18-19-1 学期高数 A 期末练习卷

一．选择题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin 3x}{x+\sin 3x}=(\quad)$.

   (A) 1　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) -1　(D) $-\dfrac{1}{2}$

2. 设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，其中 f 为连续函数，则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)=(\quad)$.

   (A) a^2　(B) $a^2 f(a)$　(C) 0　(D) $2af(a)$

3. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(0)}{\ln(1+3x)}=1$，则 $f'(0)=(\quad)$.

   (A) 6　(B) $\dfrac{1}{6}$　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

4. 设 $f(-x)=f(x)\ (-\infty<x<+\infty)$，且在 $(-\infty,0)$ 内，$f'(x)>0,\ f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内，有(　　).

   (A) $f'(x)>0,\ f''(x)<0$　(B) $f'(x)<0,\ f''(x)>0$

   (C) $f'(x)>0,\ f''(x)>0$　(D) $f'(x)<0,\ f''(x)<0$

5. 设 $f(x)$ 可导，则 $\int f'(\frac{3}{2}x)dx=(\quad)$.

   (A) $\dfrac{2}{3}f(x)+C$　(B) $\dfrac{3}{2}f(x)+C$　(C) $\dfrac{2}{3}f(\frac{3}{2}x)+C$　(D) $\dfrac{3}{2}f(\frac{3}{2}x)+C$

6. 已知 $a=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{1+x^2}dx$，$b=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}dx$，$c=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1+x^2}dx$，则有(　　).

   (A) $c<b<a$　(B) $a<c<b$　(C) $b<a<c$　(D) $c<a<b$

7. 微分方程 $y''-y=xe^x$ 有形如(　　)的特解.

   (A) $y^*=Axe^x$　(B) $y^*=(Ax+B)e^x$

   (C) $y^*=x(Ax+B)e^x$　(D) $y^*=x^2(Ax+B)e^x$

8. 当 $x\to 0$ 时 $(1-\cos x)\sin x$ 是 x^3 的（　　）

   (A) 同阶无穷小，但不是等价无穷小　(B)等价无穷小

   (C)高阶无穷小　(D)低阶无穷小

9. 下列结论中，正确的是(　　　)

(A) 极值点一定是驻点　　(B) 驻点一定是极值点

(C) 极值点可能不可导　　(D) 驻点可能不可导

10. 设 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=(x-1)(2x+1), x\in(-\infty,+\infty)$，则在 $(\frac{1}{2},1)$ 内 $f(x)$ 单调(　　　)

(A) 增加,曲线 $y=f(x)$ 为凹的　　(B) 减少,曲线 $y=f(x)$ 为凹的

(C) 减少,曲线 $y=f(x)$ 为凸的　　(D) 增加,曲线 $y=f(x)$ 为凸的

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x-x\sin\frac{1}{x} & x<0\\ x^2+1 & x\geq 0\end{cases}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　　)

(A)可去间断点　　(B)跳跃间断点　　(C)振荡间断点　　(D)连续点

12. 心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 的全长可用定积分表示为(　　　)

(A) $s=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$

(B) $s=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$

(C) $s=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$

(D) $s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$

13. 微分方程 $y''+6y'+13y=0$ 的通解是(　　　)

(A) $y=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$　　(B) $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

(C) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$　　(D) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$

14. 利用定积分的几何意义，求得 $\int_1^2\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$ 的值为(　　　)

(A) π　　(B) $\frac{\pi}{4}$　　(C) $\frac{\pi}{8}$　　(D) $\frac{\pi}{16}$

15. 下列各式中，正确的是（　　　）.

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{x}=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{-x}=-\mathrm{e}$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}$

16. 设 $f(x)=\ln(1-x^2)$，$g(x)=1-\cos 2x$，则当 $x\to 0$ 时，且 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　　）.

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 同阶非等价无穷小　　(D) 等价无穷小

17. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ 的间断点为 $x=1$、$x=2$，则（　　　）.

(A) $x=1$，$x=2$ 都是第一类间断点
(B) $x=1$，$x=2$ 都是第二类间断点
(C) $x=2$ 是第一类间断点，$x=1$ 是第二类间断点
(D) $x=1$ 是第一类间断点，$x=2$ 是第二类间断点

18. 设 e^{2x} 的麦克劳林公式为 $e^{2x}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o(x^n)$，则 $a_n=$（　　）.

(A) $\dfrac{2^n}{n}$　　(B) $\dfrac{2^n}{n!}$　　(C) $(-1)^n\dfrac{2^n}{n}$　　(D) $(-1)^n\dfrac{2^n}{n!}$

19. 设 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)\neq 0$，$f''(x_0)=0$，则（　　）.
(A) x_0 不是 $f(x)$ 的极值点　　(B) 点 $(x_0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
(C) x_0 是 $f(x)$ 的极值点　　(D) 点 $(x_0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

20. 下列微分方程中，（　　）是线性方程.

