Séries temporelles : TD et Examens

2024-11-24

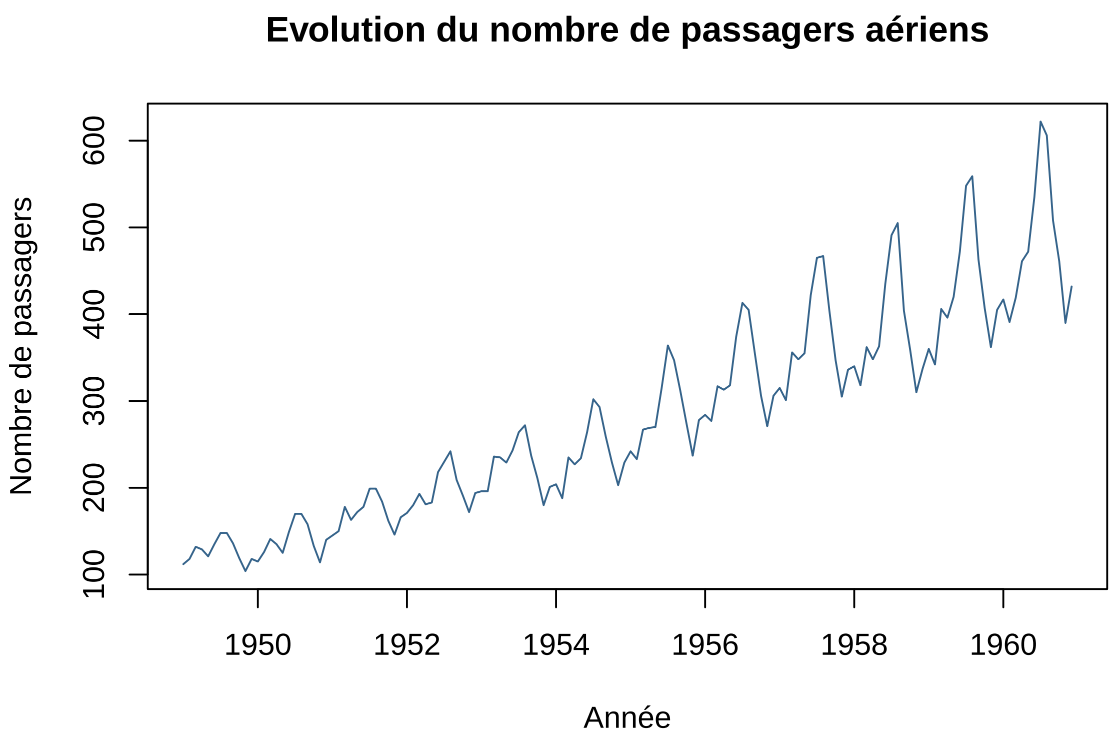
Contents

1 Avants propos, notions cours et codes associés :

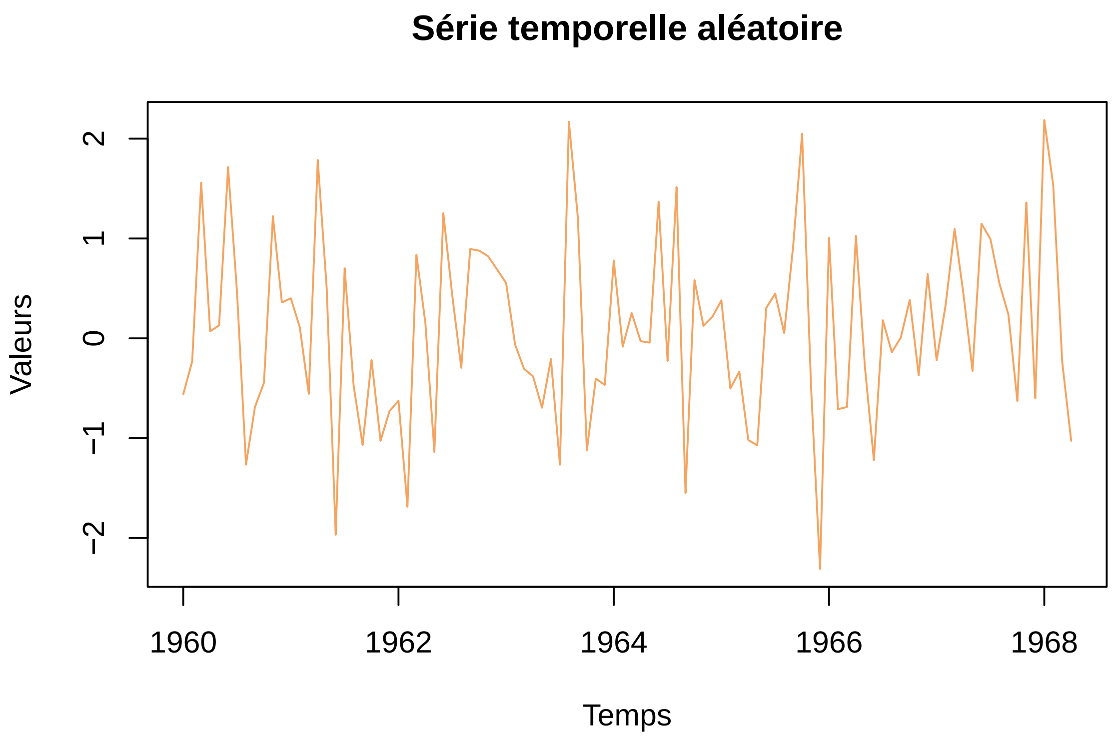
1.1 Le type ts 'time series' :

1.1.1 Exemples et création :

```r
# Exemple de série temporelle :
plot(
  AirPassengers,
  main = "Evolution du nombre de passagers aériens",
  ylab = "Nombre de passagers",
  xlab = "Année",
  type = "l",
  col = palette_couleur[1]
)
```

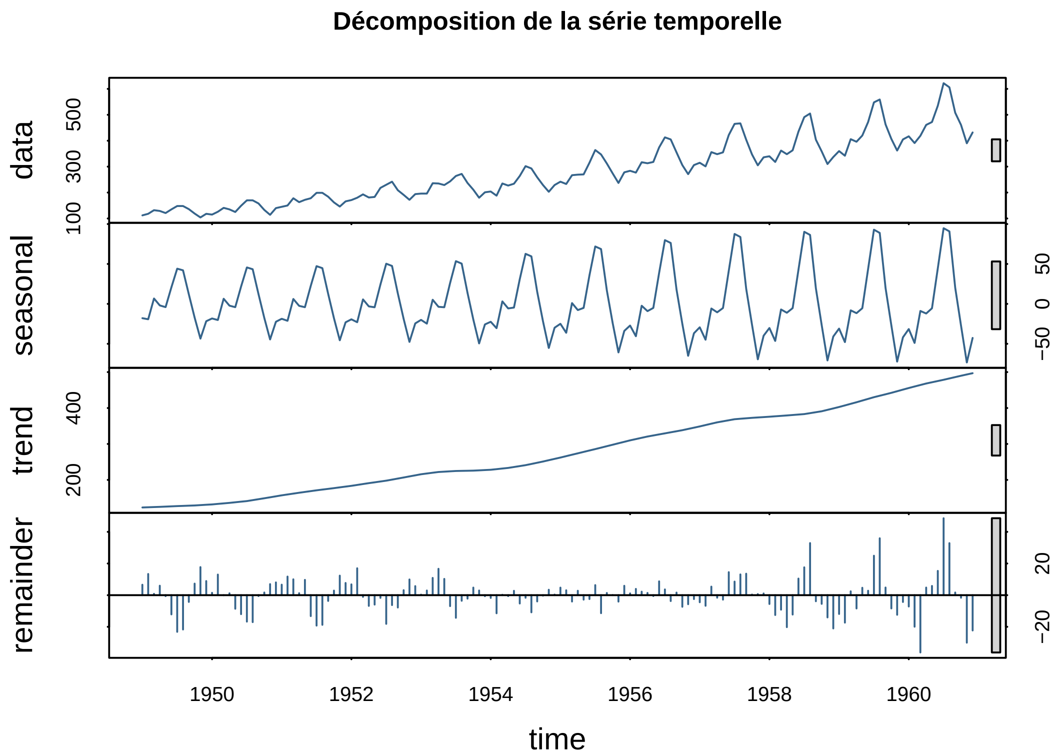



```r
# Création d'un objet time série aléatoire :

serie_temp = ts(rnorm(100), start = c(1960, 1), frequency = 12)
plot(
  serie_temp,
  main = "Série temporelle aléatoire",
  ylab = "Valeurs",
  xlab = "Temps",
  type = "l",
  col = palette_couleur[2]
)
```



1.1.2 Décomposition d'une série temporelle :

```
plot(
  stl(AirPassengers, s.window = 12),
  main = "Décomposition de la série temporelle",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 1
)
```

