Modèles de durée : TD et Examens

2024-11-11

Contents

1 Les méthodes semi-paramétriques

1.1 Le modèle de Cox

1.1.1 Lecture des données traitement de la base :

```
library(tidyverse)
Re = read.table("DATA/rossi.txt", header = TRUE)
glimpse(Re)

# Suppression de la variable race :
Re1 = Re[, -5]
```

1.1.2 Etude la durée de survie selon la valeur d'une variable. (test de log-Rank)

On regarde si les fonctions de survies des individus discriminés selon les modalités d'une variable, sont significativement similaires.

On effectue pour ça le test du log-rank à l'aide de la fonction Surv du package survival.

$$\begin{cases} H0 : \text{les fonctions de survie sont les mêmes, p-value} \geq 0.05 \\ H1 : \text{les fonctions de survie sont différentes} \end{cases}$$

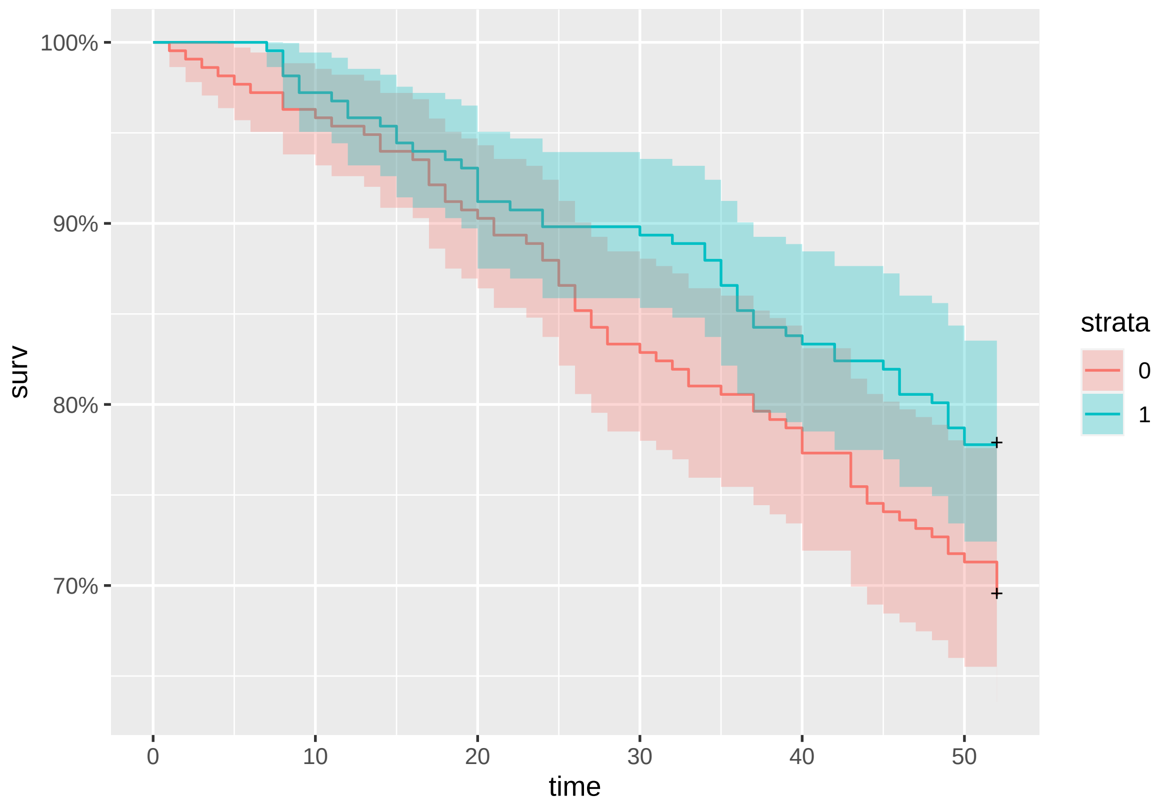
```
library(survival)
# Test sur la variable financement :
survdiff(Surv(week, arrest) ~ fin, data = Re1)
```

```
Call:
survdiff(formula = Surv(week, arrest) ~ fin, data = Re1)

        N Observed Expected (O-E)^2/E (O-E)^2/V
fin=0 216       66     55.6      1.96      3.84
fin=1 216       48     58.4      1.86      3.84

 Chisq= 3.8  on 1 degrees of freedom, p= 0.05
```

```
# Surv créer un objet avec week le temps de survie et arrest l'indicateur
# d'évènement. Fin est la variable servant à comparer les courbes.
```

1.1.3 Modélisation de Kaplan Meier :

```
# Modélisation de kaplan meier, distinction sur la variable financement
s = survfit(Surv(week, arrest) ~ fin, data = Re1)
library(ggfortify)
library(ggplot2)
autoplot(s)
```



1.1.4 Ajustement d'un modèle de Cox :

```
cox1 = coxph(formula = Surv(week, arrest) ~ fin + age + wexp + mar +
               paro + prio, data = Re1)
summary(cox1)
```

```
Call:
coxph(formula = Surv(week, arrest) ~ fin + age + wexp + mar +
    paro + prio, data = Re1)

  n= 432, number of events= 114

         coef exp(coef) se(coef)      z Pr(>|z|)
fin  -0.36554   0.69382  0.19090 -1.915  0.05552 .
age  -0.05633   0.94523  0.02189 -2.573  0.01007 *
wexp -0.15699   0.85471  0.21208 -0.740  0.45916
mar  -0.47130   0.62419  0.38027 -1.239  0.21520
paro -0.07792   0.92504  0.19530 -0.399  0.68991
prio  0.08966   1.09380  0.02871  3.123  0.00179 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

     exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
fin     0.6938     1.4413    0.4773    1.0087
age     0.9452     1.0579    0.9055    0.9867
wexp    0.8547     1.1700    0.5640    1.2952
mar     0.6242     1.6021    0.2962    1.3152
```

```
paro    0.9250     1.0810    0.6308    1.3564
prio    1.0938     0.9142    1.0340    1.1571

Concordance= 0.639  (se = 0.027 )
Likelihood ratio test= 32.14  on 6 df,   p=2e-05
Wald test            = 30.79  on 6 df,   p=3e-05
Score (logrank) test = 32.28  on 6 df,   p=1e-05
```

Explication du test :

$$\begin{cases} H0: \ \beta_j = 0, \text{Pr(>|z|), prob(|U|> z), où U} \quad \text{N(0,1)} \\ H1: beta_j \neq 0, \text{p-value} \leq 0.05 \end{cases}$$

Le se(coef) correspond au sqrt(var(beta)). On en déduit que les variables significatives sont l'âge et le prio.

1.1.5 Graphique de la fonction de survie :

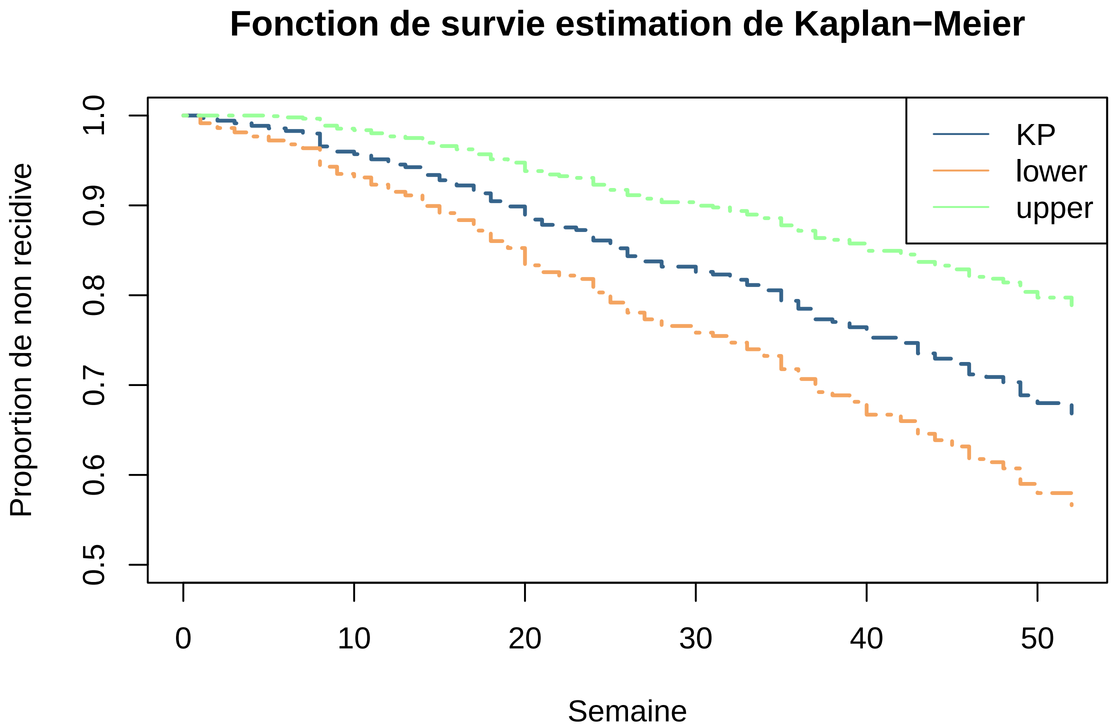
Dans le cadre des fonction de Kaplan Meier, Aalen par défaut les covariables sont fixées à la valeur moyenne.

```r
kpmr = survfit(cox1) # Fonction de survie de Kaplan-Meier pour le modèle de cox

summary(kpmr)
```

```
Call: survfit(formula = cox1)

 time n.risk n.event survival std.err lower 95% CI upper 95% CI
    1    432       1    0.997 0.00292        0.991        1.000
    2    431       1    0.994 0.00419        0.986        1.000
    3    430       1    0.991 0.00520        0.981        1.000
    4    429       1    0.989 0.00609        0.977        1.000
    5    428       1    0.986 0.00690        0.972        0.999
    6    427       1    0.983 0.00766        0.968        0.998
    7    426       1    0.980 0.00838        0.964        0.997
    8    425       5    0.966 0.01165        0.943        0.989
    9    420       2    0.960 0.01285        0.935        0.985
   10    418       1    0.957 0.01343        0.931        0.984
   11    417       2    0.951 0.01459        0.923        0.980
   12    415       2    0.945 0.01573        0.915        0.977
   13    413       1    0.943 0.01629        0.911        0.975
   14    412       3    0.934 0.01794        0.899        0.970
   15    409       2    0.928 0.01903        0.891        0.966
   16    407       2    0.922 0.02009        0.884        0.962
   17    405       3    0.913 0.02167        0.872        0.957
   18    402       3    0.905 0.02322        0.860        0.951
   19    399       2    0.899 0.02424        0.853        0.948
   20    397       5    0.884 0.02674        0.833        0.938
   21    392       2    0.878 0.02772        0.826        0.934
   22    390       1    0.875 0.02820        0.822        0.933
   23    389       1    0.873 0.02868        0.818        0.931
   24    388       4    0.861 0.03057        0.803        0.923
   25    384       3    0.852 0.03196        0.792        0.917
   26    381       3    0.843 0.03332        0.781        0.911
   27    378       2    0.838 0.03422        0.773        0.907
   28    376       2    0.832 0.03512        0.766        0.904
   30    374       2    0.826 0.03601        0.758        0.900
   31    372       1    0.823 0.03645        0.755        0.898
```

32	371	2	0.817	0.03732	0.747	0.894
33	369	2	0.811	0.03819	0.740	0.890
34	367	2	0.805	0.03906	0.732	0.886
35	365	4	0.794	0.04077	0.718	0.878
36	361	3	0.785	0.04202	0.707	0.872
37	358	4	0.773	0.04365	0.692	0.864
38	354	1	0.770	0.04405	0.689	0.862
39	353	2	0.764	0.04485	0.681	0.858
40	351	4	0.753	0.04641	0.667	0.849
42	347	2	0.747	0.04717	0.660	0.845
43	345	4	0.735	0.04867	0.646	0.837
44	341	2	0.729	0.04941	0.639	0.833
45	339	2	0.724	0.05014	0.632	0.829
46	337	4	0.712	0.05157	0.618	0.820
47	333	1	0.709	0.05191	0.614	0.818
48	332	2	0.703	0.05261	0.607	0.814
49	330	5	0.689	0.05430	0.590	0.804
50	325	3	0.680	0.05527	0.580	0.797
52	322	4	0.668	0.05653	0.566	0.789

```r
plot(
  kpmr,
  ylim = c(0.5, 1),
  lty = 5,
  xlab = 'Semaine',
  ylab = 'Proportion de non recidive',
  main = 'Fonction de survie estimation de Kaplan-Meier',
  col = palette_couleur[1:3],
  lwd = 2)

legend(
  "topright",  # Position de la légende
  lty = 1,
  cex = 1,
  legend = c("KP", "lower", "upper"),
  col = palette_couleur[1:3])
```

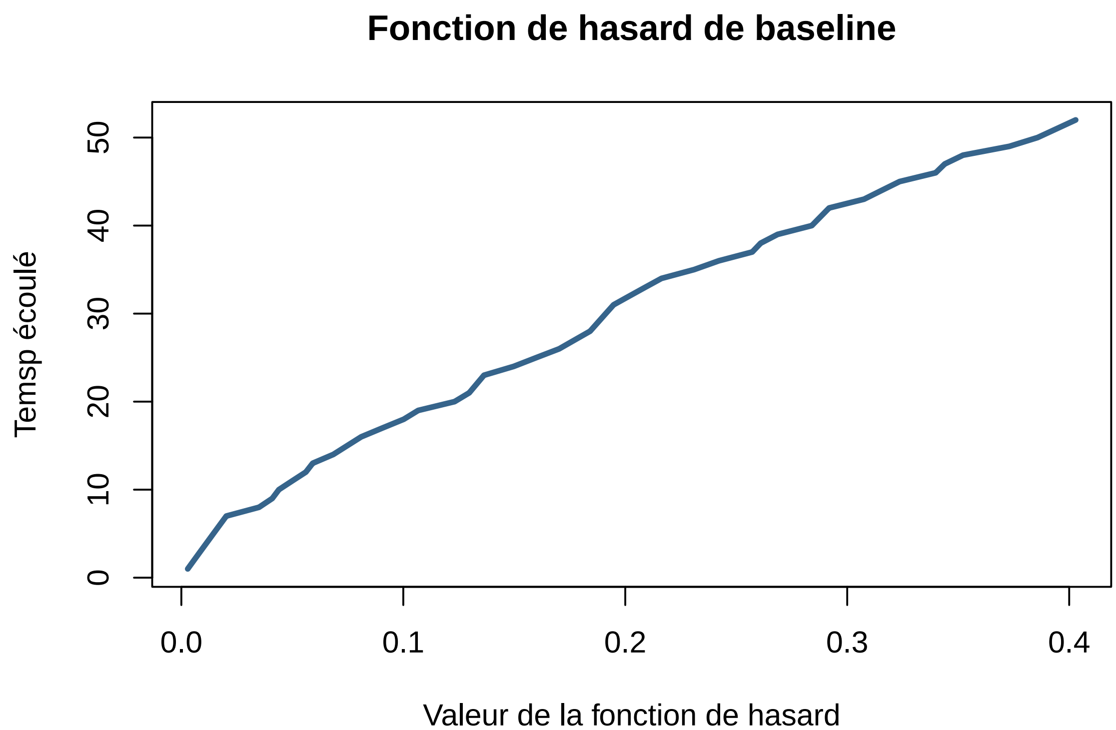


1.1.6 Fonction de hasard cumulée avec l'estimateur de Breslow :

Interprétation Intuitive:

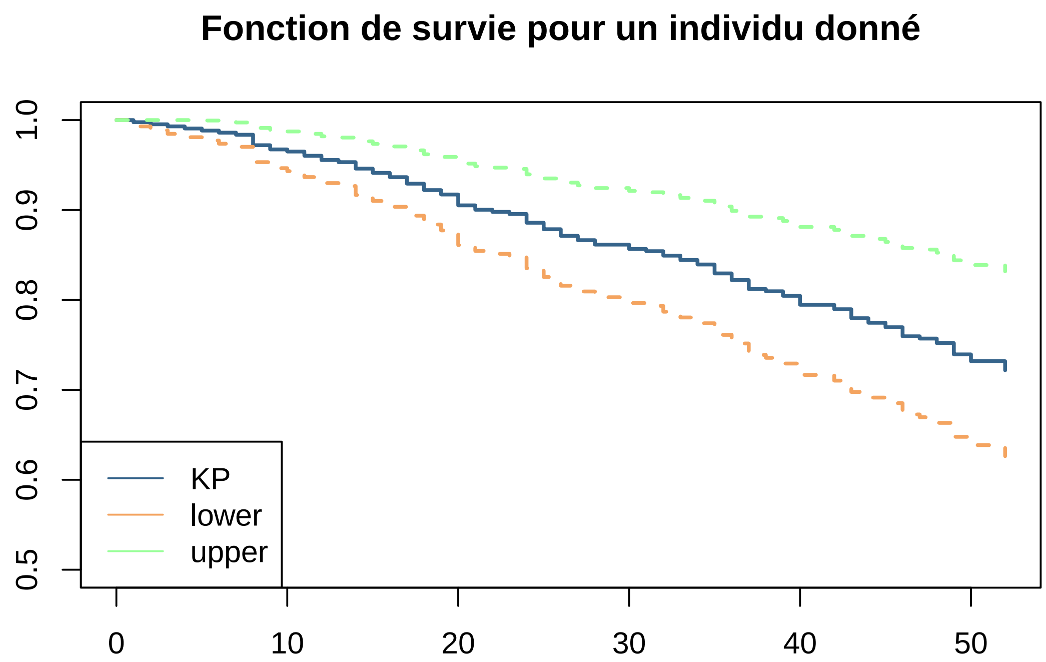
Taux Instantané: La fonction de hasard représente le taux instantané de survenue de l'événement à un moment donné.
Par exemple, si h(t)=0.05 à t=10 semaines, cela signifie que le taux de survenance de évènement à 10 semaines est de 5% par unité de temps.
Conditionnelle à la Survie: La fonction de hasard est conditionnelle à la survie jusqu'à ce moment. Elle ne prend en compte que les individus qui n'ont pas encore subi l'événement.

```
plot(
  basehaz(cox1),
  main = 'Fonction de hasard de baseline',
  xlab = 'Valeur de la fonction de hasard',
  ylab = "Temsp écoulé",
  type = 'l',
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 3
)
```



1.1.7 Fonction survie pour l'individu ayant les caractéristiques du premier individu :

```
# plot(survfit(cox1, newdata = Re1)) # fonction de survie pour tous les individus
# title("Fonction de survie pour tous les individus")

plot(survfit(cox1, newdata = Re1[1, ]),
     main = "Fonction de survie pour un individu donné",
     col = palette_couleur[1:3],
     ylim = c(0.5,1),
     lwd = 2,
     lty = 1)

legend("bottomleft",
       lty = 1,
       cex = 1,
       legend = c("KP", "lower", "upper"),
       col = palette_couleur[1:3])
```