(A) $(y')^2+\dfrac{y}{x}=3\ln x$　　(B) $x^2y''+xy'+y=3x$

(C) $y'-\dfrac{2y}{x+1}=xy^2$　　(D) $y'=\dfrac{x+y}{2x-y}$.

二．填空题

1. 设 $x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases} a, & x<0 \\ 2x-1, & x\geq 0 \end{cases}$ 的连续点，则 $a=$ ________.

2. 已知 $x\to 0$ 时，$e^{ax^2}-1$ 与 $x\arctan\dfrac{x}{2}$ 是等价无穷小，则常数 $a=$______.

3. 设 $y=x^{\sin x}$，则 $dy=$ ____________.

4. 曲线 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos 2t \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程为____________________.

5. 函数 $f(x)=x(x+1)$ 在 $[-1,1]$ 上满足拉格朗日定理结论的 $\xi=$ ______.

6. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x}\right)^{2x}=e$，则 $a=$ ________.

7. 方程 $(1+x^2)dy+2xydx=0$ 的通解为 $y=$ ____________________.

8. 定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\dfrac{1-x}{1+x}dx$ 的值为____________.

9. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=$ ________.

10. 设 $f(u)$ 为可导函数，$y(x)=f(e^{2x}-e^{-2x})$，则 $\mathrm{d}y=$________________.

11. 微分方程 $y''-2y'+y=2e^{x}$ 的待定特解的形式为________________(设出特解形式即可,不需要求出具体的系数).

12. 由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=1,x=4,y=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为______________.

13. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 的麦克劳林展开式 $\dfrac{1}{1+x}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+R_n(x)$ 中 $a_k=$______________$(k=1,2,\cdots,n)$.

14. 不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{2x}}\mathrm{d}x=$______________.

15. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续，且 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{2x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，则 $a=$______.

16. 设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，则 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h}=$__________.

17. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+y}-xy=1$ 确定，则 $dy=$ ___________.

18. 已知 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)g(x)dx=$___________.

19. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x\sin^2 x+\cos^3 x)dx=$___________.

20. 曲线 $y=\ln x$ 与 $y=-1$，$y=1$ 以及 $x=0$ 所围图形绕 y 轴旋转而成的

   a) 旋转体体积为___________.

21. 方程 $(y+1)^2\dfrac{dy}{dx}-\cos x=0$ 的通解为______________________.

三．计算题

1. 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$.

2. 设 $x^2y-e^{2y}=\sin y$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

3. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^2}dx$.

4. 求定积分 $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

5. 求 $\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

6. 求方程 $y''-\frac{y'}{x}=x^2$ 的通解.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{\sin x}$.

8. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^3+y^3=3xy$ 所确定,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ 处的切线方程和法线方程.

9. 求由参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan t.\end{cases}$ 所确定的函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

10. 求定积分 $\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

11. 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$.

12. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

13. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x+4})^{2x}$.

14. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}(\mathrm{e}^{t^2}-1)dt}{\sqrt{x^3}}$.

15. 求不定积分 $\int x\,\mathrm{arccot}\,x\,dx$.

16. 求定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}dx$.

17. 设 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$，　求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$.

18. 求 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(\arctan x)^2}$.

19. 求方程 $y''-5y'+6y=x\mathrm{e}^x$ 的通解.

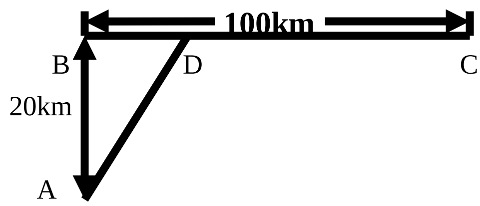
四．应用题

1. 求星形线 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 所围图形的面积.

2. 设 $f(x)$ 是连续函数，且满足 $f(x)-2\int_0^x f(t)dt=x$，求 $f(x)$.

3. 求由曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 下侧，该曲线过原点的切线的左侧，以及 y 轴右侧所围成的平面图形的面积.

4. 设工厂 A 到铁路线的垂直距离为 20km，垂足为 B。铁路线上距离 B 为 100km 处有一原料供应站 C，如图所示。现在要在铁路 BC 中间 D 处修建一个原料中转车站，再由车站 D 向工厂修一条公路。如果已知每公里的铁路运费与公路运费分别为 $3a,5a$ 元每公里（其中 a 为比例系数），那么，D 应该选在何处，才能使从原料供应站 C 运货到工厂 A 所需的运费最省？



5. 求曲线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 与其在点 $(-2,1)$ 处的法线所围的平面图形的面积.

6. 已知 $f(x)$ 为连续函数，且满足 $\int_0^{2x} f(t)dt=2x^4-3x^2$，求 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上的最大值与最小值.

五．证明题

1. 证明：$xe^x \ge e^x-1\ (-\infty<x<+\infty)$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，又 $f(0)=0$，证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{1-\xi}$.

3. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$，证明：在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.