 有 m 个相异实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 其重数分别为 k_1, k_2, \dots, k_m , 且 $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, 则由 $(A - \lambda_i I)^{k_i} \vec{r} = 0$ 得到 n 个线性无关的根向量, 进而得到 $x' = Ax$ 的 n 个线性无关的解.

Question. 若 A 有复特征值, 如何寻找 $x' = Ax$ 的 n 个线性无关的解?

$$\lambda = \alpha + i\beta, (A - \lambda I)^k \vec{r} = 0, \vec{r} = \vec{r}_1 + i\vec{r}_2 \neq 0, \text{ 则}$$

$$x(t) = e^{tA} \vec{r} = \vec{u}(t) + i\vec{v}(t)$$

为 $x' = Ax$ 的复解, 由此得到 $x' = Ax$ 的线性无关的实解 $\vec{u}(t), \vec{v}(t)$.



Question. 如何计算 e^{tA} ?

设 Λ 为 A 的 Jordan 标准型, $A = P\Lambda P^{-1}$, 则 $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I + tP\Lambda P^{-1} + \frac{t^2 P\Lambda^2 P^{-1}}{2!} + \cdots + \frac{t^n P\Lambda^n P^{-1}}{n!} + \cdots \\ &= P \left(I + t\Lambda + \frac{t^2 \Lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n \Lambda^n}{n!} + \cdots \right) P^{-1} \\ &= P e^{t\Lambda} P^{-1}. \end{aligned}$$

• $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \Rightarrow e^{t\Lambda} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t})$



$$\bullet J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_n, \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}_n$$

$$J^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & 0 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}_n, \quad J^n = 0,$$



$$\Rightarrow e^{tJ} = \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$



$$\bullet \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + J,$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{t\Lambda} &= e^{\lambda t I} e^{tJ} \\ &= e^{\lambda t} e^{tJ} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m),$

其中 $\Lambda_i = \lambda_i I_{k_i} + J_{k_i}, \quad k_1 + \dots + k_m = n.$

$$\Rightarrow e^{t\Lambda} = \text{diag}(e^{t\Lambda_1}, e^{t\Lambda_2}, \dots, e^{t\Lambda_m}).$$



例. $A = \begin{pmatrix} 3 & & & & & \\ 1 & 3 & & & & \\ & 1 & 3 & & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$, $x' = Ax$ 的通解为

$$x(t) = e^{tA}C = \begin{pmatrix} e^{3t} & & & & & \\ te^{3t} & e^{3t} & & & & \\ \frac{1}{2}t^2e^{3t} & te^{3t} & e^{3t} & & & \\ & & & e^{2t} & te^{2t} & \\ & & & & e^{2t} & \\ & & & & & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix}.$$

5. 常系数齐次线性常微分方程组的特征法.

设常系数齐次线性常微分方程组

$$x' = Ax \quad (9)$$

(A 为 $n \times n$ 矩阵) 有非平凡解形如

$$x(t) = e^{\lambda t} \vec{r},$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ 为常向量, $\vec{r} \neq 0$. 代入方程组(9)得

$$\lambda e^{\lambda t} \vec{r} = A e^{\lambda t} \vec{r}$$

消去 $e^{\lambda t}$ 得,

$$\lambda \vec{r} = A \vec{r}.$$

因为 $\vec{r} \neq 0$, 所以 λ 为矩阵 A 的特征值, 而 \vec{r} 为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

反之, 若 λ 为矩阵 A 的特征值, \vec{r} 为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量, 则 $x(t) = e^{\lambda t} \vec{r}$ 是方程组 $x' = Ax$ 的解. 因此, 求解方程组 $x' = Ax$, 矩阵 A 的特征值至关重要.

Def. 称 $\det(\lambda I - A) = 0$ 为 $x' = Ax$ 的特征方程, 它的根称为方程组的特征根.

