18-19-1 学期高数 A 期末练习卷参考答案

一．选择题:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
(A)	**(B)**	**(C)**	**(D)**	**(C)**	**(A)**	**(C)**
8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
(A)	**(C)**	**(B)**	**(D)**	**(A)**	**(B)**	**(B)**
15	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
(A)	**(C)**	**(C)**	**(B)**	**(A)**	**(B)**	

二．填空题

1．$\underline{-1}$　　**2.** $\underline{\frac{1}{2}}$　　**3.** $\underline{x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x})dx}$　　**4.** $\underline{y=-2\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})}$

5. $\underline{0}$　　**6.** $\underline{\frac{1}{2}}$　　**7.** $\underline{\frac{C}{1+x^2}}$

8．$\underline{0}$　　9．$\underline{-\frac{f'(x_0)}{2}}$　　10．$\boldsymbol{f'(e^{2x}-e^{-2x})(2e^{2x}+2e^{-2x})dx}$

11．$\boldsymbol{y^*=ax^2e^x}$　　12．$\boldsymbol{\frac{15}{2}\pi}$　　13．$(-1)^k$　　14．$\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$

15．$\underline{\frac{1}{6}}$　　16．$\underline{4f'(1)}$　　17．$\underline{\frac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}dx}$　　18．$\underline{\frac{1}{2}f^2(x)+C}$

19．$\underline{\frac{4}{3}}$　　20．$\underline{\frac{\pi}{2}(e^2-e^{-2})}$　　21．$\underline{\frac{1}{3}(y+1)^3=\sin x+C}$

三．计算题

1．解：$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$

2．解：方程两边关于 x 求导，得 $2xy+x^2y'-2e^{2y}y'=y'\cos y$，

所以，$y'=\frac{2xy}{2e^{2y}+\cos y-x^2}$

3．解：$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\int\ln x d\frac{1}{x}=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$

4. 解：$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dx^2}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{2}\arcsin x^2\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\pi}{12}$

5. 解：$\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\arctan(x+1)\Big|_{-1}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$

6. 解：令 $z=y'$，则原方程可化为 $z'-\frac{z}{x}=x^2$，

$$\therefore y'=z=e^{\int\frac{dx}{x}}(\int x^2e^{-\int\frac{dx}{x}}dx+C)=x(\int xdx+C)=\frac{1}{2}x^3+Cx$$

从而，原方程通解为 $y=\frac{1}{8}x^4+C_1x^2+C_2$.

7. 解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x^2}{\cos x}=1.$

8. 解：原式两边对 x 求导 $3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=3y+3x\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{y^2-x}$，故 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\frac{3}{2}}=-1$ ，

切线方程为 $x+y-3=0$；法线方程为 $y-x=0$.

9. 解：$\frac{dy}{dx}=\frac{(t-\arctan t)'}{\left[\ln(1+t^2)\right]'}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$$

10. 解：$\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\overset{t=\sqrt{x}}{=}\int_1^2\frac{\ln t^2}{t}\cdot2t\mathrm{d}t=4\int_1^2\ln t\mathrm{d}t=4(t\ln t\big|_1^2-\int_1^2 t\mathrm{d}\ln t)$

$=8\ln2-4\int_1^2\mathrm{d}t=8\ln2-4$.

11. 解：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+5}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+4x+5}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+5}dx$

$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+4x+5}dx=\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^0\frac{1}{(x+2)^2+1}dx=\lim\limits_{t\to-\infty}\arctan(x+2)\Big|_t^0$

$=\arctan2-\lim\limits_{t\to-\infty}\arctan(t+2)=\arctan2+\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+5}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1}{(x+2)^2+1}dx=\lim_{t\to+\infty}\arctan(x+2)\Big|_0^t$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\arctan(t+2)-\arctan 2=\frac{\pi}{2}-\arctan 2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+5}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+4x+5}dx+\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+5}dx=\pi$$

12. 解：(方法一) 此为标准的一阶线性非齐次方程，由公式可知方程的通解为：

$$y=e^{-\int-\frac{2}{x+1}dx}[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{\int-\frac{2}{x+1}dx}dx+C]=(x+1)^2[\int(x+1)^{\frac{1}{2}}dx+C]$$

$$=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}+C(x+1)^2$$

(方法二)或者使用常数变易法

13. 解： $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x+4})^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x+4})^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x\ln(1-\frac{2}{x+4})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+4}}=e^{-4}$.

14. 解： $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}(e^{t^2}-1)dt}{\sqrt{x^3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^x-1)}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{3x}=\frac{1}{3}$.

