Review

Thm. (Cauchy-Picard)设$f(x,y)$在矩形

$$D=\{(x,y):|x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$$

中连续,并且关于变元y满足*Lipschitz*条件,则存在正数h,使得一阶常微分方程的初值问题

$$y'(x)=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

在$[x_0-h, x_0+h]$上存在唯一的解. 其中,

$$h=\min\{a, b/M\}, |f(x,y)|\le M, \forall (x,y)\in D.$$

● 解的存在唯一性定理的几何解释

Thm. 设$p(x), q(x)$在区间I上连续, $x_0 \in I$, 则对任意$y_0 \in \mathbb{R}$, 一阶线性常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = p(x)y + q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在整个区间I上存在唯一解.

Thm. 设函数$a_k(t)(k=1,2,\cdots,n)$和$f(t)$都在区间I上连续,$t_0\in I$,则对任意实数$\xi_k(k=0,1,\cdots,n-1)$,定解问题

$$\begin{cases} x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t) \\ x(t_0)=\xi_0, x'(t_0)=\xi_1,\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=\xi_{n-1} \end{cases}$$

在区间I上存在唯一解$x(t)$.

§2. 一阶ODE的初等解法

Leibnitz曾经专门从事利用变量替换的办法来解决一阶微分方程的求解问题, 而Euler则试图利用积分因子的办法统一处理这一问题. 但实践证明,单纯采用一种方法各有其不便和困难. 因此必须对具体问题具体分析.

能有初等解法的微分方程是很有限的, 例如形式上很简单的Riccati方程 $\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$

一般就没有初等解法.法国数学家Liouville在1841年证明了这一事实,这就促使人们寻求别的方法来研究微分方程的求解问题.

目的与要求

- 熟悉各种类型方程的解法,正确而又敏捷地判断一个给定的方程属于何种类型,从而循法求解.
- 学习解题技巧,总结经验,培养机智与灵活性.
- 善于根据方程的特点,引进适宜的变换,将方程化为能求解的新类型.

1.变量分离方程 ---------形如$\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,\quad \int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+c$$

例: $\dfrac{dy}{dx}=y^2\cos x,\ y(0)=1.$

解:分离变量, 得$\dfrac{1}{y^2}dy=\cos x dx.$

两边积分, 得$-\dfrac{1}{y}=\sin x+c.$通解为$y=-\dfrac{1}{\sin x+c}.$

令$x=0, y=1$得$c=-1.$故所求特解为$y=1/(1-\sin x).$

此外, 方程还有解$y\equiv 0$, 但不满足初值条件.□

2.可化为变量分离方程的类型

1)齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}=g\left(\dfrac{y}{x}\right)$

令 $u=\dfrac{y}{x}$,

则 $y=ux,\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$,

代入原方程得 $u+x\dfrac{du}{dx}=g(u)$

即 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{g(u)-u}{x}$

例: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}.$

解: 令$u=\dfrac{y}{x}$,则$y=ux,\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$.代入原方程得

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\tan u,\quad x\frac{du}{dx}=\tan u.$$

分离变量得 $\dfrac{\cos u\,du}{\sin u}=\dfrac{dx}{x}.$

两边积分得 $\ln|\sin u|=\ln|x|+c_1.$

整理得$\sin u=cx$,其中$c=\pm e^{c_1}\neq 0.$

此外, 方程还有解$\sin u=0$.故通解中允许$c=0$.

原方程的通解为 $\sin\dfrac{y}{x}=cx,c\in\mathbb{R}.\square$

2)形如$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$的方程

Case1. $c_1=c_2=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}=\frac{a_1+b_1\dfrac{y}{x}}{a_2+b_2\dfrac{y}{x}}=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Case2. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$,即$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=f(a_2x+b_2y)$$

令$u=a_2x+b_2y$,则方程化为$\dfrac{du}{dx}=a_2+b_2f(u)$.

Case3. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$且$c_1^2 + c_2^2 \neq 0$

两直线$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$相交于一点$(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

即$\begin{cases} a_1(x-\alpha) + b_1(y-\beta) = 0 \\ a_2(x-\alpha) + b_2(y-\beta) = 0 \end{cases}$

令$X = x - \alpha, Y = y - \beta$,则

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y} = g\left(\frac{Y}{X}\right)$$

例: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$

解:由$\begin{cases}x-y+1=0\\x+y-3=0\end{cases}$得$x=1,y=2$.令$\begin{cases}X=x-1\\Y=y-2\end{cases}$,则$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{X-Y}{X+Y}$.