Thm. 若 $n \times n$ 实矩阵 A 有 n 个线性无关的实特征向量 \vec{r}_k ($k = 1, 2, \dots, n$), 分别对应于 A 的(不同或相同的)实特征值 λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$). 则 $x' = Ax$ 有基本解组

$$\varphi_k(t) = e^{\lambda_k t} \vec{r}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$



Proof: $\varphi_k(t) = e^{\lambda_k t} \vec{r}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 是 $x' = Ax$ 的 n 个解, 要证它是基本解组, 只要证 Wronsky 行列式

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t)$$

在 $t = 0$ 处不等于 0. 因 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ 线性无关, 有

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](0) = \det(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \neq 0. \square$$

Remark: 设 λ 是系数矩阵 A 的重根, 而 \vec{r}_k ($k = 1, 2, \dots, m$) 是与 λ 对应的 m 个线性无关的特征向量. 则

$$e^{\lambda t} \vec{r}_k, (k = 1, 2, \dots, m)$$

是 $x' = Ax$ 的 m 个线性无关的解. 这一点与单个齐次线性微分方程的情况有很大区别.

Question. $n \times n$ 实矩阵A没有 n 个线性无关的实特征向量, 如何寻找 $x' = Ax$ 的基本解组?

A为 n 阶实矩阵, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ 是 $\det(\lambda I - A) = 0$ 的 k 重根, 则

$$(\lambda_0 I - A)\vec{r} = 0$$

的解集合是 \mathbb{R}^n 的 m 维子空间, 且 $m \leq k$. 称 k 为 λ_0 的代数重数, m 为 λ_0 的几何重数.

$$(\lambda_0 I - A)^k \vec{r} = 0$$

的解集合 V_{λ_0} 是 \mathbb{R}^n 的 k 维子空间, 称为 λ_0 的根子空间.

设 $\vec{r} \in V_{\lambda_0}$, 令

$$x(t) = e^{\lambda_0 t} \left(\mathbf{I} + t(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^{k-1} \right) \vec{r},$$

则

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda_0 e^{\lambda_0 t} \left(\mathbf{I} + t(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^{k-1} \right) \vec{r} \\ &+ e^{\lambda_0 t} \left((\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) + t(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^2 \cdots + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^{k-1} \right) \vec{r} \\ &+ e^{\lambda_0 t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^k \vec{r} = \mathbf{A}x(t). \end{aligned}$$



Thm. 若 $n \times n$ 实矩阵 A 有 m 个相异实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 其重数分别为 k_1, k_2, \dots, k_m , 且 $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. 记 V_j 为 λ_j 的根子空间(即 $(\lambda_j I - A)^{k_j} \vec{r} = 0$ 的解空间), 则

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m.$$

设 $\vec{r}_{j,1}, \vec{r}_{j,2}, \dots, \vec{r}_{j,k_j}$, V_j 的一组基($j = 1, 2, \dots, m$), 则

$$\varphi_{j,i} = e^{\lambda_j t} \left(I + t(A - \lambda_j I) + \dots + \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} (A - \lambda_j I)^{k_j-1} \right) \vec{r}_{j,i}$$

$$(j = 1, 2, \dots, m; \quad i = 1, 2, \dots, k_j)$$

为 $x'(t) = Ax(t)$ 的一个基本解组.



Remark: 若 $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$ 是实系数矩阵 A 的一对共轭复根,

$\vec{r}_{\pm} = \vec{r}_1 \pm i \vec{r}_2$ 是对应的特征向量 (这里 \vec{r}_1, \vec{r}_2 为实向量), 则

$$e^{\lambda_+ t} \vec{r}_+ = e^{(\alpha + i\beta)t} (\vec{r}_1 + i\vec{r}_2)$$

$$= e^{\alpha t} (\vec{r}_1 \cos \beta t - \vec{r}_2 \sin \beta t) + i e^{\alpha t} (\vec{r}_1 \sin \beta t + \vec{r}_2 \cos \beta t),$$

$$e^{\lambda_- t} \vec{r}_- = e^{(\alpha - i\beta)t} (\vec{r}_1 - i\vec{r}_2)$$

$$= e^{\alpha t} (\vec{r}_1 \cos \beta t - \vec{r}_2 \sin \beta t) - i e^{\alpha t} (\vec{r}_1 \sin \beta t + \vec{r}_2 \cos \beta t)$$

