# Modèles de durée : TD et Examens

2024-11-11

## Contents

# 1 Les méthodes semi-paramétriques

## 1.1 Le modèle de Cox

### 1.1.1 Lecture des données traitement de la base :

```
library(tidyverse)
Re = read.table("DATA/rossi.txt", header = TRUE)
glimpse(Re)

# Suppression de la variable race :
Re1 = Re[, -5]
```

### 1.1.2 Etude la durée de survie selon la valeur d'une variable. (test de log-Rank)

On regarde si les fonctions de survies des individus discriminés selon les modalités d'une variable, sont significativement similaires.

On effectue pour ça le test du log-rank à l'aide de la fonction Surv du package survival.

$$\begin{cases} H0 : \text{les fonctions de survie sont les mêmes, p-value} \geq 0.05 \\ H1 : \text{les fonctions de survie sont différentes} \end{cases}$$

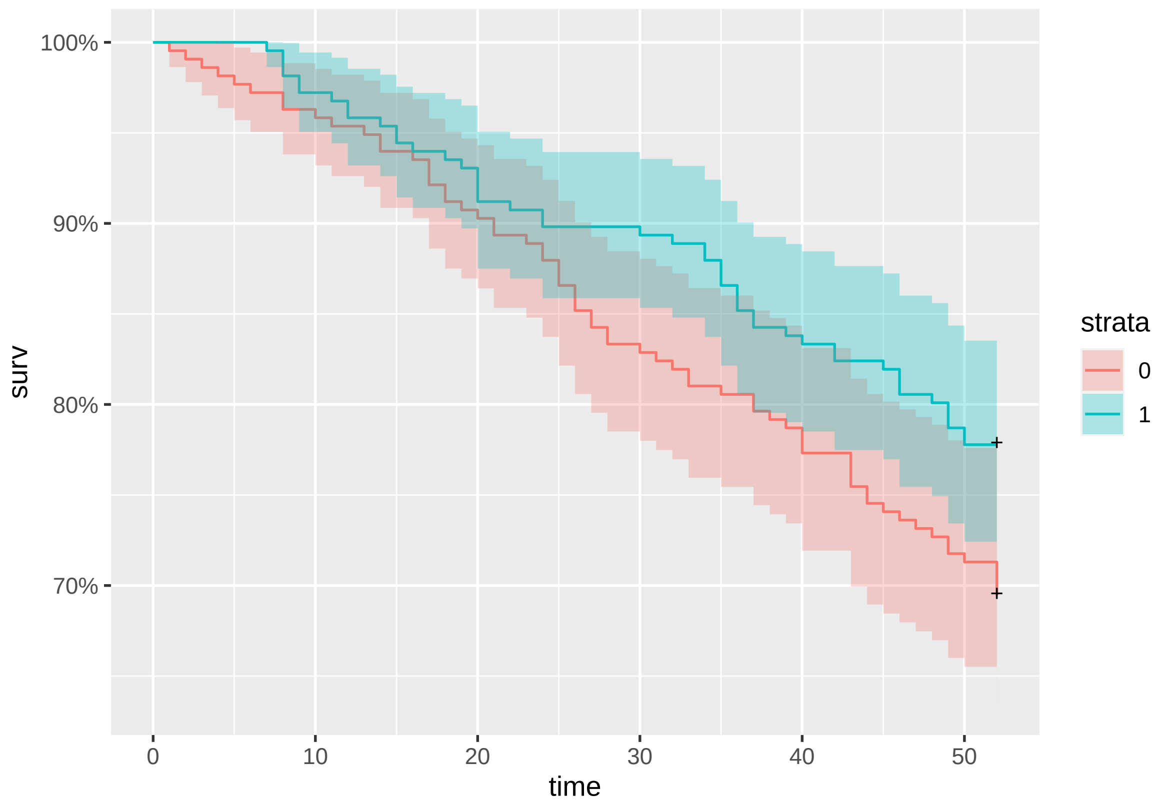
```
library(survival)
# Test sur la variable financement :
survdiff(Surv(week, arrest) ~ fin, data = Re1)
```

```
Call:
survdiff(formula = Surv(week, arrest) ~ fin, data = Re1)

        N Observed Expected (O-E)^2/E (O-E)^2/V
fin=0 216       66     55.6      1.96      3.84
fin=1 216       48     58.4      1.86      3.84

 Chisq= 3.8  on 1 degrees of freedom, p= 0.05
```

```
# Surv créer un objet avec week le temps de survie et arrest l'indicateur
# d'évènement. Fin est la variable servant à comparer les courbes.
```

### 1.1.3 Modélisation de Kaplan Meier :

```
# Modélisation de kaplan meier, distinction sur la variable financement
s = survfit(Surv(week, arrest) ~ fin, data = Re1)
library(ggfortify)
library(ggplot2)
autoplot(s)
```




### 1.1.4 Ajustement d'un modèle de Cox :

```
cox1 = coxph(formula = Surv(week, arrest) ~ fin + age + wexp + mar +
               paro + prio, data = Re1)
summary(cox1)
```

```
Call:
coxph(formula = Surv(week, arrest) ~ fin + age + wexp + mar +
    paro + prio, data = Re1)

  n= 432, number of events= 114

         coef exp(coef) se(coef)      z Pr(>|z|)
fin  -0.36554   0.69382  0.19090 -1.915  0.05552 .
age  -0.05633   0.94523  0.02189 -2.573  0.01007 *
wexp -0.15699   0.85471  0.21208 -0.740  0.45916
mar  -0.47130   0.62419  0.38027 -1.239  0.21520
paro -0.07792   0.92504  0.19530 -0.399  0.68991
prio  0.08966   1.09380  0.02871  3.123  0.00179 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

     exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
fin     0.6938     1.4413    0.4773    1.0087
age     0.9452     1.0579    0.9055    0.9867
wexp    0.8547     1.1700    0.5640    1.2952
mar     0.6242     1.6021    0.2962    1.3152
```

```
paro    0.9250     1.0810    0.6308    1.3564
prio    1.0938     0.9142    1.0340    1.1571

Concordance= 0.639  (se = 0.027 )
Likelihood ratio test= 32.14  on 6 df,   p=2e-05
Wald test            = 30.79  on 6 df,   p=3e-05
Score (logrank) test = 32.28  on 6 df,   p=1e-05
```

Explication du test :

$$\begin{cases} H0: \ \beta_j = 0, \text{Pr(>|z|), prob(|U|> z), où U} \quad \text{N(0,1)} \\ H1: beta_j \neq 0, \text{ p-value} \leq 0.05 \end{cases}$$

Le se(coef) correspond au sqrt(var(beta)). On en déduit que les variables significatives sont l'âge et le prio.

### 1.1.5 Graphique de la fonction de survie :

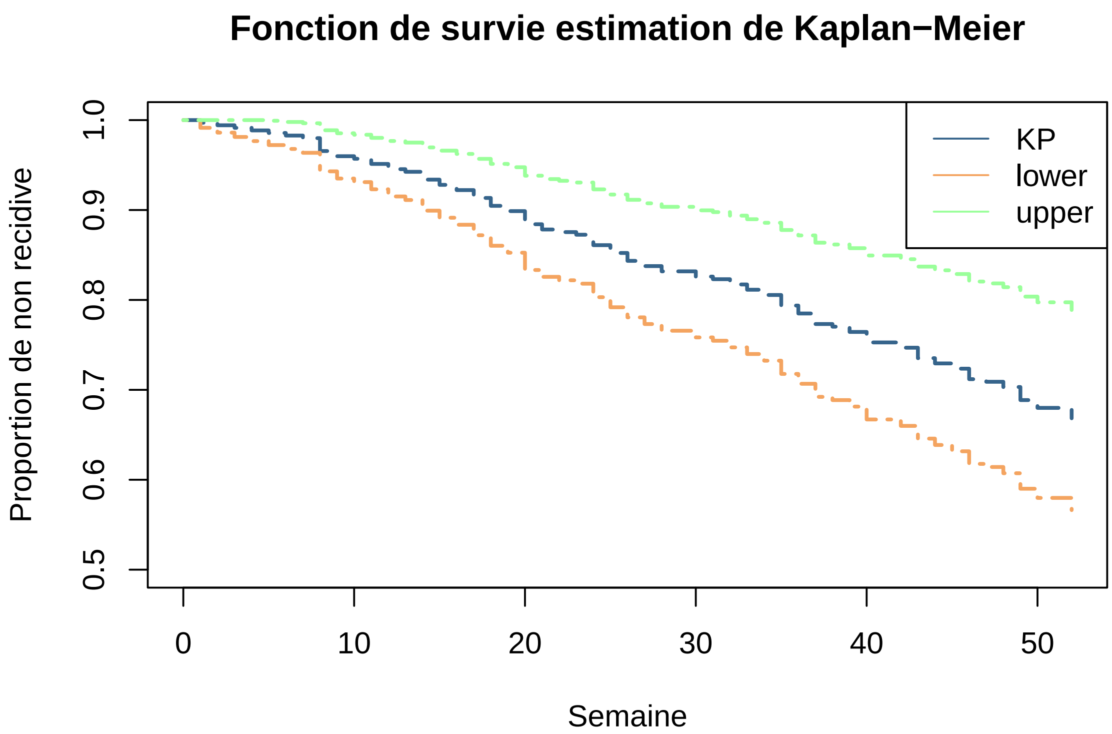
Dans le cadre des fonction de Kaplan Meier, Aalen par défaut les covariables sont fixées à la valeur moyenne.

```r
kpmr = survfit(cox1) # Fonction de survie de Kaplan-Meier pour le modèle de cox

summary(kpmr)
```

```
Call: survfit(formula = cox1)

 time n.risk n.event survival std.err lower 95% CI upper 95% CI
    1    432       1    0.997 0.00292        0.991        1.000
    2    431       1    0.994 0.00419        0.986        1.000
    3    430       1    0.991 0.00520        0.981        1.000
    4    429       1    0.989 0.00609        0.977        1.000
    5    428       1    0.986 0.00690        0.972        0.999
    6    427       1    0.983 0.00766        0.968        0.998
    7    426       1    0.980 0.00838        0.964        0.997
    8    425       5    0.966 0.01165        0.943        0.989
    9    420       2    0.960 0.01285        0.935        0.985
   10    418       1    0.957 0.01343        0.931        0.984
   11    417       2    0.951 0.01459        0.923        0.980
   12    415       2    0.945 0.01573        0.915        0.977
   13    413       1    0.943 0.01629        0.911        0.975
   14    412       3    0.934 0.01794        0.899        0.970
   15    409       2    0.928 0.01903        0.891        0.966
   16    407       2    0.922 0.02009        0.884        0.962
   17    405       3    0.913 0.02167        0.872        0.957
   18    402       3    0.905 0.02322        0.860        0.951
   19    399       2    0.899 0.02424        0.853        0.948
   20    397       5    0.884 0.02674        0.833        0.938
   21    392       2    0.878 0.02772        0.826        0.934
   22    390       1    0.875 0.02820        0.822        0.933
   23    389       1    0.873 0.02868        0.818        0.931
   24    388       4    0.861 0.03057        0.803        0.923
   25    384       3    0.852 0.03196        0.792        0.917
   26    381       3    0.843 0.03332        0.781        0.911
   27    378       2    0.838 0.03422        0.773        0.907
   28    376       2    0.832 0.03512        0.766        0.904
   30    374       2    0.826 0.03601        0.758        0.900
   31    372       1    0.823 0.03645        0.755        0.898
```

```
   32    371       2    0.817 0.03732        0.747        0.894
   33    369       2    0.811 0.03819        0.740        0.890
   34    367       2    0.805 0.03906        0.732        0.886
   35    365       4    0.794 0.04077        0.718        0.878
   36    361       3    0.785 0.04202        0.707        0.872
   37    358       4    0.773 0.04365        0.692        0.864
   38    354       1    0.770 0.04405        0.689        0.862
   39    353       2    0.764 0.04485        0.681        0.858
   40    351       4    0.753 0.04641        0.667        0.849
   42    347       2    0.747 0.04717        0.660        0.845
   43    345       4    0.735 0.04867        0.646        0.837
   44    341       2    0.729 0.04941        0.639        0.833
   45    339       2    0.724 0.05014        0.632        0.829
   46    337       4    0.712 0.05157        0.618        0.820
   47    333       1    0.709 0.05191        0.614        0.818
   48    332       2    0.703 0.05261        0.607        0.814
   49    330       5    0.689 0.05430        0.590        0.804
   50    325       3    0.680 0.05527        0.580        0.797
   52    322       4    0.668 0.05653        0.566        0.789
```

```r
plot(
  kpmr,
  ylim = c(0.5, 1),
  lty = 5,
  xlab = 'Semaine',
  ylab = 'Proportion de non recidive',
  main = 'Fonction de survie estimation de Kaplan-Meier',
  col = palette_couleur[1:3],
  lwd = 2)

legend(
  "topright",  # Position de la légende
  lty = 1,
  cex = 1,
  legend = c("KP", "lower", "upper"),
  col = palette_couleur[1:3])
```