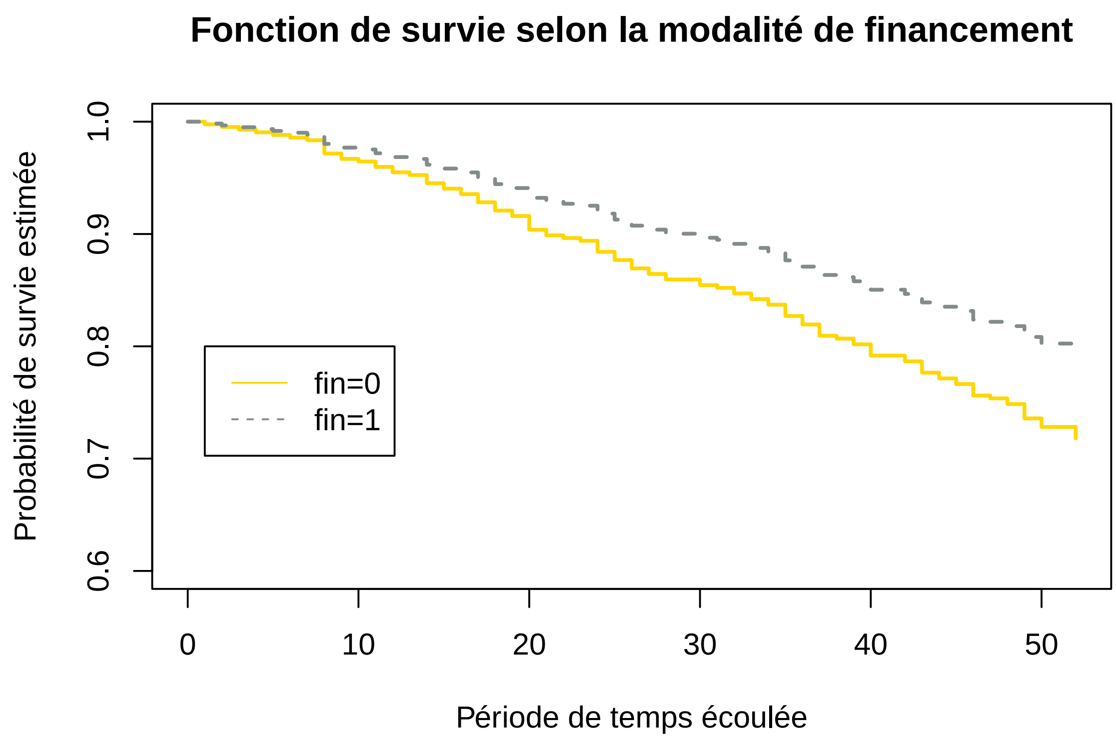


1.1.8 Etude de l'effet d'une covariable (les autres étant fixées) :

Exemple : effet de la var "financement" (0 ou 1) On fixe les autres à leur valeur moyenne.

```
ReFin = data.frame(
  fin = c(0, 1),
  age = rep(mean(Re1$age), 2),
  wexp = rep(mean(Re1$wexp), 2),
  mar = rep(mean(Re1$mar), 2),
  paro = rep(mean(Re1$paro), 2),
  prio = rep(mean(Re1$prio), 2)
)

plot(
  survfit(cox1, newdata = ReFin),
  lty = c(1, 2),
  ylim = c(.6, 1),
  col = palette_couleur[4:5],
  lwd = 2,
  main = "Fonction de survie selon la modalité de financement",
  ylab = "Probabilité de survie estimée",
  xlab = "Période de temps écoulée"
)
legend(
  1,
  0.8,
  legend = c("fin=0", "fin=1"),
  lty = c(1, 2),
```

```
  col =  palette_couleur[4:5]
)
```



1.1.9 Sélection de variable une à une :

Remarque : on peut faire de la sélection de variables en enlevant de façon itérative celles expliquant le moins (p-value la plus forte) exemple :

```
cox2= coxph(formula=Surv(week,arrest)~fin+age+wexp+mar+prio,data=Re1)
summary(cox2)
```

```
Call:
coxph(formula = Surv(week, arrest) ~ fin + age + wexp + mar +
    prio, data = Re1)

  n= 432, number of events= 114

         coef exp(coef) se(coef)      z Pr(>|z|)
fin  -0.36094   0.69702  0.19052 -1.894   0.0582 .
age  -0.05536   0.94614  0.02172 -2.549   0.0108 *
wexp -0.16039   0.85181  0.21201 -0.757   0.4493
mar  -0.47935   0.61919  0.37989 -1.262   0.2070
prio  0.09134   1.09564  0.02840  3.216   0.0013 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

     exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
fin     0.6970     1.4347    0.4798    1.0126
```

```
age     0.9461     1.0569    0.9067    0.9873
wexp    0.8518     1.1740    0.5622    1.2906
mar     0.6192     1.6150    0.2941    1.3037
prio    1.0956     0.9127    1.0363    1.1583

Concordance= 0.641  (se = 0.027 )
Likelihood ratio test= 31.98  on 5 df,   p=6e-06
Wald test            = 30.73  on 5 df,   p=1e-05
Score (logrank) test = 32.2  on 5 df,   p=5e-06
```

Test hypothèse de Hasard Proportionnel : (proportionnalité des risques)

$$\begin{cases} H0 : \text{les résidus sont indépendants du temps} \\ H1 : \text{les résidus dépendent du temps} \end{cases}$$

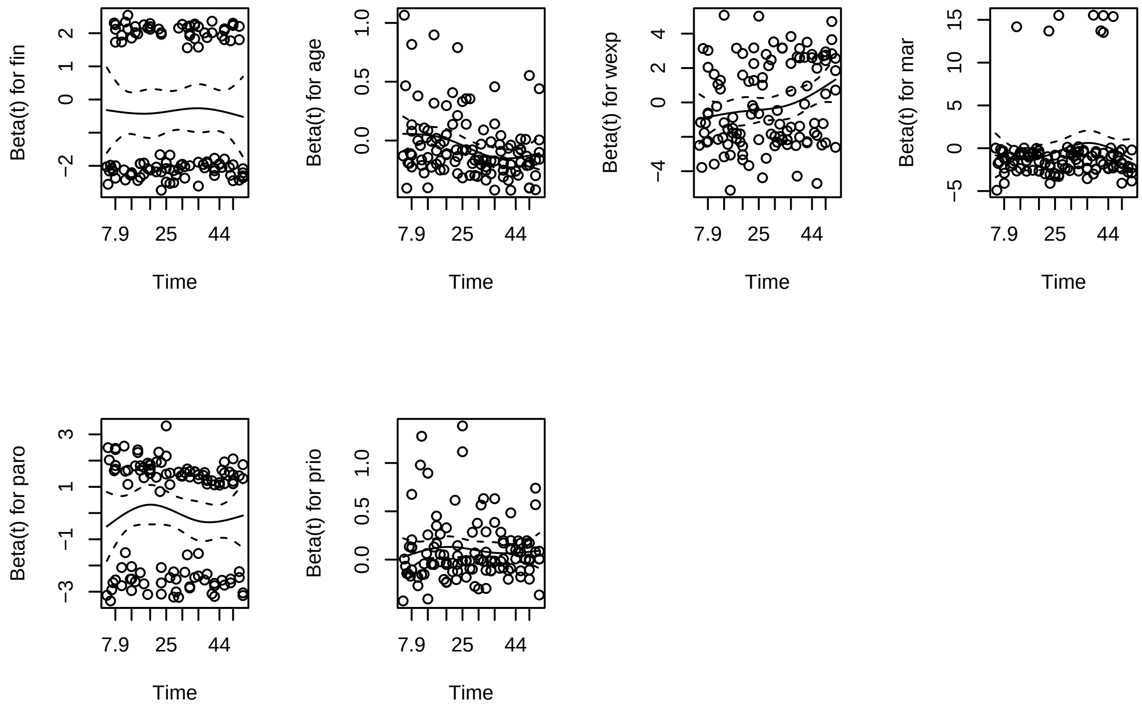
Explication : Si H0 est rejetée, alors les résidus dépendent du temps

1.1.10 Test de hasard proportionnel, les résidus de Schoenfeld

```r
res = cox.zph(cox1)
res
```

```
         chisq df     p
fin     0.0621  1 0.803
age     5.9161  1 0.015
wexp    4.2983  1 0.038
mar     1.0207  1 0.312
paro    0.0140  1 0.906
prio    0.5254  1 0.469
GLOBAL 16.4474  6 0.012
```

```r
# Représentation graphique
par(mfrow = c(2, 4))
plot(res)
```



2 Les méthodes non-paramétriques

2.1 La méthode de Kaplan meier :

2.1.1 Génération de la base et importation des données

On créer une base de données avec des observations censurées.

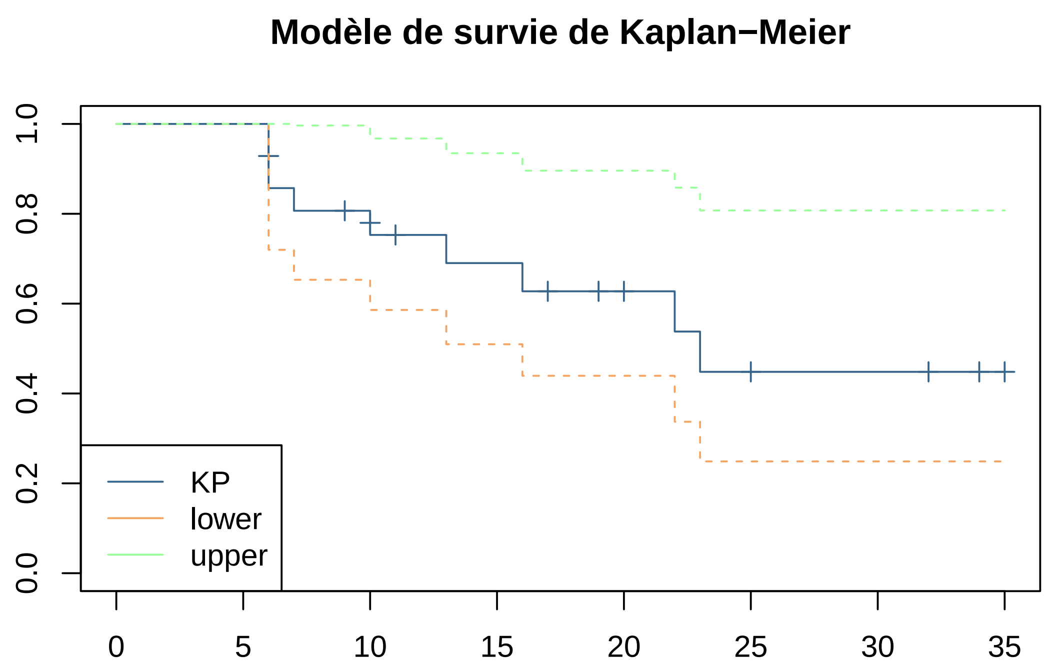
```
library(survival)
tempsGMP = c(rep(6, 4), 7, 9, 10, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 32,
             32, 34, 35) # liste des observations
finGMP = c(1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, rep(0, 5))
# indication des obs censurées
donnF = Surv(tempsGMP, finGMP)
head(donnF)
```

```
[1] 6  6  6  6+ 7  9+
```

2.1.2 Ajustement d'un modèle de survie avec la méthode de Kaplan Meier :

```
survKM = survfit(donnF ~ 1,
                 data = donnF,
                 type = "kaplan-meier",
                 error = "greenwood")

# Graphique de la fonction de survie moyenne :

plot(survKM, mark.time = TRUE, col = palette_couleur[1:3])
```

```r
title("Modèle de survie de Kaplan-Meier")
legend("bottomleft",
       lty = 1,
       cex = 1,
       legend = c("KP", "lower", "upper"),
       col = palette_couleur[1:3])
```




```r
# Intervalle de confiance et valeur modélisée pour l'individu 10 :
IC_KM = round(c(survKM$lower[10], survKM$surv[10], survKM$upper[10]),4)
```

2.2 Le modèle de Fleming-Harrington :

2.2.1 Modèle de Fleming-Harrington, intervalle méthode Tsiatis :

```r
# Par defaut, intervalle de confiance : conf.type='log' :
survFH = survfit(donnF ~ 1,
                 data = donnF,
                 type = "fleming-harrington",
                 error = "tsiatis")

# Intervalle de confiance et valeur modélisée pour l'individu 10 :
IC_FH = round(c(survFH$lower[10], survFH$surv[10], survFH$upper[10]),4)
```

2.2.2 Modèle de Fleming-Harrington, intervalle méthode delta :

```r
survFHdelta = survfit(
  donnF ~ 1,
```

```
  data = donnF,
  type = "fleming-harrington",
  error = "tsiatis",
  conf.type = "plain")

IC_FHdelta = round(c(survFHdelta$lower[10], survFHdelta$surv[10], survFHdelta$upper[10]),4)
```

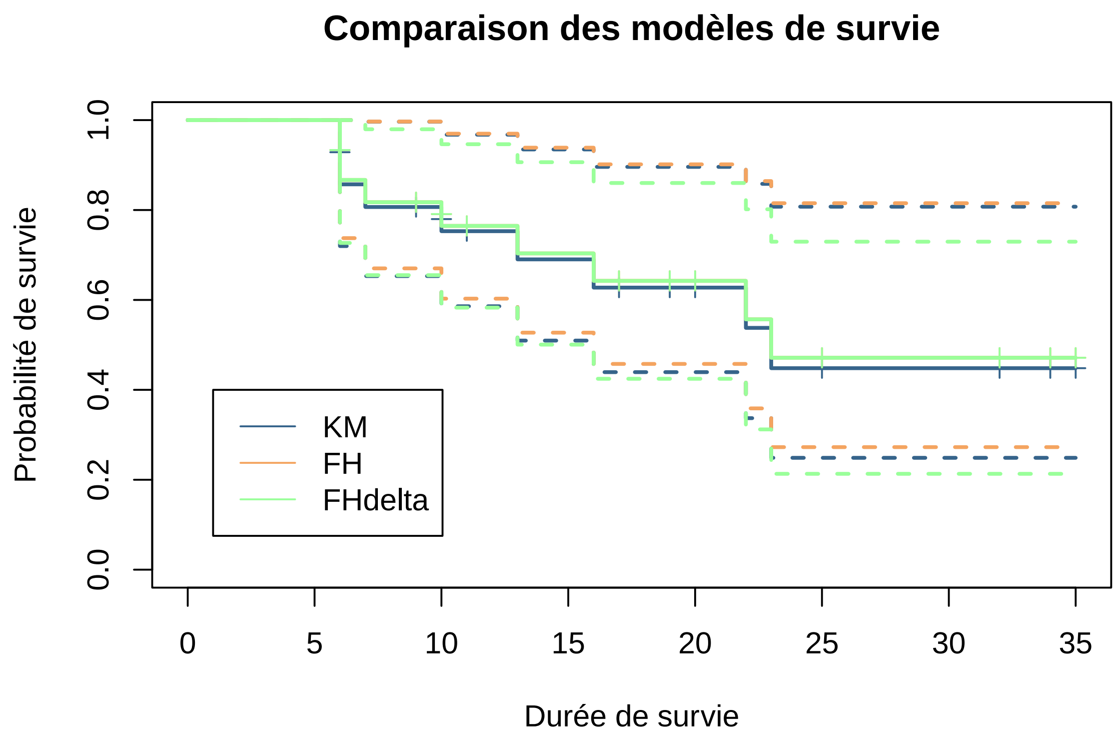
2.2.3 Comparaison des résultats sur l'estimation du 10e individu de la base :

```
#Comparaison des modèles pour le 10e individu de la base
dt = data.frame(KM = IC_KM, FH = IC_FH, FHdelta = IC_FHdelta)
rownames(dt) = c("lower","pred","upper")
dt
```

```
          KM     FH FHdelta
lower 0.4394 0.4577  0.4246
pred  0.6275 0.6424  0.6424
upper 0.8960 0.9016  0.8601
```

2.2.4 Représentation graphiques des trois modèles :

```
# Graphiques des trois modèles :
plot(
  survKM,
  mark.time = TRUE,
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2,
  xlab = "Durée de survie",
  ylab = "Probabilité de survie"
)
lines(survFH,
      mark.time = TRUE,
      col = palette_couleur[2],
      lwd = 2)
lines(survFHdelta,
      mark.time = TRUE,
      col = palette_couleur[3],
      lwd = 2)
title("Comparaison des modèles de survie")
legend(
  1,
  0.4,
  lty = 1,
  cex = 1,
  legend = c("KM", "FH", "FHdelta"),
  col = palette_couleur[1:3]
)
```



2.3 Estimation par des lois usuelles :

2.3.1 Estimation de la loi de X par une loi de Weibull :

```
survweib = survreg(donnF ~ 1, dist = "weibull")
survweib
```

```
Call:
survreg(formula = donnF ~ 1, dist = "weibull")

Coefficients:
(Intercept)
   3.519429

Scale= 0.7386973

Loglik(model)= -41.7   Loglik(intercept only)= -41.7
n= 21
```

2.3.2 Estimation de la loi de X par une loi exponentielle :

```
theta = sum(finGMP) / sum(tempsGMP)
theta
```

```
[1] 0.02506964
```

```
survexp = survreg(donnF ~ 1, dist = "exponential")
lambda = exp(-survexp$coefficients)
```

```
lambda
```

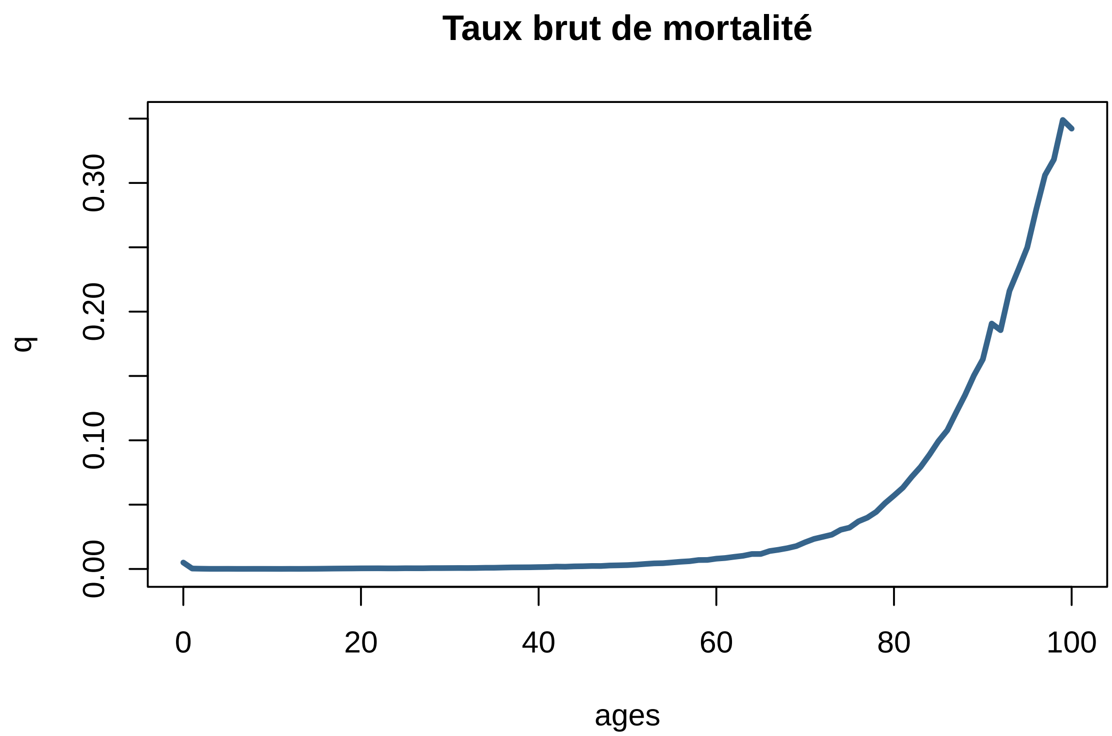
```
(Intercept)
 0.02506964
```

3 Examen 2018 :

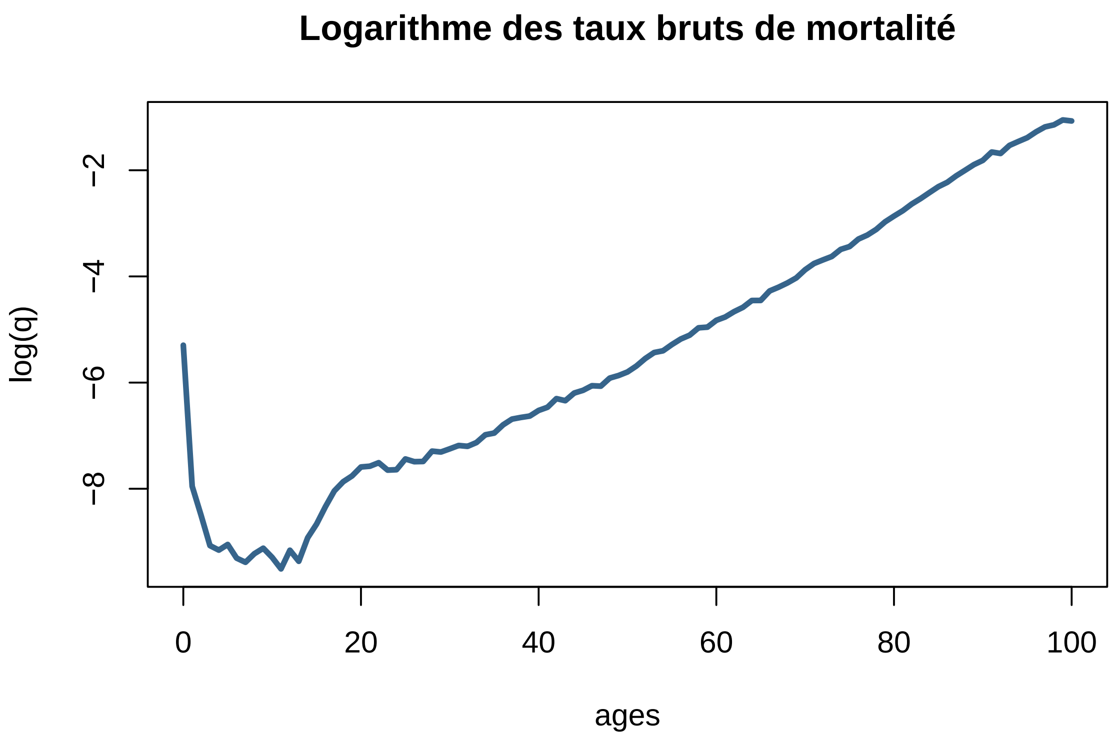
3.1 Exercice 2 :