15. 解： $\int x\operatorname{arccot}x\,dx=\frac{1}{2}\int\operatorname{arccot}x\,dx^2=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arccot}x+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arccot}x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\arctan x+C$.

16. 解： $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}dx\overset{x=sint}{=}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2t\,d2t)$

$=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}})=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4})$.

17. 解： $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+t^2}\Big/\frac{t}{1+t^2}=\frac{1}{t}$， $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{t})=-\frac{1}{t^2}\Big/\frac{t}{1+t^2}=-\frac{1+t^2}{t^3}$.

18. 解： $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(\arctan x)^2}=\int_1^{+\infty}\frac{d\arctan x}{(\arctan x)^2}=-\frac{1}{\arctan x}\Big|_1^{+\infty}=\frac{2}{\pi}$.

19. 解：方程的特征方程为 $r^2-5r+6=0$，解得特征根 $r_{1,2}=2,3$

所以对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$，

又 $\lambda=1$ 不是单特征根，所以方程有形如 $y^*=(Ax+B)e^x$ 的特解.

将 y^* 代入原方程，解得 $A=\frac{1}{2}$， $B=\frac{3}{4}$.

所以，原方程的通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + (\frac{1}{2}x + \frac{3}{4})e^x$.

四．应用题

1. $A = 4\int_0^1 y dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3 t d\cos^3 t = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt = 12(I_4 - I_6) = \frac{3}{8}\pi$.

2. 等式两边关于 x 求导，得 $f'(x) - 2f(x) = 1$，且有 $f(0) = 0$,

$$\therefore\ f(x) = e^{2\int dx}(\int e^{-2\int dx} dx + C) = e^{2x}(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}$$

由 $f(0) = 0$，解得 $C = \frac{1}{2}$， 所以 $f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} - 1)$

3. 解：该曲线过原点的切线方程为 $y = ex$

所围成的平面图形的面积 $S = \int_0^1 (e^x - ex)dx = e^x - \frac{1}{2}ex^2\Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1$.

4. 解：设 BD 之间的距离为 xkm，则 AD 之间的距离和 CD 之间的距离分别为 $|AD| = \sqrt{x^2 + 20^2}, |CD| = 100 - x,$ 设公路运费为 a 元/公里，则铁路运费为 3/5a 元/公里，故从原料站 C 途经中转站 D 到工厂 A 的总费用为

$$y = \frac{3}{5}a(100 - x) + a\sqrt{x^2 + 20^2}, (0 \le x \le 400)$$

$$y' = -\frac{3}{5}a + \frac{ax}{\sqrt{x^2 + 20^2}} = \frac{a(5x - 3\sqrt{x^2 + 20^2})}{5\sqrt{x^2 + 20^2}}$$

$y' = 0$，可得 $a(5x - 3\sqrt{x^2 + 20^2}) = 0$，即 $x = 15$ 或 $x = -15$（舍去）

$x = 15$ 是唯一的驻点，故当 BD 间距离为 15km 时费用最省.

5. 解：因为 $y' = \frac{1}{2}x$，所以曲线在点 $(-2,1)$ 处的法线方程为 $y = x + 3$，

曲线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 与法线 $y = x + 3$ 的交点为 $(-2,1)$，$(6,9)$，

从而所围成的平面图形的面积 $S = \int_{-2}^{6}(x + 3 - \frac{1}{4}x^2)dx = \frac{64}{3}$.

6. 解： 等式两边求导，得 $2f(2x) = 8x^3 - 6x$，解得 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$，

令 $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0$，得 $x = \pm 1$， 又 $f(0) = 0$，$f(1) = -1$，$f(2) = 1$，

所以 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上的最大值为 $f(2) = 1$，最小值为 $f(1) = -1$.

五．证明题

1. 证：令 $f(x)=xe^x-e^x+1\ (-\infty<x<+\infty)$，则 $f'(x)=xe^x$，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，所以，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处取到最小值，从而 $f(x)\ge f(0)=0$，故不等式 $xe^x\ge e^x-1\ (-\infty<x<+\infty)$ 成立。

2. 证：令 $\varphi(x)=(x-1)f(x)$，得 $\varphi(1)=0,\varphi(0)=-f(0)=0$，
   则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件，
   故在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使得 $\varphi'(\xi)=0$。
   又 $\varphi'(x)=(x-1)f'(x)+f(x)$，由 $\varphi'(\xi)=0$ 得，$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{1-\xi}$.

3. 证：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 及最小值 m
   从而有 $m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx$，
   又 $g(x)>0$，所以 $\int_a^b g(x)dx>0$，从而有 $m\le\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M$
   由连续函数的介值定理知，在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得
   $f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$，即有 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.