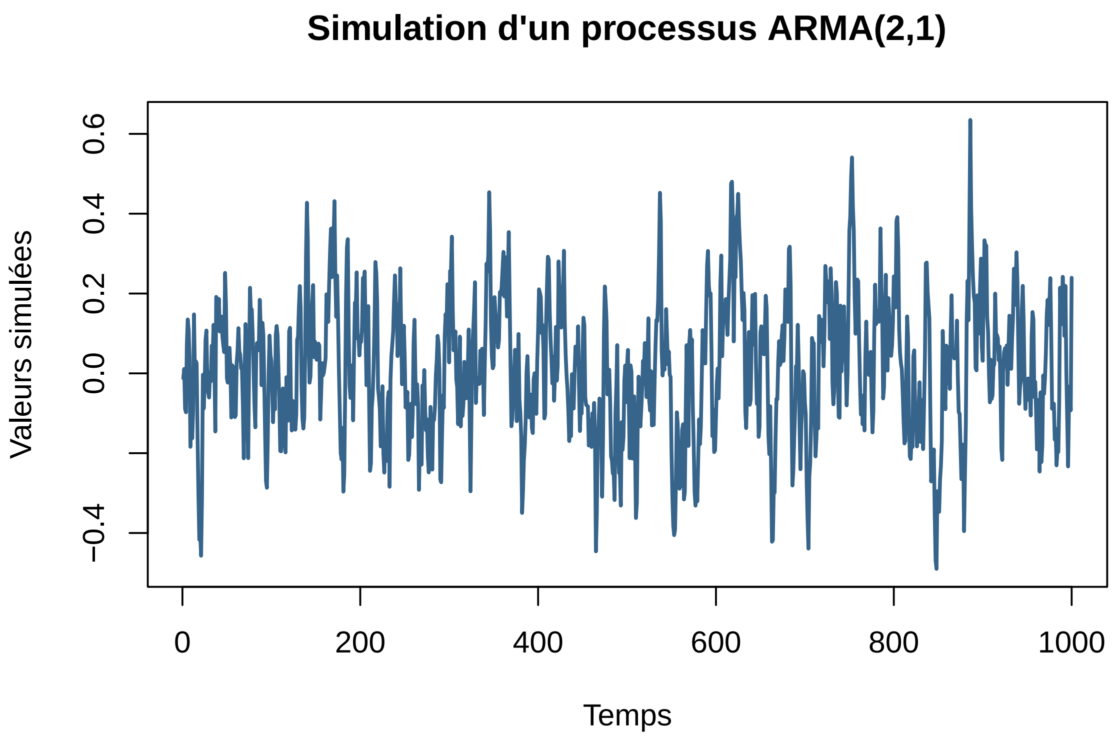



```
# s.window = 12 : période de saisonnalité (nb de mois)
```

1.2 Simulation de processus :

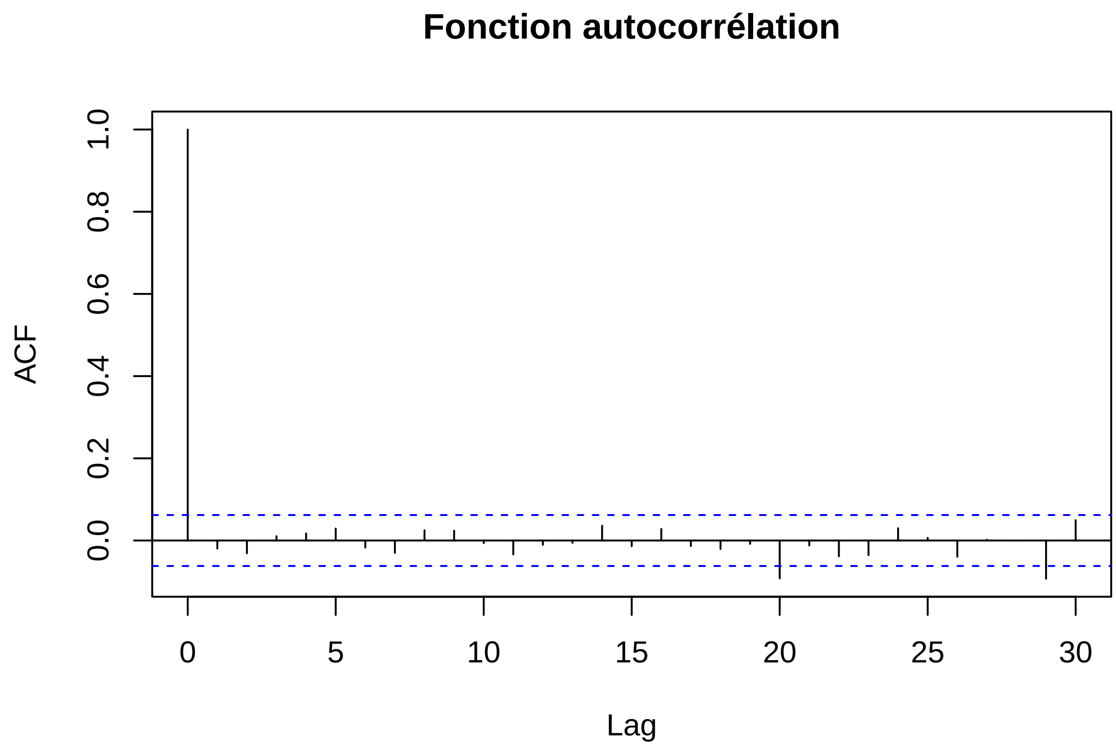
1.2.1 Simulation ARMA(2,1) :

```
alpha = c(.5, .2) #paramètres AR
beta = .5 #paramètres MA
sig = .1 #écart-type du bruit
Time = 1000 #longueur de la série temporelle
x = arima.sim(model = list(ar = alpha, ma = beta),
              sd = sig,
              n = Time) #simulation modèle ARMA
plot(x, type = "l", col = palette_couleur[1], lwd = 2,
     main = "Simulation d'un processus ARMA(2,1)",
     ylab = "Valeurs simulées", xlab = "Temps")
```

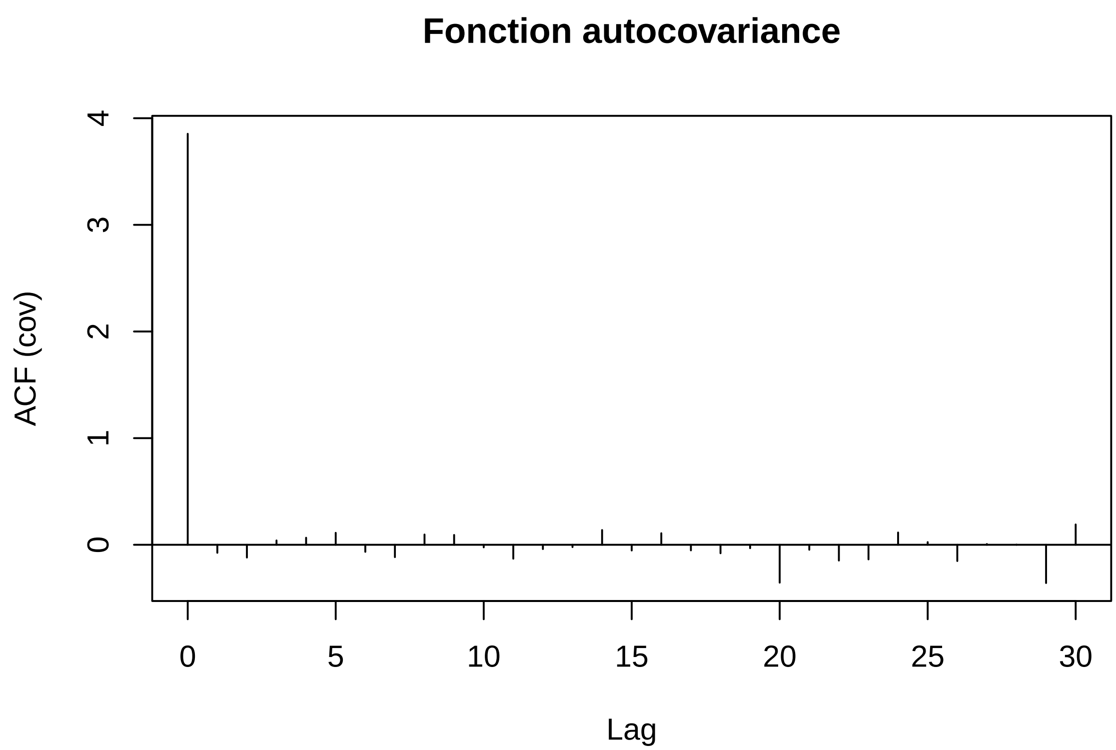


1.3 Fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance :

```
Time = 1000
x = 2 * rnorm(Time) #simulation d'un bruit blanc gaussien
acf(x, main = "Fonction autocorrélation")
```



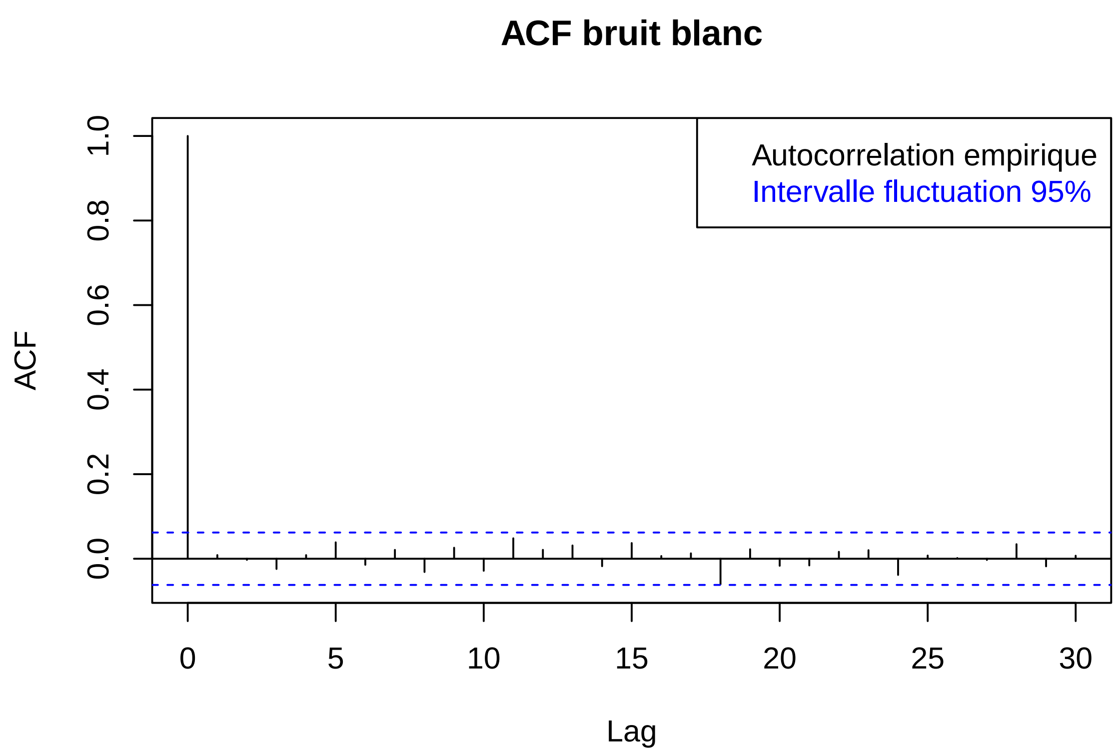

```r
acf(x, type = 'covariance', main = "Fonction autocovariance")
```