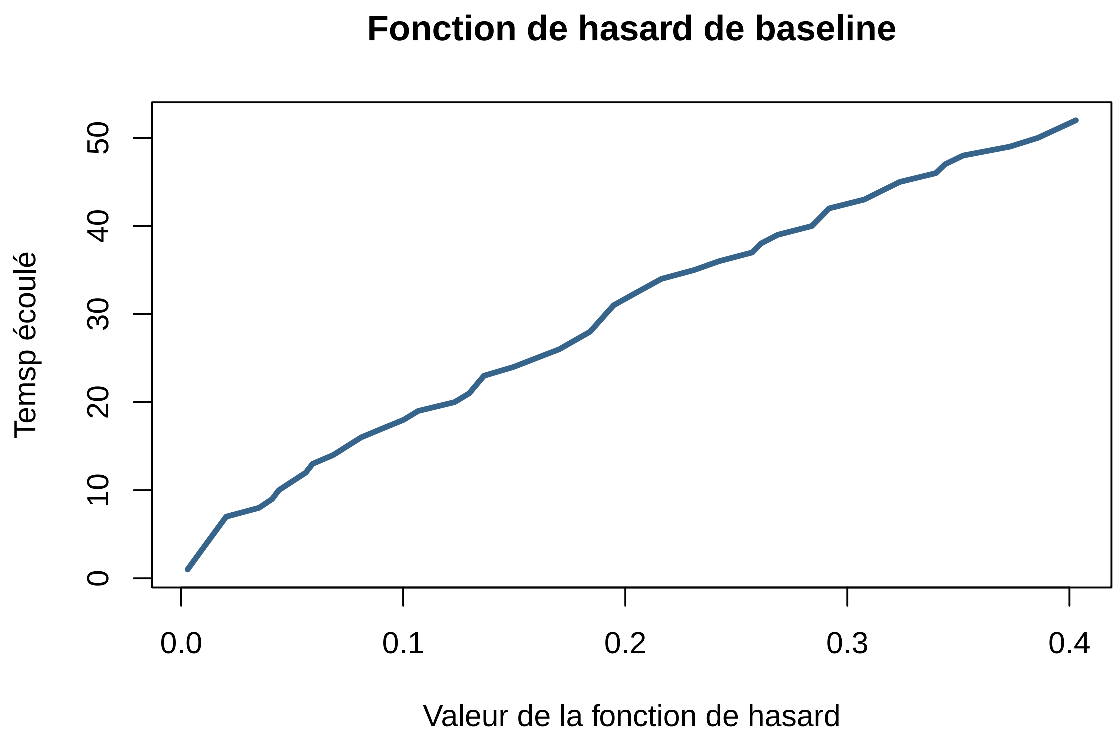



#### 1.1.6 Fonction de hasard cumulée avec l'estimateur de Breslow :

Interprétation Intuitive:

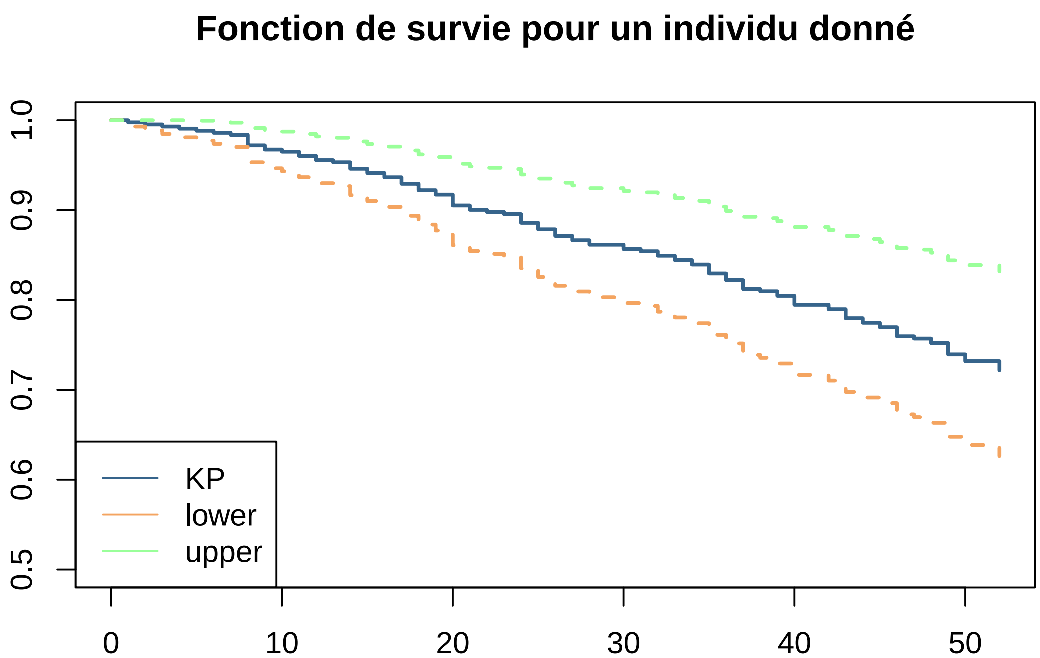
Taux Instantané: La fonction de hasard représente le taux instantané de survenue de l'événement à un moment donné.
Par exemple, si h(t)=0.05h(t)=0.05 à t=10t=10 semaines, cela signifie que le taux de survenue de l'événement à 10 semaines est de 5% par unité de temps.
Conditionnelle à la Survie: La fonction de hasard est conditionnelle à la survie jusqu'à ce moment. Elle ne prend en compte que les individus qui n'ont pas encore subi l'événement.

```
plot(
  basehaz(cox1),
  main = 'Fonction de hasard de baseline',
  xlab = 'Valeur de la fonction de hasard',
  ylab = "Temsp écoulé",
  type = 'l',
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 3
)
```




### 1.1.7 Fonction survie pour l'individu ayant les caractéristiques du premier individu :

```r
# plot(survfit(cox1, newdata = Re1)) # fonction de survie pour tous les individus
# title("Fonction de survie pour tous les individus")

plot(survfit(cox1, newdata = Re1[1, ]),
     main = "Fonction de survie pour un individu donné",
     col = palette_couleur[1:3],
     ylim = c(0.5,1),
     lwd = 2,
     lty = 1)

legend("bottomleft",
       lty = 1,
       cex = 1,
       legend = c("KP", "lower", "upper"),
       col = palette_couleur[1:3])
```

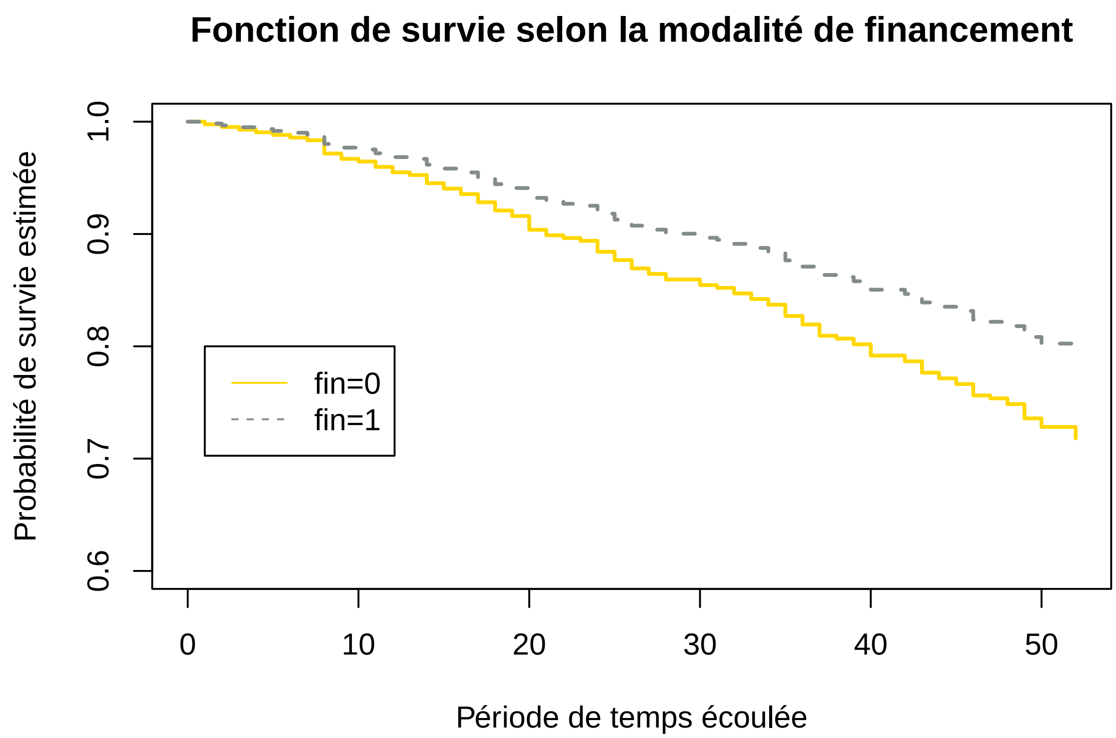



#### 1.1.8 Etude de l'effet d'une covariable (les autres étant fixées) :

Exemple : effet de la var "financement" (0 ou 1) On fixe les autres à leur valeur moyenne.

```
ReFin = data.frame(
  fin = c(0, 1),
  age = rep(mean(Re1$age), 2),
  wexp = rep(mean(Re1$wexp), 2),
  mar = rep(mean(Re1$mar), 2),
  paro = rep(mean(Re1$paro), 2),
  prio = rep(mean(Re1$prio), 2)
)

plot(
  survfit(cox1, newdata = ReFin),
  lty = c(1, 2),
  ylim = c(.6, 1),
  col = palette_couleur[4:5],
  lwd = 2,
  main = "Fonction de survie selon la modalité de financement",
  ylab = "Probabilité de survie estimée",
  xlab = "Période de temps écoulée"
)
legend(
  1,
  0.8,
  legend = c("fin=0", "fin=1"),
  lty = c(1, 2),
```

```r
  col =  palette_couleur[4:5]
)
```