是方程组(9)的两个线性无关的复解. 由解的叠加原理,

$$\operatorname{Re}(e^{\lambda_+ t} \vec{r}_+) = e^{\alpha t} (\vec{r}_1 \cos \beta t - \vec{r}_2 \sin \beta t),$$

$$\operatorname{Im}(e^{\lambda_+ t} \vec{r}_+) = e^{\alpha t} (\vec{r}_1 \sin \beta t + \vec{r}_2 \cos \beta t)$$

是方程(9)的两个线性无关的实解. \square



例: 求解 $x' = Ax$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

解: A 有复特征根 $\lambda_{\pm} = 3 \pm 5i$. 对应的特征向量 $\vec{r}_{\pm} = (1, \pm i)^T$.

$$\begin{aligned} e^{\lambda_+ t} \vec{r}_+ &= e^{(3+5i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{3t} (\cos 5t + i \sin 5t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 5t \\ -\sin 5t \end{pmatrix} + i e^{3t} \begin{pmatrix} \sin 5t \\ \cos 5t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

通解为 $x(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t \\ -c_1 \sin 5t + c_2 \cos 5t \end{pmatrix}$. \square



例: 求微分方程组 $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = z + x, \\ z' = x + y, \end{cases}$ 满足初值条件 $x(0) = 1,$

$y(0) = 0, z(0) = 5$ 的特解.

解: 方程组的系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A 有特征值 λ_1

$= 2, \lambda_2 = -1$ (二重). 与 λ_1 对应的特征向量为 $\vec{r}_1 = (1, 1, 1)^T$,

与 λ_2 对应的两个线性无关的特征向量为 $\vec{r}_2 = (1, 0, -1)^T$,

$\vec{r}_3 = (0, 1, -1)^T$. 因此方程组的通解为

$$\varphi(t) = c_1 e^{2t} \vec{r}_1 + c_2 e^{-t} \vec{r}_2 + c_3 e^{-t} \vec{r}_3.$$



解满足初值条件 $\varphi(0) = (1, 0, 5)^T$, 则

$$c_1 \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_2 + c_3 \vec{r}_3 = (1, 0, 5)^T.$$

即 $(c_1 + c_2, c_1 + c_3, c_1 - c_2 - c_3)^T = (1, 0, 5)^T.$

解得 $c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = -2.$

所求特解为
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{-t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-t} \\ 2e^{2t} + 3e^{-t} \end{pmatrix}. \quad \square$$

除了特征法, 求解线性常微分方程组还常用消元法.
下面举例说明.

例: 求解微分方程组
$$\begin{cases} x'(t) = -3x - y, \\ y'(t) = x - y. \end{cases}$$

解: 由第一个方程得 $y = -3x - x'.$

两边对 t 求导得 $y' = -3x' - x''.$

上面两式代入方程组的第二个方程得 $x'' + 4x' + 4x = 0.$

$\lambda = -2$ 为特征方程为 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ 的 2 重根, 因而

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}, \quad y = -3x - x' = -(c_1 + c_2 + c_2 t)e^{-2t}.$$

于是原方程组的通解为

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t} \\ y(t) = -(c_1 + c_2 + c_2 t)e^{-2t} \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \square$$



6. 以方程组的观点看 n 阶线性ODE

记 $y_1 = x, y_2 = x', \dots, y_n = x^{(n-1)}$, 则 n 阶线性方程

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \quad (4)$$

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \quad (5)$$

可以化为

$$y' = A(t)y \quad (6)$$

$$y' = A(t)y + g(t). \quad (7)$$

$$\text{其中 } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix},$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T, \quad g(t) = (0, 0, \dots, 0, f(t))^T.$$

Remark: 若 $A(t) = A$ 为常系数矩阵时,

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n.$$

也就是说 $\det(\lambda I - A) = 0$ 就是原 n 阶常系数线性 ODE

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0$$

的特征方程.