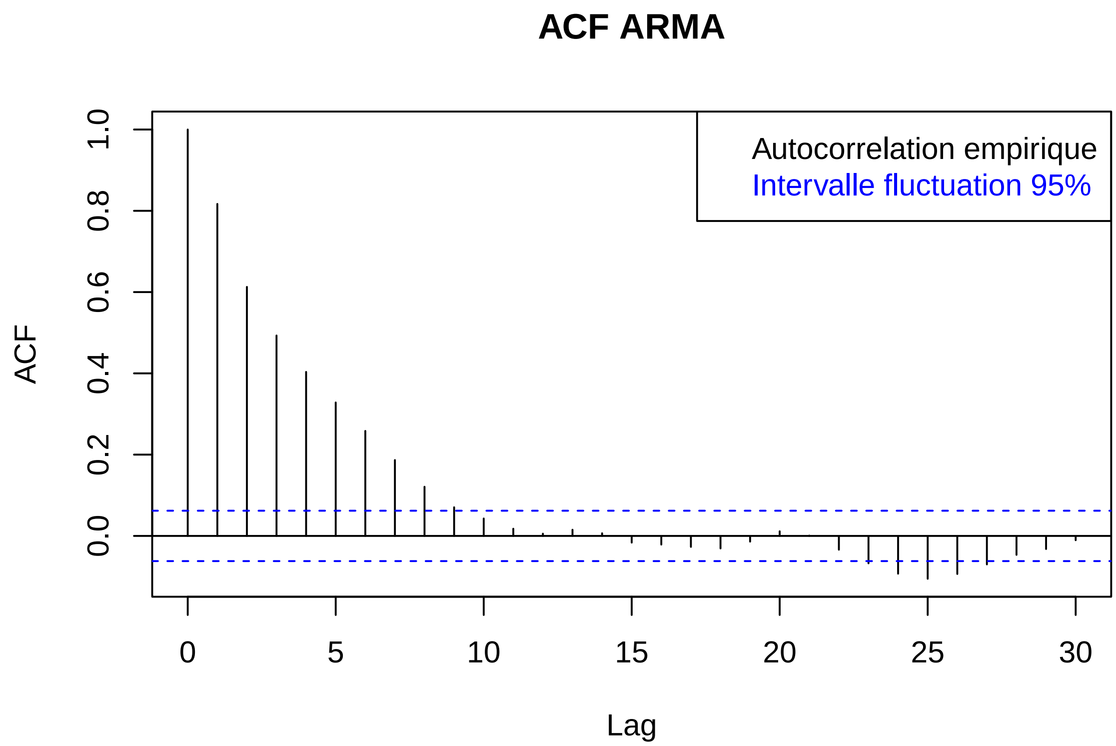
1.4 Etude d'un bruit blanc :

1.4.1 Fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance :

```
# Simulation bruit blanc gaussien :
Time = 1000
bbg = rnorm(Time)

acf(bbg, main = 'ACF bruit blanc')
legend(
  'topright',
  c('Autocorrelation empirique', 'Intervalle fluctuation 95%'),
  text.col = c('black', 'blue'))
```




```
x = arima.sim(model = list(ar = c(.5, .2), ma = .5),
              sd = .1,
              n = Time)
acf(x, main = 'ACF ARMA')
legend(
  'topright',
  c('Autocorrelation empirique', 'Intervalle fluctuation 95%'),
  text.col = c('black', 'blue'))
```



1.4.2 Test statistiques sur le bruit blanc :

Le test de Box-Pierce permet de tester l'hypothèse nulle d'indépendance des observations d'une série temporelle.

Le test de Ljung-Box est une généralisation du test de Box-Pierce qui permet de tester l'indépendance des observations d'une série temporelle sur plusieurs retards.

$$\begin{cases} H_0 : \rho(1) = 0, \text{X est un bruit blanc} \\ H_1 : \rho(1) \neq 0, \text{X n'est pas un bruit blanc} \end{cases}$$

```
Time = 1000
x = rnorm(Time) #simulation d'un bruit blanc gaussien
ar21 = arima.sim(model = list(ar = c(.5, .2), ma = .5),
              sd = .1, n = Time)

p1 = Box.test(x) #(test uniquement sur rho(1))
p2 = Box.test(x, lag = 10) #(test sur rho(1),...,rho(10))
p3 = Box.test(x, lag = 10, type = 'Ljung-Box') #(test de Ljung-Box)
p4 = Box.test(ar21) #(test uniquement sur rho(1))

p_value = round(c(p1$p.value, p2$p.value, p3$p.value, p4$p.value),4)

data.frame(
  Test = c(
    "BB Box rho(1)",
    "BB Box rho(1:10)",
```

```r
    "BB Lunj-Box rho(1:10)",
    "Arma21 rho(1)"),
  p_value = p_value,
  Bruit_Blanc = p_value > .05
  )
```

```
                   Test p_value Bruit_Blanc
1         BB Box rho(1)  0.2375        TRUE
2      BB Box rho(1:10)  0.3597        TRUE
3 BB Lunj-Box rho(1:10)  0.3544        TRUE
4         Arma21 rho(1)  0.0000       FALSE
```

2 Travaux dirigés

2.1 Exercice 1: Simulation de différents procesus :

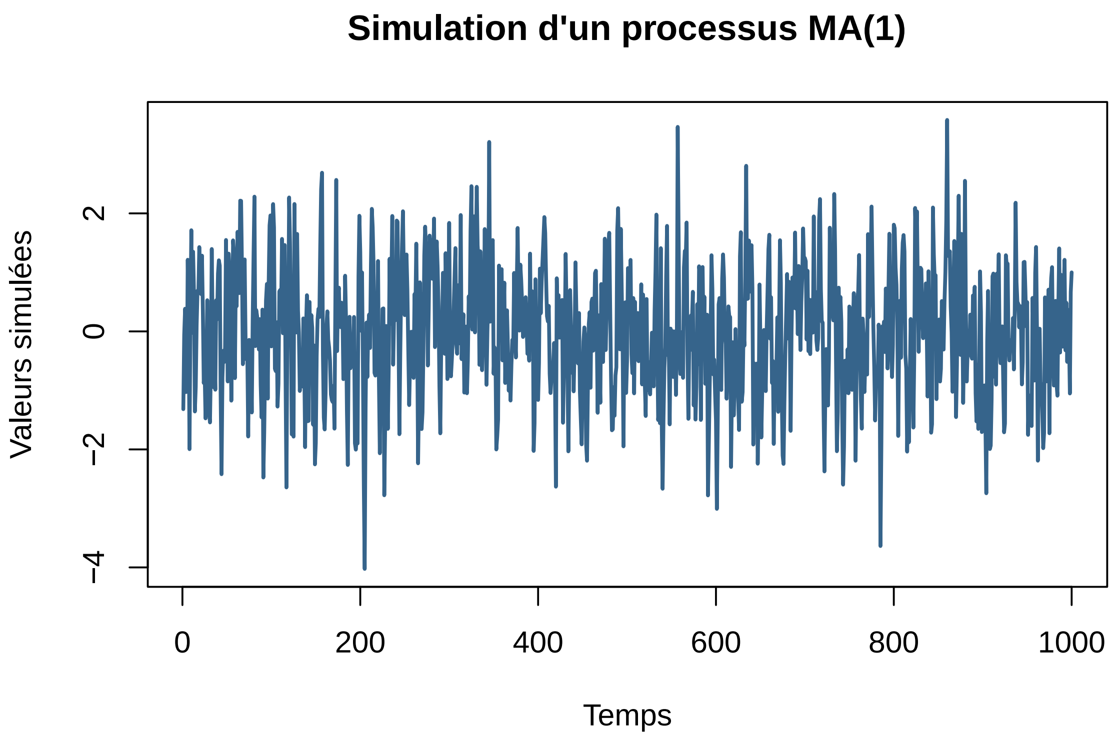
2.1.1 Simulation MA(1) :

$$A_t = \epsilon_t + \beta\epsilon_{t-1} \text{ avec } \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