#### 1.1.9 Sélection de variable une à une :

Remarque : on peut faire de la sélection de variables en enlevant de façon itérative celles expliquant le moins (p-value la plus forte) exemple :

```r
cox2= coxph(formula=Surv(week,arrest)~fin+age+wexp+mar+prio,data=Re1)
summary(cox2)
```

```
Call:
coxph(formula = Surv(week, arrest) ~ fin + age + wexp + mar +
    prio, data = Re1)

  n= 432, number of events= 114

         coef exp(coef) se(coef)      z Pr(>|z|)
fin  -0.36094   0.69702  0.19052 -1.894   0.0582 .
age  -0.05536   0.94614  0.02172 -2.549   0.0108 *
wexp -0.16039   0.85181  0.21201 -0.757   0.4493
mar  -0.47935   0.61919  0.37989 -1.262   0.2070
prio  0.09134   1.09564  0.02840  3.216   0.0013 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

     exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
fin     0.6970     1.4347    0.4798    1.0126
```

```
age      0.9461     1.0569    0.9067    0.9873
wexp     0.8518     1.1740    0.5622    1.2906
mar      0.6192     1.6150    0.2941    1.3037
prio     1.0956     0.9127    1.0363    1.1583

Concordance= 0.641  (se = 0.027 )
Likelihood ratio test= 31.98  on 5 df,   p=6e-06
Wald test            = 30.73  on 5 df,   p=1e-05
Score (logrank) test = 32.2  on 5 df,   p=5e-06
```

Test hypothèse de Hasard Proportionnel : (proportionnalité des risques)

$$\begin{cases} H0 : \text{les résidus sont indépendants du temps} \\ H1 : \text{les résidus dépendent du temps} \end{cases}$$

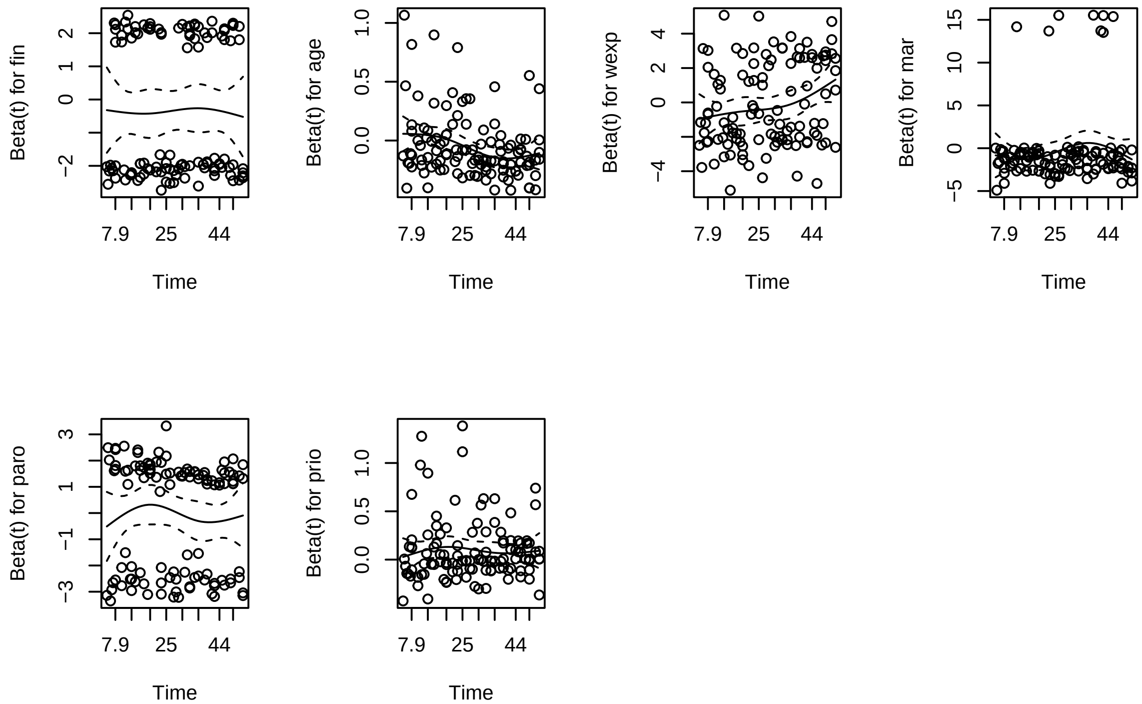
Explication : Si H0 est rejetée, alors les résidus dépendent du temps

#### 1.1.10 Test de hasard proportionnel, les résidus de Schoenfeld

```r
res = cox.zph(cox1)
res
```

```
         chisq df     p
fin     0.0621  1 0.803
age     5.9161  1 0.015
wexp    4.2983  1 0.038
mar     1.0207  1 0.312
paro    0.0140  1 0.906
prio    0.5254  1 0.469
GLOBAL 16.4474  6 0.012
```

```r
# Représentation graphique
par(mfrow = c(2, 4))
plot(res)
```




# 2 Les méthodes non-paramétriques

## 2.1 La méthode de Kaplan meier :

### 2.1.1 Génération de la base et importation des données

On créer une base de données avec des observations censurées.

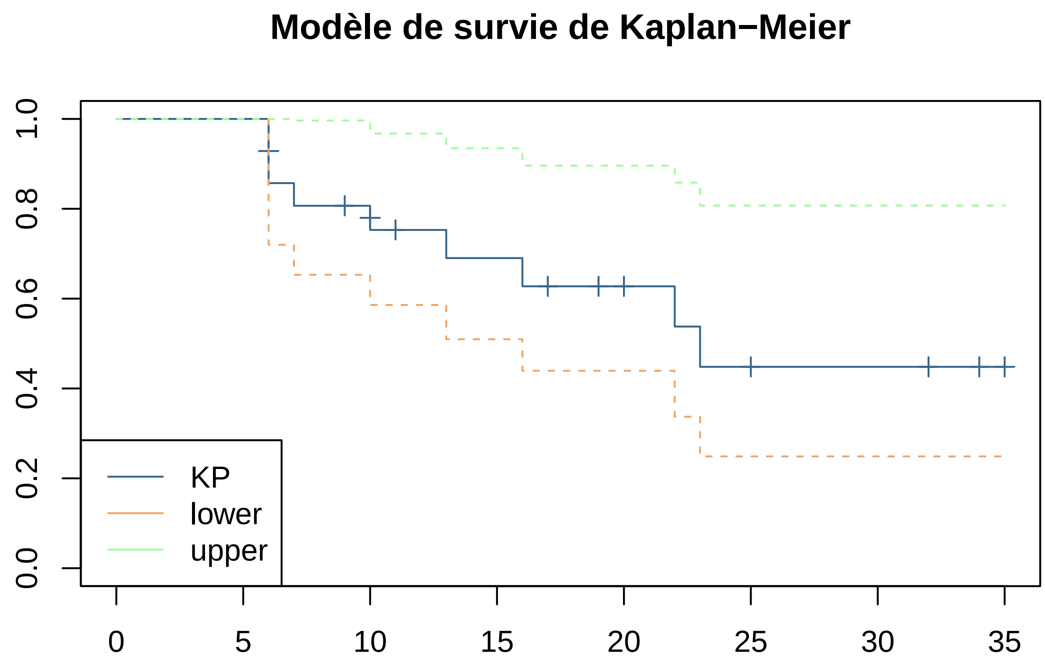
```
library(survival)
tempsGMP = c(rep(6, 4), 7, 9, 10, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 32,
             32, 34, 35) # liste des observations
finGMP = c(1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, rep(0, 5))
# indication des obs censurées
donnF = Surv(tempsGMP, finGMP)
head(donnF)
```

```
[1] 6  6  6  6+ 7  9+
```

### 2.1.2 Ajustement d'un modèle de survie avec la méthode de Kaplan Meier :

```
survKM = survfit(donnF ~ 1,
                 data = donnF,
                 type = "kaplan-meier",
                 error = "greenwood")

# Graphique de la fonction de survie moyenne :

plot(survKM, mark.time = TRUE, col = palette_couleur[1:3])
```

```r
title("Modèle de survie de Kaplan-Meier")
legend("bottomleft",
       lty = 1,
       cex = 1,
       legend = c("KP", "lower", "upper"),
       col = palette_couleur[1:3])
```




```r
# Intervalle de confiance et valeur modélisée pour l'individu 10 :
IC_KM = round(c(survKM$lower[10], survKM$surv[10], survKM$upper[10]),4)
```

### 2.2 Le modèle de Fleming-Harrington :

#### 2.2.1 Modèle de Fleming-Harrington, intervalle méthode Tsiatis :

```r
# Par defaut, intervalle de confiance : conf.type='log' :
survFH = survfit(donnF ~ 1,
                 data = donnF,
                 type = "fleming-harrington",
                 error = "tsiatis")

# Intervalle de confiance et valeur modélisée pour l'individu 10 :
IC_FH = round(c(survFH$lower[10], survFH$surv[10], survFH$upper[10]),4)
```

#### 2.2.2 Modèle de Fleming-Harrington, intervalle méthode delta :

```r
survFHdelta = survfit(
  donnF ~ 1,
```

```
  data = donnF,
  type = "fleming-harrington",
  error = "tsiatis",
  conf.type = "plain")

IC_FHdelta = round(c(survFHdelta$lower[10], survFHdelta$surv[10], survFHdelta$upper[10]),4)
```

