

## 练习卷

### 一. 填空题:

1. 已知  $\overset{\leftarrow}{a} \cdot \overset{\leftarrow}{b} = \sqrt{2}$  且  $\left| \overset{\leftarrow}{a} \times \overset{\leftarrow}{b} \right| = 2$  那么  $\left| \overset{\leftarrow}{a} \right|^2 \cdot \left| \overset{\leftarrow}{b} \right|^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
2. 二阶常系数齐次线性常微分方程  $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$  的通解是  $\underline{\hspace{2cm}}$
3. 由  $xoy$  平面区域  $D$  为底, 任意连续曲面  $z = f(x, y)$  为顶的曲顶柱体的体积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 二重积分  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x+y) dx dy$  的值等于  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 对弧长的曲线积分  $\oint_{|x|+|y|=1} (|x| + |y|) ds$  的值等于  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 函数  $z = x \ln(xy)$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
7.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{1-xy}-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$
8. 微分方程  $y'' - 2y' = 0$  的通解是  $\underline{\hspace{2cm}}.$
9. 设  $\Gamma$  为螺旋线  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$  上相应于  $t$  从  $0$  到  $2\pi$  的一段弧, 则  $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}.$
10. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的必要条件是  $\underline{\hspace{2cm}}.$
11. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{2-e^{x^2 y^2}} - 1}$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}.$
12. 设  $L$  为直线  $y = x$  上从  $(0,0)$  到  $(1,1)$  的一段, 则  $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \underline{\hspace{2cm}}.$
13. 微分方程  $y'' - 3y' - 10y = 0$  的通解为  $\underline{\hspace{2cm}}.$
14.  $y = x^2$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  所围图形绕  $x$  轴旋转生成的旋转体的体积为  $\underline{\hspace{2cm}}.$
15. 交换二次积分  $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$  的积分次序后, 变为  $\underline{\hspace{2cm}}$

## 二. 选择题:

1.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  的值等于 ( )  
(A) 0; (B) 1; (C)  $\ln 2$ ; (D)  $-\ln 2$ .

2. 已知幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$  在  $x=0$  处收敛, 在  $x=2$  处发散。

那么, 该幂级数的收敛域是 ( )

- (A)  $(0, 2)$ ; (B)  $(0, 2]$ ; (C)  $[0, 2)$ ; (D)  $[0, 2]$ .

3. 已知交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ , 那么, 根据莱布尼兹判别法, 该级数 ( )  
(A) 绝对收敛; (B) 发散; (C) 无法判定; (D) 条件收敛.

4. 一阶变量可分离的常微分方程  $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$  满足  $y(0) = -1$  的特解为 ( )

- (A)  $e^{x+y} = 1$ ; (B)  $e^x + e^y = 1$ ;  
(C)  $e^x + e^{-y} + e + 1 = 0$ ; (D)  $e^x + e^{-y} - e - 1 = 0$ .

5. 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 13$  在点  $P_0(1, 2, 3)$  处的切平面和法线方程分别为 ( )

- (A)  $x+2y+3z=14$  和  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ ;

- (B)  $2x+y+3z=14$  和  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ ;

- (C)  $x+2y+3z=28$  和  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ ;

- (D)  $3x+2y+z=14$  和  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ .

6. 经过点  $A(1, 2, 3)$ , 法向量为  $\vec{n} = (3, 2, 1)$  的平面方程是

- (A)  $3(x-1) + 2(y-2) + (z-3) = 0$ ; (B)  $(x-3) + 2(y-2) + 3(z-1) = 0$ ;

$$(C) \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}; \quad (D) \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

7. 将曲线  $\begin{cases} y = \sqrt{\sin x}, \\ z = 0 \end{cases}$ , ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) 绕着  $x$  轴旋转一周所形成的旋转曲面的方程为

$$(A) y^2 = \sin x; \quad (B) y^2 + z^2 = \sin x; \quad (C) y^2 + z^2 = \sin(x^2); \quad (D) y = \sin(\pm\sqrt{x^2 + z^2}).$$

8. 设  $I_1 = \iint_D \sin(x+y) dx dy$ ,  $I_2 = \iint_D (x+y) dx dy$ ,  $I_3 = \iint_D \ln(x+y) dx dy$ , 其中  $D$  由

$x=0$ ,  $y=0$ ,  $x+y=\frac{1}{2}$  和  $x+y=1$  所围成, 则  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , 的大小顺序为

$$(A) I_1 \leq I_2 \leq I_3; \quad (B) I_2 \leq I_3 \leq I_1; \quad (C) I_3 \leq I_2 \leq I_1; \quad (D) I_3 \leq I_1 \leq I_2.$$

9. 设平面闭区域  $D$  的正向边界闭曲线为  $L$  (分段光滑), 根据格林公式, 下列各式中错误的是

$$(A) -\iint_D 2e^y dx dy = \oint_L e^y dx - xe^y dy; \quad (B) \iint_D 2e^y dx dy = \oint_{L^-} e^y dx - xe^y dy;$$

$$(C) \iint_D \cos y dx dy = \oint_L \cos y dx + \sin y dy; \quad (D) \iint_D \sin y dx dy = \oint_L \cos y dx + \sin y dy.$$

10. 对于级数(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与级数(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ , 当  $u_n \leq v_n$  时, 可得如下结论

- (A) 如果级数(1)收敛, 那么级数(2)也收敛; (B) 如果级数(2)收敛, 那么级数(1)也收敛;  
 (C) 如果级数(1)发散, 那么级数(2)也发散; (D) 以上说法都不对.