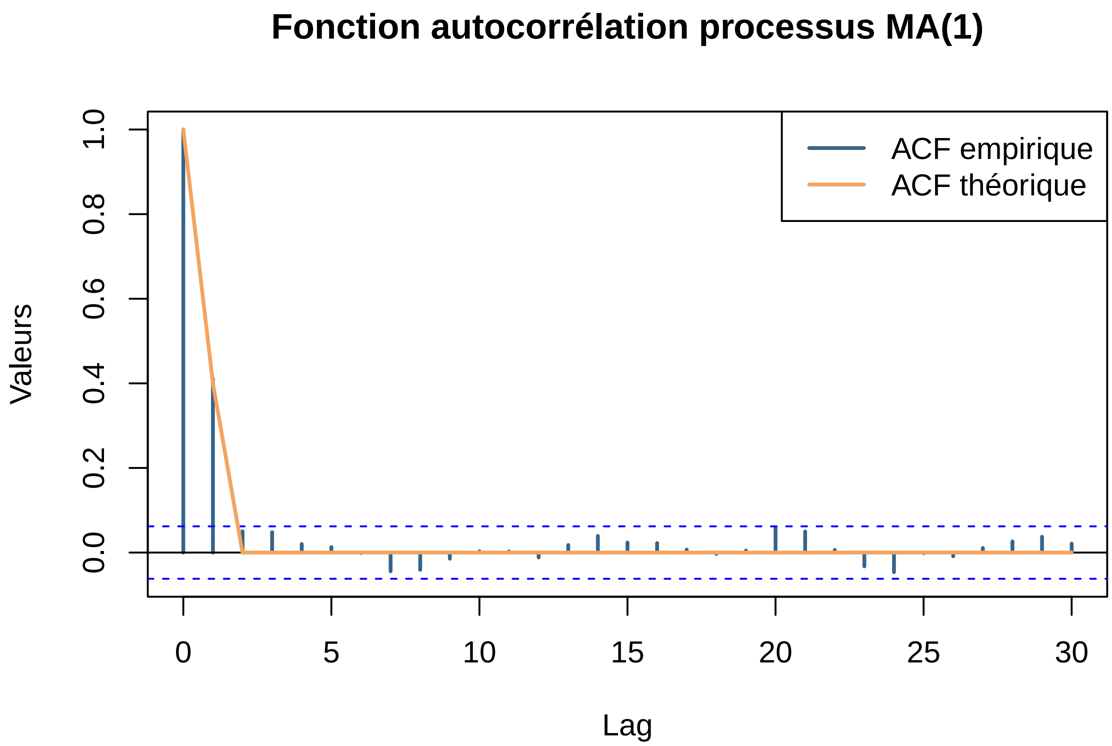
```r
# Paramètres de la simulation :
Time = 1000
sigma = 1
beta = 0.5

# Simulation par formule :
esp = rnorm(Time +1, sd = sigma)
A = esp[2:(Time+1)] + beta * esp[1:Time]

# Simulation par fonction intégrée :
A2 = arima.sim(model = list(ma = beta), n = Time, sd = sigma)

# Acf Théorique d'un' processus MA(1) :
ARMAacf(ma = beta, lag.max = 20)
```

```
  0   1   2   3   4   5   6   7   8   9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19
1.0 0.4 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
 20
0.0
```

```r
# Représentation graphique :
plot(
  A,
  type = 'l',
  main = 'Simulation d\'un processus MA(1)',
  ylab = 'Valeurs simulées',
  xlab = 'Temps',
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2
)
```




```
ac = acf(A,
         main = "Fonction autocorrélation processus MA(1)",
         ylab = "Valeurs",
         col = palette_couleur[1],
         lwd = 2)  #acf empirique
lines(ac$lag, c(1, beta / (1 + beta ^ 2), rep(0, length(ac$lag) - 2)),
      col = palette_couleur[2],
      lwd = 2)  #acf théorique
#Alternative :
# lines(ac$lag,
#       ARMAacf(ma = beta, lag.max = ac$lag[length(ac$lag)]),
#       col = palette_couleur[3],
#       lwd = 2)  #acf alternative
legend(
  'topright',
  c('ACF empirique', 'ACF théorique'),
  col = palette_couleur[1:2],
  lty = 1,
  lwd = 2)
```



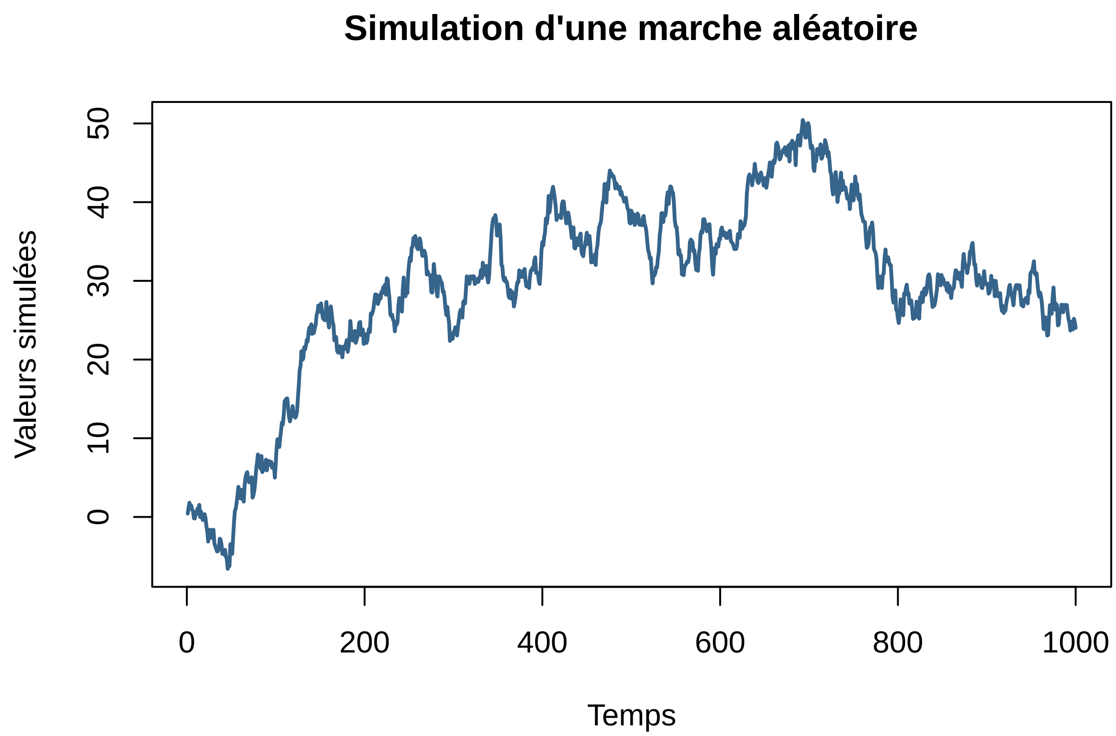
Commentaires :

L'acf (acf=fonction d'autocorrélation) empirique doit être proche de l'acf théorique si T est grand (estimateur consistant) L'acf montre l'existence d'une dépendance entre les valeurs successives, X_t et X_{t+h} sont non corrélées si $h > 1$. Les bornes de l'intervalle bleu sont égales à +-$1.96/T^{0.5}$ Pour un bruit blanc, on doit avoir l'acp empirique dans l'intervalle bleu avec un proba de 95%. On retrouve que $\hat{\rho}(1)$ est (significativement) plus grand que ce qu'on attend pour un bruit blanc.

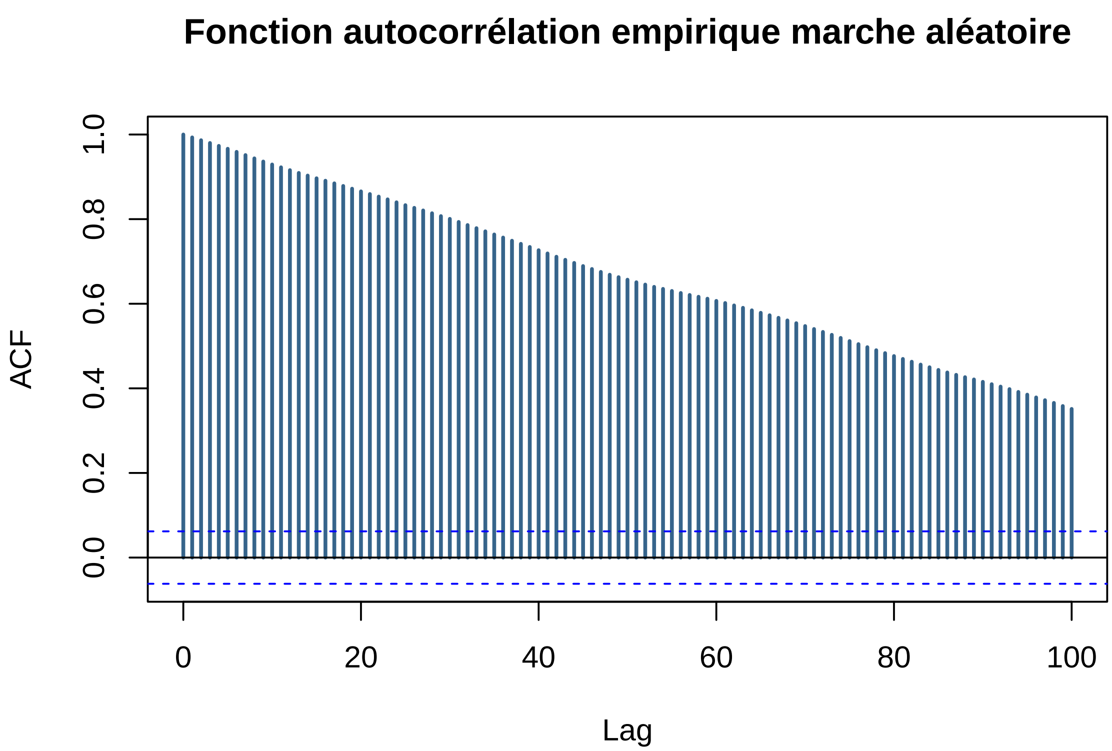
2.1.2 Simulation d'une marche aléatoire :

$$B_t = B_{t-1} + \epsilon_t \text{ avec } \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

```
sig = 1
tau = 1
Time = 1000
eps = rnorm(Time, sd = sig) #bruit blanc
B = rnorm(1, sd = tau) + cumsum(eps[1:Time])  #alternative : boucle
plot(
  B,
  type = 'l',
  main = 'Simulation d\'une marche aléatoire',
  ylab = 'Valeurs simulées',
  xlab = 'Temps',
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2
)
```




```r
acf(
  B,
  lag.max = 100,
  main = "Fonction autocorrélation empirique marche aléatoire",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2
)
```

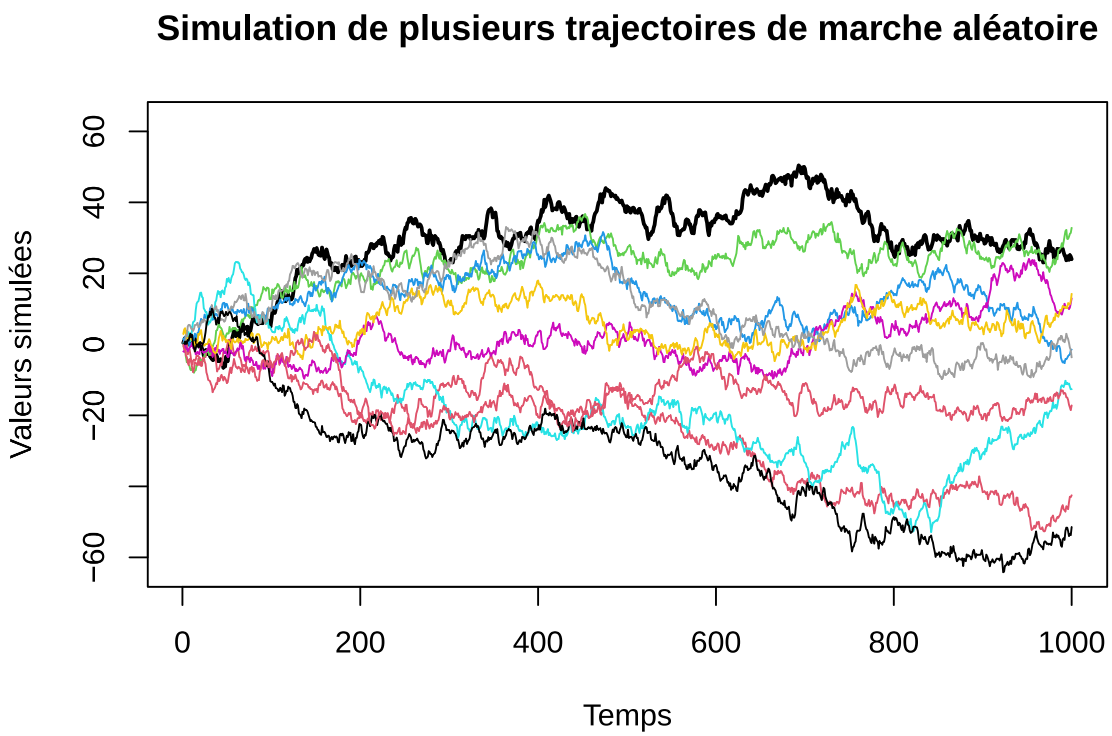


Commentaires :