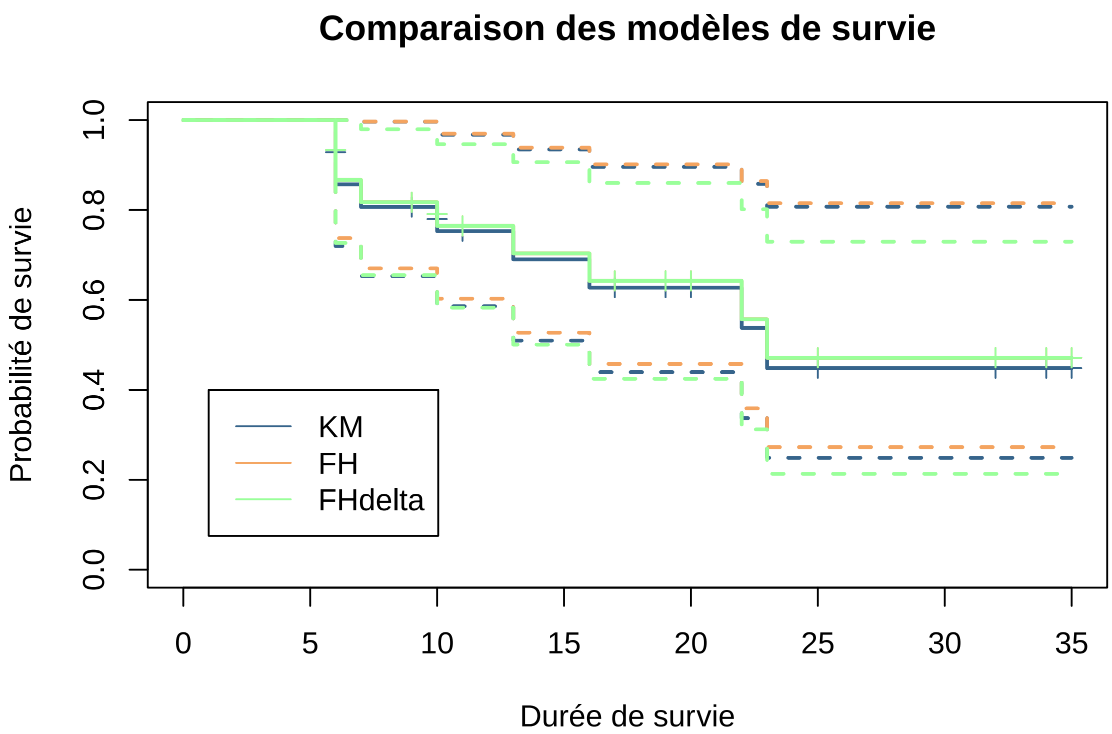
### 2.2.3 Comparaison des résultats sur l'estimation du 10e individu de la base :

```
#Comparaison des modèles pour le 10e individu de la base
dt = data.frame(KM = IC_KM, FH = IC_FH, FHdelta = IC_FHdelta)
rownames(dt) = c("lower","pred","upper")
dt
```

```
          KM     FH FHdelta
lower 0.4394 0.4577  0.4246
pred  0.6275 0.6424  0.6424
upper 0.8960 0.9016  0.8601
```

### 2.2.4 Représentation graphiques des trois modèles :

```
# Graphiques des trois modèles :
plot(
  survKM,
  mark.time = TRUE,
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2,
  xlab = "Durée de survie",
  ylab = "Probabilité de survie"
)
lines(survFH,
      mark.time = TRUE,
      col = palette_couleur[2],
      lwd = 2)
lines(survFHdelta,
      mark.time = TRUE,
      col = palette_couleur[3],
      lwd = 2)
title("Comparaison des modèles de survie")
legend(
  1,
  0.4,
  lty = 1,
  cex = 1,
  legend = c("KM", "FH", "FHdelta"),
  col = palette_couleur[1:3]
)
```




### 2.3 Estimation par des lois usuelles :

#### 2.3.1 Estimation de la loi de X par une loi de Weibull :

```
survweib = survreg(donnF ~ 1, dist = "weibull")
survweib
```

```
Call:
survreg(formula = donnF ~ 1, dist = "weibull")

Coefficients:
(Intercept)
   3.519429

Scale= 0.7386973

Loglik(model)= -41.7   Loglik(intercept only)= -41.7
n= 21
```

#### 2.3.2 Estimation de la loi de X par une loi exponentielle :

```
theta = sum(finGMP) / sum(tempsGMP)
theta
```

```
[1] 0.02506964
```

```
survexp = survreg(donnF ~ 1, dist = "exponential")
lambda = exp(-survexp$coefficients)
```

```
lambda
```

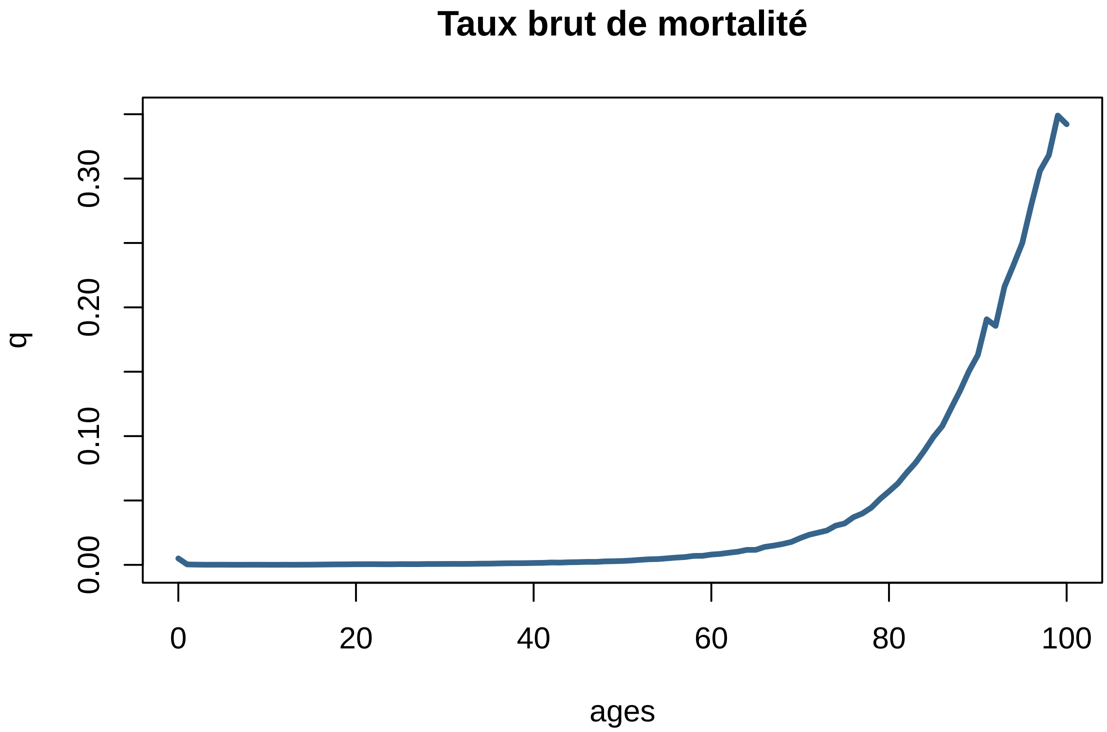
```
(Intercept)
 0.02506964
```

# 3 Examen 2018 :

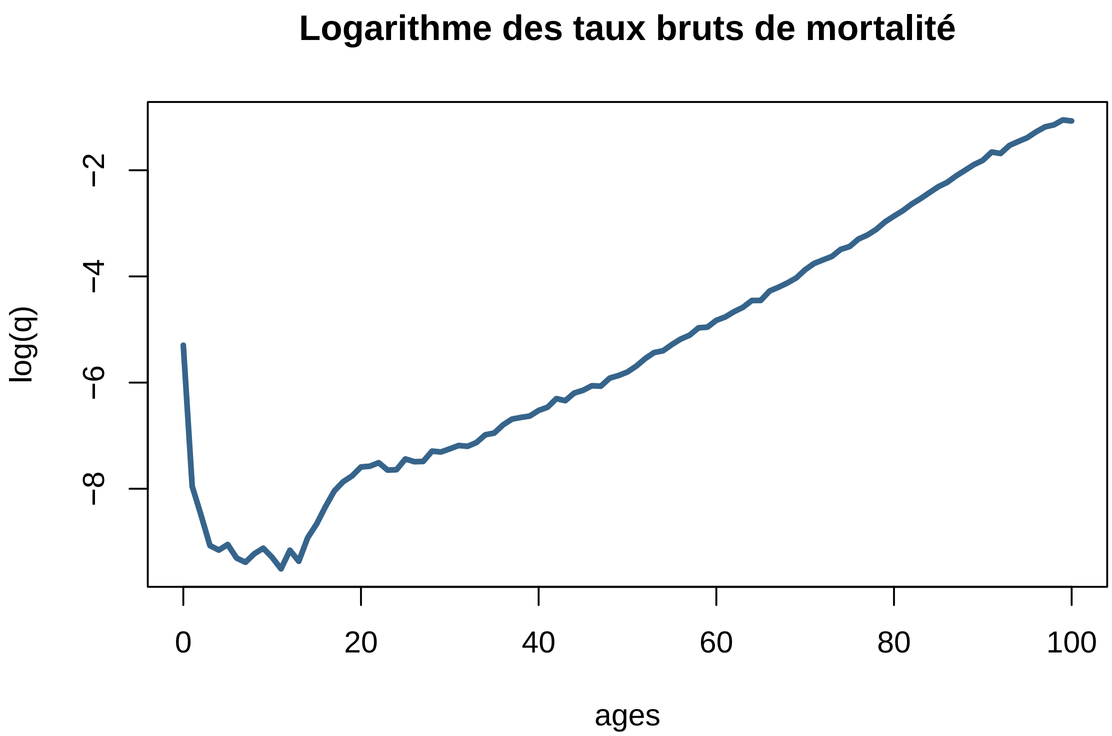
## 3.1 Exercice 2 :

### 3.1.1 Importation des données et traitement de la base :

```r
library(StMoMo)
d = EWMaleData
De = d$Dxt # décès

ages = d$ages
annees = d$years

Ex = EWMaleData$Ext  # Expositions en milieu d'années
Lx = Ex + De / 2 # Exposition en début d'année (approximation)

# Calcul des taux de mortalité bruts pour 2011 :
q = De[, "2011"] / Lx[, "2011"] # taux bruts

plot(
  ages,
  q,
  type = 'l',
  main = "Taux brut de mortalité",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 3
)
```




```r
plot(
  ages,
  log(q),
  type = 'l',
  main = "Logarithme des taux bruts de mortalité",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 3
)
```




### 3.1.2 Calibration d'un modèle de Makeham-Gompertz :

**3.1.2.1 Utilisation du package fmsb :** Utilisation de la fonction fitGm pour calibrer le modèle $h(x) = C + A \times exp(\beta_x)$

Avec la fonction fitGm on peut faire le lien avec l'autre paramétrage du type :

$h(x) = \alpha + \beta \times \gamma^x$ où $x$ représente l'âge.

```
library(fmsb)
fit = fitGM(data = q)

A = fit[1]
B = fit[2]
C = fit[3]
cat("Modélisation fitGM :  \n")
```

```
Modélisation fitGM :
```

```
c(A, B, C)
```

```
[1] 1.742762e-05 1.022779e-01 1.586628e-04
```