3.1.1 Importation des données et traitement de la base :

```r
library(StMoMo)
d = EWMaleData
De = d$Dxt # décès

ages = d$ages
annees = d$years

Ex = EWMaleData$Ext  # Expositions en milieu d'années
Lx = Ex + De / 2 # Exposition en début d'année (approximation)

# Calcul des taux de mortalité bruts pour 2011 :
q = De[, "2011"] / Lx[, "2011"] # taux bruts

plot(
  ages,
  q,
  type = 'l',
  main = "Taux brut de mortalité",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 3
)
```




```r
plot(
  ages,
  log(q),
  type = 'l',
  main = "Logarithme des taux bruts de mortalité",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 3
)
```



3.1.2 Calibration d'un modèle de Makeham-Gompertz :

3.1.2.1 Utilisation du package fmsb : Utilisation de la fonction fitGm pour calibrer le modèle $h(x) = C + A \times exp(\beta_x)$

Avec la fonction fitGm on peut faire le lien avec l'autre paramétrage du type :

$h(x) = \alpha + \beta \times \gamma^x$ où x représente l'âge.

```
library(fmsb)
fit = fitGM(data = q)

A = fit[1]
B = fit[2]
C = fit[3]
cat("Modélisation fitGM :  \n")
```

```
Modélisation fitGM :
```

```
c(A, B, C)
```

```
[1] 1.742762e-05 1.022779e-01 1.586628e-04
```

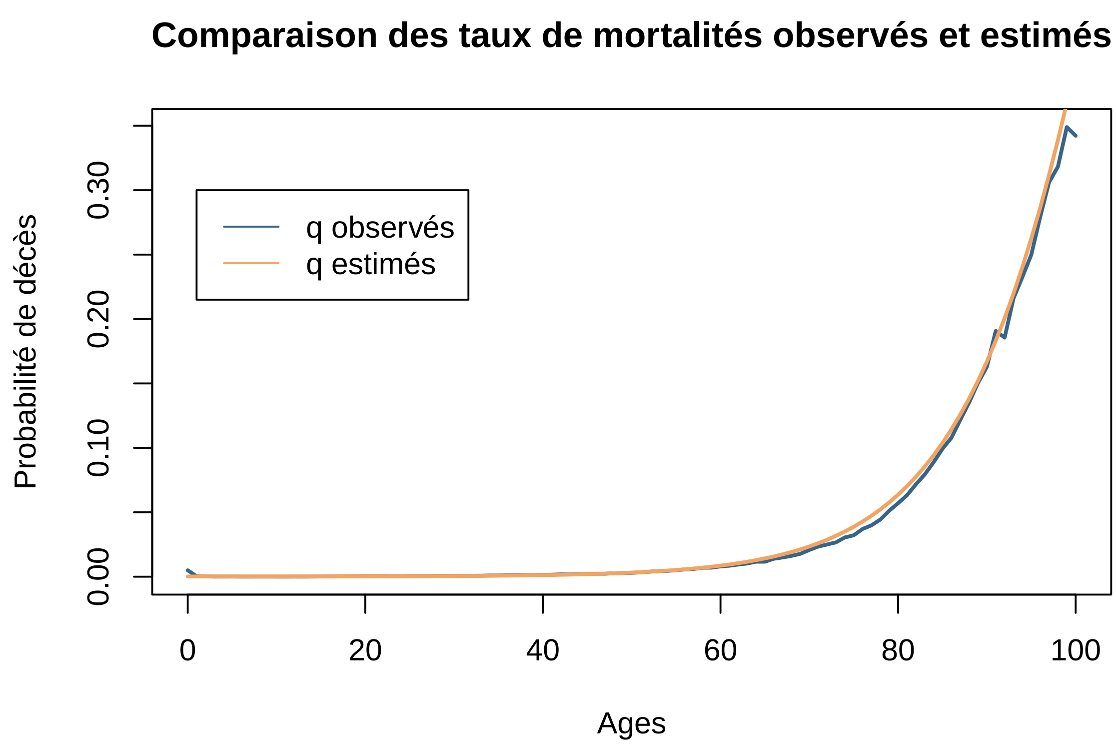
```
# Lien avec l'autre paramétrage :
alpha2 = C
beta2 = A
gamma2 = exp(B)
cat("Apha, Beta, Gamma : \n")
```

```
Apha, Beta, Gamma :
```

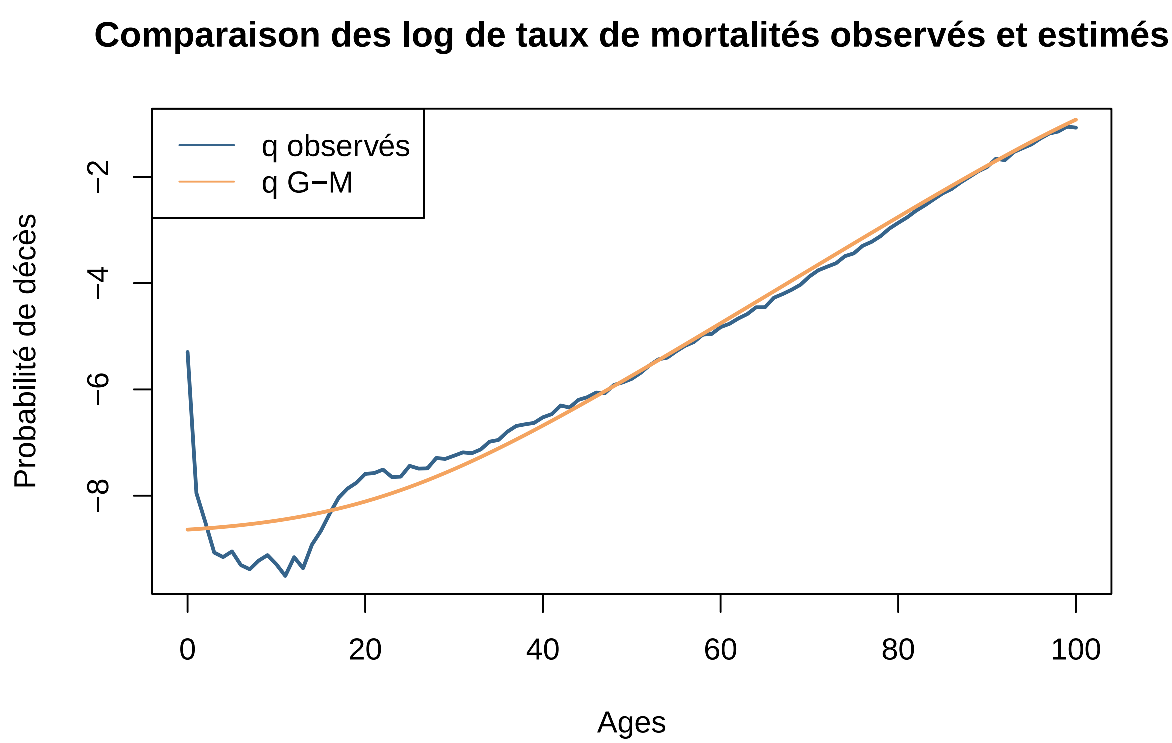
```r
c(alpha2, beta2, gamma2)
```

```
[1] 1.586628e-04 1.742762e-05 1.107691e+00
```

```r
# Construction du vecteur des probabilités de décès :
qM3 = 1 - exp(-C) * exp(-A / B * exp(B * ages) * (exp(B) - 1))

# Représentation graphique de l'âge des individus :
plot(
  ages,
  q,
  type = 'l',
  ylab = "Probabilité de décès",
  xlab = "Ages",
  main = "Comparaison des taux de mortalités observés et estimés",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2
)
lines(ages, qM3, col = palette_couleur[2], lwd = 2)
legend(
  1,
  0.3,
  lty = 1,
  cex = 1,
  legend = c("q observés", "q estimés"),
  col = palette_couleur[1:2]
)
```



```r
# Comparaison des taux de mortalités logarithmiques :

plot(
  ages,
  log(q),
  type = 'l',
  ylab = "Probabilité de décès",
  xlab = "Ages",
  main = "Comparaison des log de taux de mortalités observés et estimés",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2)
lines(ages, log(qM3), col = palette_couleur[2], lwd = 2)
legend("topleft",
  lty = 1,
  cex = 1,
  legend = c("q observés", "q G-M"),
  col = palette_couleur[1:2]
)
```



Interprétation des résultats :

Le modèle de Gompertz - Makeham, avec h croissant, ne peut pas modéliser correctement la mortalité aux âges inférieurs à 20 ans.

```r
library(MortalityLaws)

#availableLaws() # Liste des modèle de mortalité du package
```

```r
fit = MortalityLaw(x = 0:100, qx = q, law = "makeham")  #modèle h(x)= C + A exp(Bx)
fit$coefficients
```

3.1.2.2 Utilisation du package MortalityLaws :

```
           A            B            C 
0.0000251412 0.0953918954 0.0001246354 
```

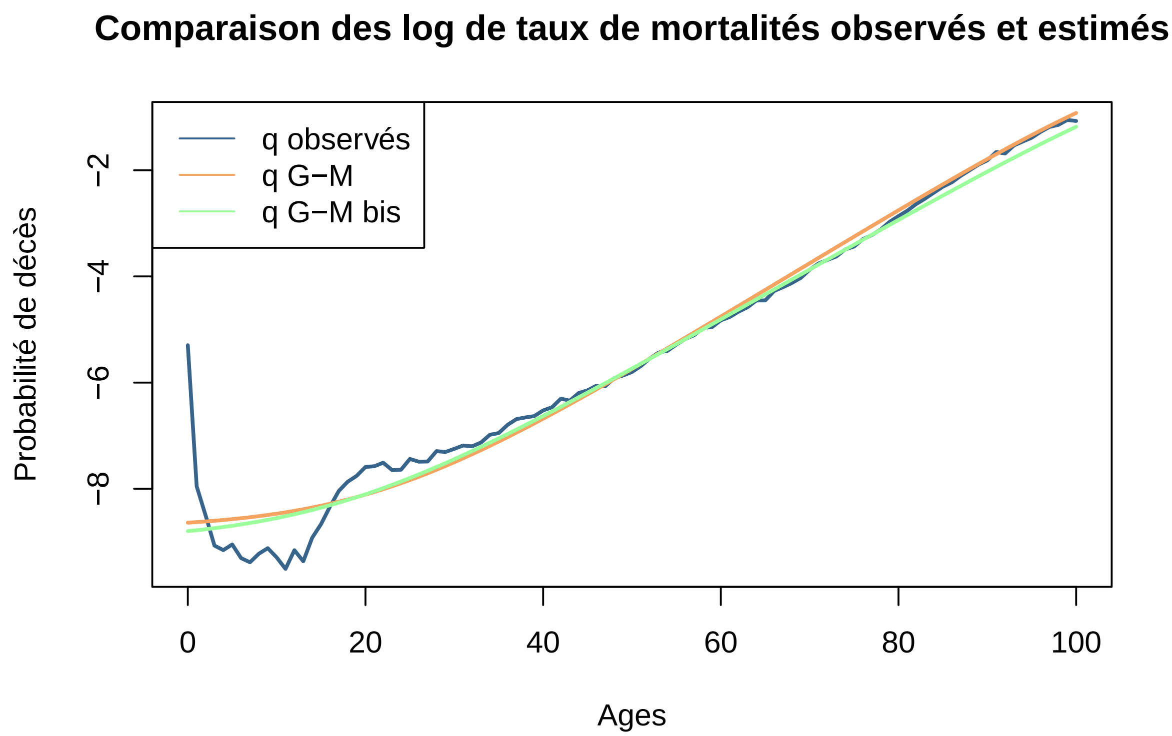
```r
A = fit$coefficients["A"]
B = fit$coefficients["B"]
C = fit$coefficients["C"]
c(A, B, C)
```

```
           A            B            C 
0.0000251412 0.0953918954 0.0001246354 
```

```r
# Lien avec l'autre paramétrage (h(x)= alpha + beta gamma^x)
alpha2 = C
beta2 = A
gamma2 = exp(B)
c(alpha2, beta2, gamma2)
```

```
           C            A            B 
0.0001246354 0.0000251412 1.1000898909 
```

```r
# Estimation du taux de moralité de Lee-Carter
qM4 = 1 - exp(-C) * exp(-A / B * exp(B * ages) * (exp(B) - 1))


# Représentation graphique et comparaison :

plot(
  ages,
  log(q),
  type = 'l',
  ylab = "Probabilité de décès",
  xlab = "Ages",
  main = "Comparaison des log de taux de mortalités observés et estimés",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2)
lines(ages, log(qM3), col = palette_couleur[2], lwd = 2)
lines(ages, log(qM4), col = palette_couleur[3], lwd = 2)
legend("topleft",
  lty = 1,
  cex = 1,
  legend = c("q observés", "q G-M", "q G-M bis"),
  col = palette_couleur[1:3]
)
```



3.1.3 Modélisation de Lee Carter :

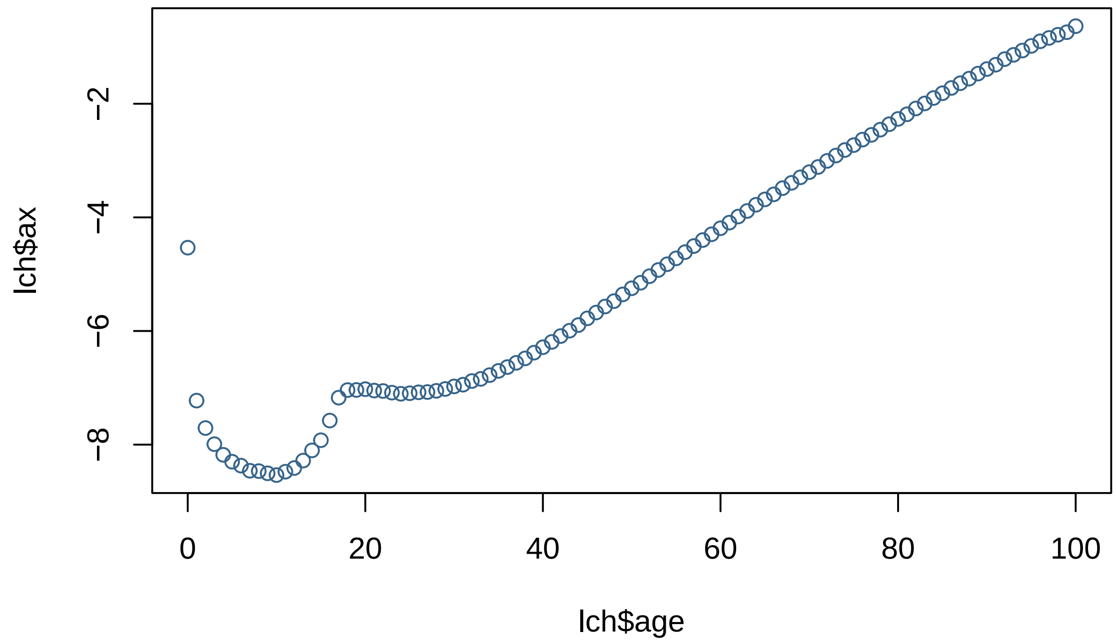
Rappels sur la modélisation de Lee Carter :

$ln(\mu(x,t)) = \alpha_x + \beta_x \times k_t + \epsilon_{(x,t)}$

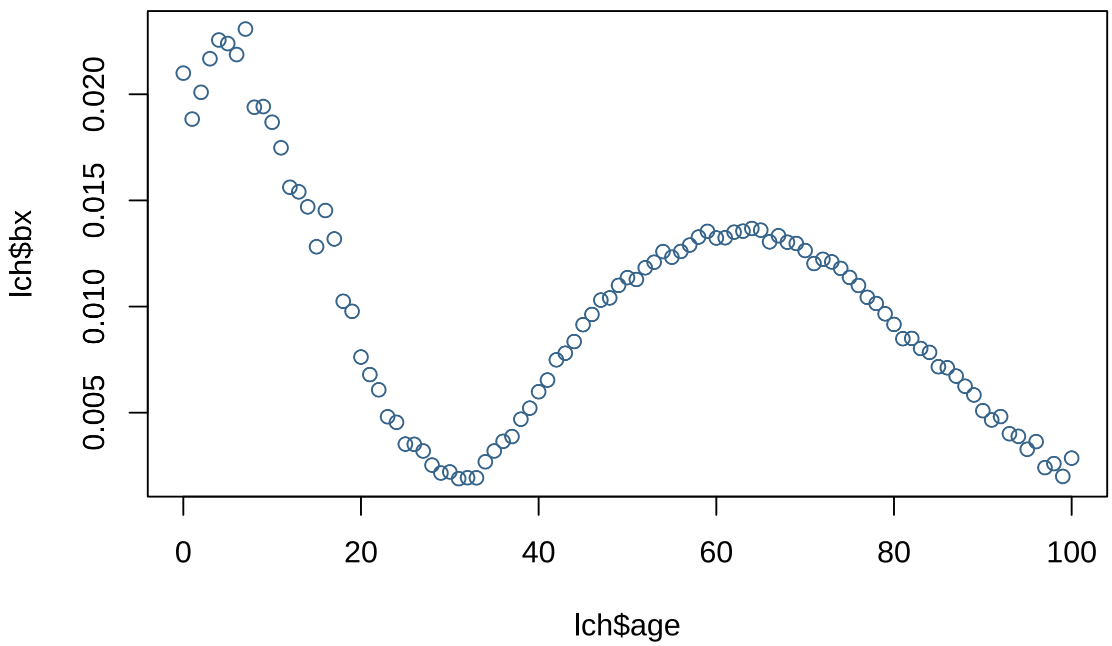
Avec : _x = la valeur moyenne

$\begin{cases} \alpha_x : \text{la valeur moyenne} \\ k_t : \text{correspond à une évolution générale dans le temps} \beta_x : \text{la sensibilité du taux instantané par rapport à une variation d} \end{cases}$