Pprocessus non-stationnaire, ACF théorique pas définie, décroissance lente vers 0 de l'ACP empirique.

```
Time = 1000
plot(
  B,
  type = 'l',
  main = 'Simulation de plusieurs trajectoires de marche aléatoire',
  ylab = 'Valeurs simulées',
  xlab = 'Temps',
  col = 1,
  ylim = c(-2 * sig * sqrt(Time), 2 * sig * sqrt(Time)),
  lwd = 2
)
for (i in 2:10) {
  eps = rnorm(Time + 1, sd = sig)
  B = rnorm(1, sd = tau) + cumsum(eps[1:Time]) #on prend tau=sigma
  lines(B, col = i)
}
```

2.1.2.1 Simulation de plusieurs trajectoires de marche aléatoire :



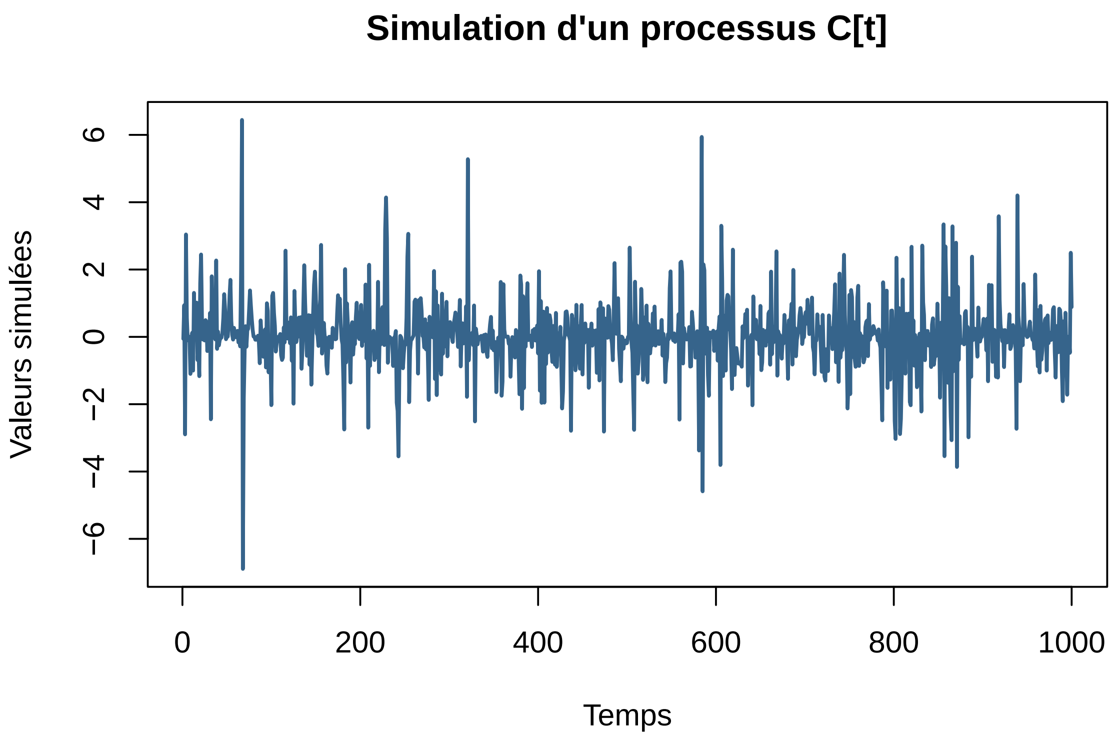
Commentaire :

On retrouve que la variance augmente avec le temps, processus non-stationnaire

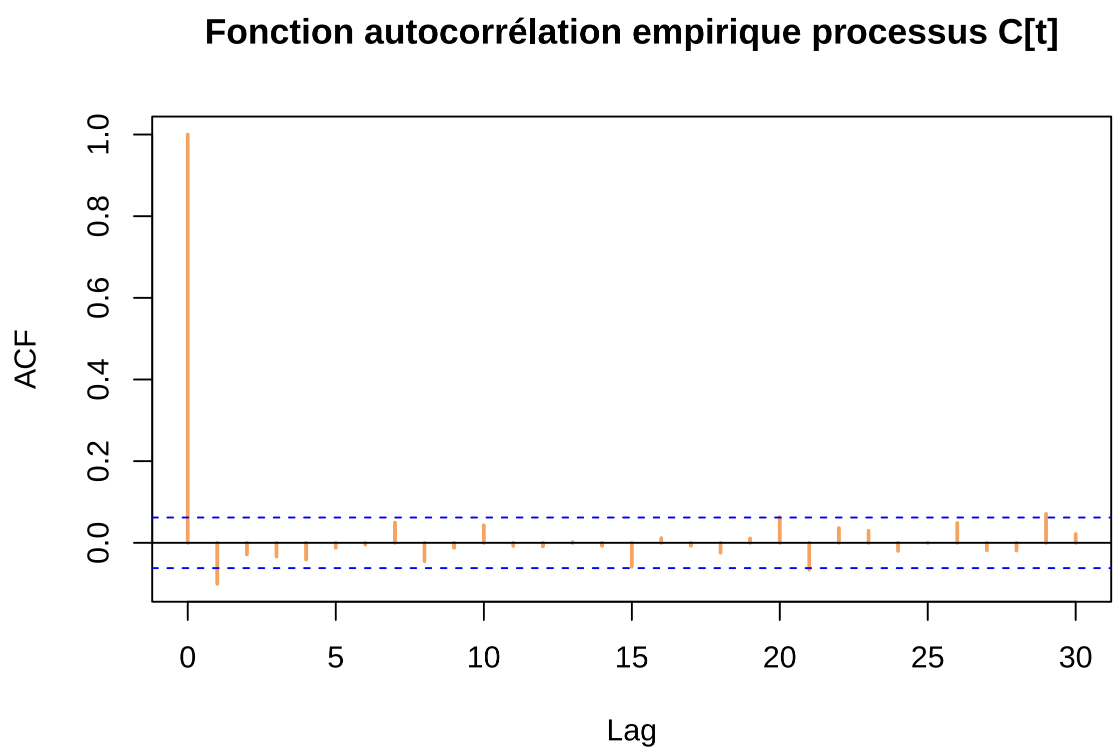
2.1.3 Simulation du troisième processus :

$$C_t = \epsilon_{t-1} \times \epsilon_t \text{ avec } \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

```
Time = 1000
sigma = 1
mu = 0
esp = rnorm(Time + 1, sd = sigma , mean = mu)
C = esp[1:Time] * esp[2:(Time + 1)]

plot(C,
     main = "Simulation d'un processus C[t]",
     ylab = "Valeurs simulées",
     xlab = "Temps",
     type = "l",
     col = palette_couleur[1],
     lwd = 2)
```




```
acf(C,
    main = "Fonction autocorrélation empirique processus C[t]",
    col = palette_couleur[2],
    lwd = 2)
```



2.1.3.1 Test de normalité des résidus :

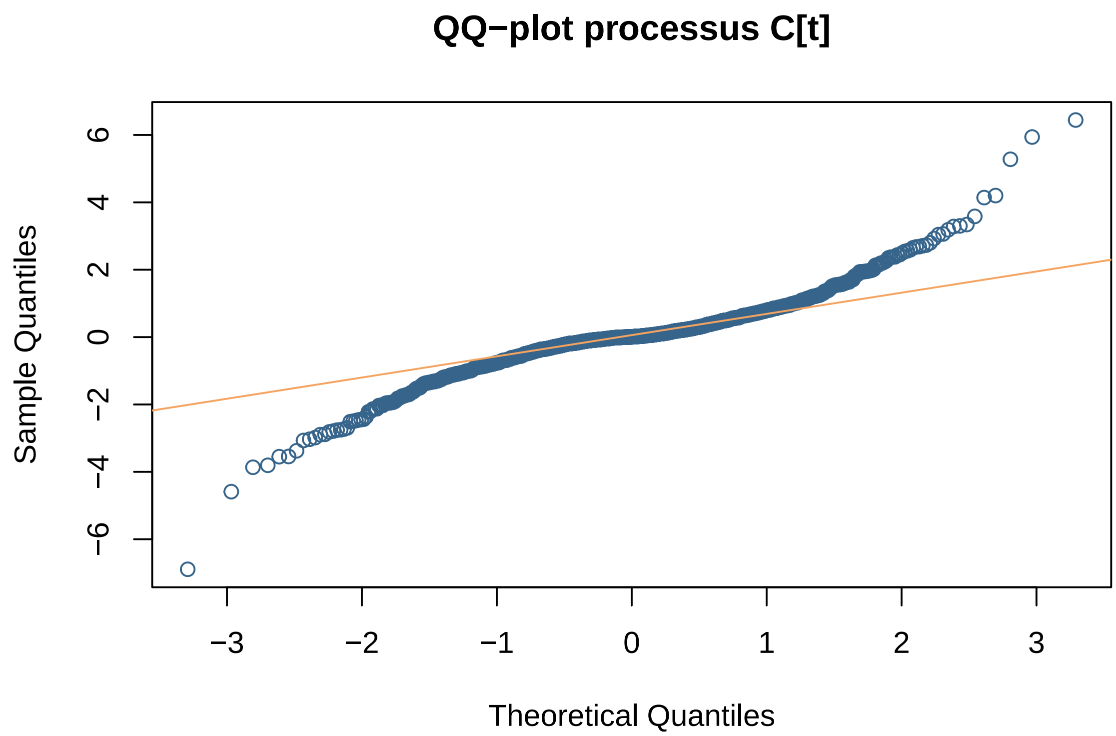
On peut tester la normalité des résidus avec le test de Shapiro-Wilk.