令$u=\dfrac{Y}{X}$,即$Y=uX$,则 $X\dfrac{du}{dX}=\dfrac{1-2u-u^2}{1+u}$,

分离变量得 $$\frac{dX}{X}=\frac{1+u}{1-2u-u^2}du \qquad (*)$$

两边积分得 $$\ln X^2=-\ln\left|u^2+2u-1\right|+c_1,$$
$$X^2(u^2+2u-1)=c,c=\pm e^{c_1}\neq 0.$$

此外, 容易验证$u^2+2u-1-0$,也是$(*)$的解. 故通解中c可取任意常数. 代回原变量得原方程的通解
$$y^2+2xy-x^2-6y-2x=c,c\in\mathbb{R}.\square$$

3.一阶隐方程

1)$y=f(x,y')$　　2)$x=f(y,y')$

3)$F(x,y')=0$　　4)$F(y,y')=0$

1)$y=f(x,y')$(微分法)

令$p=y'$,则　　$y=f(x,p)$

两边对x求微分,得到关于$p'(x),p,x$的方程.

若求得其通解

$$p=u(x,c),$$

则原方程的通解为

$$y=f(x,u(x,c)).$$

例: $x(y')^2-2yy'+9x=0$

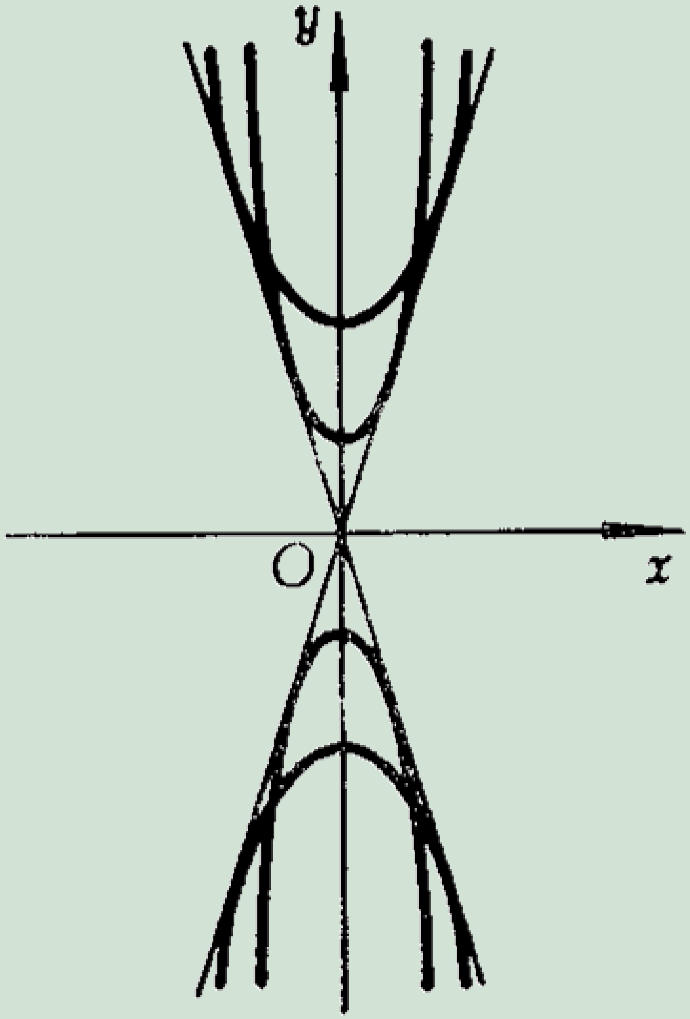
解: 令$p=y'$,则
$$y=\frac{9x}{2p}+\frac{xp}{2} \qquad (*)$$

两边对x求导,整理得
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{2p^2}\right)\left(p-x\frac{dp}{dx}\right)=0 \qquad (**)$$

它蕴含 $$\frac{dp}{dx}=\frac{p}{x} \quad 或 \quad p^2=9$$

由此得$(**)$的通解 $p=cx$和两个特解$p=3, p=-3.$

代入$(*)$得原方程的特解 $y=3x, y=-3x,$及通解
$$y=\frac{9x}{2p}+\frac{xp}{2}=\frac{9}{2c}+\frac{c}{2}x^2, \quad 0\neq c\in\mathbb{R}.\square$$



$$y = \frac{9}{2c} + \frac{c}{2} x^2,$$

$$y = 3x,$$
$$y = -3x,$$

包络

2) $x = f(y, y')$(微分法)

令 $p = y'$, 则

$$x = f(y, p)$$

两边对 y 求微分, 得到关于 $p'(y), y, p$ 的方程.