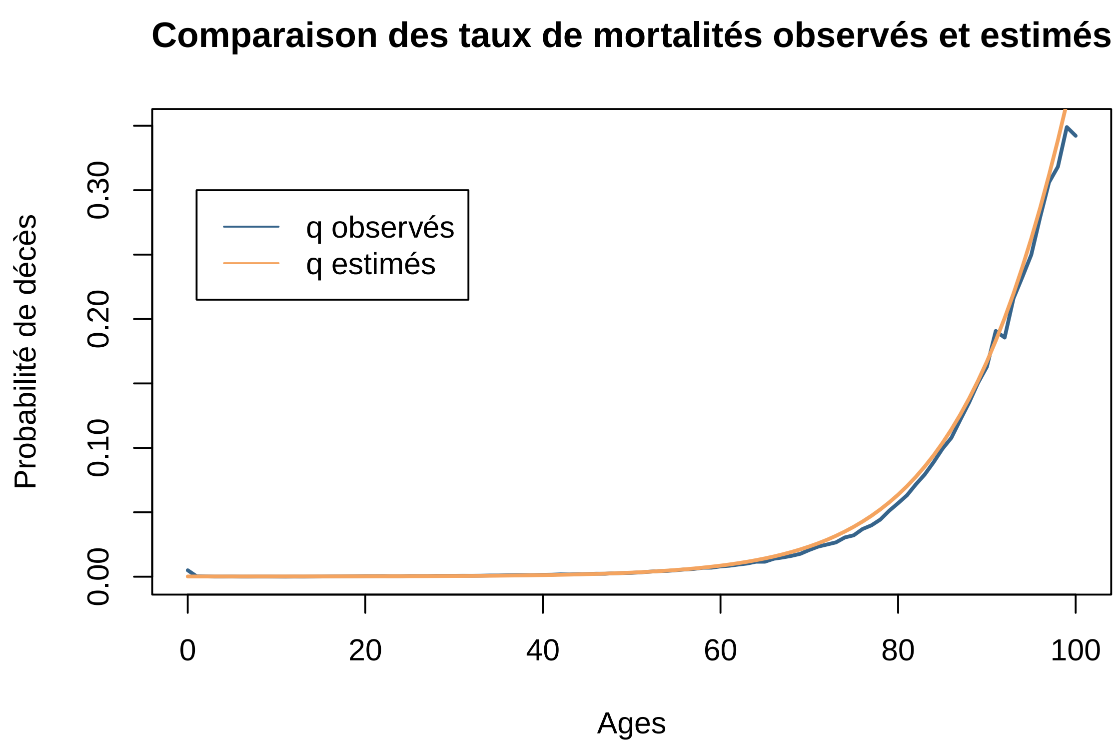
```
# Lien avec l'autre paramétrage :
alpha2 = C
beta2 = A
gamma2 = exp(B)
cat("Apha, Beta, Gamma : \n")
```

```
Apha, Beta, Gamma :
```

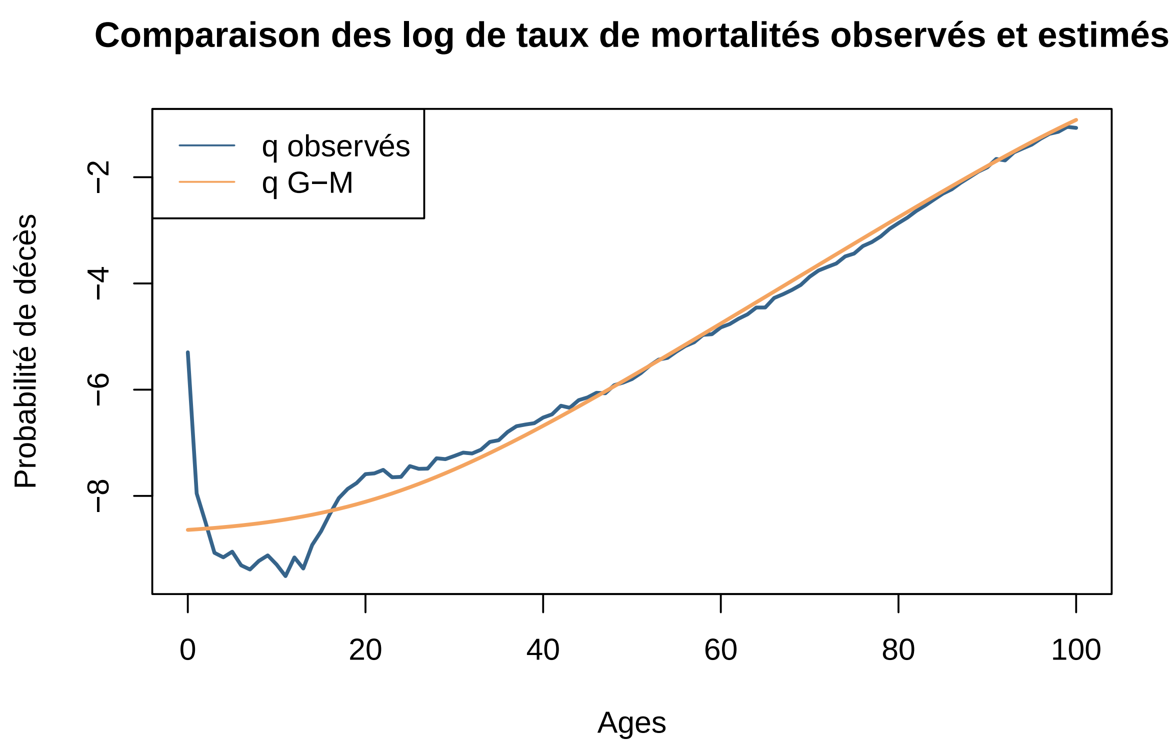
```r
c(alpha2, beta2, gamma2)
```

```
[1] 1.586628e-04 1.742762e-05 1.107691e+00
```

```r
# Construction du vecteur des probabilités de décès :
qM3 = 1 - exp(-C) * exp(-A / B * exp(B * ages) * (exp(B) - 1))

# Représentation graphique de l'âge des individus :
plot(
  ages,
  q,
  type = 'l',
  ylab = "Probabilité de décès",
  xlab = "Ages",
  main = "Comparaison des taux de mortalités observés et estimés",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2
)
lines(ages, qM3, col = palette_couleur[2], lwd = 2)
legend(
  1,
  0.3,
  lty = 1,
  cex = 1,
  legend = c("q observés", "q estimés"),
  col = palette_couleur[1:2]
)
```



```r
# Comparaison des taux de mortalités logarithmiques :

plot(
  ages,
  log(q),
  type = 'l',
  ylab = "Probabilité de décès",
  xlab = "Ages",
  main = "Comparaison des log de taux de mortalités observés et estimés",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2)
lines(ages, log(qM3), col = palette_couleur[2], lwd = 2)
legend("topleft",
  lty = 1,
  cex = 1,
  legend = c("q observés", "q G-M"),
  col = palette_couleur[1:2]
)
```




Interprétation des résultats :

Le modèle de Gompertz - Makeham, avec h croissant, ne peut pas modéliser correctement la mortalité aux âges inférieurs à 20 ans.

```r
library(MortalityLaws)

#availableLaws() # Liste des modèle de mortalité du package
```

```r
fit = MortalityLaw(x = 0:100, qx = q, law = "makeham")  #modèle h(x)= C + A exp(Bx)
fit$coefficients
```

#### 3.1.2.2 Utilisation du package MortalityLaws :

```
           A            B            C 
0.0000251412 0.0953918954 0.0001246354 
```

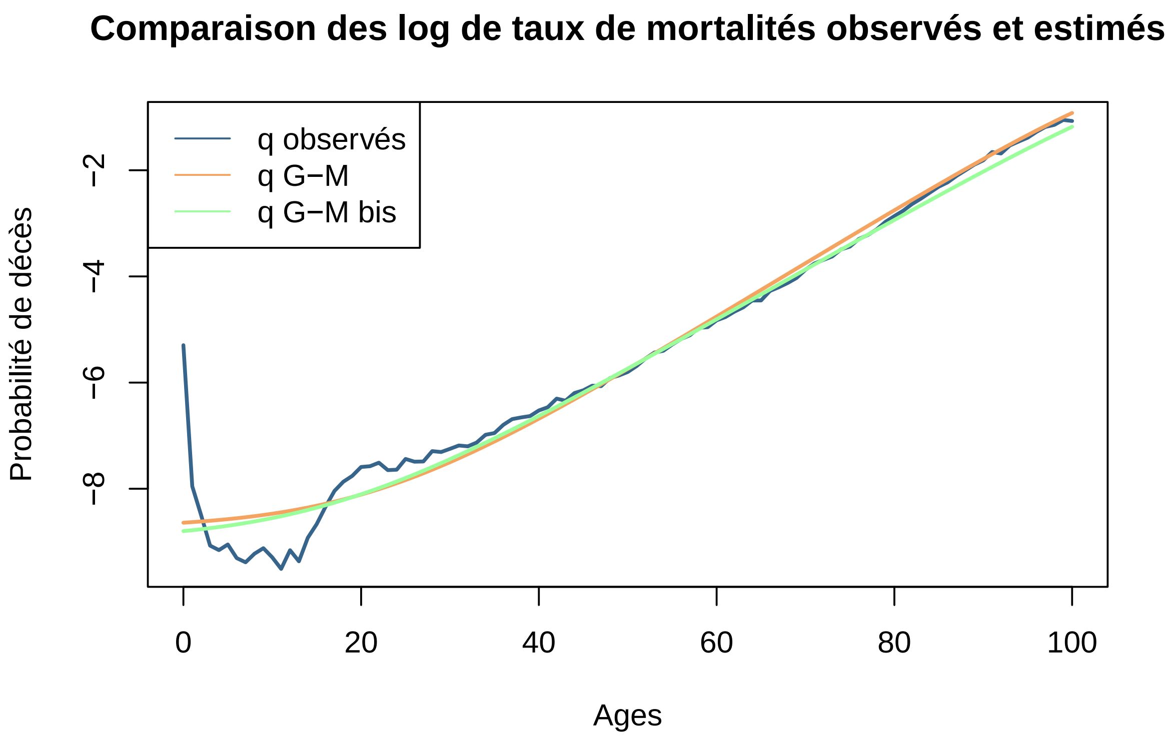
```r
A = fit$coefficients["A"]
B = fit$coefficients["B"]
C = fit$coefficients["C"]
c(A, B, C)
```

```
           A            B            C 
0.0000251412 0.0953918954 0.0001246354 
```

```r
# Lien avec l'autre paramétrage (h(x)= alpha + beta gamma^x)
alpha2 = C
beta2 = A
gamma2 = exp(B)
c(alpha2, beta2, gamma2)
```

```
           C            A            B 
0.0001246354 0.0000251412 1.1000898909 
```

```r
# Estimation du taux de moralité de Lee-Carter
qM4 = 1 - exp(-C) * exp(-A / B * exp(B * ages) * (exp(B) - 1))


# Représentation graphique et comparaison :

plot(
  ages,
  log(q),
  type = 'l',
  ylab = "Probabilité de décès",
  xlab = "Ages",
  main = "Comparaison des log de taux de mortalités observés et estimés",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2)
lines(ages, log(qM3), col = palette_couleur[2], lwd = 2)
lines(ages, log(qM4), col = palette_couleur[3], lwd = 2)
legend("topleft",
  lty = 1,
  cex = 1,
  legend = c("q observés", "q G-M", "q G-M bis"),
  col = palette_couleur[1:3]
)
```




