

Review

- n 阶线性ODE解的结构

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0 \quad (1)$$

的解集合是一个 n 维线性空间.

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = f(t) \quad (2)$$

的通解为 $x(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t),$

其中 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 为(1)的 n 个线性无关的解, $\varphi_0(t)$ 为(2)的一个特解.

- 2阶线性ODE的常数变易法



§ 4. 高阶ODE的降阶与幂级数解法

1. 可降阶的ODE

1) 方程不显含未知函数 x : $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(n)}) = 0$

令 $y = x^{(k)}$, 则方程降为关于 y 的 $n-k$ 阶方程

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n-k)}) = 0$$

例: 求 $y^{(5)} - \frac{1}{x} y^{(4)} = 0$ 的通解.

解: 方程不显含未知函数 y . 令 $u = y^{(4)}$, 则原方程化为

$$u' - \frac{1}{x} u = 0, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}.$$

于是, $u = y^{(4)} = cx, c \in \mathbb{R}.$

逐次积分得 $y = c_1 x^5 + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5,$

$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}. \square$

2)方程不显含自变量 t : $F(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$

令 $y = x'$, 视 y 为新未知函数, 视 x 为新自变量, 则

$$x' = y,$$

$$x'' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y \frac{dy}{dx},$$

$$x''' = \frac{d}{dt} \left(y \frac{dy}{dx} \right) = y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{dt} = y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y^2 \frac{d^2 y}{dx^2},$$

\vdots

原方程降为关于 $y(x)$ 的 $n-1$ 阶方程

$$G \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = 0.$$



例: 求 $xx'' + (x')^2 = 0$ 的通解.

解: 方程不显含自变量 t . 令 $y = x' = \frac{dx}{dt}$, 则

$$x'' = \frac{d}{dt}(x') = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y \frac{dy}{dx}.$$

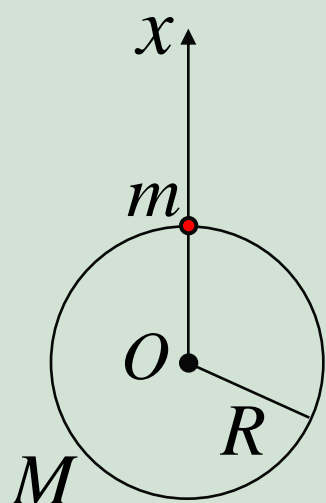
于是原方程化为 $xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$,

即 $x \frac{dy}{dx} + y = 0$ (隐含 $y = 0$).

求解得 $xy = c$, 即 $xx' = c$ ($dx^2 = \frac{c}{2} dt$).

故原方程的通解为 $x^2 = c_1 t + c_2$. \square

例:第二宇宙速度(发射人造卫星的最小速度)



设人造卫星在 t 时刻的位移为 $x(t)$

受力分析: 忽略空气阻力

$$\text{地球引力 } F = \frac{-kMm}{x^2}$$

$$\text{运动方程: } \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-kM}{x^2} \\ x(0) = R, x'(0) = v_0 \end{cases}$$

这是一个不显含自变量 t 的微分方程, 称为**自治方程**. 若令 $v = dx/dt$, 并以 v 为新的未知函数, 而视 x 为新自变量, 则方程可降低一阶. 事实上,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

原方程化为 $v \frac{dv}{dx} = -\frac{kM}{x^2}$, 即 $\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx} = -\frac{kM}{x^2}$. 故

$$\frac{1}{2} v^2(x) = \frac{kM}{x} + c$$

代入初值条件 $v(R) = v_0$, 得 $c = \frac{1}{2} v_0^2 - \frac{kM}{R}$, 即

$$\frac{1}{2} v^2(x) = \frac{kM}{x} + \frac{1}{2} v_0^2 - \frac{kM}{R}$$



由 $v(x) \geq 0$ 得 $\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{kM}{R} \geq 0$. 故第二宇宙速度为

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{2kM}{R}} \\ &= \sqrt{2gR} \\ &\approx 11.2 \times 10^3 \text{ m/s}. \square \end{aligned}$$

地球表面重力加速度

$$g = \frac{kM}{R^2} \approx 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$R \approx 63 \times 10^5 \text{ m}$$



3) m 次齐次方程 (m 为正整数): $F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$

其中, $F(t, kx, kx', \dots, kx^{(n)}) = k^m F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \forall k \neq 0$.

因为 $x^{-m} F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = F(t, 1, \frac{1}{x} x', \dots, \frac{1}{x} x^{(n)})$,

原方程等价于

$$F(t, 1, \frac{1}{x} x', \dots, \frac{1}{x} x^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

令 $u = u(t) = \frac{1}{x} x'$, 则

$$x' = xu, \quad x'' = xu^2 + xu' = x(u^2 + u'),$$

$$x''' = x(u^3 + 3uu' + u''), \quad \dots$$

代入(1), 所得方程比原方程低一阶.



例: 求 $x^2 y \frac{d^2 y}{dx^2} - (y - x \frac{dy}{dx})^2 = 0$ 的通解.

解: 这是一个2次齐次方程. 令 $u(x) = \frac{1}{y} y'$, 则

$$y' = yu, y'' = y'u + yu' = y(u^2 + u').$$

原方程化为 $x^2 y^2 (u^2 + u') - (y - xyu)^2 = 0$.

$y = 0$ 为平凡解. $y \neq 0$ 时, 得一阶线性方程

$$x^2 u' + 2xu - 1 = 0, \text{ 即 } u' + \frac{2u}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

求解该方程得 $u = \frac{1}{y} y' = \frac{1}{x^2} (c + x).$

分离变量积分得原方程的通解为 $y = c_1 x e^{\frac{c_2}{x}}$. \square

4)*齐次线性方程: 若已知

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0 \quad (2)$$

的 k 个线性无关的解 x_1, x_2, \cdots, x_k , 则可使方程降 k 阶.