若求得其通解

$$p = u(y, c),$$

则原方程的通解为

$$x = f(y, u(y, c)).$$

3) $F(x,y')=0$(参数法)

令 $p=y'$，则 $F(x,p)=0$，它在 (x,p) 平面上一般表示若干条曲线. 设

$$x=g(t),\ p=h(t).$$

于是，

$$dy=p\,dx=h(t)g'(t)dt$$

因此原方程有通解

$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=\int h(t)g'(t)dt+C, \quad C\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

4) $F(y,y')=0$(参数法) 处理方法同 3)

例: $y^2+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=1$

解: 设$y=\cos t,\ p=\dfrac{dy}{dx}=\sin t,(-\infty<t<\infty)$.则

$$dx=\frac{1}{p}dy=\frac{1}{\sin t}d\cos t=-dt \qquad (*)$$

从而$x=-t+c$. 因此,原方程的通解为

$$x=-t+c,\ y=\cos t.$$

消去t,得 $y=\cos(c-x), c\in\mathbb{R}.$

原方程除了参数表达式(*)外, 还有 $y=\pm1,\dfrac{dy}{dx}=0,$

因此原方程还有两个特解$y=\pm1.$□

Remark:此方程满足初值条件$y(0)=1$的解不唯一,为

$y=1$或$y=\cos x$.是否与解的存在唯一性定理矛盾?

4.恰当方程

例: $y\cos x dx + \sin x dy = 0$

解: 视$y = y(x)$, 则

$$y d\sin x + \sin x dy = 0.$$

$$d(y\sin x) = 0.$$

通解为: $y\sin x = C.$ □

Remark.

$$ydx + xdy = d(xy) \qquad \frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{ydx - xdy}{xy} = d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right) \qquad \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}d\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)$$

Remark. 分项组合.

例: $\left(\cos x+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$

解: 把方程分项组合, 得

$$\cos xdx+\frac{1}{y}dy+\frac{ydx-xdy}{y^2}=0.$$

即

$$d\sin x+d\ln|y|+d\left(\frac{x}{y}\right)=0,$$

$$d\left(\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}\right)=0.$$

于是方程的通解为

$$\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}=c, c\in\mathbb{R}. \square$$

5.积分因子

例: $(x+y)dx+(y-x)dy=0$

解: 原方程等价于 $(xdx+ydy)+(ydx-xdy)=0.$

同乘(积分因子) $\dfrac{1}{x^2+y^2}$, 得 $\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0.$

即 $$\frac{1}{2}d\ln(x^2+y^2)+d\arctan\frac{x}{y}=0.$$

原方程的通解为 $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\dfrac{x}{y}=C, C\in\mathbb{R}.$ □

Remark: 先分组, 再找公共的积分因子, 往往能简化计算.

例: $(3x^3+y)dx+(2x^2y-x)dy=0$

解: 分组得 $(3x^3dx+2x^2ydy)+(ydx-xdy)=0.$

第二组有积分因子 $\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2},\frac{1}{x^2+y^2}$.如果同时照顾到第一组, 则$\frac{1}{x^2}$是两组公共的积分因子, 从而

$$(3xdx+2ydy)+\frac{ydx-xdy}{x^2}=0.$$

即 $$d\left(\frac{3}{2}x^2+y^2\right)-d\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

于是原方程的通积分为 $\frac{3}{2}x^2+y^2-\frac{y}{x}=C, C\in\mathbb{R}.$ □

6.常数变易法

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x) \qquad (1)$$

用分离变量法求得 $\frac{dy}{dx} = p(x)y$ 的解为

$$y(x) = Ce^{\int p(x)dx}.$$

设(1)的解为

$$y(x) = C(x)e^{\int p(x)dx},$$

代入(1)确定 $C(x)$ 得(1)的解

$$y = e^{\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int -p(x)dx}dx + C\right).\square$$

Remark:将$\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)$记为$y'(x)-p(x)y(x)=q(x)$.

两边乘$e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)dt}$得 $\left(y(x)e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)dt}\right)'=q(x)e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)dt}$

两边从x_0到x积分, 得

$$y(x)e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)dt}=y(x_0)+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}p(t)dt}ds,$$

于是

$$y(x)=e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\left(y(x_0)+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}p(t)dt}ds\right)$$

$$=y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{\int_{s}^{x}p(t)dt}ds. \square$$

例: $ydx+(y-x)dy=0$

解法一: 将方程改写为 $ydx-xdy=-ydy.$

左端有积分因子$\dfrac{1}{y^2},\dfrac{1}{x^2},\dfrac{1}{xy},\dfrac{1}{x^2\pm y^2}$, 但考虑到右端只与

y有关, 故取$\mu=\dfrac{1}{y^2}$. 方程两边同乘$\dfrac{1}{y^2}$, 得

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}+\frac{dy}{y}=0.$$

因而原方程的通解为 $\dfrac{x}{y}+\ln|y|=c, c\in\mathbb{R}.$

此外方程有特解 $y\equiv 0.$

解法二: 将方程改写为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x-y}$，这是齐次方程.