Remark: $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 是 (4) 的解空间的一组基

$$\Leftrightarrow \Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \text{ 是 (6) 的基解矩阵.}$$

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \quad (4)$$

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \quad (5)$$

Thm. 设 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 是齐次方程(4)在区间 I 上的一个基本解组, 则非齐次方程(5)的通解为

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) + x_0(t),$$

其中 c_1, c_2, \dots, c_n 为任意常数, 而

$$x_0(t) = \sum_{k=1}^n \left[\varphi_k(t) \cdot \int_{t_0}^t \frac{W_k(s)}{W(s)} f(s) ds \right]$$

是(5)的一个特解. 这里, $W(s)$ 为 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 的 Wronsky 行列式, $W_k(s)$ 是 $W(s)$ 的第 n 行第 k 列元素的代数余子式.

Proof: 令 $y_1 = x, y_2 = x', \dots, y_n = x^{(n-1)}$, 则 $(4) \Leftrightarrow y' = A(t)y$,
 $(5) \Leftrightarrow y' = A(t)y + g(t)$. $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 为 (4) 的基本解组, 则

$$\Phi(t) \triangleq \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

是 $y' = A(t)y$ 的基本解矩阵. $y' = A(t)y + g(t)$ 的通解为

$$y(t) = \Phi(t)c + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)g(s)ds,$$

其中 $c \in \mathbb{R}^n$ 为任意常向量. 上式中取第一个分量, 得

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) + x_0(t),$$

其中 c_1, c_2, \dots, c_n 为任意常数, $x_0(t)$ 为

$$\begin{aligned}
& \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) g(s) ds \\
&= \int_{t_0}^t \frac{\Phi(t)}{W(s)} \begin{pmatrix} * & \dots & * & W_1(s) \\ * & \dots & * & W_2(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & W_n(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds \\
&= \int_{t_0}^t \frac{\Phi(t)}{W(s)} (W_1(s), W_2(s), \dots, W_n(s))^T f(s) ds
\end{aligned}$$

的第一个分量, 即

$$x_0(t) = \sum_{k=1}^n \left[\varphi_k(t) \cdot \int_{t_0}^t \frac{W_k(s)}{W(s)} f(s) ds \right]. \quad \square$$

Remark: 令 $y_1 = x, y_2 = x', \dots, y_n = x^{(n-1)}$, 化 n 次微分方程(4)(5)为方程组(6)(7). 设 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 为(4)的基本解组, 则

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

是方程组(6)的基本解矩阵. 而(7)的通解必定形如

$$y(t) = \Phi(t)u(t),$$

其中 $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$. 代入方程组(7)得:

$$\Phi(t)u'(t) = g(t).$$

将上式按分量写出来, 即

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 u_1' + \varphi_2 u_2' + \cdots + \varphi_n u_n' \equiv 0, \\ \varphi_1' u_1' + \varphi_2' u_2' + \cdots + \varphi_n' u_n' \equiv 0, \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)} u_1' + \varphi_2^{(n-2)} u_2' + \cdots + \varphi_n^{(n-2)} u_n' \equiv 0, \\ \varphi_1^{(n-1)} u_1' + \varphi_2^{(n-1)} u_2' + \cdots + \varphi_n^{(n-1)} u_n' \equiv f. \end{array} \right. \quad (8)$$

用常数变易法解高阶非齐次线性方程(5)时, 设(5)有解

$$x(t) = u_1(t)\varphi_1(t) + u_2(t)\varphi_2(t) + \cdots + u_n(t)\varphi_n(t),$$

其中 $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)$ 待定, 且满足方程组(8). 由(8)中 n 个方程就可以确定 n 个未知函数 $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)$, 从而求出非齐次方程(5)的通解. \square

回忆第二节中用常数变易法求二阶非齐次方程时
曾假设非齐次方程的通解

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t),$$

满足条件

$$c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) \equiv 0.$$

上面的分析说明, 这一假设条件是必要的.



作业：习题7.6 No. 1-2

