

学会应试还是很重要的

SE LGJ

2019 年 12 月 11 日

这些只局限于本人学校高等数学考试的考试难度 (根据往年经验来看的话)

处理微积分的技巧有很多, 这里我们只讨论最常见的几种

1. 部分分式理论

给定真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $Q(x)$ 是 n 次多项式, 且 $Q(x)$ 总可分解为: $Q(x) = b_0(x-a)^\alpha \cdots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\lambda \cdots (x^2+rx+s)^\mu$, (其中 $p^2-4q < 0, \cdots, r^2-4s < 0$), 那么真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可以分解成如下部分分式之和:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \cdots + \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^\lambda} + \cdots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{x^2+px+q} + \cdots + \frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^\mu} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}} + \cdots + \frac{R_\mu+S_\mu}{x^2+rx+s}$$

其中 $A_i, \cdots, B_i, M_i, N_i, \cdots, R_i, S_i$ 都是常数.

可见有理函数的积分可化为如下四种类型的积分:

$$\int \frac{A}{x-a} dx \quad \int \frac{A}{(x-a)^n} dx \quad \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx \quad \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$$

三角函数有理式的不定积分 万能代换公式: 令 $u = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, dx = \frac{2du}{1+u^2}$ 从而有 $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2du}{1+u^2}$, 将原式化为有理函数的积分

无理函数不定积分 这里我们只讨论简单无理函数的积分

$$(1). \int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \cdots \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$$

令 $t^N = \frac{ax+b}{cx+d}$ (N 为 n_1, \cdots, n_k 的最小公倍数)

$$(2). \int R(\sqrt{a-x}, \sqrt{b-x}) dx$$

令 $\sqrt{a-x} = \sqrt{b-a} \tan u$

$$(3). \int R(\sqrt{x-a}, \sqrt{b-x}) dx$$

令 $\sqrt{x-a} = \sqrt{b-a} \sin u$

$$(4). \int R(\sqrt{x-a}, \sqrt{x-b}) dx$$

令 $\sqrt{x-a} = \sqrt{b-a} \sec u$

下面是一部分练习题, 已获授权

1. $\int \frac{1}{5x+3} dx$ 2. $\int e^{2x+3} dx$ 3. $\int x e^{x^2} dx$ 4. $\int x \sqrt{1-x^2} dx$ 5. $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$ 6. $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ 7. $\int \frac{1}{x(1+x^6)} dx$ 8. $\int \cos(2x) dx$
9. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}} dx$ 10. $\int \tan^4 x dx$ 11. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$ 12. $\int \frac{1}{1+e^x} dx$ 13. $\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ 14. $\int \frac{1}{x(1+2 \ln x)} dx$ 15. $\int \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$
16. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$ 17. $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx$ 18. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ 19. $\int \sin^3 x dx$ 20. $\int \sin^5 x dx$ 21. $\int \cos^3 x dx$ 22. $\int \sin^4 x dx$ 23. $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$
24. $\int \sec x dx$ 25. $\int \sec^3 x \tan^5 x dx$ 26. $\int \tan^5 x \sec^4 x dx$ 27. $\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin x \cos x} dx$ 28. $\int \cos 3x \cos 2x dx$ 29. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$ 30. $\int \frac{1}{\sin 2x \cos x} dx$
31. $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ 32. $\int \frac{1+\ln x}{2+(x \ln x)^2} dx$
33. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1} dx$ 34. $\int \frac{x+1}{x^2-3x+1} dx$ 35. $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} dx$ 36. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx (a>0)$ 37. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$ 38. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$
39. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx$ 40. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ 41. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+2x-5}} dx$ 42. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx$
43. $\int \frac{1}{x^6(1+x^2)} dx$ 44. $\int \sqrt{1+\sqrt{x}} dx$ 45. $\int x \cos x dx$ 46. $\int x^2 \cos x dx$ 47. $\int x e^x dx$ 48. $\int x^2 e^x dx$ 49. $\int x^2 \cos^2 \frac{x}{2} dx$
50. $\int x \tan^2 x dx$ 51. $\int x \ln x dx$ 52. $\int \ln x dx$ 53. $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$ 54. $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$ 55. $\int \frac{x}{4+x^4} dx$
56. $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3} dx$ 57. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 58. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx$ 59. $\int x(1-2x)^{99} dx$ 60. $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx$ 61. $\int \frac{x^7}{x^4+2} dx$ 62. $\int (\arcsin x)^2 dx$
63. $\int \sec^3 x dx$ 64. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\tan x}{\ln(\cos x)} dx$ 65. $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$
66. $\int \frac{1}{2+\sin x} dx$ 67. $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$ 68. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta$ 69. $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$ 70. $\int \frac{x^3}{x^8-2} dx$ 71. $\int \arctan x dx$
72. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1} dx$

鉴于本人水平有限, 难免有疏漏, 欢迎讨论指正。