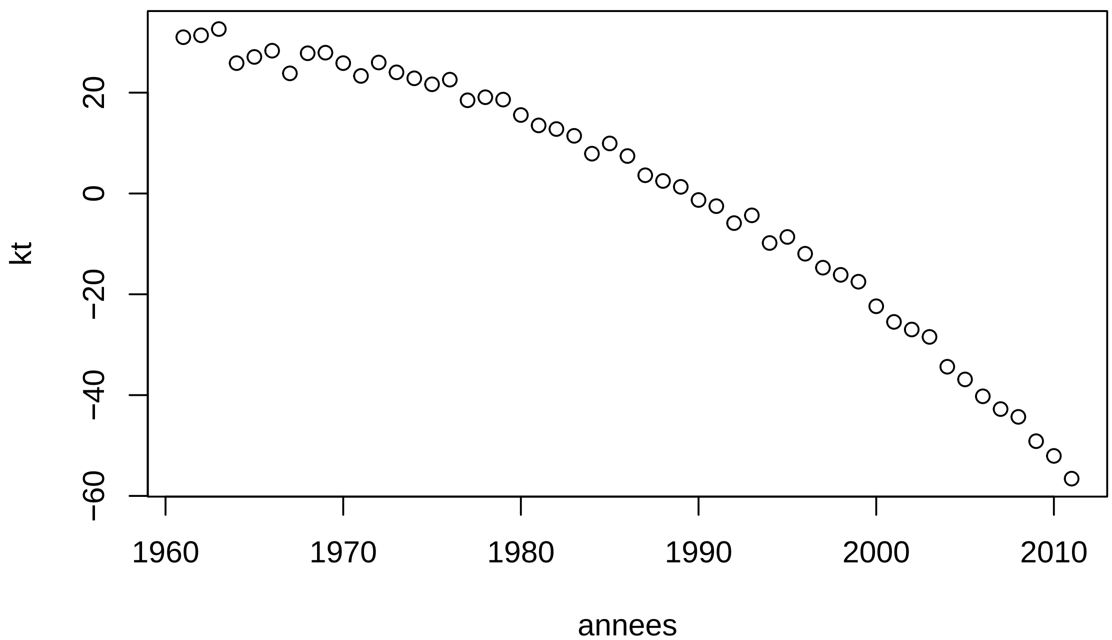
```
library(forecast)
library(demography)
muh = De / Ex
Baseh = demogdata(
  data = muh,
  pop = Ex,
  ages = ages,
  years = annees,
  type = "mortality",
  label = 'G.B.',
  name = 'Hommes',
  lambda = 1)

lch = lca(Baseh) # Lancement du modèle de Lee-Carter

# Estimation de alpha_x
plot(lch$age, lch$ax, col = palette_couleur[1])
```




```r
# Estimation de beta_x
plot(lch$age, lch$bx, col = palette_couleur[1])
```



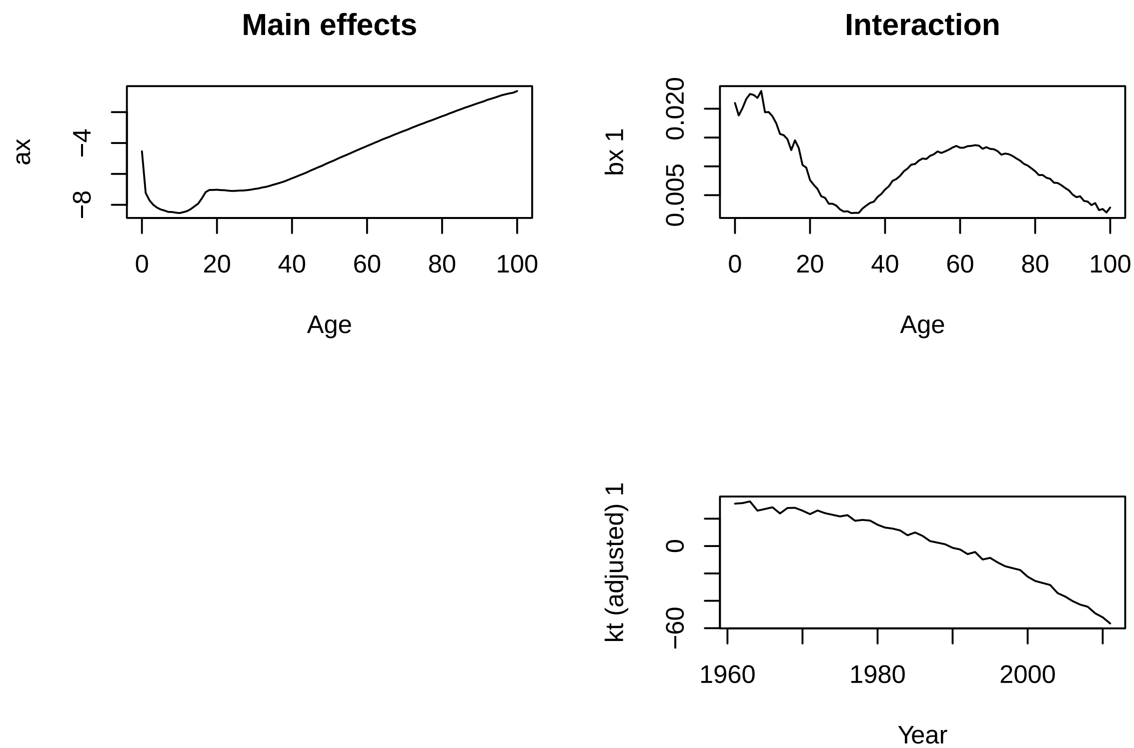

```r
# Estimation des k_t
kt = lch$kt
plot(annees, kt)
```



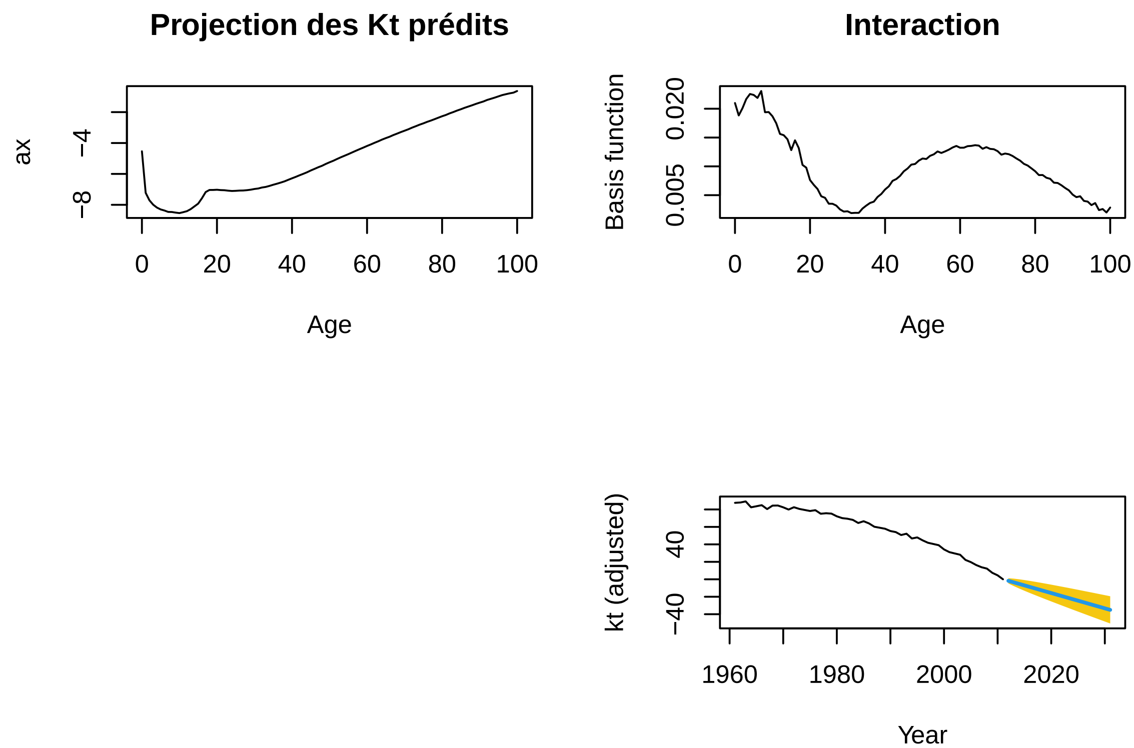
3.1.3.1 Méthode de Lee-Carter 1992 : Projection des Kt Rappel: les Kt représentent

Hypothèse : $k_t = k_{t-1} + d + e_t$

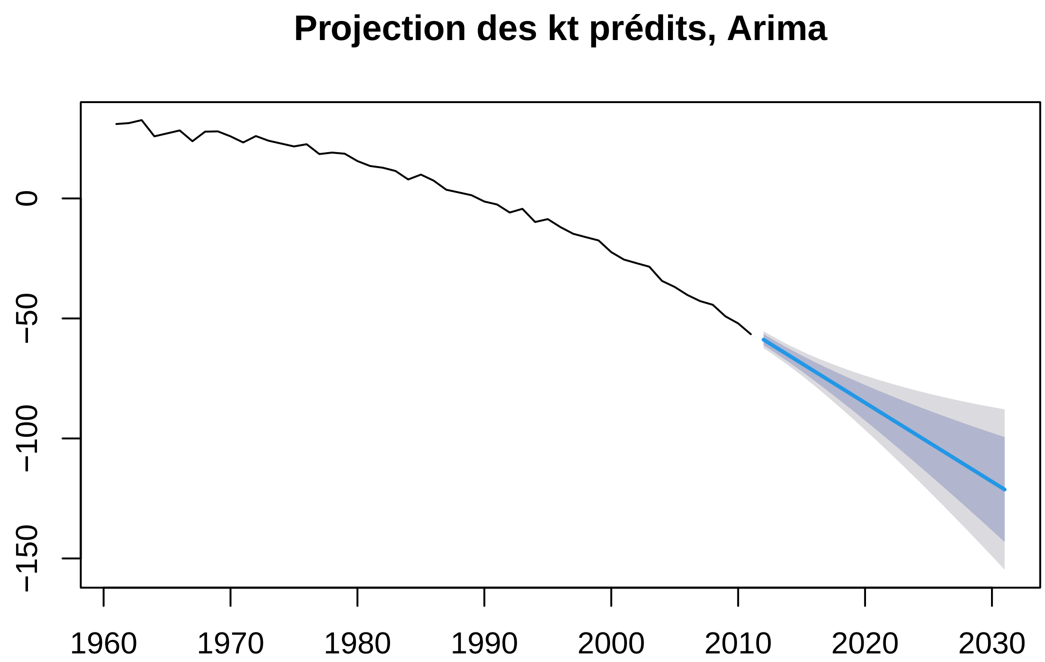
```
# Projection des Kt à l'aide du modèle initial :
plot(lch)
```




```r
proj = forecast(lch, h = 20)
plot(proj, plot.type = "component", main = "Projection des Kt prédits")
```




```
# Projection des Kt à l'aide du modèle ARIMA :
ar = auto.arima(kt)
plot(forecast(ar, h = 20), main = "Projection des kt prédits, Arima")
```



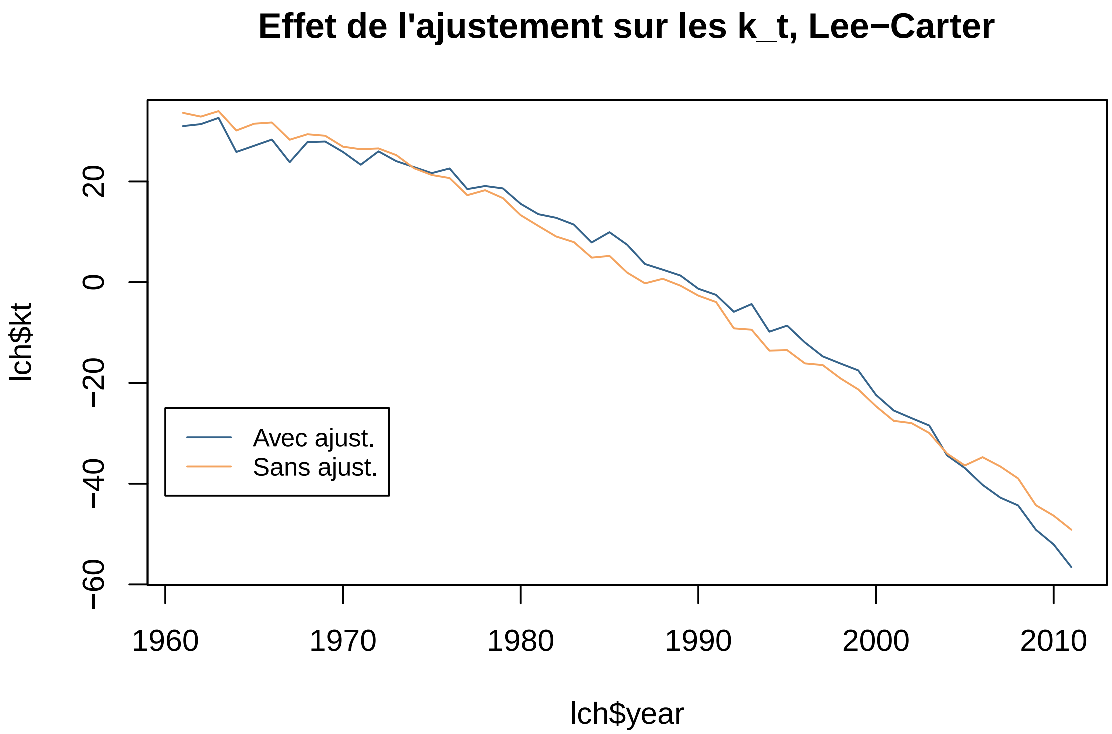
Interprétation (BA) :

- a_x donne une indication sur la valeur de la mortalité moyenne
- b_x la variation du taux instantané comporte trois phases. Le taux est de moins en moins déterminant sur les années de 0 à 20 ans ainsi que sur l'intervalle 60 à 100 ans. En revanche ce taux est croissant entre 20 à 60 ans. Ce qui correspond souvent à la période durant laquelle l'Homme est le plus actif. Le risque additionnel de décès à tendance à croître sur cette période. Enfin la période de 0 à 10 est celle qui admet un coefficient de taux instantané le plus fort du fait notamment de la mortalité infantile.
- k_t est décroissant sur toute la période, ce qui permet de conclure que la mortalité tend à décroître sur la période observée et ainsi maintient le constat d'une diminution des causes de mortalité annexes.

3.1.3.2 Modèle de Lee Carter sans ajustement des Kt : Dans cette partie on fait l'hypothèse que les k_t sont constants dans le temps.

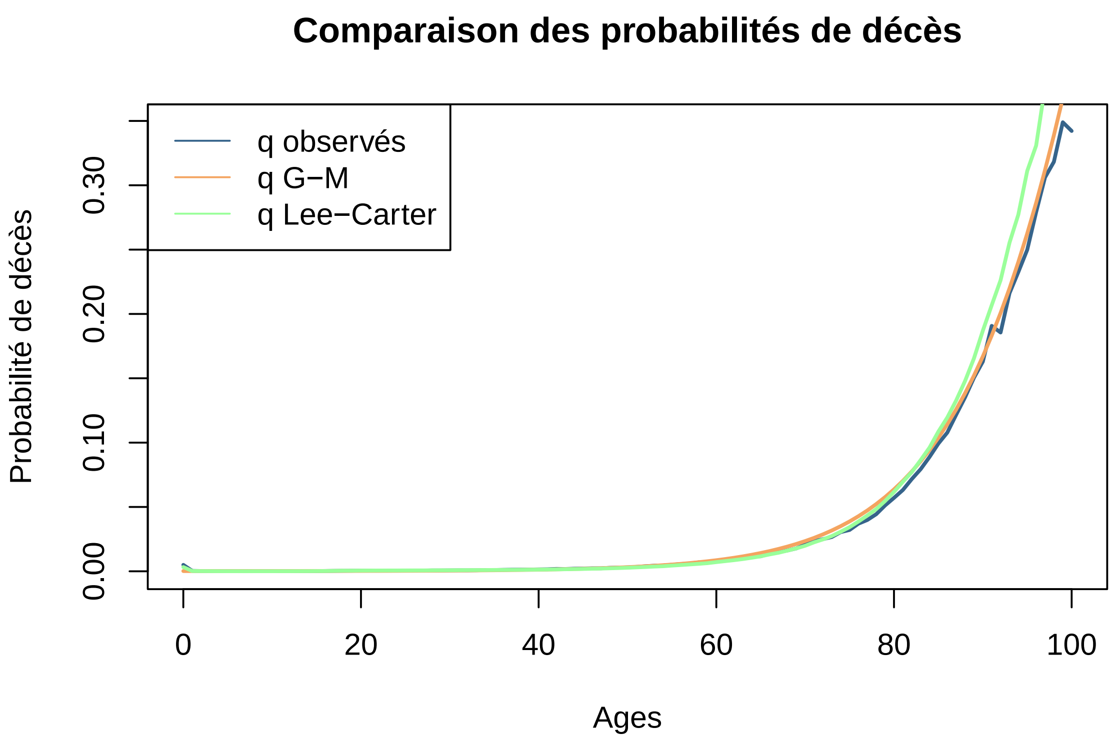
```
## L.C. sans ajustement des k_t
lch_sans = lca(Baseh, adjust = "none")
plot(lch$year,
     lch$kt,
     col = palette_couleur[1],
     type = 'l',
     main = "Effet de l'ajustement sur les k_t, Lee-Carter")
lines(lch_sans$year, lch_sans$kt, col = palette_couleur[2])
legend(
  1960,
  -25,
  legend = c("Avec ajust.", "Sans ajust."),
  col = palette_couleur[1:2],
```

```r
  lty = 1,
  cex = 0.8
)
```