令(2)的解为 $x = x_k y$, 则

$$x' = x'_k y + x_k y'$$

$$x'' = x_k y'' + 2x'_k y' + x''_k y$$

$$\vdots$$

$$x^{(n)} = x_k y^{(n)} + nx'_k y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} x''_k y^{(n-2)} + \cdots + x_k^{(n)} y$$

代入(2)得到

$$\begin{aligned} & x_k y^{(n)} + [nx'_k + a_1(t)x_k] y^{(n-1)} + \cdots \\ & + [x_k^{(n)} + a_1(t)x_k^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x_k] y = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

因为 x_k 为(2)的解,所以(3)中 y 的系数恒为0.

引入新的未知函数 $z = y'$,并在 $x_k \neq 0$ 的区间上用 x_k 除(3)的各项,得到 $n-1$ 阶齐次线性方程

$$z^{(n-1)} + b_1(t)z^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1}(t)z = 0 \quad (4)$$

(4)的解与(3)的解的关系是

$$z = y' = \left(\frac{x}{x_k} \right)', \text{ 即 } x(t) = x_k(t) \int z(t) dt,$$

且(4)有 $k-1$ 个线性无关解 $z_i = \left(\frac{x_i}{x_k} \right)', i = 1, 2, \cdots, k-1$.

事实上,我们有

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_{k-1} z_{k-1} \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \left(\frac{x_1}{x_k} \right)' + \lambda_2 \left(\frac{x_2}{x_k} \right)' + \cdots + \lambda_{k-1} \left(\frac{x_{k-1}}{x_k} \right)' \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \left(\frac{x_1}{x_k} \right) + \lambda_2 \left(\frac{x_2}{x_k} \right) + \cdots + \lambda_{k-1} \left(\frac{x_{k-1}}{x_k} \right) \equiv -\lambda_k (\in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_k x_k \equiv 0$$

而 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k$ 线性无关, 因此 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-1} = \lambda_k = 0$, 从而 $z_1, z_2, \cdots, z_{k-1}$ 线性无关.

例*: 设 $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ 有特解 $x_1 \neq 0$, 求其通解.

解: 设方程有解 $x = x_1 \int y(t) dt$, 则

$$x' = x_1 y + x_1' \int y, \quad x'' = x_1 y' + 2x_1' y + x_1'' \int y,$$

代入原方程得 $x_1 y' + [2x_1' + p(t)x_1]y = 0$.

解得

$$y = \frac{c_1}{x_1^2} e^{-\int p(t) dt}.$$

故原方程的通解为

$$x = x_1 \left[c_2 + c_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int p(t) dt} dt \right], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

例*: 已知 $x_1 = \frac{\sin t}{t}$ 是 $x'' + \frac{2}{t}x' + x = 0$ 的解, 求通解.

解: $p(t) = \frac{2}{t}$, 代入上例中(5)式得通解为

$$\begin{aligned} x &= x_1 \left[c_2 + c_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int p(t) dt} dt \right] \\ &= \frac{\sin t}{t} \left[c_2 + c_1 \int \frac{t^2}{\sin^2 t} e^{-\int \frac{2}{t} dt} dt \right] \\ &= \frac{\sin t}{t} \left[c_2 + c_1 \int \frac{1}{\sin^2 t} dt \right] = \frac{\sin t}{t} [c_2 - c_1 \cot t] \\ &= c_2 \frac{\sin t}{t} - c_1 \frac{\cos t}{t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad \square \end{aligned}$$



2*.二阶ODE的幂级数解法

Thm:若二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (6)$$

的系数 $p(x), q(x)$ 在区间 $|x - x_0| < r$ 可以展开成 $(x - x_0)$ 的幂级数,则(6)在 $|x - x_0| < r$ 内有收敛的幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

其中 c_0, c_1 是两个任意常数(它们可由初值条件决定,即 $c_0 = y(x_0), c_1 = y'(x_0)$),而 $c_n (n \geq 2)$ 可从 c_0, c_1 出发由递推公式确定.

例: 分别求方程 $x'' + x = 0$ 的满足初值条件 $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ 和 $x(0) = 0, x'(0) = 1$ 的解.

解: 设方程的通解为 $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$, 代入方程得

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = 0, \quad c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+1)}, \quad \forall n \geq 0.$$

当 $x(0) = 1, x'(0) = 0$ 时, $c_0 = 1, c_1 = 0$,

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}, c_{2n+1}(0) = 0, \quad x(t) = \cos t;$$

当 $x(0) = 0, x'(0) = 1$ 时, $c_0 = 0, c_1 = 1$,

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}, c_{2n}(0) = 0, \quad x(t) = \sin t. \square$$



例:求方程 $y' = y - x$ 的满足初值条件 $y(0) = 0$ 的解.

解:由前一定理, 方程在 \mathbb{R} 中有收敛的幂级数解, 设为

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

则
$$a_0 = y(0) = 0,$$

$$y' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots.$$

将 y 与 y' 的表达式代入方程, 比较 x 的同次幂的系数, 得

$$a_1 = a_0 = 0, a_2 = \frac{a_1 - 1}{2} = -\frac{1}{2}, a_n = \frac{a_n}{n} = -\frac{1}{n!}, n > 2.$$

故原方程的解为

$$y = -\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) = -e^x + 1 + x. \square$$

作业：习题7.3