### 3.1.3 Modélisation de Lee Carter :

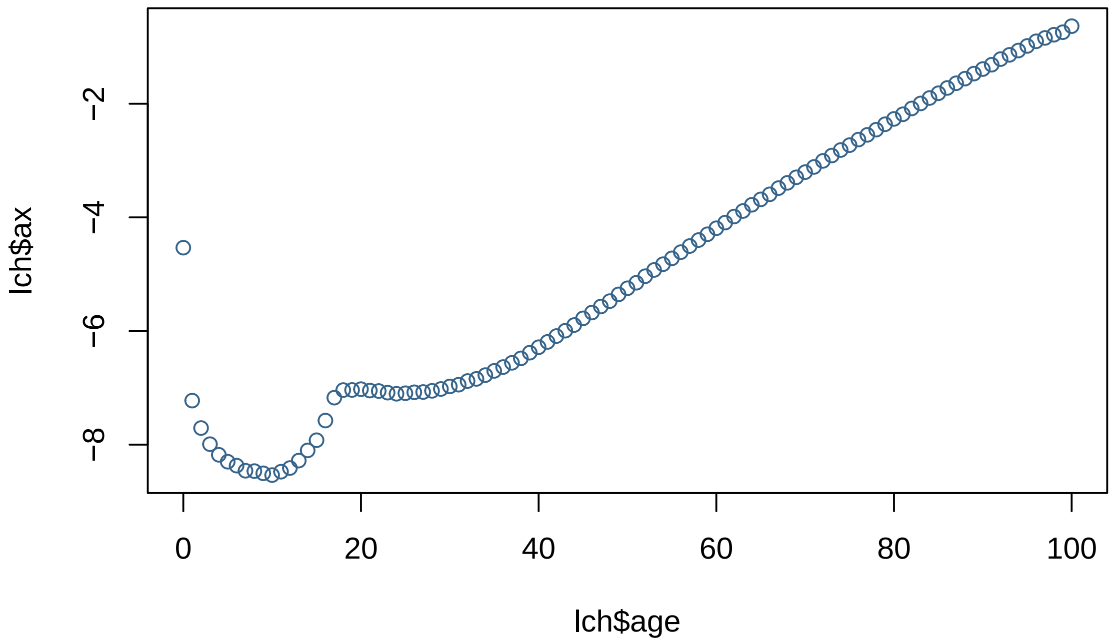
Rappels sur la modélisation de Lee Carter :

$ln(\mu(x,t)) = \alpha_x + \beta_x \times k_t + \epsilon_{(x,t)}$

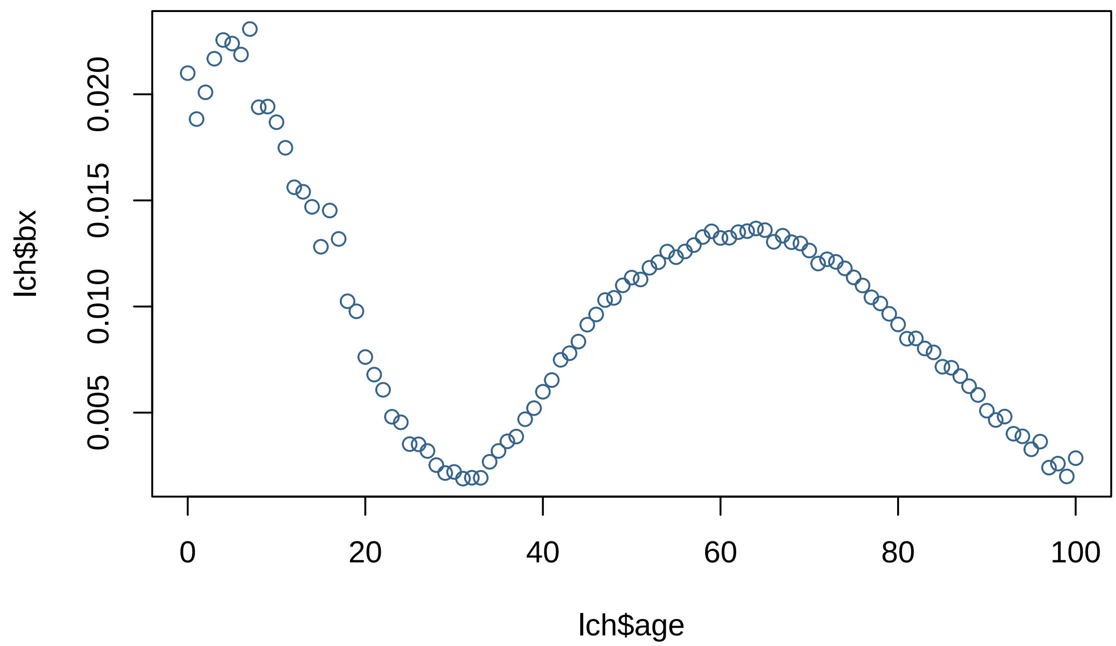
Avec : _x = la valeur moyenne

$\begin{cases} \alpha_x \text{ : la valeur moyenne} \\ k_t \text{ : correspond à une évolution générale dans le temps} \beta_x \text{ : la sensibilité du taux instantané par rapport à une variation d} \end{cases}$

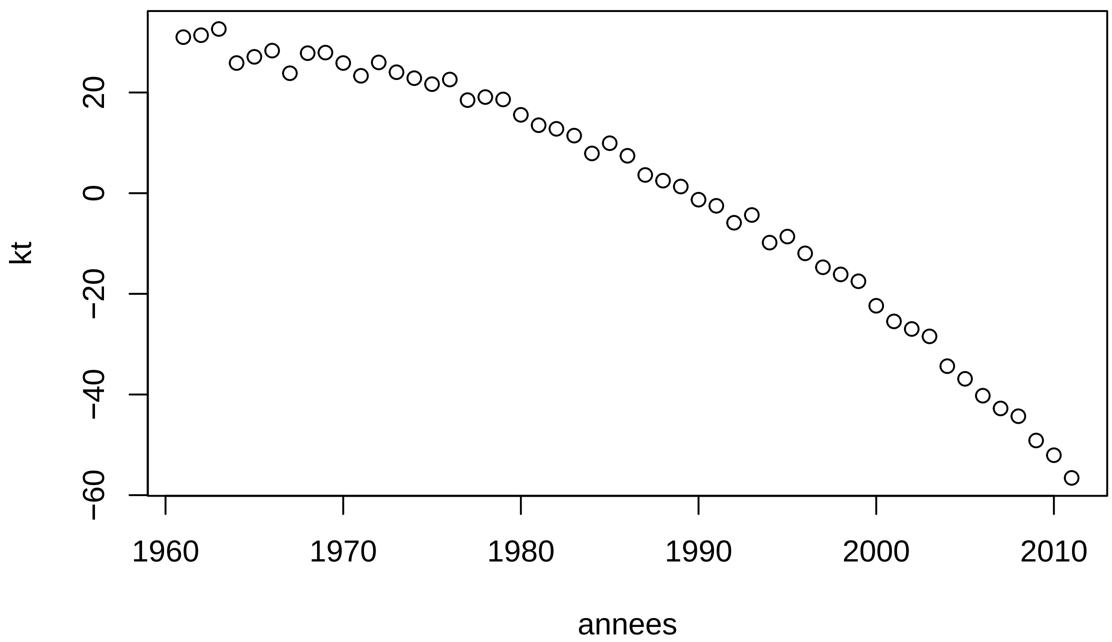
```
library(forecast)
library(demography)
muh = De / Ex
Baseh = demogdata(
  data = muh,
  pop = Ex,
  ages = ages,
  years = annees,
  type = "mortality",
  label = 'G.B.',
  name = 'Hommes',
  lambda = 1)

lch = lca(Baseh) # Lancement du modèle de Lee-Carter

# Estimation de alpha_x
plot(lch$age, lch$ax, col = palette_couleur[1])
```




```
# Estimation de beta_x
plot(lch$age, lch$bx, col = palette_couleur[1])
```




```
# Estimation des k_t
kt = lch$kt
plot(annees, kt)
```