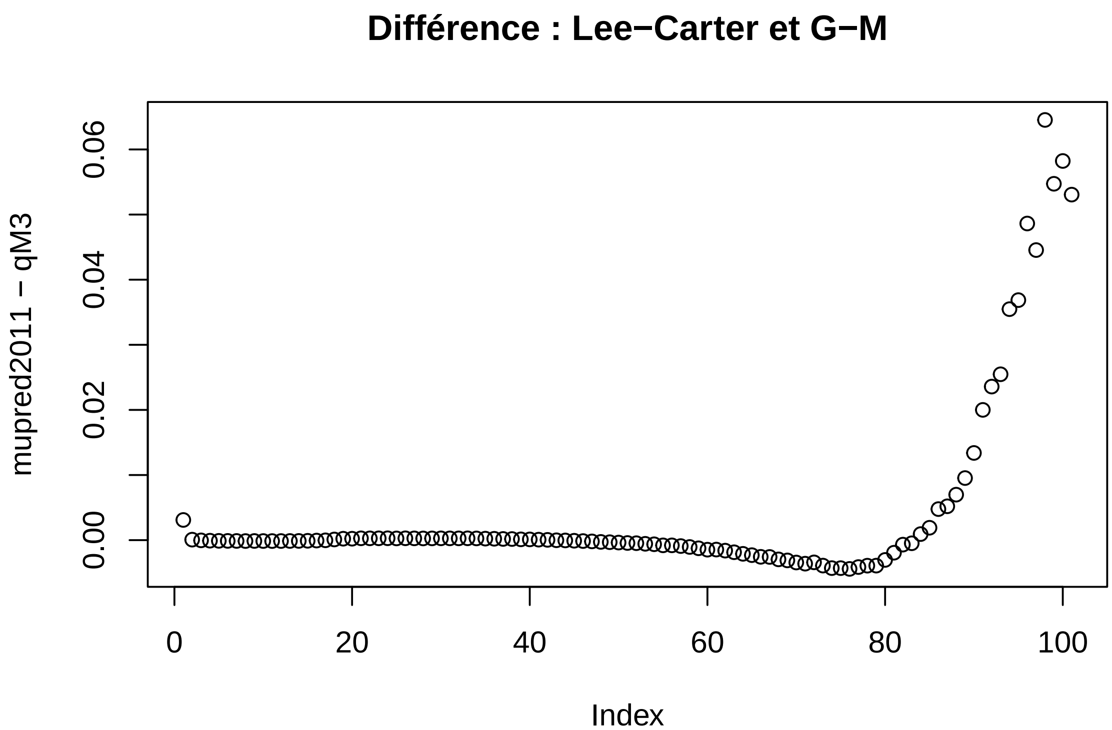



```r
# Modéle de Lee Carter :
predh = lch$fitted$y  # c'est log(mu_{x,t}) qui est prédit
mupred2011 = exp(predh[, 51])

plot(
  ages,
  q,
  type = 'l',
  ylab = "Probabilité de décès",
  xlab = "Ages",
  main = "Comparaison des probabilités de décès",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2
)
lines(ages, qM3, col = palette_couleur[2], lwd = 2)
lines(ages,mupred2011,col = palette_couleur[3], lwd = 2)
legend("topleft",
  lty = 1,
  cex = 1,
  legend = c("q observés", "q G-M", "q Lee-Carter"),
  col = palette_couleur[1:3]
)
```

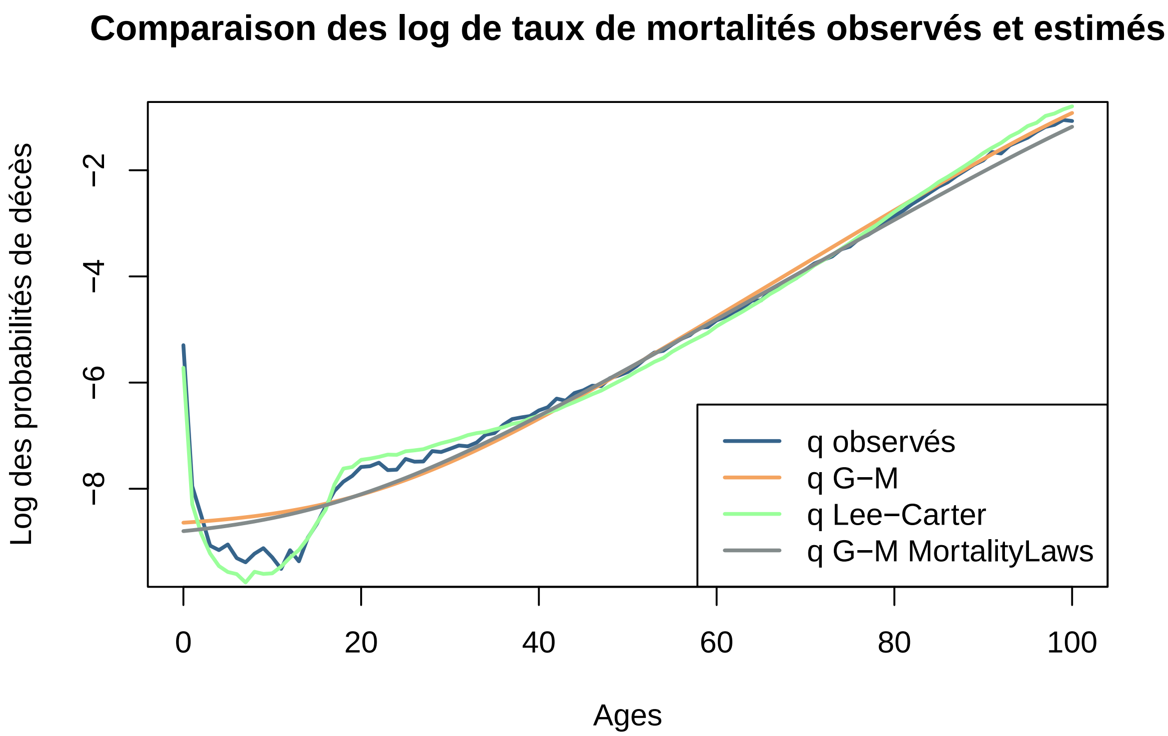
3.1.3.3 Comparaison des modèles :




```
# Représentation graphique de la différence entre les modèles :
plot(mupred2011 - qM3,
     main = "Différence : Lee-Carter et G-M")
```




```
#max(abs(mupred2011 - qM3))

# Comparaison graphique log(q) :
plot(
  ages,
  log(q),
  type = 'l',
  ylab = "Log des probabilités de décès",
  xlab = "Ages",
  main = "Comparaison des log de taux de mortalités observés et estimés",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2
)
lines(ages, log(qM3), col = palette_couleur[2], lwd = 2)
lines(ages,predh[,51],col = palette_couleur[3], lwd = 2)
lines(ages, log(qM4),col = palette_couleur[5], lwd = 2)
legend("bottomright",
  lty = 1,
  cex = 1,
  lwd = 2,
  legend = c("q observés", "q G-M", "q Lee-Carter", "q G-M MortalityLaws"),
  col = palette_couleur[c(1:3,5)]
)
```



3.1.4 Calcul des rentes :

Nous souhaitons calculer la prime pure d'une rente viagère à partir de 2012 pour l'âge de 65 ans.

$a_x(t) = \sum_{k\geq 0} \prod_{j=0}^{k} exp(-\mu_{x+j}(t+j)) * 1/(1+r)^(k+1)$

```
# Projections des \mu{x,t} dans le futur avec le modèle de Lee-Carter
projh = forecast(lch, h = 70)$rate$Hommes

#dim(projh) # L'objet projh est de dimension 101 x 70
colnames(projh) = 2012:(2012 + 69)
rownames(projh) = 0:100

r = 0.035 # valeur du taux choisi pour le facteur d'actualisation

# calcul de a_65(2012) pour les hommes :

L = length(66:101)
mu = projh[66:101, 1:L] # on limite aux âges 65-100
dmu = diag(mu)
prodexpmu = cumprod(exp(-dmu))
a = 0
for (k in 1:length(dmu))
{
  a = a + 1 / (1 + r) ^ (k) * prodexpmu[k]
}
cat("En s'arretant à 110 ans : ")
```

3.1.4.1 Calcul à l'aide du modèle de Lee-Carter :

```
En s'arretant à 110 ans :
```

```r
a  # 13.164
```

```
[1] 13.16419
```

```r
# Remarque : si on prolonge jusqu'à 120 ans avec les mêmes \mu(x,t) ?
# (pour vérifier si négliger les âges > 110 est justifié)
dmu120 = c(dmu, rep(dmu[L], 20))
prodexpmu120 = cumprod(exp(-dmu120))
a120 = 0
for (k in 1:(L + 20))
{
  a120 = a120 + 1 / (1 + r) ^ (k) * prodexpmu120[k]
}
cat("Avec la table jusque 120 ans : ")
```

```
Avec la table jusque 120 ans :
```

```r
a120 # 13.174
```

```
[1] 13.17422
```

```r

# Comparaison avec G.M. I  (fmsb)
dmu = qM3[66:101]
prodexpmu = cumprod(exp(-dmu))
a = 0
for (k in 1:length(dmu))
{
  a = a + 1 / (1 + r) ^ (k) * prodexpmu[k]
}
cat("GM fmsb :")
```

3.1.4.2 Calcul à l'aide du modèle de Gompertz-Makeham :

```
GM fmsb :
```

```r
a
```

```
[1] 12.1337
```

```r
# 12.13

# Comparaison avec G.M. II  (Mortalitylaw)
dmu = qM4[66:101]
prodexpmu = cumprod(exp(-dmu))
a = 0
for (k in 1:length(dmu))
{
  a = a + 1 / (1 + r) ^ (k) * prodexpmu[k]
}
cat("GM LawMortality : ")
```

```
GM LawMortality :
```

```r
a
```

```
[1] 12.77115
```

```r
# 12.77
```

4 Examen 2019 :

4.1 Exercice 1 :

4.1.1 Importation des données :

```r
Re = read.table(file = 'DATA/emploi.txt', header = TRUE)
str(Re)
```

```
'data.frame':	600 obs. of  15 variables:
 $ id     : int  1 2 2 2 3 3 3 3 3 4 ...
 $ noj    : int  1 1 2 3 1 2 3 4 5 1 ...
 $ tstart : int  555 593 639 673 688 700 730 742 817 872 ...
 $ tfin   : int  982 638 672 892 699 729 741 816 828 926 ...
 $ sex    : int  1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 ...
 $ ti     : int  982 982 982 982 982 982 982 982 982 982 ...
 $ tb     : int  351 357 357 357 473 473 473 473 473 604 ...
 $ te     : int  555 593 593 593 688 688 688 688 688 872 ...
 $ pres   : int  34 22 46 46 41 41 44 44 44 55 ...
 $ edu    : int  17 10 10 10 11 11 11 11 11 13 ...
 $ tfp    : int  428 46 34 220 12 30 12 75 12 55 ...
 $ des    : int  0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 $ cohorte: int  1 1 1 1 2 2 2 2 2 3 ...
 $ lfx    : int  0 0 46 80 0 12 42 54 129 0 ...
 $ pnoj   : int  0 0 1 2 0 1 2 3 4 0 ...
```

```r
#Re[Re$sex==2,5]=0
library(survival)
```

4.1.2 Estimateur de Kaplan-Meier : test de comparaison

Rappel sur les tests :

- Le test du log-rank et test de Gehan :

$$\begin{cases} H0 : \text{les fonctions de survie sont les mêmes, p-value} \geq 0.05 \\ H1 : \text{les fonctions de survie sont différentes} \end{cases}$$

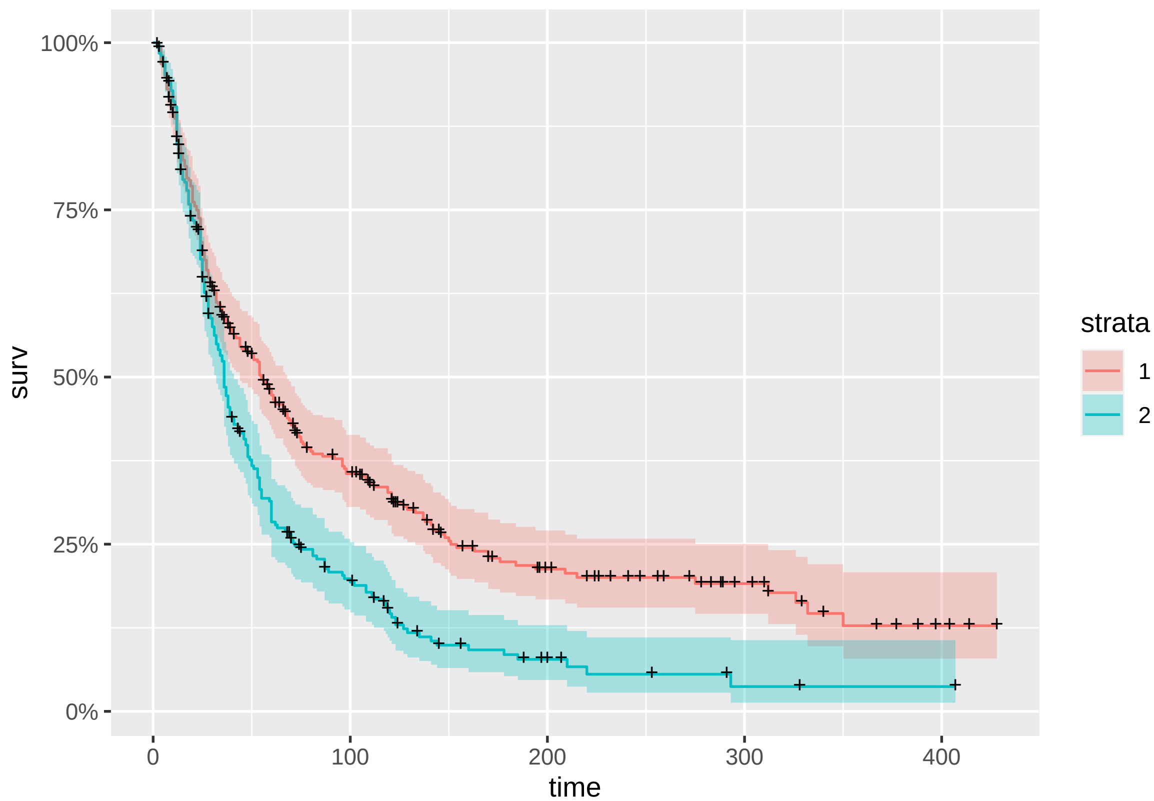
```r
# Test de comparaison des durées de survie selon le sexe
survdiff(Surv(tfp, des) ~ sex, data = Re, rho = 0) # log-rank
```

```
Call:
survdiff(formula = Surv(tfp, des) ~ sex, data = Re, rho = 0)

        N Observed Expected (O-E)^2/E (O-E)^2/V
sex=1 348      245      291      7.24      20.6
sex=2 252      213      167     12.60      20.6

 Chisq= 20.6  on 1 degrees of freedom, p= 6e-06
```

```r
survdiff(Surv(tfp, des) ~ sex, data = Re, rho = 1) # Gehan
```

```
Call:
survdiff(formula = Surv(tfp, des) ~ sex, data = Re, rho = 1)

        N Observed Expected (O-E)^2/E (O-E)^2/V
sex=1 348      146      168      2.92      10.8
sex=2 252      130      108      4.56      10.8

 Chisq= 10.8  on 1 degrees of freedom, p= 0.001
```

```r
library(ggfortify)
s = survfit(Surv(tfp, des) ~ sex, data = Re, type = "kaplan-meier")
autoplot(s)
```




```r
s
```

```
Call: survfit(formula = Surv(tfp, des) ~ sex, data = Re, type = "kaplan-meier")

        n events median 0.95LCL 0.95UCL
sex=1 348    245     55      44      68
sex=2 252    213     36      32      41
```

4.1.3 Estimation par un modèle de Cox :

4.1.3.1 Modélisation :

Remarque :

ties=c("efron","breslow","exact") permet de choisir la méthode à adopter en cas d'événements simultanés par défaut, c'est ici l'approximation d'Efron qui est utilisée.

Ecriture du modèle de Cox :

$$h(t) = h_0(t)\exp(\beta_1 \text{pnoj} + \beta_2 \text{edu} + \beta_3 \text{sex} + \beta_4 \text{pres} + \beta_5 \text{lfx})$$

où : - $h(t)$ est la fonction de hasard à l'instant t. - $h_0(t)$ est la fonction de hasard de base à l'instant t. - $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ sont les coefficients des covariables. - $\text{pnoj}, \text{edu}, \text{sex}, \text{pres}, \text{lfx}$ sont les covariables incluses dans le modèle.

Analyse des résultats :

- On teste si les coefficients sont significativement différents de 0 au seuil de 0.05%

se(coef) <=> sqrt(var(beta)) Test H0 : beta_j=0 ==> Pr(>|z|) : prob(|U|> z), où U N(0,1)

```
cox1 = coxph(formula = Surv(tfp, des) ~ pnoj + edu + sex + pres + lfx,
             data = Re)
summary(cox1)
```

```
Call:
coxph(formula = Surv(tfp, des) ~ pnoj + edu + sex + pres + lfx,
    data = Re)

  n= 600, number of events= 458

          coef exp(coef)  se(coef)      z Pr(>|z|)
pnoj  0.106887  1.112809  0.043897  2.435  0.01489 *
edu   0.066008  1.068235  0.023896  2.762  0.00574 **
sex   0.391422  1.479083  0.097445  4.017 5.90e-05 ***
pres -0.022698  0.977557  0.005315 -4.271 1.95e-05 ***
lfx  -0.004618  0.995392  0.000896 -5.154 2.55e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

     exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
pnoj    1.1128     0.8986    1.0211    1.2128
edu     1.0682     0.9361    1.0194    1.1195
sex     1.4791     0.6761    1.2219    1.7904
pres    0.9776     1.0230    0.9674    0.9878
lfx     0.9954     1.0046    0.9936    0.9971

Concordance= 0.621  (se = 0.014 )
Likelihood ratio test= 78.74  on 5 df,   p=2e-15
Wald test            = 71.22  on 5 df,   p=6e-14
Score (logrank) test = 72.22  on 5 df,   p=4e-14
```

```
# (Kaplan Meier ou Aalen, Aalen par défaut)
# les covariables sont fixées à la valeur moyenne
summary(survfit(cox1))
```

4.1.3.2 Représentation Graphique :

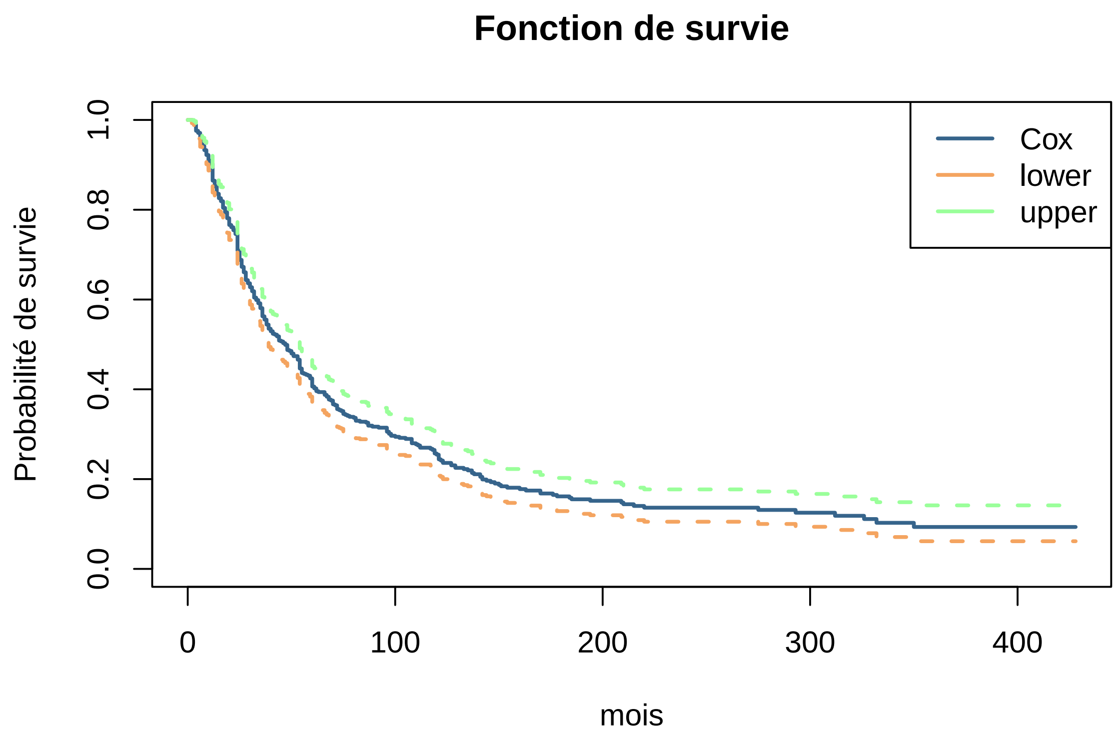
```
Call: survfit(formula = cox1)

 time n.risk n.event survival std.err lower 95% CI upper 95% CI
    2    600       2   0.9970 0.00213       0.9928        1.000
```