Le test de shapiro test l'existence de normalité des résidus.

$$\begin{cases} H_0 : \text{Les résidus suivent une loi normale} \\ H_1 : \text{Les résidus ne suivent pas une loi normale} \end{cases}$$

On peut aussi tracer un QQ-plot pour vérifier la normalité des résidus.

```r
#Etude de la distribution des valeurs simulées :
qqnorm(C,
       main = "QQ-plot processus C[t]",
       col = palette_couleur[1])
qqline(C, col = palette_couleur[2])
```



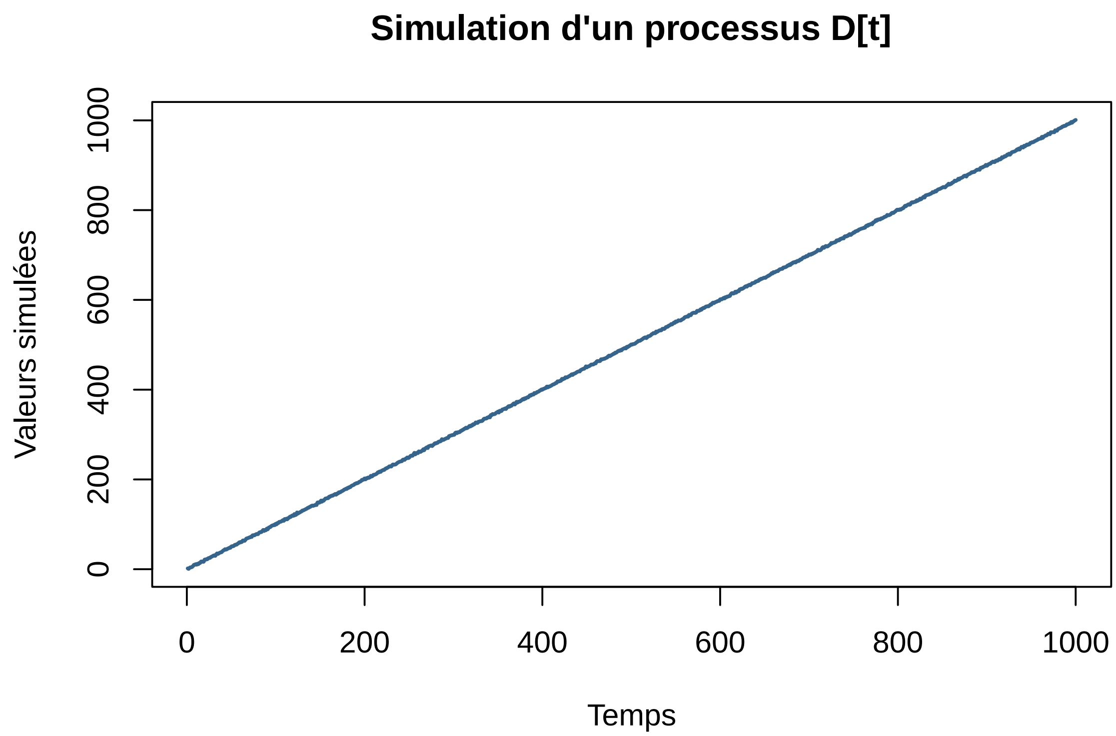

```
shapiro.test(C) #test de normalité des résidus
```

```
    Shapiro-Wilk normality test

data:  C
W = 0.914, p-value < 2.2e-16
```

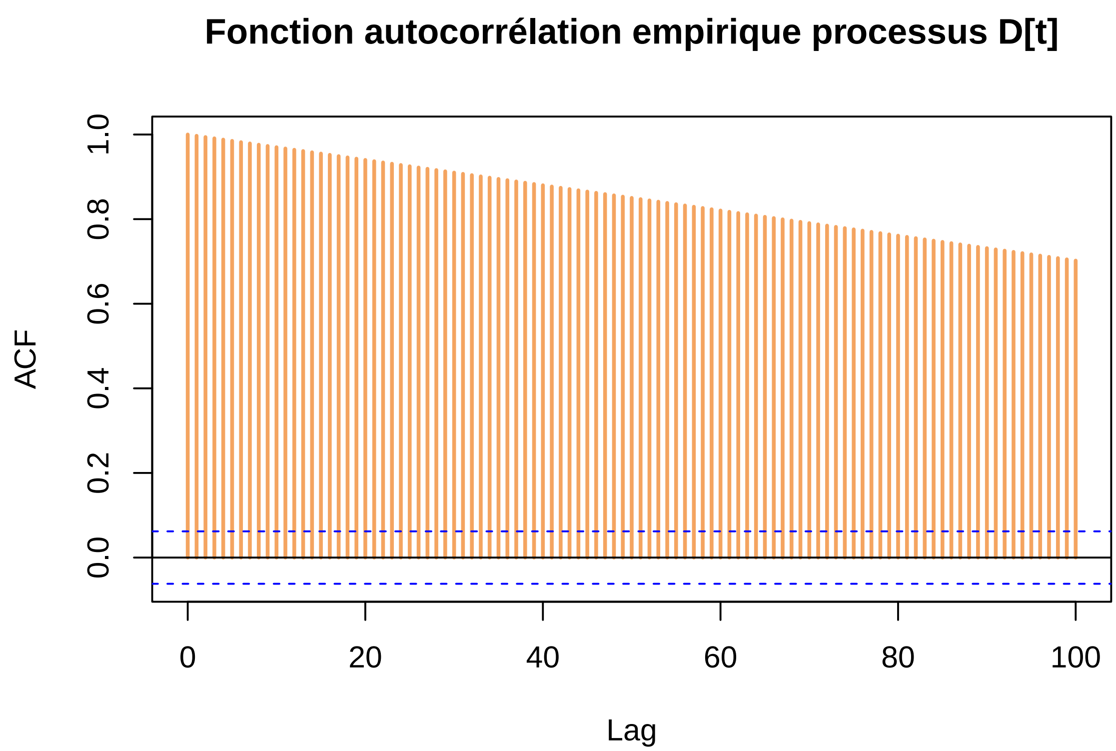
2.1.4 Simulation du processus D :

$$D_t = t + \epsilon_t \text{ avec } \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

```
sigma = 1
Time = 1000
esp = rnorm(Time, sd = sigma)

D = 1:Time + esp[1:Time]

plot(D,
     main = "Simulation d'un processus D[t]",
     ylab = "Valeurs simulées",
     xlab = "Temps",
     type = "l",
     col = palette_couleur[1],
     lwd = 2)
```




```
acf(D,
    main = "Fonction autocorrélation empirique processus D[t]",
    col = palette_couleur[2],
    lwd = 2,
    lag.max = 100)
```



Commentaires :

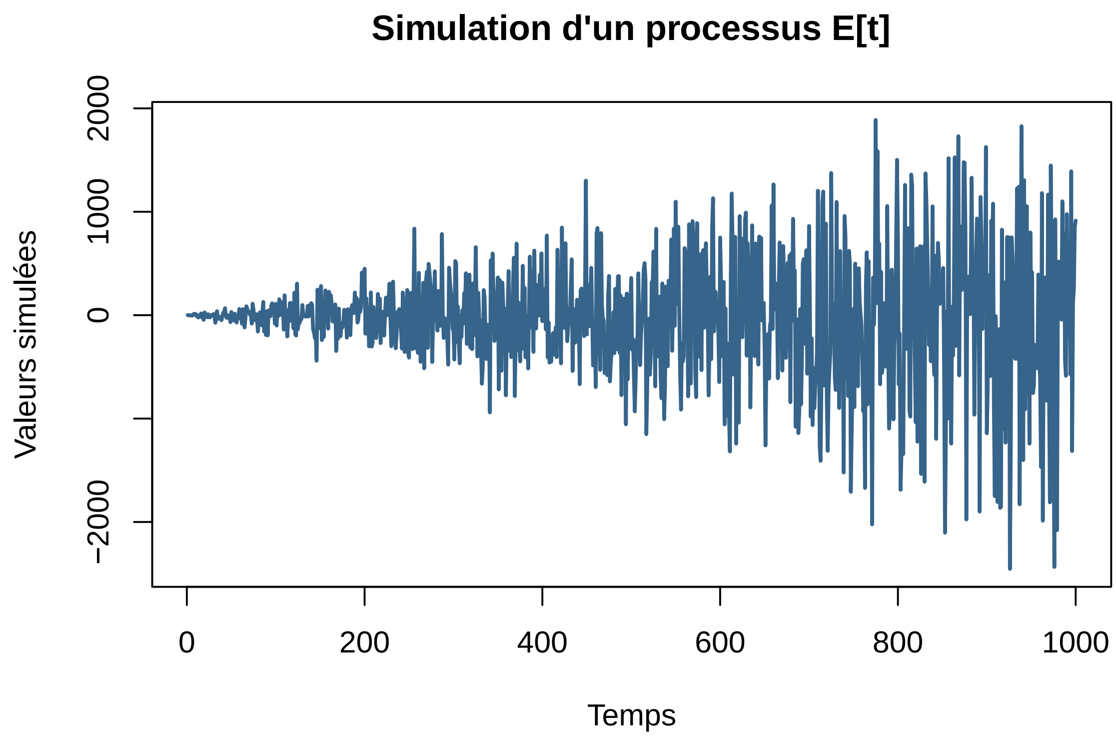
Le proccesus n'est pas stationnaire, il y a une tendance dans la variance.