令$u=\dfrac{y}{x}$，得 $$\frac{1-u}{u^2}du=\frac{dx}{x}.$$

通解为 $$-\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|-c, c\in\mathbb{R}.$$

代回原来的变量即得 $$\frac{x}{y}+\ln|y|=c, c\in\mathbb{R}.$$

此外方程有特解 $$y\equiv 0.$$

解法三(常数变易法): 将方程改写为$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{y}-1.$

齐次方程$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{y}$的通解为$x=cy.$

设非齐次方程$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{y}-1$的通解为$x=c(y)y$,代入得

$$c'(y)y+c(y)=c(y)-1,\quad c'(y)=\frac{-1}{y},$$

$$c(y)=-\ln|y|+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

故原方程的通解为 $x=y(-\ln|y|+c),\quad c\in\mathbb{R}.$

此外方程有特解 $y\equiv 0.$□

7.Bernoulli方程 $\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)y^n, n\neq 0,1$

以y^{-n}乘方程两边, 得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=p(x)y^{1-n}+q(x),$$

令$z=y^{1-n}$, 则

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)p(x)z+(1-n)q(x),$$

这是关于z的一阶线性ODE,求出z, 从而得y.

此外, 若$n>0$, Bernoulli方程还有特解$y=0$.

例: $\dfrac{dy}{dx}=6\dfrac{y}{x}-xy^2$

解: 令$z=y^{-1}$,则 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{d(y^{-1})}{dx}=-\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx}.$

代入原方程, 得 $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{6}{x}z+x.$

这是线性方程, 其通解为 $z=\dfrac{c}{x^6}+\dfrac{x^2}{8},c\in\mathbb{R}.$

原方程的通解为 $\dfrac{1}{y}=\dfrac{c}{x^6}+\dfrac{x^2}{8},c\in\mathbb{R}.$

此外, $y=0$也是原方程的解.□

8.Riccati方程* $\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$

若我们有办法找到Riccati方程的一个特解$\varphi(x)$, 则经过变换$y = z + \varphi(x)$后, 方程就变为Bernoulli方程,因而可解. 事实上, 将$y = z + \varphi(x)$带入方程, 得

$$z' + \varphi' = pz^2 + 2p\varphi z + p\varphi^2(x) + qz + q\varphi + r.$$

由于$\varphi' = p\varphi^2(x) + q\varphi + r$, 我们得到z的Bernoulli方程

$$z' = pz^2 + (2p\varphi + q)z.$$

求出z,即得Riccati方程的通解$y = z + \varphi(x)$.

找Riccati方程的特解时,通常尝试指数函数, 幂函数, 三角函数, 常数函数等简单函数.

例: $y' + y^2 - 2y\sin x = \cos x - \sin^2 x$

解: 方程有特解$y = \sin x$. 令$y = z + \sin x$,代入方程,得

$$z' + z^2 = 0.$$

解得 $$z = \frac{1}{x+c}, c \in \mathbb{R}, \quad 或 \quad z = 0.$$

于是原方程的通解为

$$y = \sin x + \frac{1}{x+c}, c \in \mathbb{R}.$$

另有特解 $y = \sin x$.□

9.变量替换法

例: $$\frac{dy}{dx}+\frac{1+xy^3}{1+x^3y}=0$$

解: 令$u=x+y, v=xy$, 则

$$\frac{du}{dv}=\frac{dx+dy}{xdy+ydx}=\frac{1+\frac{dy}{dx}}{y+x\frac{dy}{dx}}=\frac{uv}{v^2-1}$$

$$\frac{2du}{u}=\frac{2vdv}{v^2-1}=\frac{d(v^2-1)}{v^2-1},\quad u^2=c(v^2-1), c\neq 0.$$

此外, $u=0$也是解. 故原方程的通解为

$$(x+y)^2=c(x^2y^2-1), c\in\mathbb{R}.\square$$

例: $x''(t)+x(t)=0$

解: 令$y(t)=-x'(t)$,则原方程化为$\begin{cases} x'=-y \\ y'=x \end{cases}$.