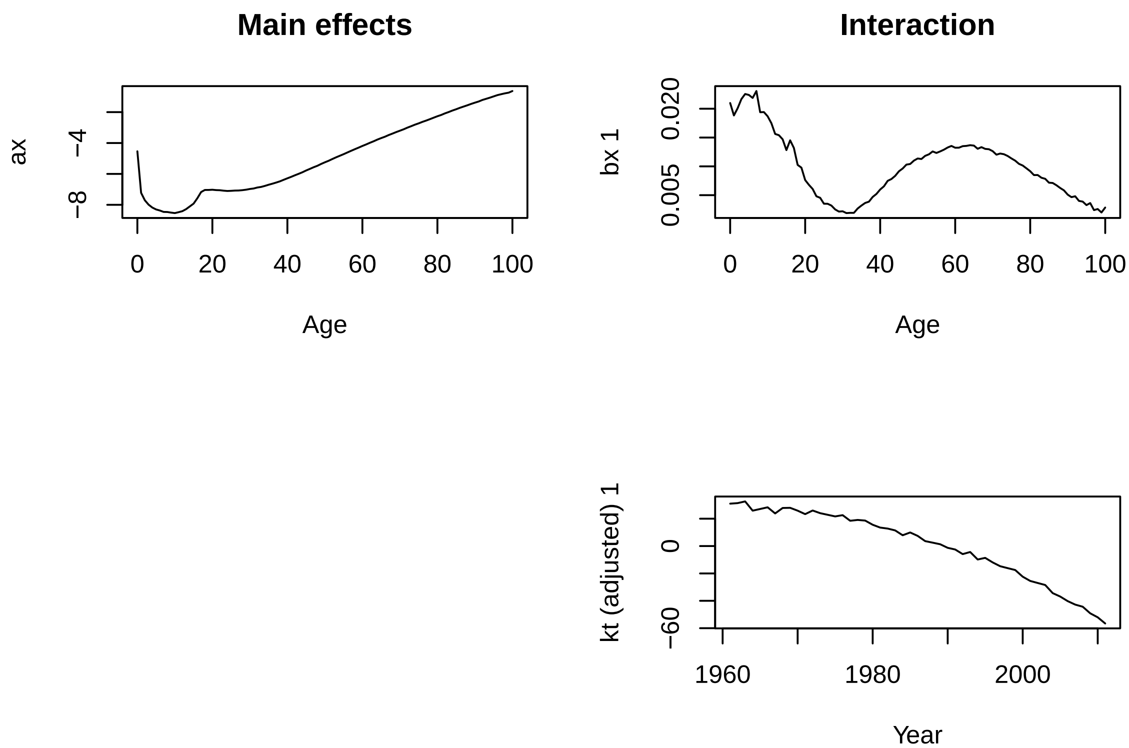



#### 3.1.3.1 Méthode de Lee-Carter 1992 : Projection des Kt

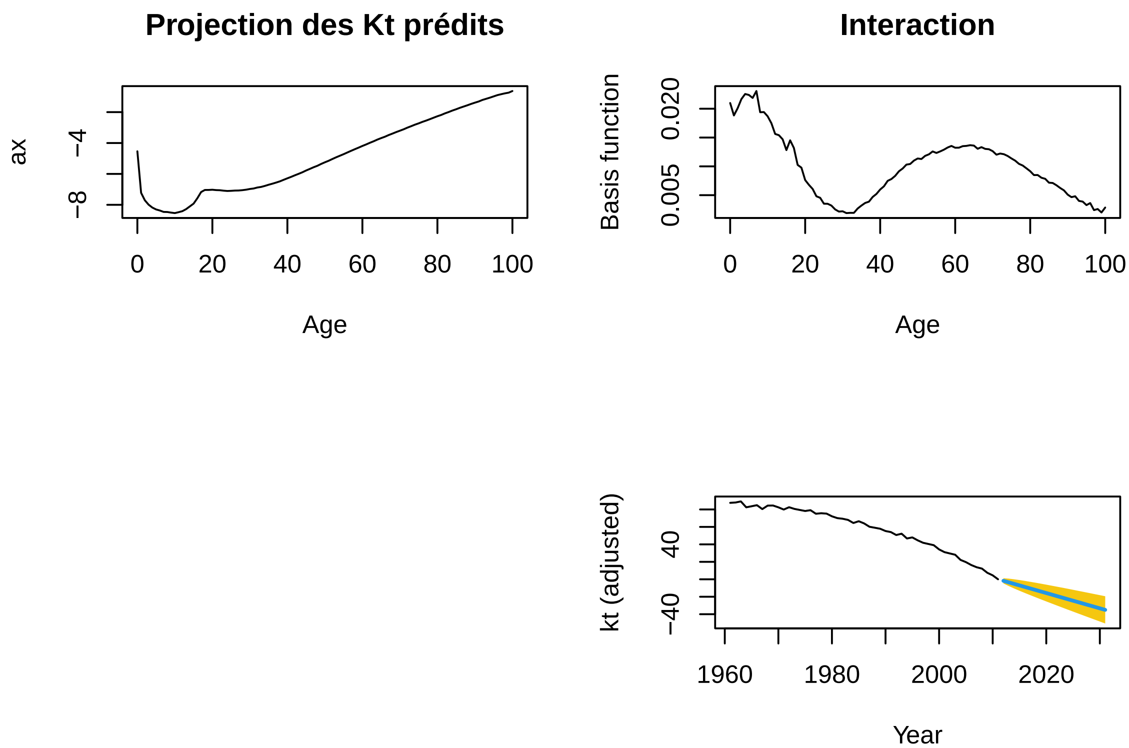
Rappel: les Kt représentent

Hypothèse : $k_t = k_{t-1} + d + e_t$

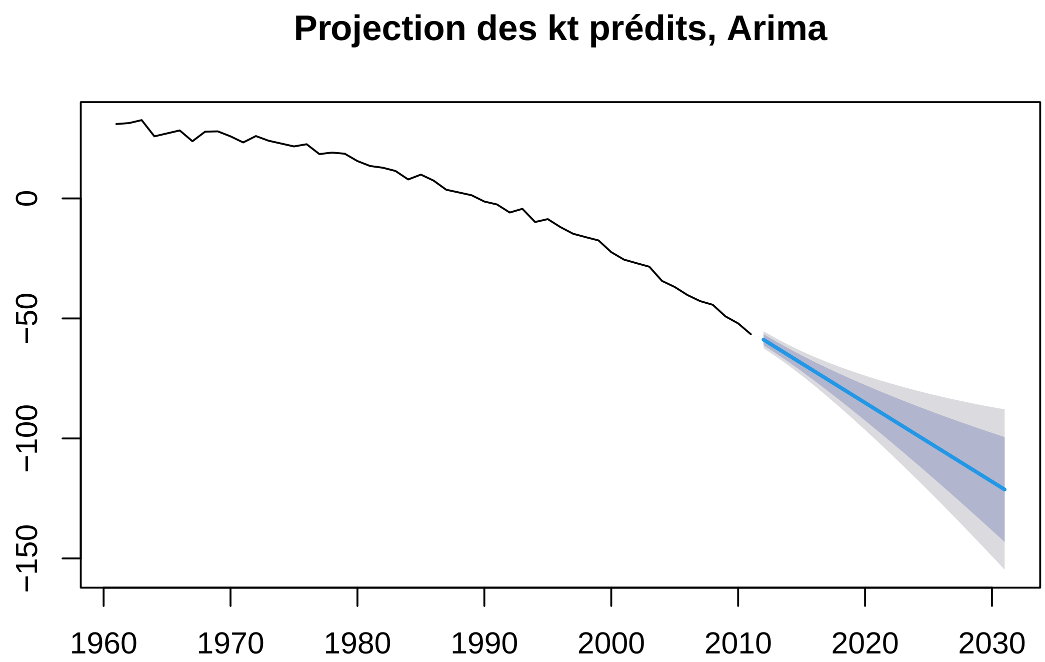
```
# Projection des Kt à l'aide du modèle initial :
plot(lch)
```




```r
proj = forecast(lch, h = 20)
plot(proj, plot.type = "component", main = "Projection des Kt prédits")
```




```r
# Projection des Kt à l'aide du modèle ARIMA :
ar = auto.arima(kt)
plot(forecast(ar, h = 20), main = "Projection des kt prédits, Arima")
```



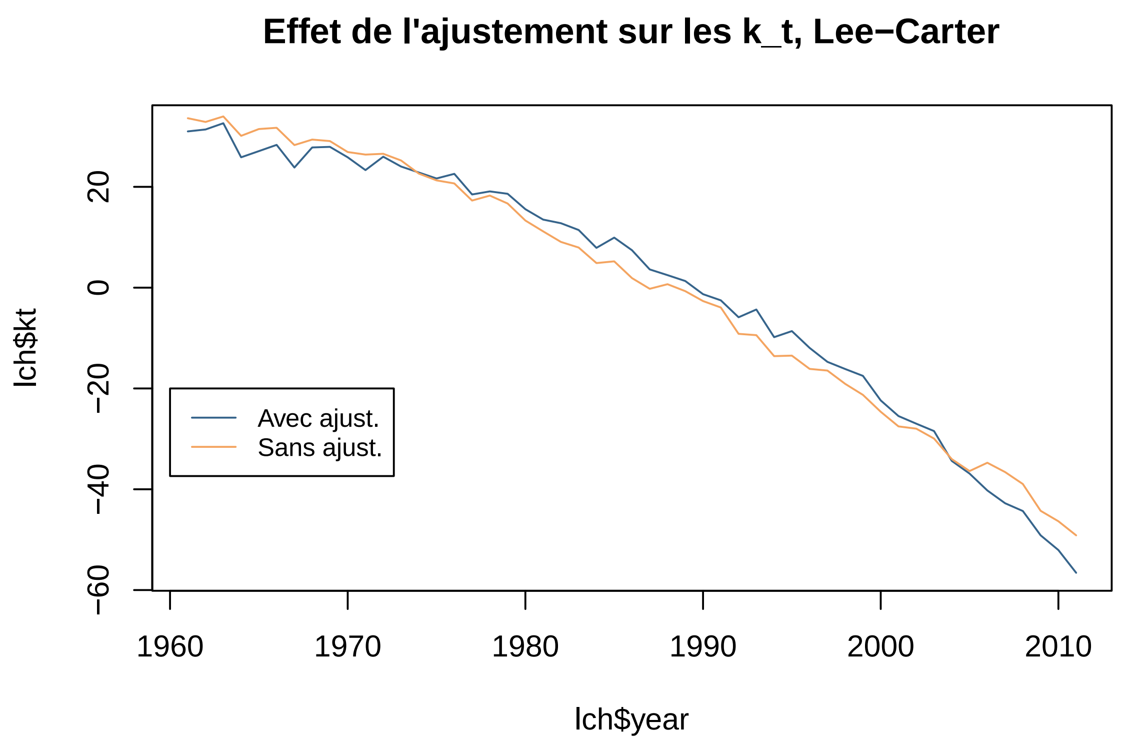

Interprétation (BA) :

- $a_x$ donne une indication sur la valeur de la mortalité moyenne
- $b_x$ la variation du taux instantané comporte trois phases. Le taux est de moins en moins déterminant sur les années de 0 à 20 ans ainsi que sur l'intervalle 60 à 100 ans. En revanche ce taux est croissant entre 20 à 60 ans. Ce qui correspond souvent à la période durant laquelle l'Homme est le plus actif. Le risque additionnel de décès à tendance à croître sur cette période. Enfin la période de 0 à 10 est celle qui admet un coefficient de taux instantané le plus fort du fait notamment de la mortalité infantile.
- $k_t$ est décroissant sur toute la période, ce qui permet de conclure que la mortalité tend à décroître sur la période observée et ainsi maintient le constat d'une diminution des causes de mortalité annexes.

**3.1.3.2 Modèle de Lee Carter sans ajustement des Kt :** Dans cette partie on fait l'hypothèse que les $k_t$ sont constants dans le temps.

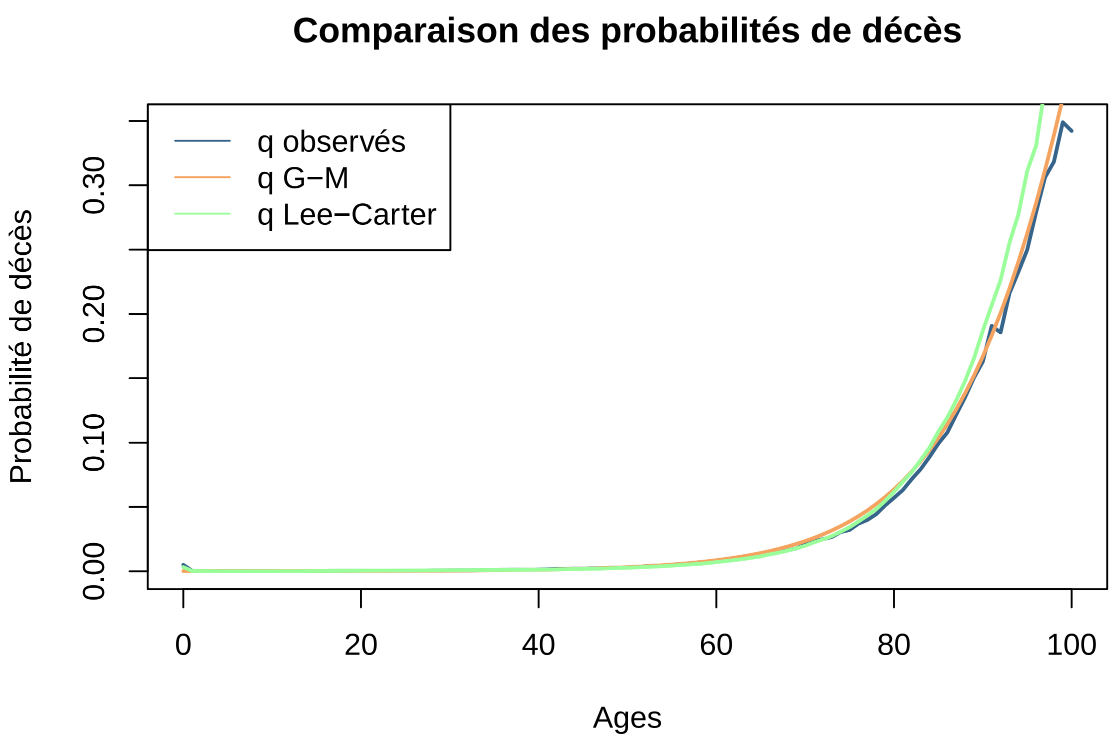
```
## L.C. sans ajustement des k_t
lch_sans = lca(Baseh, adjust = "none")
plot(lch$year,
     lch$kt,
     col = palette_couleur[1],
     type = 'l',
     main = "Effet de l'ajustement sur les k_t, Lee-Carter")
lines(lch_sans$year, lch_sans$kt, col = palette_couleur[2])
legend(
  1960,
  -20,
  legend = c("Avec ajust.", "Sans ajust."),
  col = palette_couleur[1:2],
```

```
  lty = 1,
  cex = 0.8
)
```