3	597	5	0.9894	0.00398	0.9817	0.997
4	590	9	0.9758	0.00601	0.9641	0.988
5	581	3	0.9712	0.00654	0.9585	0.984
6	577	10	0.9559	0.00807	0.9402	0.972
7	567	9	0.9420	0.00921	0.9241	0.960
8	557	6	0.9327	0.00990	0.9135	0.952
9	548	7	0.9218	0.01064	0.9012	0.943
10	540	8	0.9093	0.01142	0.8872	0.932
11	528	4	0.9030	0.01179	0.8802	0.926
12	524	24	0.8647	0.01376	0.8382	0.892
13	499	8	0.8518	0.01434	0.8242	0.880
14	488	10	0.8355	0.01502	0.8066	0.865
15	477	6	0.8257	0.01541	0.7960	0.856
16	471	4	0.8191	0.01566	0.7890	0.850
17	467	9	0.8043	0.01619	0.7731	0.837
18	458	6	0.7943	0.01653	0.7626	0.827
19	452	8	0.7810	0.01696	0.7485	0.815
20	443	9	0.7660	0.01742	0.7326	0.801
21	434	3	0.7610	0.01756	0.7274	0.796
22	431	4	0.7543	0.01775	0.7203	0.790
23	426	5	0.7459	0.01798	0.7115	0.782
24	420	22	0.7087	0.01890	0.6727	0.747
25	398	12	0.6883	0.01934	0.6514	0.727
26	383	9	0.6727	0.01965	0.6353	0.712
27	374	7	0.6606	0.01987	0.6228	0.701
28	365	10	0.6432	0.02017	0.6048	0.684
29	354	4	0.6362	0.02028	0.5976	0.677
30	349	5	0.6274	0.02041	0.5886	0.669
31	342	5	0.6185	0.02054	0.5795	0.660
32	336	8	0.6042	0.02074	0.5649	0.646
33	328	3	0.5989	0.02081	0.5594	0.641
34	325	4	0.5917	0.02090	0.5521	0.634
35	319	6	0.5808	0.02102	0.5410	0.624
36	312	10	0.5626	0.02120	0.5225	0.606
37	301	4	0.5552	0.02127	0.5151	0.599
38	297	6	0.5442	0.02136	0.5039	0.588
39	289	5	0.5349	0.02143	0.4945	0.579
40	281	3	0.5293	0.02147	0.4888	0.573
41	277	3	0.5236	0.02151	0.4831	0.568
42	273	1	0.5217	0.02152	0.4812	0.566
43	272	2	0.5179	0.02155	0.4774	0.562
44	269	5	0.5084	0.02160	0.4678	0.553
45	263	1	0.5066	0.02161	0.4659	0.551
46	262	2	0.5028	0.02163	0.4621	0.547
47	260	2	0.4989	0.02165	0.4583	0.543
48	257	6	0.4874	0.02170	0.4467	0.532
49	250	1	0.4855	0.02170	0.4448	0.530
50	249	3	0.4797	0.02172	0.4390	0.524
51	245	3	0.4739	0.02174	0.4331	0.518
53	242	4	0.4660	0.02176	0.4253	0.511
54	238	10	0.4462	0.02177	0.4055	0.491
55	228	5	0.4363	0.02177	0.3957	0.481
56	223	1	0.4343	0.02177	0.3937	0.479
57	221	1	0.4323	0.02176	0.3917	0.477

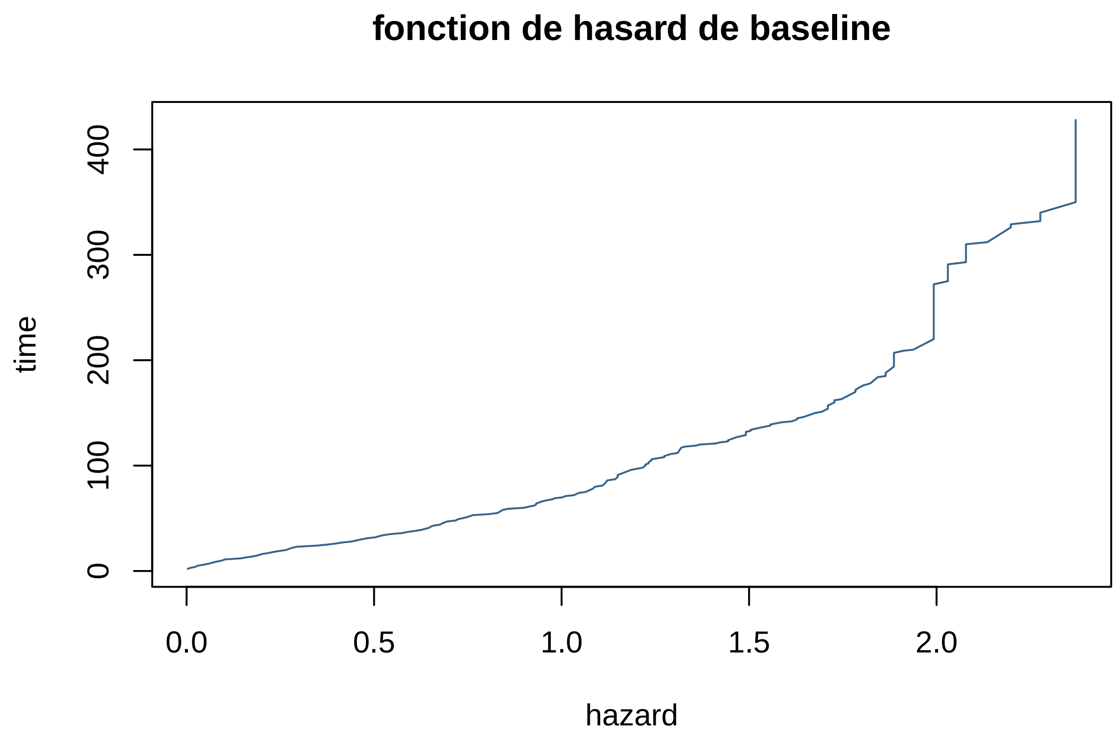
58	220	1	0.4303	0.02176	0.3897	0.475
59	217	3	0.4243	0.02175	0.3838	0.469
60	213	9	0.4061	0.02170	0.3657	0.451
61	204	2	0.4020	0.02169	0.3617	0.447
62	202	3	0.3959	0.02166	0.3556	0.441
63	198	1	0.3938	0.02165	0.3536	0.439
66	196	3	0.3876	0.02162	0.3474	0.432
67	191	2	0.3834	0.02160	0.3433	0.428
68	188	3	0.3772	0.02157	0.3372	0.422
69	184	1	0.3750	0.02155	0.3351	0.420
70	182	4	0.3665	0.02150	0.3267	0.411
71	177	1	0.3644	0.02149	0.3246	0.409
72	175	4	0.3558	0.02143	0.3162	0.400
73	170	1	0.3537	0.02141	0.3141	0.398
74	168	1	0.3515	0.02140	0.3120	0.396
75	166	3	0.3451	0.02135	0.3057	0.390
76	162	1	0.3429	0.02133	0.3036	0.387
77	161	1	0.3408	0.02131	0.3015	0.385
78	160	1	0.3386	0.02129	0.2994	0.383
80	158	1	0.3365	0.02127	0.2973	0.381
81	157	3	0.3300	0.02121	0.2909	0.374
83	154	1	0.3278	0.02119	0.2888	0.372
86	153	1	0.3256	0.02117	0.2867	0.370
87	152	3	0.3190	0.02110	0.2802	0.363
89	148	1	0.3168	0.02108	0.2781	0.361
92	145	1	0.3145	0.02105	0.2759	0.359
96	144	4	0.3055	0.02095	0.2671	0.349
97	140	2	0.3010	0.02090	0.2627	0.345
98	138	2	0.2965	0.02084	0.2583	0.340
100	136	1	0.2942	0.02081	0.2561	0.338
102	133	1	0.2919	0.02078	0.2538	0.336
105	130	1	0.2895	0.02075	0.2515	0.333
108	125	4	0.2798	0.02064	0.2421	0.323
110	120	1	0.2773	0.02061	0.2397	0.321
111	118	1	0.2749	0.02058	0.2374	0.318
112	117	2	0.2699	0.02052	0.2326	0.313
117	113	1	0.2674	0.02049	0.2301	0.311
118	111	1	0.2648	0.02046	0.2276	0.308
119	110	3	0.2570	0.02037	0.2201	0.300
120	106	1	0.2544	0.02033	0.2175	0.298
121	105	4	0.2439	0.02018	0.2074	0.287
122	100	1	0.2413	0.02014	0.2049	0.284
123	98	2	0.2360	0.02006	0.1998	0.279
127	93	2	0.2306	0.01997	0.1946	0.273
129	89	2	0.2251	0.01989	0.1893	0.268
133	86	1	0.2222	0.01985	0.1866	0.265
135	84	1	0.2194	0.01980	0.1838	0.262
137	83	2	0.2137	0.01971	0.1783	0.256
138	81	1	0.2108	0.01966	0.1756	0.253
141	79	2	0.2050	0.01956	0.1700	0.247
142	77	2	0.1991	0.01945	0.1644	0.241
144	74	1	0.1962	0.01940	0.1616	0.238
146	71	1	0.1932	0.01934	0.1588	0.235
148	68	1	0.1901	0.01929	0.1558	0.232

```
  150     67       1   0.1870 0.01923        0.1529         0.229
  151     66       1   0.1839 0.01917        0.1499         0.226
  154     65       1   0.1808 0.01911        0.1470         0.222
  160     62       1   0.1777 0.01904        0.1440         0.219
  163     60       1   0.1745 0.01898        0.1410         0.216
  170     59       2   0.1680 0.01884        0.1348         0.209
  176     55       1   0.1647 0.01877        0.1318         0.206
  178     54       1   0.1615 0.01869        0.1287         0.203
  184     53       1   0.1582 0.01861        0.1257         0.199
  185     52       1   0.1550 0.01852        0.1226         0.196
  194     50       1   0.1516 0.01843        0.1195         0.192
  209     41       1   0.1478 0.01838        0.1158         0.189
  210     40       1   0.1440 0.01831        0.1122         0.185
  215     39       1   0.1401 0.01825        0.1086         0.181
  220     38       1   0.1363 0.01816        0.1050         0.177
  275     26       1   0.1313 0.01821        0.1001         0.172
  293     20       1   0.1251 0.01842        0.0938         0.167
  312     16       1   0.1182 0.01871        0.0867         0.161
  326     14       1   0.1110 0.01895        0.0795         0.155
  332     11       1   0.1026 0.01937        0.0709         0.149
  350      9       1   0.0934 0.01980        0.0616         0.141
```

```r
plot(
  survfit(cox1),
  ylim = c(0, 1),
  xlab = 'mois',
  ylab = 'Probabilité de survie',
  main = 'Fonction de survie',
  col = palette_couleur[1:3],
  lwd = 2
)
legend(
  "topright",
  legend = c("Cox" , "lower" , "upper"),
  lwd = 2,
  col = palette_couleur[1:3]
)
```




```
# la fonction de hasard cumulée (estimateur de Breslow)
plot(basehaz(cox1),
     main = 'fonction de hasard de baseline',
     type = 'l',
     col = palette_couleur[1])
```




```
# Fonctions de survie pour des individus ayant les caractéristiques observées
#plot(survfit(cox1, newdata = Re))

# fonction de survie pour des indiv. ayant les var explicat. identiques à l'ind. 1 :
#plot(survfit(cox1, newdata = Re[1,]))
```

4.1.3.3 Hasard proportionnel pour chaque variable :

4.1.3.3.1 Les résidus Schoenfeld : Test hypothèse de Hasard Proportionnel le test des résidus de Schoenfeld : (proportionnalité des risques)

$$\begin{cases} H0 : \text{les résidus sont indépendants du temps} \\ H1 : \text{les résidus dépendent du temps} \end{cases}$$

Explication : Si H0 est rejetée, alors les résidus dépendent du temps

Graphiquement on cherche à ne pas avoir de tendance pour attester que les résidus ne dépendent pas du temps.

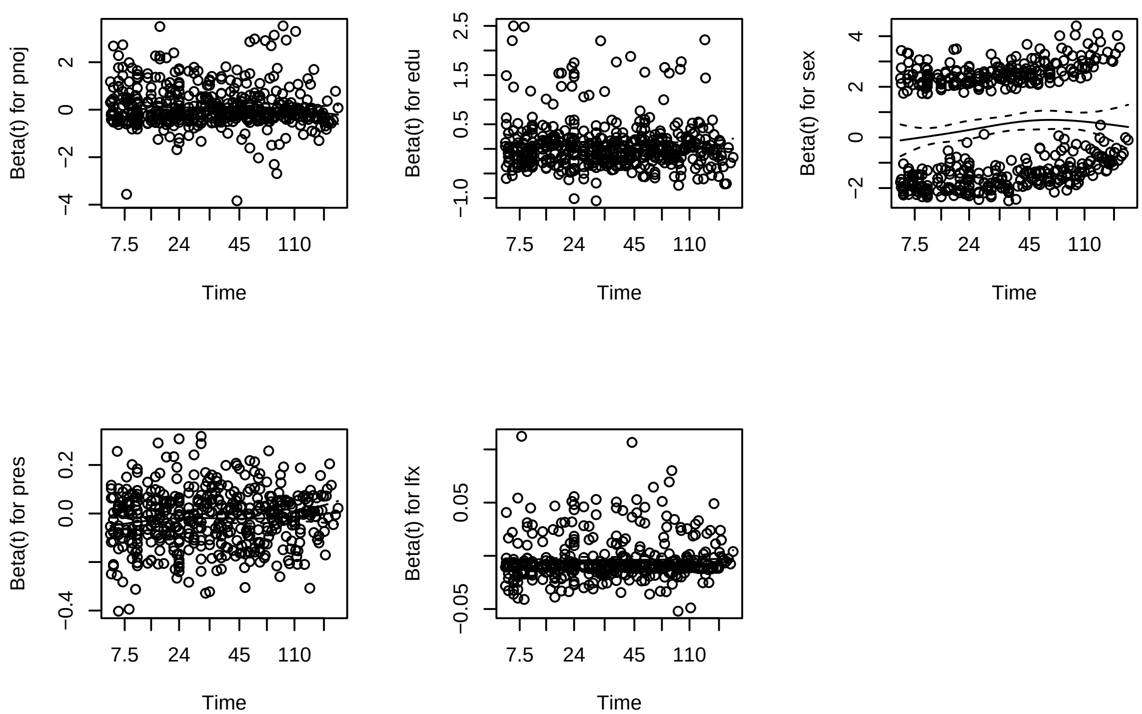
```
# Test hypothèse de Hasard Proportionnel :
# Résidus de Schoenfeld
res = cox.zph(cox1)
res
```

```
        chisq df      p
pnoj    1.499  1 0.2208
edu     0.332  1 0.5646
sex     6.974  1 0.0083
pres    1.186  1 0.2762
```

```
lfx     0.129  1 0.7196
GLOBAL 12.944  5 0.0239
```

```r
# Projection graphique :
par(mfrow = c(2, 3))
plot(res)

# Remarque :
#on ne prend en compte que les événements correspondants à des obs
#et non des censures pour les résidus de Schoenfeld

temps = as.numeric(rownames(res$y))
length(temps)
```

```
[1] 458
```



Interprétation : Les résidus de Schoenfeld nous montrent que la proportionnalité n'est pas vérifiée dans le cadre de la variable sex. Nous pouvons réaliser un modèle stratifié sur la variable sex pour contourner le problème.

4.1.3.3.2 L'estimation linéaire : (p35 cours) On cherche à tester la nullité du coefficient β_1 dans l'équation suivante :

$$r^*_{ik} = \beta_0 + \beta_1 \times t_i + \epsilon_i$$

où :

- r^*_{ik} représente les résidus de Schoenfeld standardisé pour la k-ème covariable au temps t_i.