En considérant $t \in R$ fixé on peut dire que le processus est gaussien.

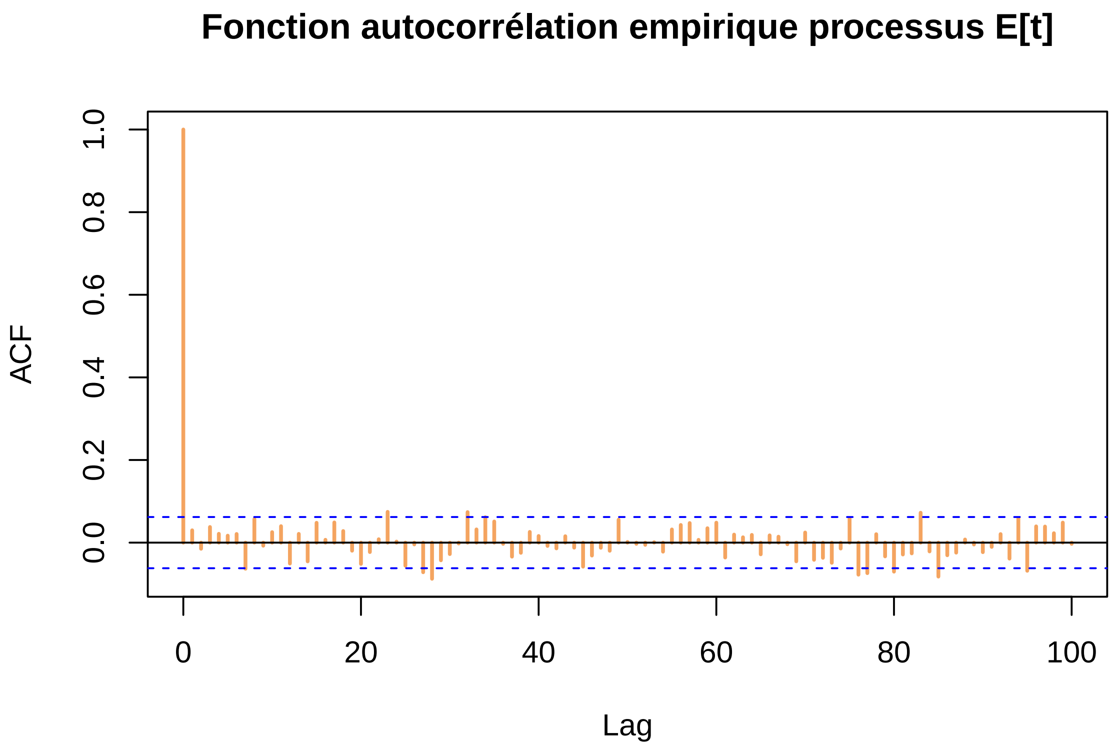
2.1.5 Simulation du processus E :

$$E_t = t \times \epsilon_t \text{ avec } \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

```
E = (1:Time) * esp[1:Time]

plot(E,
     main = "Simulation d'un processus E[t]",
     ylab = "Valeurs simulées",
     xlab = "Temps",
     type = "l",
     col = palette_couleur[1],
     lwd = 2)
```




```
acf(E,
    main = "Fonction autocorrélation empirique processus E[t]",
    col = palette_couleur[2],
    lwd = 2,
    lag.max = 100)
```



Commentaire :

Le processus n'est pas stationnaire il y a une tendance dans la variance.

2.2 Exercice 2 :

$$X_t = \epsilon_t + \beta_1 * \epsilon_{t-1} + \beta_2 * \epsilon_{t-2} + \beta_3 * \epsilon_{t-3} \text{ avec } \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)\beta_1 = 1, \beta_2 = 0.5, \beta_3 = -0.5$$

2.2.1 Fonction autocorrélation théorique :

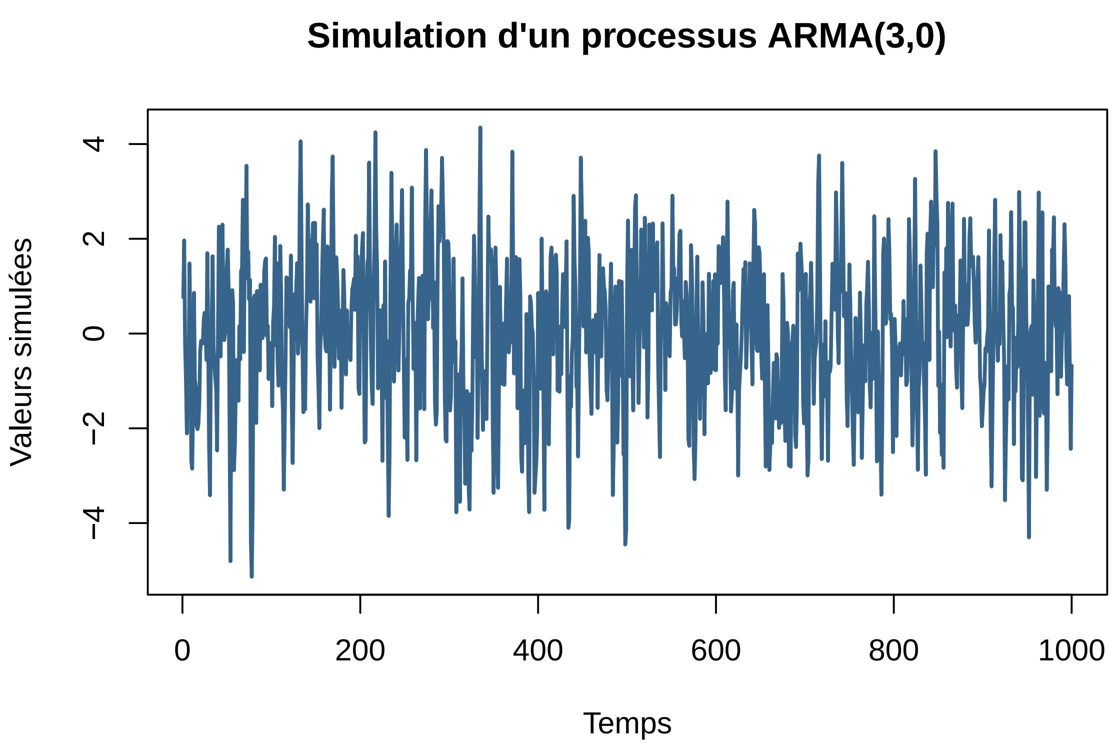
```r
# Paramètres du modèle :
beta = c(1, .5, -.5)
rho = ARMAacf(ma = beta)
# Formule théoriques :
rho_1 <- (beta[1]+beta[1]*beta[2]+beta[2]*beta[3])/(1+sum(beta^2))
rho_2 <- (beta[2]+beta[1]*beta[3])/(1+sum(beta^2))
rho_3 <- (beta[3])/(1+sum(beta^2))

# Affichage des résultats :

data.frame(
  Lag = 1:3,
  Formule = c(rho_1, rho_2, rho_3),
  Fonction = rho[2:4]
)
```

```
  Lag Formule Fonction
1   1     0.5      0.5
```

```
2   2     0.0      0.0
3   3    -0.2     -0.2
```

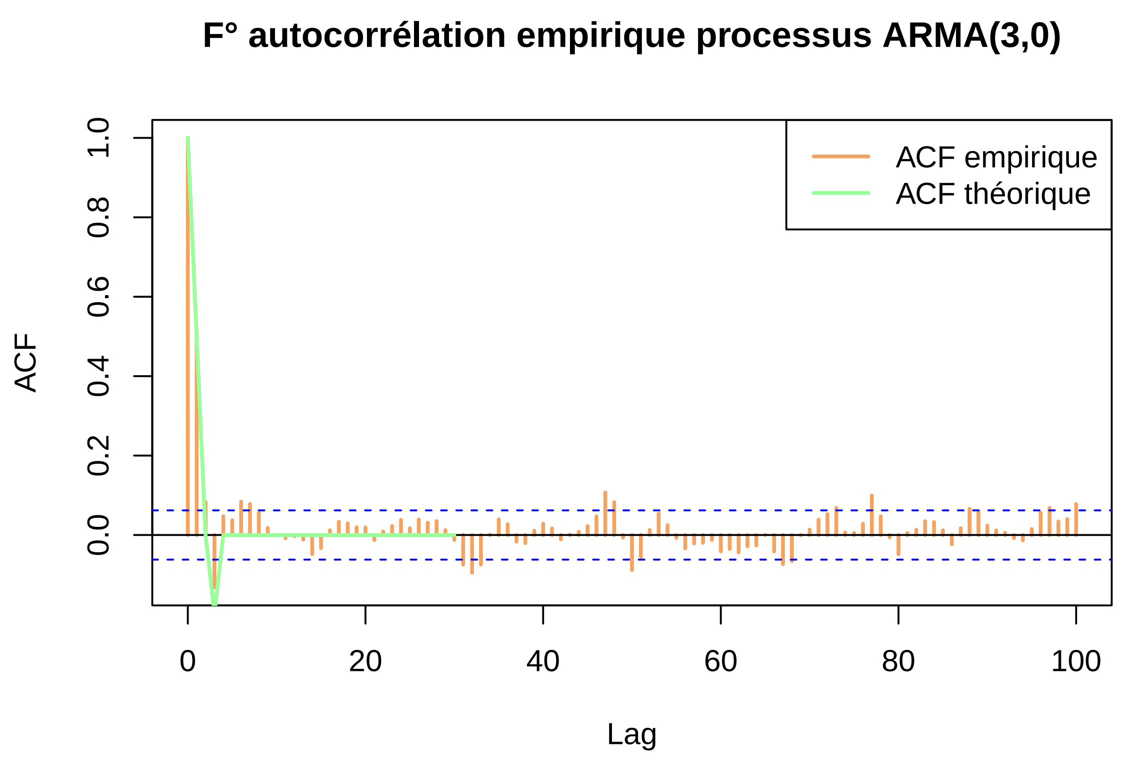
2.2.2 Simulation du processus en utilisant la fonction intégrée :

```r
x = arima.sim(model = list(ma = beta), n = 1000)
plot(x,
     main = "Simulation d'un processus ARMA(3,0)",
     ylab = "Valeurs simulées",
     xlab = "Temps",
     type = "l",
     col = palette_couleur[1],
     lwd = 2)
```




```r
acf(x,
    main = "F° autocorrélation empirique processus ARMA(3,0)",
    col = palette_couleur[2],
    lwd = 2,
    lag.max = 100)

rho = ARMAacf(ma = c(1, .5, -.5), lag.max = 30)
lines(0:30, rho, col = palette_couleur[3], lwd = 2)
legend(
  'topright',
  c('ACF empirique', 'ACF théorique'),
  col = palette_couleur[2:3],
  lty = 1,
  lwd = 2
```

```
)
```



A retenir :

Pour un MA(q), on a rho(h)=0 pour h>q.