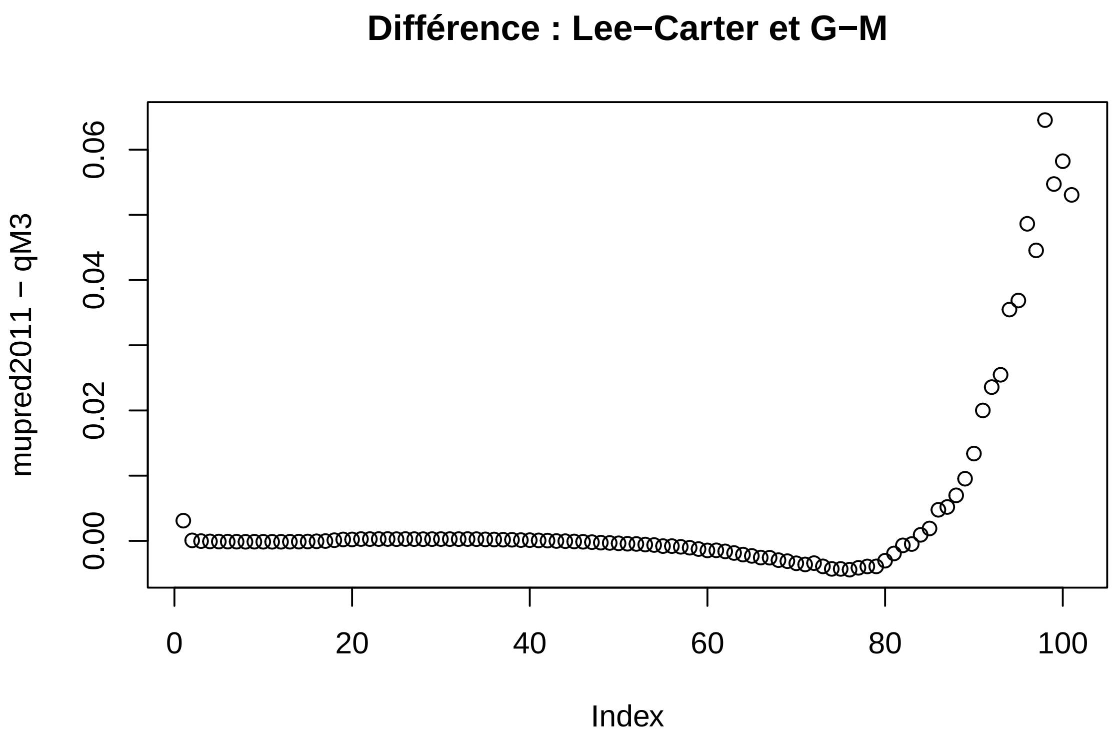



```
# Modéle de Lee Carter :
predh = lch$fitted$y  # c'est log(mu_{x,t}) qui est prédit
mupred2011 = exp(predh[, 51])

plot(
  ages,
  q,
  type = 'l',
  ylab = "Probabilité de décès",
  xlab = "Ages",
  main = "Comparaison des probabilités de décès",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2
)
lines(ages, qM3, col = palette_couleur[2], lwd = 2)
lines(ages,mupred2011,col = palette_couleur[3], lwd = 2)
legend("topleft",
  lty = 1,
  cex = 1,
  legend = c("q observés", "q G-M", "q Lee-Carter"),
  col = palette_couleur[1:3]
)
```

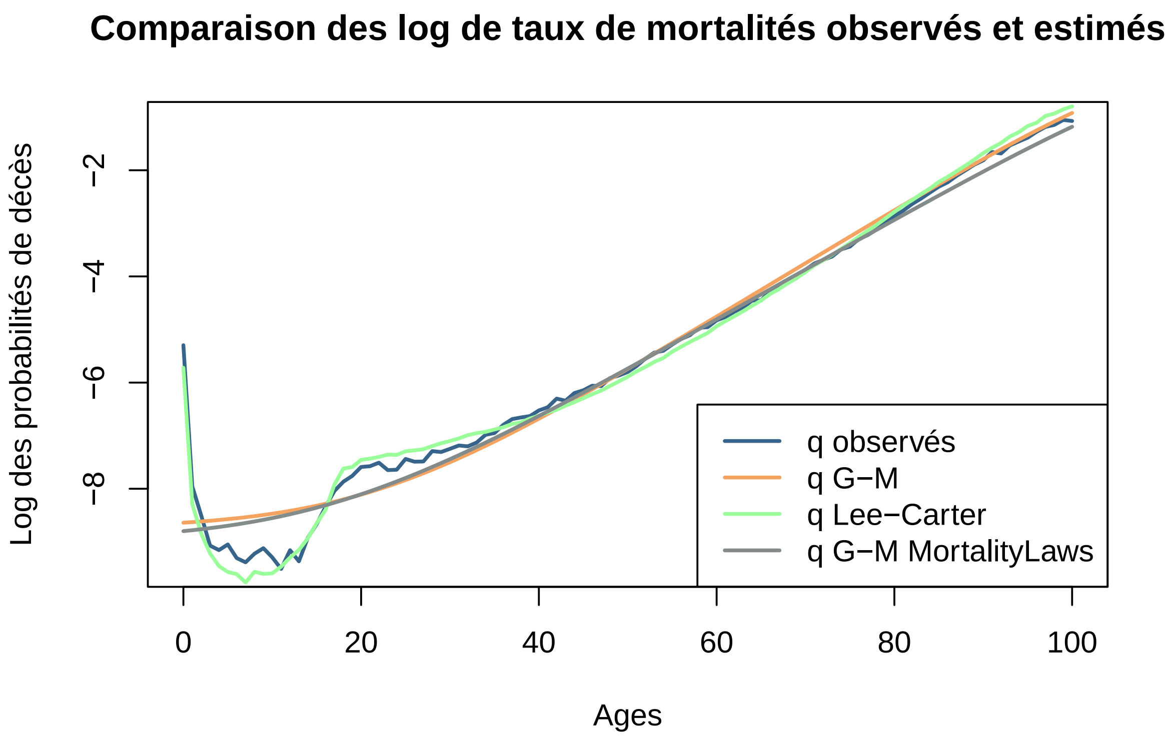
#### 3.1.3.3 Comparaison des modèles :




```r
# Représentation graphique de la différence entre les modèles :
plot(mupred2011 - qM3,
     main = "Différence : Lee-Carter et G-M")
```




```r
#max(abs(mupred2011 - qM3))

# Comparaison graphique log(q) :
plot(
  ages,
  log(q),
  type = 'l',
  ylab = "Log des probabilités de décès",
  xlab = "Ages",
  main = "Comparaison des log de taux de mortalités observés et estimés",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2
)
lines(ages, log(qM3), col = palette_couleur[2], lwd = 2)
lines(ages,predh[,51],col = palette_couleur[3], lwd = 2)
lines(ages, log(qM4),col = palette_couleur[5], lwd = 2)
legend("bottomright",
  lty = 1,
  cex = 1,
  lwd = 2,
  legend = c("q observés", "q G-M", "q Lee-Carter", "q G-M MortalityLaws"),
  col = palette_couleur[c(1:3,5)]
)
```




#### 3.1.4 Calcul des rentes :

```
### calcul des rentes
# Projections des \mu{x,t} dans le futur :
# projection standard du modèle de Lee-Carter :
projh=forecast(lch,h=70)$rate$Hommes

dim(projh)
```

```
[1] 101  70
```

```
colnames(projh) = 2012:(2012 + 69)
rownames(projh) = 0:100
#View(projh)

# nous souhaitons calculer la prime pure d'une rente viagère
# à partir de 2012 pour l'âge de 65 ans
# a_x(t)= \sum_{k\ge 0} { \prod_{j=0}^k exp(-\mu_{x+j}(t+j)) *1/(1+r)^(k+1) }

r = 0.035 # valeur du taux choisi pour le facteur d'actualisation

# calcul de a_65(2012) pour les hommes :

L = length(66:101)
mu = projh[66:101, 1:L] # on limite aux âges 65-100
dmu = diag(mu)
prodexpmu = cumprod(exp(-dmu))
a = 0
```

```r
for (k in 1:length(dmu))
{
  a = a + 1 / (1 + r) ^ (k) * prodexpmu[k]
}
a  # 13.164
```

```
[1] 13.16419
```

```r
# Remarque : si on prolonge jusqu'à 120 ans avec les mêmes \mu(x,t) ?
# (pour vérifier si négliger les âges > 110 est justifié)
dmu120 = c(dmu, rep(dmu[L], 20))
prodexpmu120 = cumprod(exp(-dmu120))
a120 = 0
for (k in 1:(L + 20))
{
  a120 = a120 + 1 / (1 + r) ^ (k) * prodexpmu120[k]
}
a120 # 13.174
```

```
[1] 13.17422
```

```r
# Comparaison avec G.M. I  (fmsb)
dmu = qM3[66:101]
prodexpmu = cumprod(exp(-dmu))
a = 0
for (k in 1:length(dmu))
{
  a = a + 1 / (1 + r) ^ (k) * prodexpmu[k]
}
a
```

```
[1] 12.1337
```

```r
# 12.13

# Comparaison avec G.M. II  (Mortalitylaw)
dmu = qM4[66:101]
prodexpmu = cumprod(exp(-dmu))
a = 0
for (k in 1:length(dmu))
{
  a = a + 1 / (1 + r) ^ (k) * prodexpmu[k]
}
a
```

```
[1] 12.77115
```

```r
# 12.77
```

# 4 Examen 2019 :

# 5 Examen 2023-2024 :