- β_0 est l'ordonnée à l'origine, représentant la valeur moyenne des résidus de Schoenfeld lorsque $t_i = 0$.
- β_1 est le coefficient de pente, représentant la variation des résidus de Schoenfeld en fonction du temps t_i.
- t_i est le temps d'événement pour le i-ème individu.
- ϵ_i est le terme d'erreur, représentant la variabilité non expliquée par le modèle.

```
### test corrélations par méthode de régression linéaire (ne marche pas ?)
# temps = Re[Re$des == 1, ]$tfp  # on ne prend pas les censures
# regpnoj = lm(res$y[, 1] ~ temps)
# summary(regpnoj)
#
# regedu = lm(res$y[, 2] ~ temps)
# summary(regedu)
#
# regsex = lm(res$y[, 3] ~ temps)
# summary(regsex)
# # cela ne marche pas pour la var. "sex" .
#
# regpres = lm(res$y[, 4] ~ temps)
# summary(regpres)
#
# reglfx = lm(res$y[, 5] ~ temps)
# summary(reglfx)
```

4.1.4 Modélisation stratifiée sur la variable Sex :

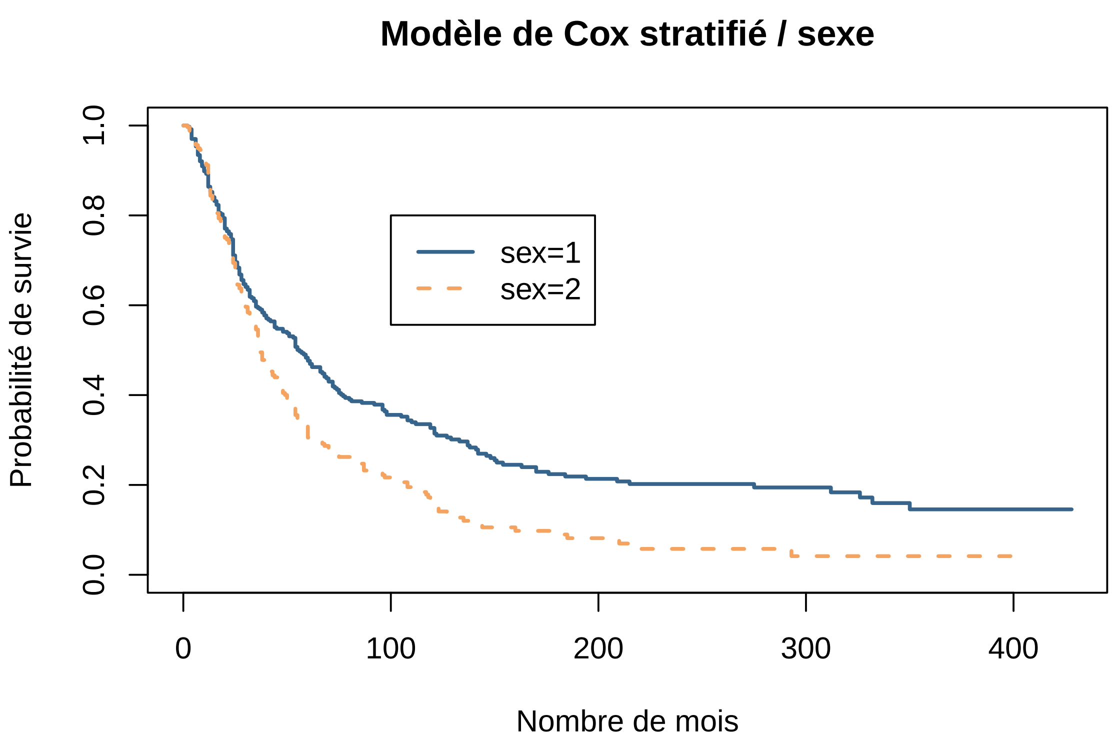
On scinde la population en deux groupe puis on applique un modèle par groupe. On rappelle que Sex 1 = Homme et Sex 2 = Femme.

```
coxStrafin =  coxph(formula = Surv(tfp, des) ~ strata(sex) + pnoj + edu +
                      pres + lfx,data = Re)

summary(coxStrafin)
```

```
Call:
coxph(formula = Surv(tfp, des) ~ strata(sex) + pnoj + edu + pres +
    lfx, data = Re)

  n= 600, number of events= 458

           coef  exp(coef)   se(coef)      z Pr(>|z|)
pnoj  0.1052343  1.1109709  0.0437751  2.404  0.01622 *
edu   0.0674389  1.0697649  0.0239890  2.811  0.00494 **
pres -0.0234445  0.9768282  0.0053410 -4.390 1.14e-05 ***
lfx  -0.0045184  0.9954918  0.0008924 -5.063 4.13e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

     exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
pnoj    1.1110     0.9001    1.0196    1.2105
edu     1.0698     0.9348    1.0206    1.1213
pres    0.9768     1.0237    0.9667    0.9871
lfx     0.9955     1.0045    0.9938    0.9972
```

```
Concordance= 0.619  (se = 0.015 )
Likelihood ratio test= 58.22  on 4 df,   p=7e-12
Wald test            = 52.12  on 4 df,   p=1e-10
Score (logrank) test = 52.81  on 4 df,   p=9e-11
```

```
plot(
  survfit(coxStrafin),
  ylim = c(0, 1),
  lty = c(1, 2),
  main = 'Modèle de Cox stratifié / sexe',
  ylab = 'Probabilité de survie',
  xlab = "Nombre de mois",
  col = palette_couleur[1:2],
  lwd = 2
)
legend(100,
       0.8,
       legend = c("sex=1", "sex=2"),
       lty = c(1, 2),
       col = palette_couleur[1:2],
       lwd = 2)
```



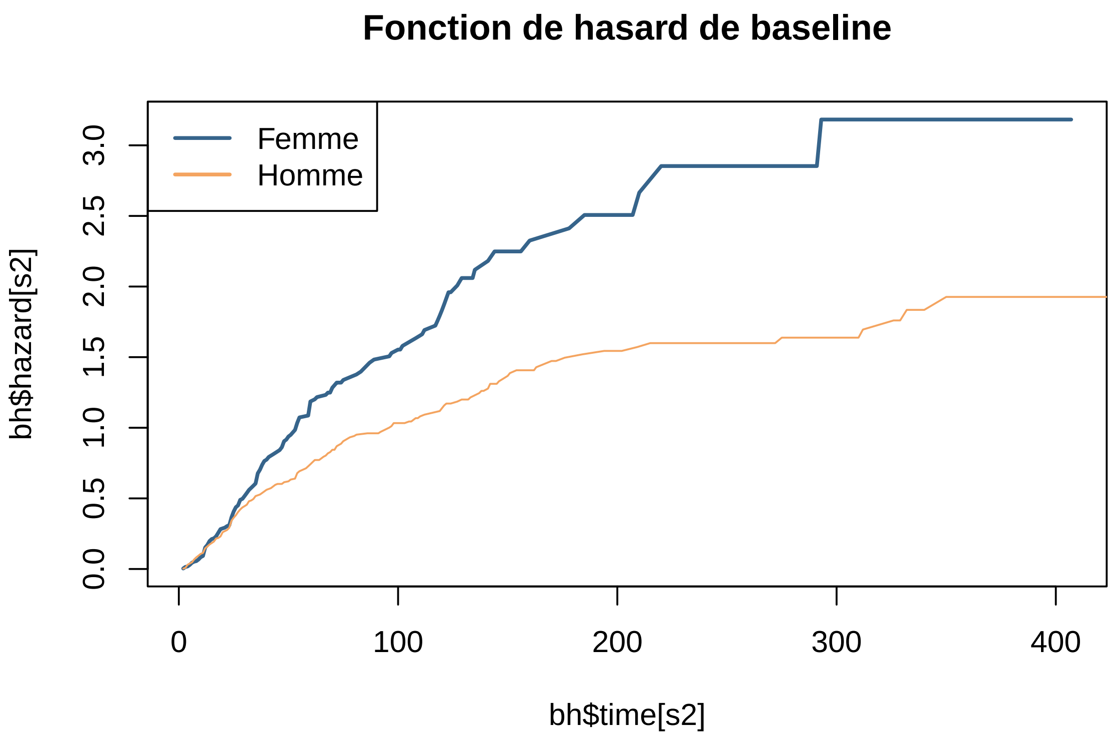
Interprétation modèle :

Exemple sur l'indicateur de prestige de l'emploi courant.

Une augmentation d'une unité de prestige est associée à une diminution de 2.3% du risque de fin d'emploi (p-valeur = 1.14e-05, très significatif).

```r
# la fonction de hasard cumulée (estimateur de Breslow)
bh = basehaz(coxStrafin)
s1 = which(bh$strata == "sex=1")
s2 = which(bh$strata == "sex=2")
plot(bh$time[s2], bh$hazard[s2], main = 'Fonction de hasard de baseline', type ='l', col = palette_coul
lines(bh$time[s1], bh$hazard[s1], col =palette_couleur[2])
legend("topleft", lwd = 2,
       col = palette_couleur[1:2],
       legend = c("Femme", "Homme"))
```

4.1.4.1 La fonction de hasard par sexe :



4.1.4.2 Comparaison entre les deux modèles :

```r
# Modèle unique pour hommes :
indH = data.frame(
  sex = 1,
  pnoj = mean(Re$pnoj),
  edu = mean(Re$edu),
  pres = mean(Re$pres),
  lfx = mean(Re$lfx)
)
sH = survfit(cox1, newdata = indH)
m_homme = c(sH$surv[sH$time == 100], # 0.354
  sH$surv[sH$time == 200] # 0.202
```

```r
  )


# Modèle unique pour hommes et femmes :
indF = data.frame(
  sex = 2,
  pnoj = mean(Re$pnoj),
  edu = mean(Re$edu),
  pres = mean(Re$pres),
  lfx = mean(Re$lfx)
)

sF = survfit(cox1, newdata = indF)
m_femme = c(
sF$surv[sF$time == 100], # 0.215
sF$surv[sF$time == 200] # 0.094
)

# Modèle stratifié pour hommes :
sH1 = survfit(coxStrafin, newdata = indH)
mh_strat = c(
sH1$surv[sH1$time == 101], # 0.355
sH1$surv[sH1$time == 202] # 0.213
)

# Modèle stratifié pour femmes :
sF1 = survfit(coxStrafin, newdata = indF)
mf_strat <- c(
sF1$surv[sF1$time == 100], # 0.211
sF1$surv[sF1$time == 200]  # 0.081
)

# Tableau résultats :

tab = matrix(
  c(m_homme, m_femme, mh_strat, mf_strat),
  nrow = 2,
  byrow = TRUE)
rownames(tab) = c('Mois 100 :', 'Mois 200: ')
colnames(tab) = c('Homme', 'Femme', 'Homme-strat', 'Femme-strat')
round(tab, 3)
```

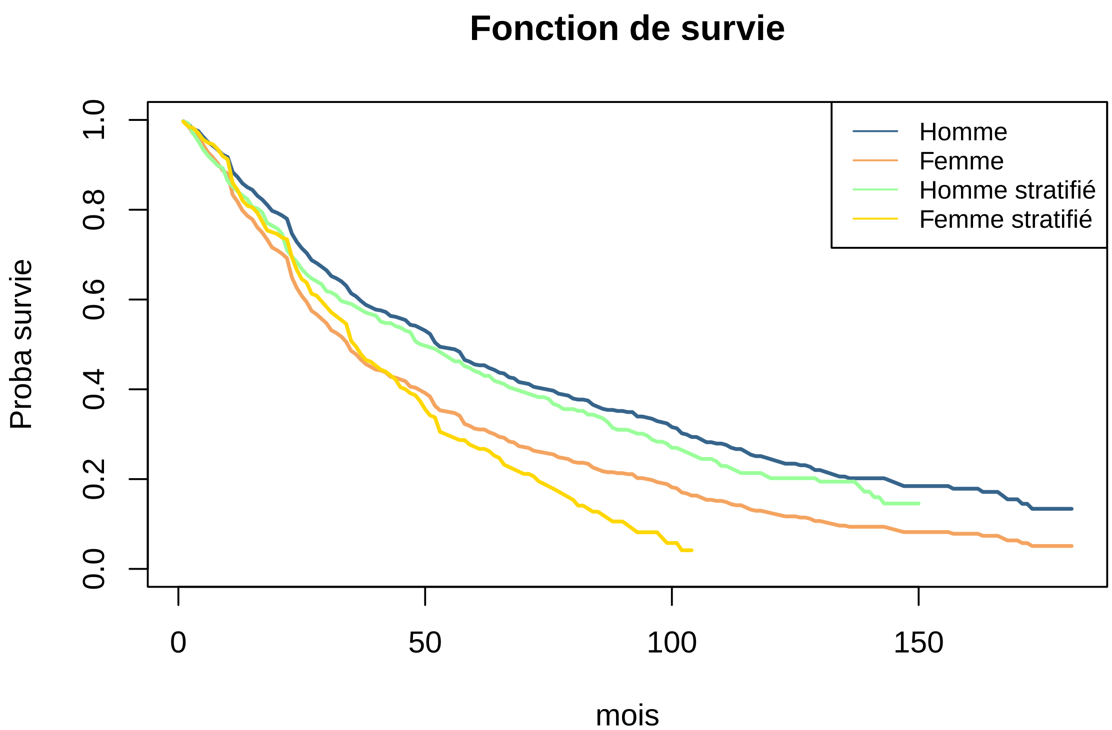
4.1.4.2.1 Résultats de projection sur les mois 100 et 200 :

```
           Homme Femme Homme-strat Femme-strat
Mois 100 : 0.354 0.202       0.215       0.094
Mois 200:  0.356 0.214       0.211       0.082
```

```r
plot(
  survfit(cox1, newdata = indH)$surv,
  ylim = c(0, 1),
  xlab = 'mois',
  ylab = 'Proba survie',
```

```r
  main = 'Fonction de survie',
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2,
  type = 'l'
)

lines(
  survfit(cox1, newdata = indF)$surv,
  ylim = c(.1, 1),
  xlab = 'mois',
  ylab = 'Proba survie',
  main = 'Fonction de survie',
  col = palette_couleur[2],
  lwd = 2
)

lines(
  survfit(coxStrafin, newdata = indH)$surv,
  ylim = c(0, 1),
  xlab = 'mois',
  ylab = 'Proba survie',
  main = 'Fonction de survie',
  col = palette_couleur[3],
  lwd = 2
)

lines(
  survfit(coxStrafin, newdata = indF)$surv,
  ylim = c(0, 1),
  xlab = 'mois',
  ylab = 'Proba survie',
  main = 'Fonction de survie',
  col = palette_couleur[4],
  lwd = 2)

legend(
  "topright",
  legend = c("Homme", "Femme", "Homme stratifié", "Femme stratifié"),
  col = palette_couleur[1:4],
  lty = 1,
  cex = 0.8
)
```

4.1.4.2.2 Représentation graphique :



4.1.5 Ajout de la variable Age au début de l'emploi :

```r
# Création de la variable :
agedeb = Re$tstart - Re$tb
Re1 = data.frame(Re, agedeb)

# Génération du modèle :
coxStrafin1 =  coxph(
  formula = Surv(tfp, des) ~ strata(sex) + pnoj + edu + pres + lfx + agedeb,
  data = Re1
)
summary(coxStrafin1)
```

```
Call:
coxph(formula = Surv(tfp, des) ~ strata(sex) + pnoj + edu + pres +
    lfx + agedeb, data = Re1)

  n= 600, number of events= 458

            coef exp(coef)  se(coef)      z Pr(>|z|)
pnoj    0.104067  1.109675  0.043703  2.381  0.01725 *
edu     0.079170  1.082388  0.027785  2.849  0.00438 **
pres   -0.021982  0.978258  0.005626 -3.907 9.35e-05 ***
lfx    -0.003023  0.996982  0.002060 -1.467  0.14229
agedeb -0.001556  0.998445  0.001933 -0.805  0.42103
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
       exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
pnoj      1.1097     0.9012    1.0186    1.2089
edu       1.0824     0.9239    1.0250    1.1430
pres      0.9783     1.0222    0.9675    0.9891
lfx       0.9970     1.0030    0.9930    1.0010
agedeb    0.9984     1.0016    0.9947    1.0022

Concordance= 0.618  (se = 0.015 )
Likelihood ratio test= 58.87  on 5 df,   p=2e-11
Wald test            = 53.13  on 5 df,   p=3e-10
Score (logrank) test = 53.94  on 5 df,   p=2e-10
```

```
# Attention à la corrélation entre les variables explicatives : (BA)
# library(corrplot)
# corrplot(cor(Re1[, c("pnoj", "edu", "pres", "lfx", "agedeb")]), method = "circle", diag = TRUE)
```

Interprétation des résultats :

- On s'aperçoit que l'ajout de la variable age au début de l'emploi n'est pas significative.
- De plus la variable Expérience sur le marché de l'emploi n'est pas significative.

```
coxStrafin2 =  coxph(formula = Surv(tfp, des) ~ strata(sex) + pnoj + edu +
                       pres + agedeb,
                     data = Re1)
summary(coxStrafin2)
```

```
Call:
coxph(formula = Surv(tfp, des) ~ strata(sex) + pnoj + edu + pres +
    agedeb, data = Re1)

  n= 600, number of events= 458

             coef  exp(coef)   se(coef)      z Pr(>|z|)
pnoj    0.0844503  1.0881187  0.0414722  2.036 0.041719 *
edu     0.0984673  1.1034784  0.0239151  4.117 3.83e-05 ***
pres   -0.0197442  0.9804495  0.0053856 -3.666 0.000246 ***
agedeb -0.0041336  0.9958749  0.0008197 -5.043 4.58e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

       exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
pnoj      1.0881     0.9190    1.0032    1.1803
edu       1.1035     0.9062    1.0529    1.1564
pres      0.9804     1.0199    0.9702    0.9909
agedeb    0.9959     1.0041    0.9943    0.9975

Concordance= 0.614  (se = 0.015 )
Likelihood ratio test= 56.71  on 4 df,   p=1e-11
Wald test            = 53.26  on 4 df,   p=8e-11
Score (logrank) test = 53.4  on 4 df,   p=7e-11
```

Interprétation :

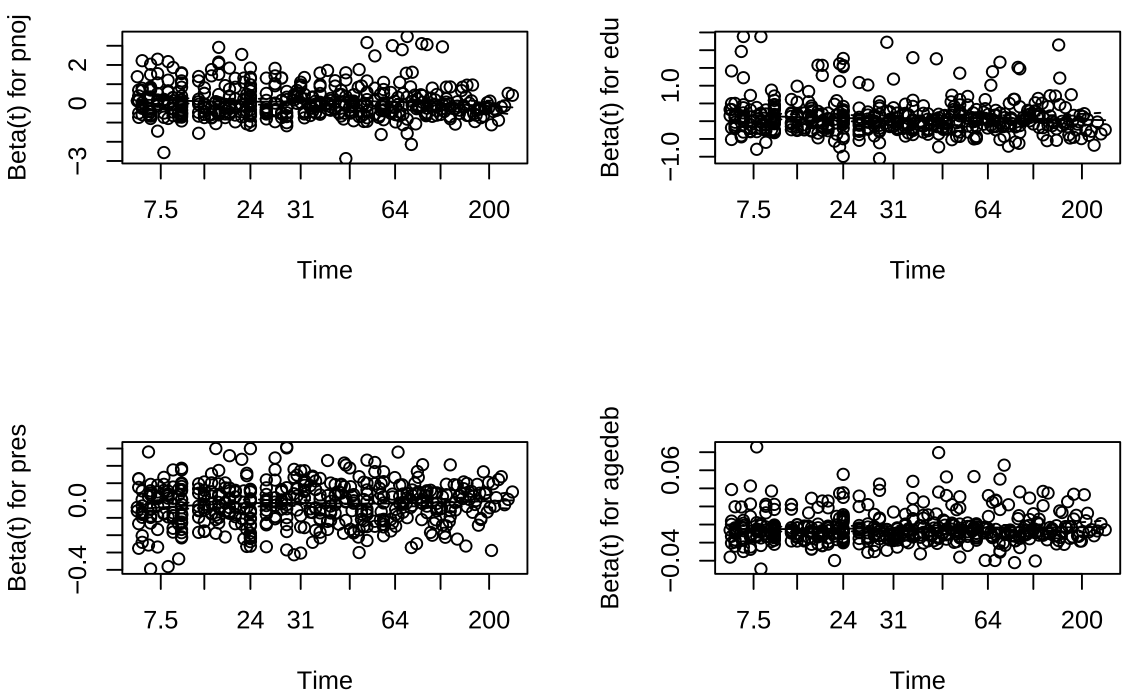
- Toutes les variables sont significatives au seuil de 5%.

```r
res = cox.zph(coxStrafin2)
res
```

4.1.5.0.1 Etude de la proportionnalité des risques :

```
        chisq df    p
pnoj   0.6697  1 0.41
edu    0.0121  1 0.91
pres   2.1183  1 0.15
agedeb 0.1839  1 0.67
GLOBAL 4.8419  4 0.30
```

```r
par(mfrow = c(2, 2))
plot(res)
```



Interprétation :

- Les résidus de Schoenfeld ne dépendent pas du temps pour les variables explicatives.

5 Examen 2023-2024 :

6 Exercice :

7 Autres exercices :

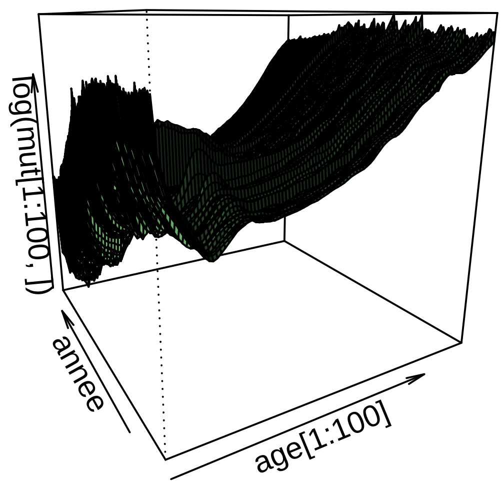
7.1 Exercice sur la modélisation de Lee-Carter

7.1.1 Importation des données :

Importation des données de mortalité pour la France de 1816 à 2021.

Référence du site HMD.