再令$x=r(t)\cos\theta(t), y=r(t)\sin\theta(t)$.则

$$\begin{cases} r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta = -r\sin\theta & (1) \\ r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta = r\cos\theta & (2) \end{cases}$$

$(1)\times\cos\theta+(2)\sin\theta$,得 $\quad r'=0,$

$(2)\times\cos\theta-(1)\sin\theta$,得 $\quad r\theta'=r.$

于是, $r=c_1\neq 0, \theta=t+c_2$,或$r=0,\theta=c$.

故原方程的通解为 $\quad x=c_1\cos(t+c_2), c_1, c_2\in\mathbb{R},$

也即 $\quad x=c_1\cos t+c_2\sin t, c_1, c_2\in\mathbb{R}.\square$

10.综合例题

例: 设$f \in C^1[0,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=0$, 证明

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

解: 令$g(x)=f(x)+f'(x)$, 则

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0, \text{且 } f(x)=e^{-x}\left(c+\int_0^x g(t)e^t dt\right).$$

由L′Hosptial法则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{c+\int_0^x g(t)e^t dt}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)e^x}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+f'(x)\right]=0. \square$$

例: 设$f(x), g(x)$和$y(x)$为$[a,b]$上的连续函数, $f(x)>0$, 且

$$y(x) \le g(x) + \int_a^x f(t)y(t)dt, \quad \forall x \in [a,b]. \qquad (1)$$

证明: $y(x) \le g(x) + \int_a^x f(t)g(t)e^{\int_t^x f(s)ds}dt, \forall x \in [a,b].$

解: 令$h(x) = \int_a^x f(t)y(t)dt$, 则$h(a)=0, h'(x) = f(x)y(x)$.

再由(1)及$f(x)>0$得, $h'(x) \le f(x)g(x) + f(x)h(x)$.即

$$h'(x) - f(x)h(x) \le f(x)g(x).$$

两边同乘非负函数$e^{\int_a^x -f(s)ds}$, 得

$$\left(h(x)e^{\int_a^x -f(s)ds}\right)' \le f(x)g(x)e^{\int_a^x -f(s)ds}.$$

$$\left(h(x)e^{\int_a^x -f(s)ds}\right)' \le f(x)g(x)e^{\int_a^x -f(s)ds}.$$

两边在$[a,x]$上积分, 并利用$h(a)=0$,得

$$h(x)e^{\int_a^x -f(s)ds} \le \int_a^x f(t)g(t)e^{\int_a^t -f(s)ds}dt,$$

即 $$h(x) \le \int_a^x f(t)g(t)e^{\int_t^x f(s)ds}dt.$$

于是 $$y(x) \le g(t)+h(t)$$

$$\le g(t)+\int_a^x f(t)g(t)e^{\int_t^x f(s)ds}dt.\square$$

例.（Gronwall不等式）已知$\alpha(t)\geq 0$及$u(t)$在$[t_0,t_1]$上连续, C,K为非负实数,且

$$u(t)\leq C+\int_{t_0}^{t}\left[\alpha(s)u(s)+K\right]ds,\quad \forall t\in[t_0,t_1].$$

证明： $$u(t)\leq[C+K(t-t_0)]e^{\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds},\quad \forall t\in[t_0,t_1].$$

Hint: Let $h(t)=C+\int_{t_0}^{t}\left[\alpha(s)u(s)+K\right]ds$, then

$$h'(t)=\alpha(t)u(t)+K\leq\alpha(t)h(t)+K.$$

作业：习题7.2 No.1-3(单)

补充题: 1.$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$

2.$(e^x+3y^2)dx+2xydy=0$

3.$x(4ydx+2xdy)+y^3(3ydx+5xdy)=0$

4.$(y-1-xy)dx+xdy=0$

5.$y'=(x-1)y^2+(1-2x)y+x$

6.$x^2y'+(xy-2)^2=0$

7.$y^2(xdx+ydy)+x(ydx-xdy)=0$

(提示:令$x=r(t)\cos\theta(t), y=r(t)\sin\theta(t)$)

答案:

1. $x^3+y^4+3x^2y^2=C$;

2. $(x^2-2x+2)e^x+x^3y^2=C$;

3. $x^4y^2+x^3y^5=C$;

4. $(xy+1)e^{-x}=C$;

5. $y=\dfrac{1}{x+Ce^x}+1, y=1$;

6. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{3x^2}{x^3+C}, y=\dfrac{1}{x}$;

7. $1+\dfrac{1}{y}+\dfrac{C}{\sqrt{x^2+y^2}}=0, y=0.$