11. 抛物线  $\begin{cases} z = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3} \\ y = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转一周形成的旋转曲面为 ( ) .

$$(A) x^2 + y^2 + 1 = -3z; \quad (B) x^2 + y^2 - 1 = -3z;$$

$$(C) x^2 + y^2 + 1 = 3z; \quad (D) x^2 + y^2 - 1 = 3z.$$

12. 微分方程  $2y'' + y' = 3x^2 + 1$  的特解  $y^*$  可设为 ( ) .

$$(A) x(Ax^2 + Bx + C); \quad (B) x(Ax^2 + B);$$

$$(C) Ax^2 + Bx + C; \quad (D) Ax^2 + B.$$

13. 直线  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-4}$  与平面  $x + y + z = 1$  的关系是 ( ) .

- (A) 平行; (B) 直线在平面上; (C) 垂直; (D) 相交但不垂直.

14.  $\oint_L (x-2y)dx + (4x+3y)dy = -9$ , 其中  $L$  是  $xoy$  平面上沿顺时针方向绕行的简单闭曲线, 则  $L$  所围成的平面闭区域  $D$  的面积等于 ( ) .

- (A) 1; (B) 2; (C)  $\frac{3}{2}$ ; (D)  $\frac{1}{2}$ .

15. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2} (x-1)^n$  的收敛域为( ).

- (A)  $(0, 2)$ ; (B)  $(0, 2]$ ; (C)  $[0, 2)$ ; (D)  $[0, 2]$ .

### 三. 计算题:

1. 已知  $z = e^{(x+y)} \sin(x-y)$ , 求 (1)  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ; (2)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

2. 计算二重积分  $\iint_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 2} e^{x^2 + y^2} dx dy$

3. 计算对弧长的曲线积分  $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds$ , 其中  $L$  为椭圆曲线:

$3x^2 + 4y^2 = 12$ , 其周长为常数  $a$ 。

4. 计算对坐标的曲线积分  $\oint_L xy dx$ , 其中  $L$  是沿曲线  $x = y^2$  从点  $A(1, -1)$  到点  $B(1, 1)$  的有向弧段。

5. 已知三个正数  $x, y, z$  之和等于 12, 求三个正数之积  $w = xyz$  的最大值。

6. 计算曲线积分  $\int_{(0, 0)}^{(2, 2)} (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy$  的值。

7. 已知幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$

求 (1) 收敛半径  $R$ ; (2) 收敛域。

8. 求微分方程满足所给初始条件的特解  $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5$ ,  $y \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -4$ .

9. 求过点  $(-2, 3, 1)$  且与直线  $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$  平行的直线方程。

10. 求函数  $z = x^y + y \sin x$  在点  $(1, 2)$  处的全微分。

11. 计算  $\iint_D xy d\sigma$ , 其中  $D$  由两条抛物线  $y = x - x^2$ ,  $y = x^2$  所围成的闭区域.
12. 证明曲线积分  $\int_{(0,0)}^{(1,2)} (x^2 + 2xy^3)dx + (3x^2y^2 - 2y)dy$  在整个  $xoy$  面内与路径无关, 并计算积分值.
13. 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$  是否收敛. 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?
14. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} (x-2)^n$  的收敛半径及收敛域.
15. 由方程  $e^{2z} - xyz = 1$  所确定的隐函数为  $z = f(x, y)$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, dz$
16. 计算  $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$ ,  $x = y^2$  所围成的闭区域.
17. 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$ .
18. 求微分方程  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x}$  满足初始条件  $y(\pi) = \pi$  的特解.
19. 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{(\ln 10)^n}$  是否收敛, 若收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?
20.  $L$ : 从点  $(0,0)$  到点  $A(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  的任一有向曲线, 证明曲线积分  $\int_L e^x (\cos y dx - \sin y dy)$  在整个  $xoy$  面内与路径无关, 并计算积分值.
21. 求过点  $(2,1,1)$ , 平行于直线  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$  且垂直于平面  $x + 2y - 3z + 5 = 0$  的平面方程.

## 四、应用题

1. 求函数  $z = x^4 + y^4 - xy$  的极值.
2. 求由曲线 (星形线)  $\begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}$ , 其中  $a > 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , 所围平面图形的面积.
3. 计算由曲线  $y^2 = x$  和直线  $y = x - 2$  所围成的平面图形的面积.
4. 从斜边长为  $a$  的一切直角三角形中, 求周长最大的直角三角形两直角边的长.

5. 计算球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$  被圆柱面  $x^2 + y^2 = 1$  所截得的(含在圆柱面内的部分)  
立体的体积  $V$ .
6. 计算由抛物线  $y = 2 - x^2$  与直线  $y = x$  所围成的平面图形的面积.
7. 求内接于球  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , 且具有最大体积的长方体, 并求出相应的体积.

## 五. 证明题

1. 设数列  $u_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 1$ , 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (u_n + u_{n+1})$  收敛.