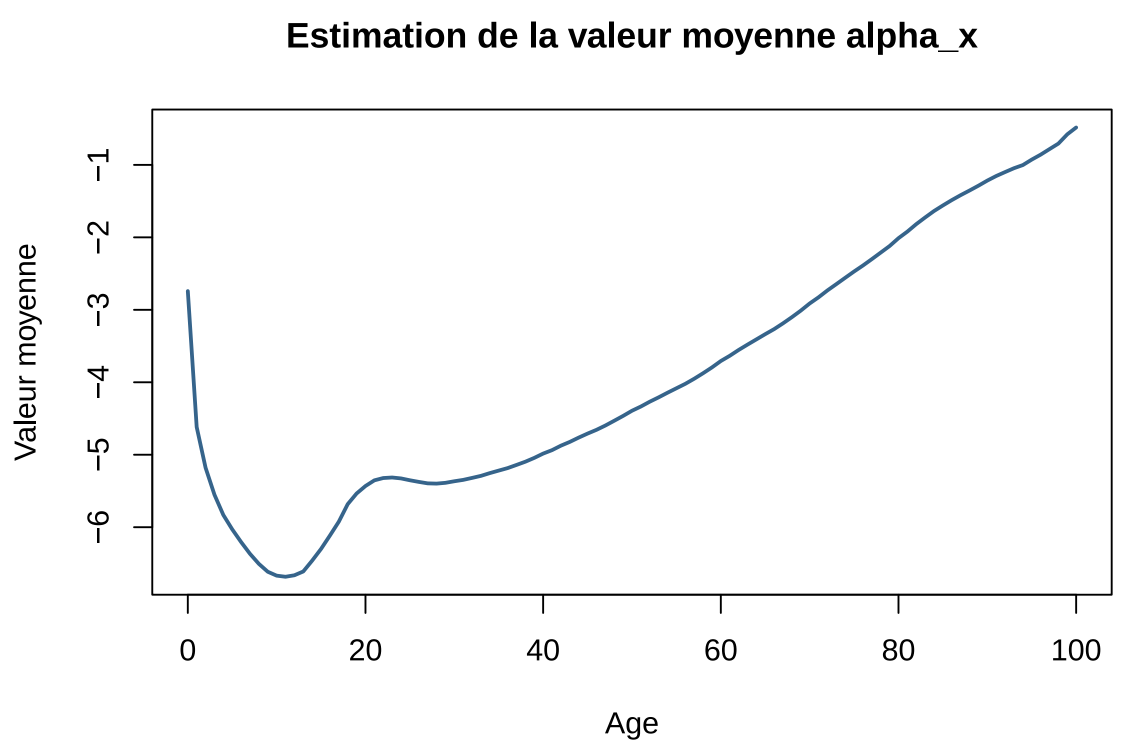
```
# Décès
de = read.csv("DATA/DeathsFrance2024.csv", header = TRUE, sep = ";")
#str(de)
# remarque : la classe d'âge "110" est en réalité "110 et plus".

# Expositions
ex = read.csv("DATA/ExposuresFrance2024.csv", header = TRUE, sep = ";")
#str(ex)

# Force de mortalité : \mu_{x,t}= m_{x,t} (m_{x,t} taux de mortalité)
age = 0:110
annee = 1816:2021
mu = de[, 3:5] / ex[, 3:5]
mut = matrix(mu[, 3], length(age), length(annee))
persp(
  age[1:100],
  annee,
  log(mut[1:100, ]),
  theta = -30,
  col = "light green",
  shade = TRUE
)
```



7.1.2 Modélisation de Lee-Carter :

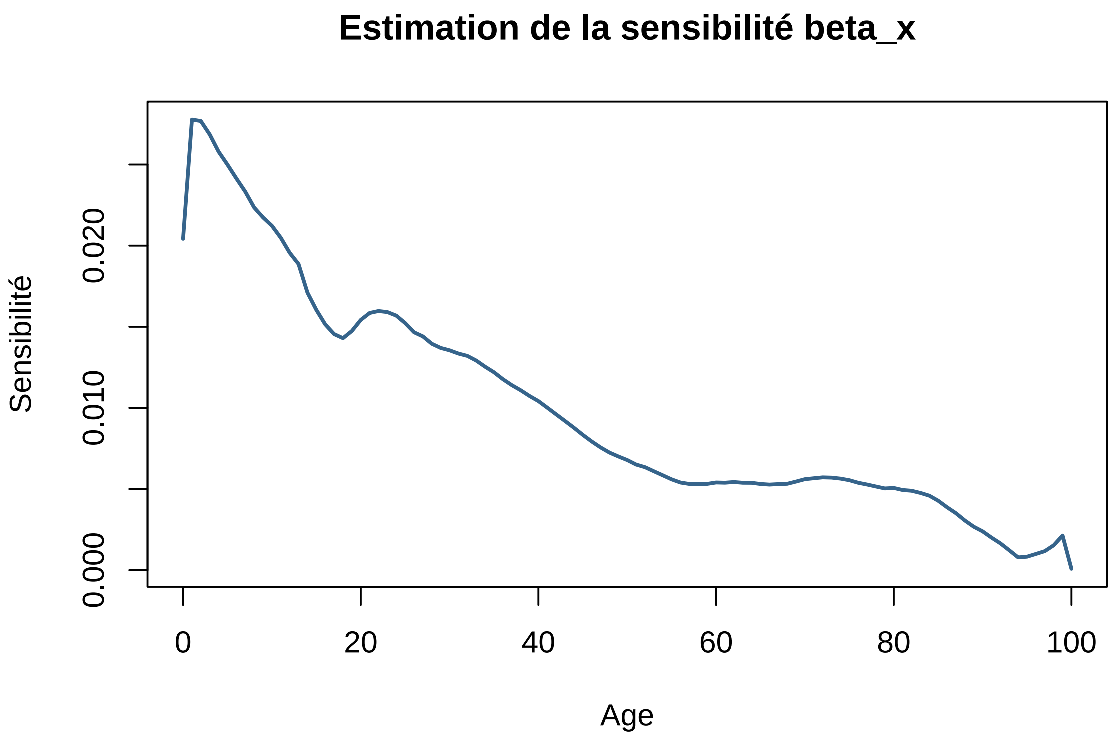
```
library(forecast)
library(demography)

# Calibrage Lee-Carter avec l'ensemble de données
annee = unique(de$Year)
nc = length(annee)
age = unique(de$Age)
nl = length(age)

muf = matrix(de$Female / ex$Female, nl, nc)  # Données Femmes
muh = matrix(de$Male / ex$Male, nl, nc)  # Données Hommes

popf = matrix(ex$Female, nl, nc)
poph = matrix(ex$Male, nl, nc)

Baseh = demogdata(
  data = muh,
  pop = poph,
  ages = age,
  years = annee,
  type = "mortality",
  label = 'France',
  name = 'Hommes',
  lambda = 1
)
```

```
Basef = demogdata(
  data = muf,
  pop = popf,
  ages = age,
  years = annee,
  type = "mortality",
  label = 'France',
  name = 'Femmes',
  lambda = 1
)

lch = lca(Baseh)

# Estimation de alpha_x
plot(
  lch$age,
  lch$ax,
  main = "Estimation de la valeur moyenne alpha_x",
  col = palette_couleur[1],
  xlab = "Age",
  ylab = "Valeur moyenne",
  type = 'l',
  lwd = 2
)
```

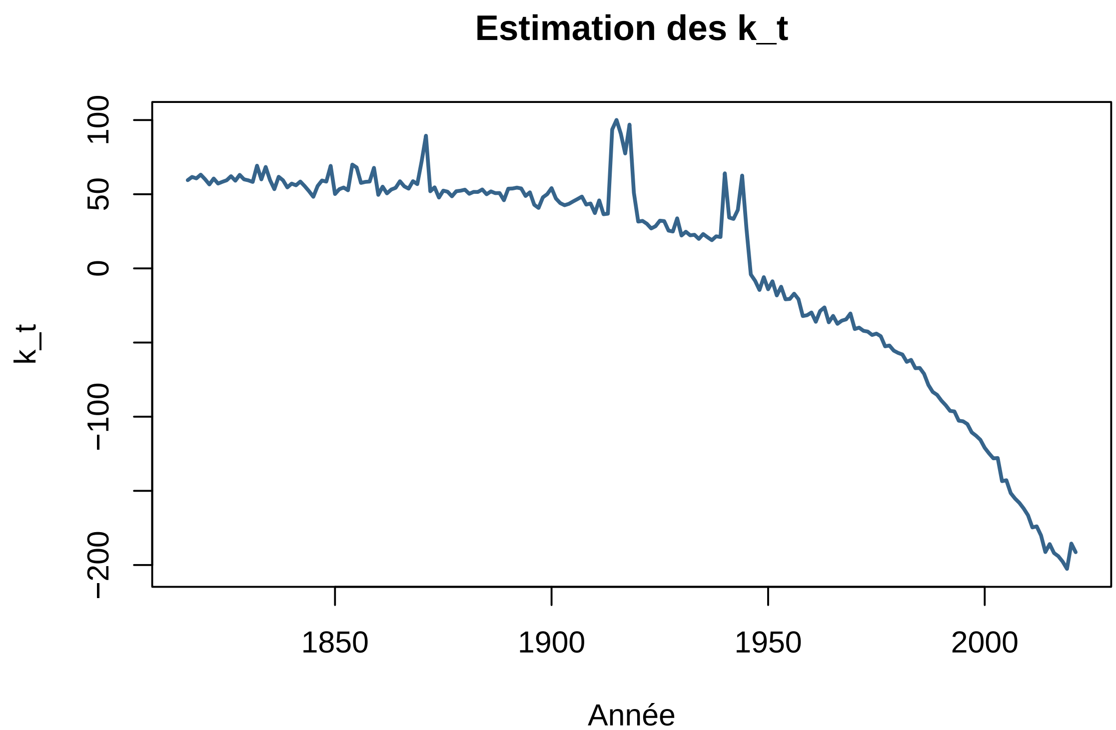



```
# Estimation de beta_x
plot(
```

```
  lch$age,
  lch$bx,
  main = "Estimation de la sensibilité beta_x",
  col = palette_couleur[1],
  xlab = "Age",
  ylab = "Sensibilité",
  type = 'l',
  lwd = 2
)
```




```
# Estimation des k_t
kt = lch$kt
plot(
  annee,
  kt,
  main = "Estimation des k_t",
  col = palette_couleur[1],
  xlab = "Année",
  ylab = "k_t",
  type = 'l',
  lwd = 2
)
```



7.1.3 Projection des k_t méthode de Lee & Carter (1992) :

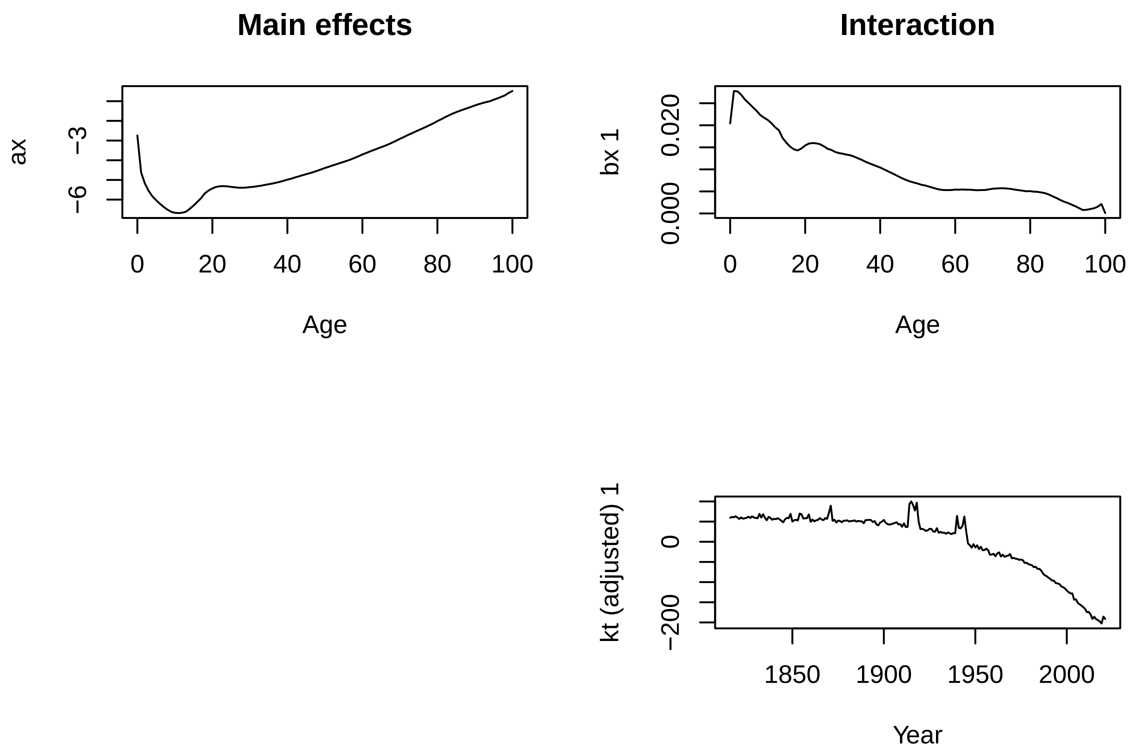
On fait l'hypothèse que les k_t sont déterminés par la relation suivante :

$$k_t = k_{t-1} + d + \epsilon_t$$

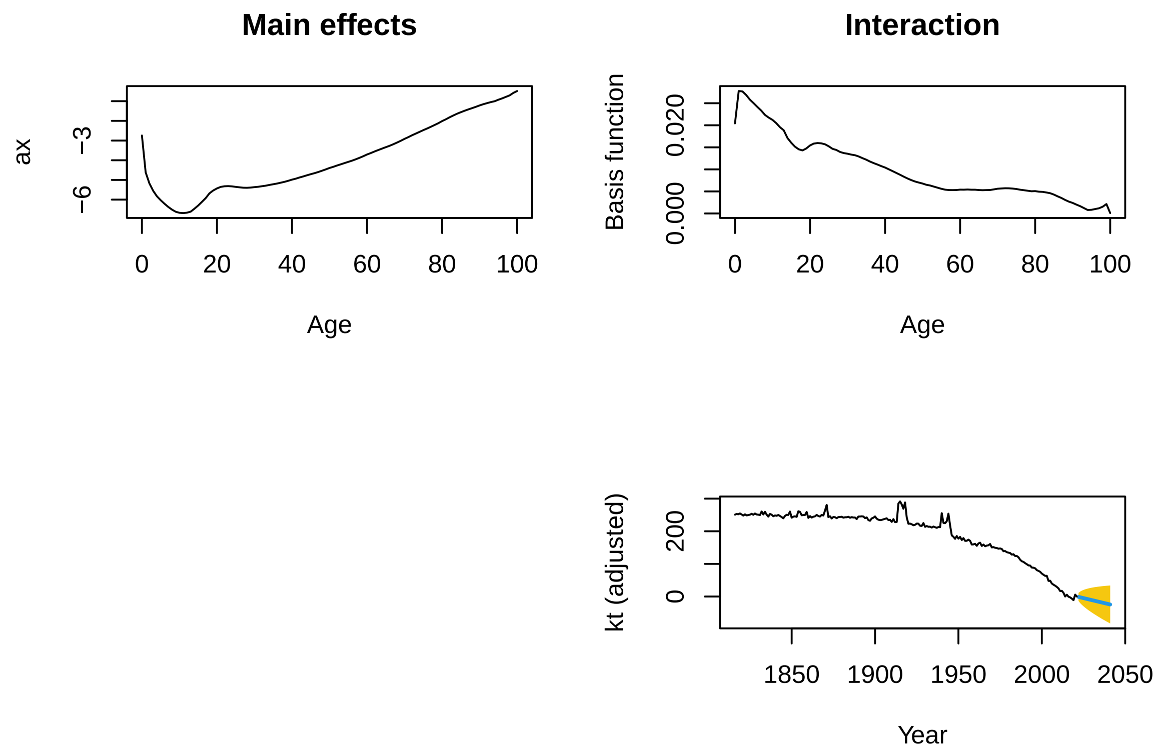
avec :

- k_t : les valeurs de k à l'instant t.
- k_{t-1} : les valeurs de k à l'instant $t-1$.
- d : une constante.
- $epsilon_t$: un bruit blanc.

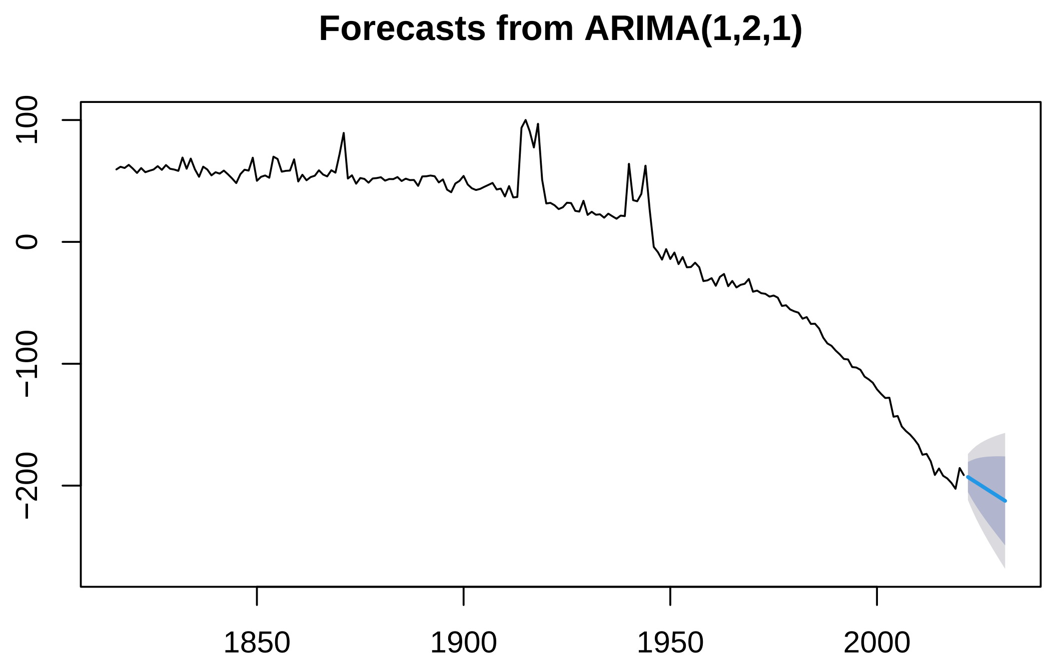
```
plot(lch) # Affichage des résultats
```




```r
# Projection des k_t à l'aide du modèle initial :
proj = forecast(lch, h = 20)
plot(proj, plot.type = "component")
```




```
par(mfrow = c(1, 1))

# Ou bien un auto-arima pour modéliser et projeter les k_t :
ar = auto.arima(kt)
plot(forecast(ar, h = 10))
```




```r
# Modèle sans ajustement des Kt :
lch_sans = lca(Baseh, adjust = "none")
```

```r
plot(
  lch$year,
  lch$kt,
  col = palette_couleur[1],
  type = 'l',
  main = "Effet ajustement sur les k_t",
  xlab = "Année",
  ylab = "k_t",
  lwd = 2
)
lines(lch_sans$year, lch_sans$kt, col = palette_couleur[2], lwd = 2)
legend(
  1840,-50,
  legend = c("avec ajust.", "sans ajust."),
  col = palette_couleur[1:2],
  lty = 1,
  cex = 0.8
)
```

7.1.3.1 Comparaison avec et sans ajustement des k_t :

Effet ajustement sur les k_t