2.3 Exercice 3 :

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \epsilon_t \text{ avec } \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

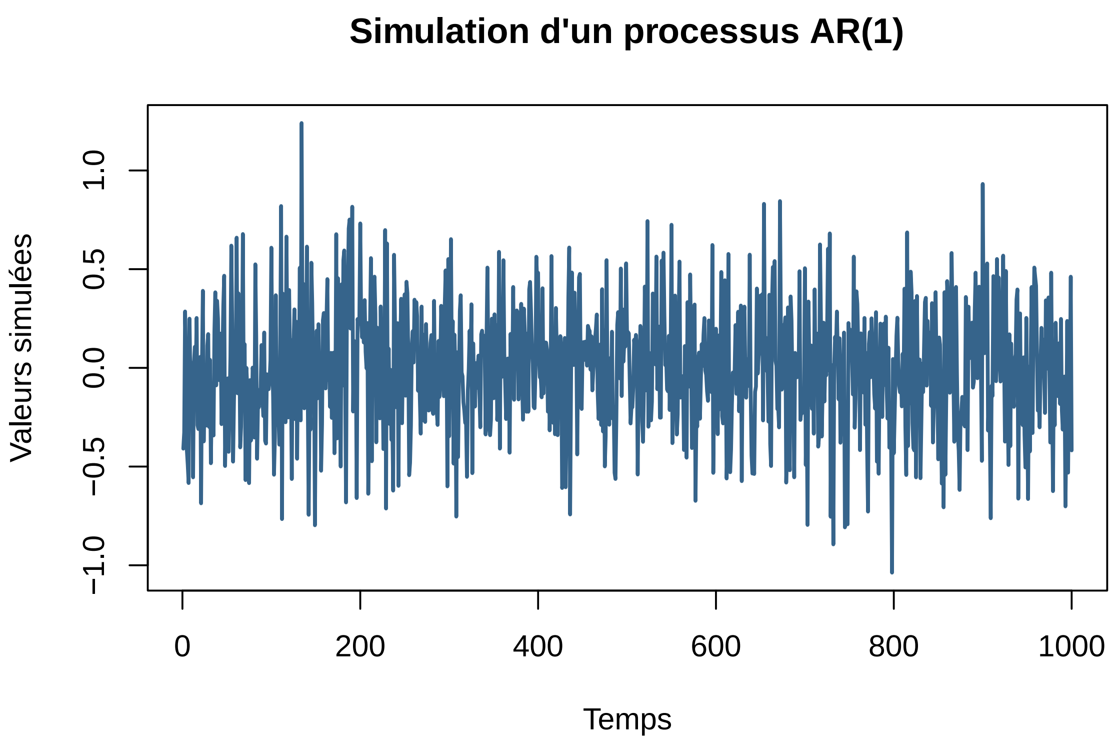
2.3.1 Fonction de simulation d'un processus Ar(1):

```r
ar1 = function(alpha, sigma = 1, Time= 1000) {
  x = numeric(Time)
  x[1] = rnorm(1, sd = sqrt(sigma ^ 2 / (1 - alpha ^ 2)))
  for (t in 2:Time) {
    x[t] = alpha * x[Time- 1] + rnorm(1, sd = sigma)
  }
  return(x)
}
```

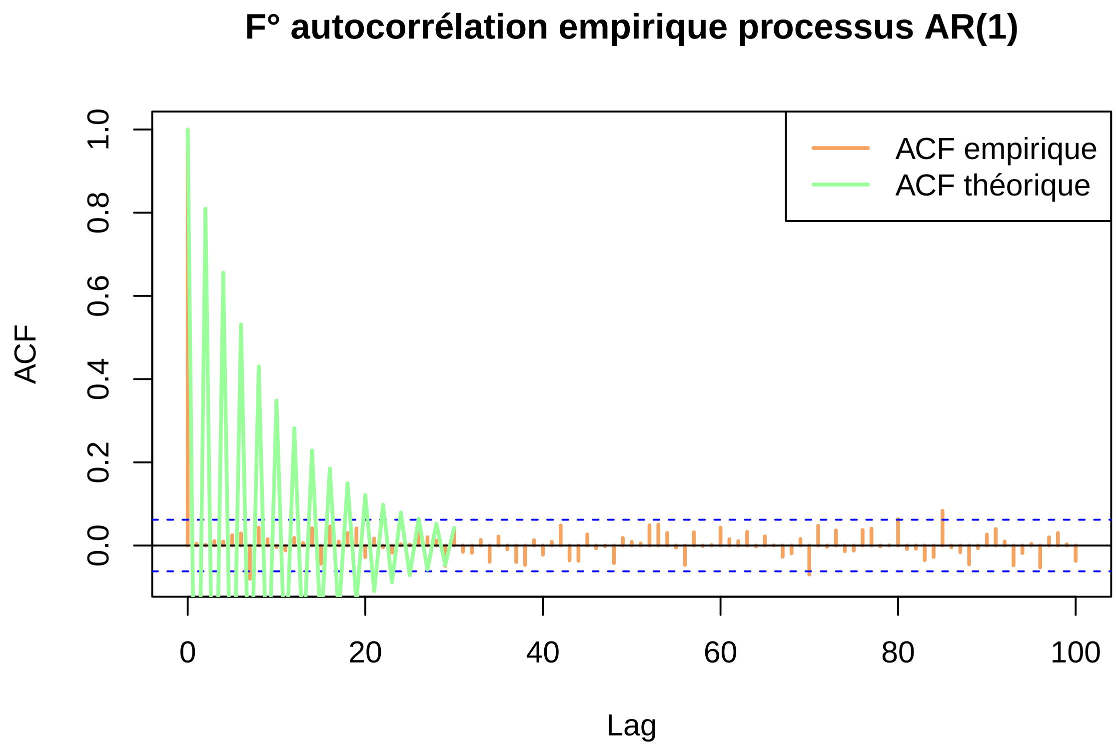
2.3.2 Simulation du processus :

```r
alpha = -0.9
# alpha = 0.9
sigma = sqrt(0.1)
Time = 1000
x = ar1(alpha, sigma, Time)
```

```
plot(x,
     main = "Simulation d'un processus AR(1)",
     ylab = "Valeurs simulées",
     xlab = "Temps",
     type = "l",
     col = palette_couleur[1],
     lwd = 2,
     xlim = c(1, Time))
```




```
acf(x,
    main = "F° autocorrélation empirique processus AR(1)",
    col = palette_couleur[2],
    lwd = 2,
    lag.max = 100)
tab = 0:30
rho = alpha ^ tab
lines(tab, rho, col = palette_couleur[3], lwd = 2)
legend(
  'topright',
  c('ACF empirique', 'ACF théorique'),
  col = palette_couleur[2:3],
  lty = 1,
  lwd = 2
)
```



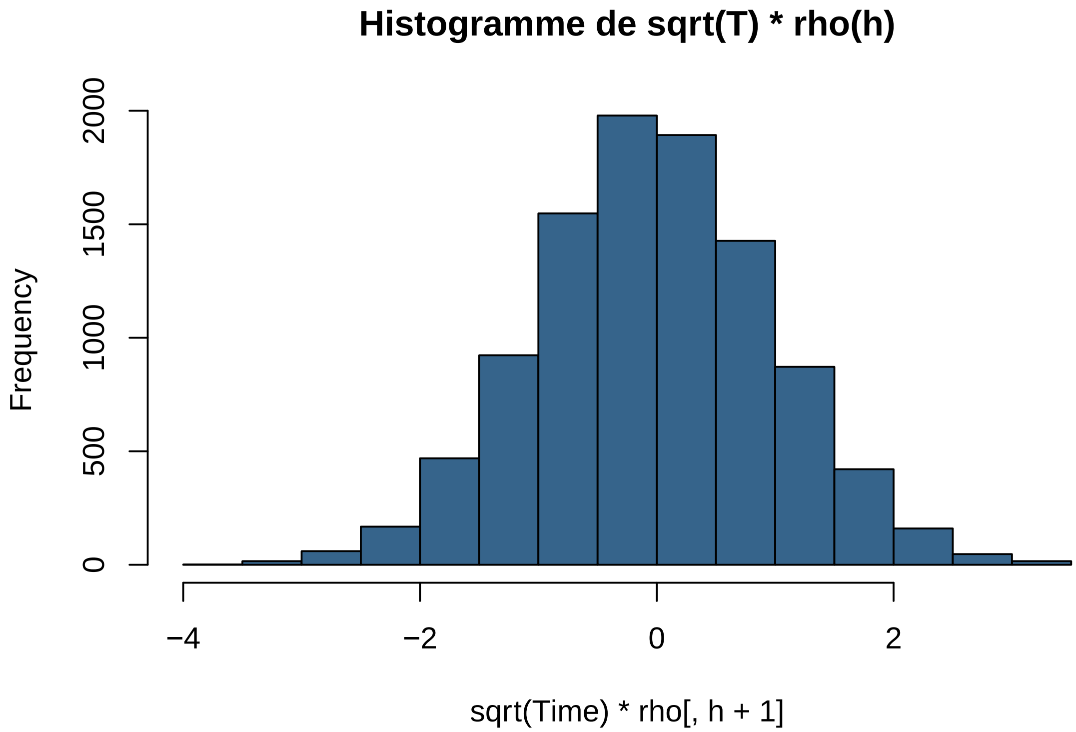
2.4 Exercice 5 :

2.4.1 Simulation du bruit blanc :

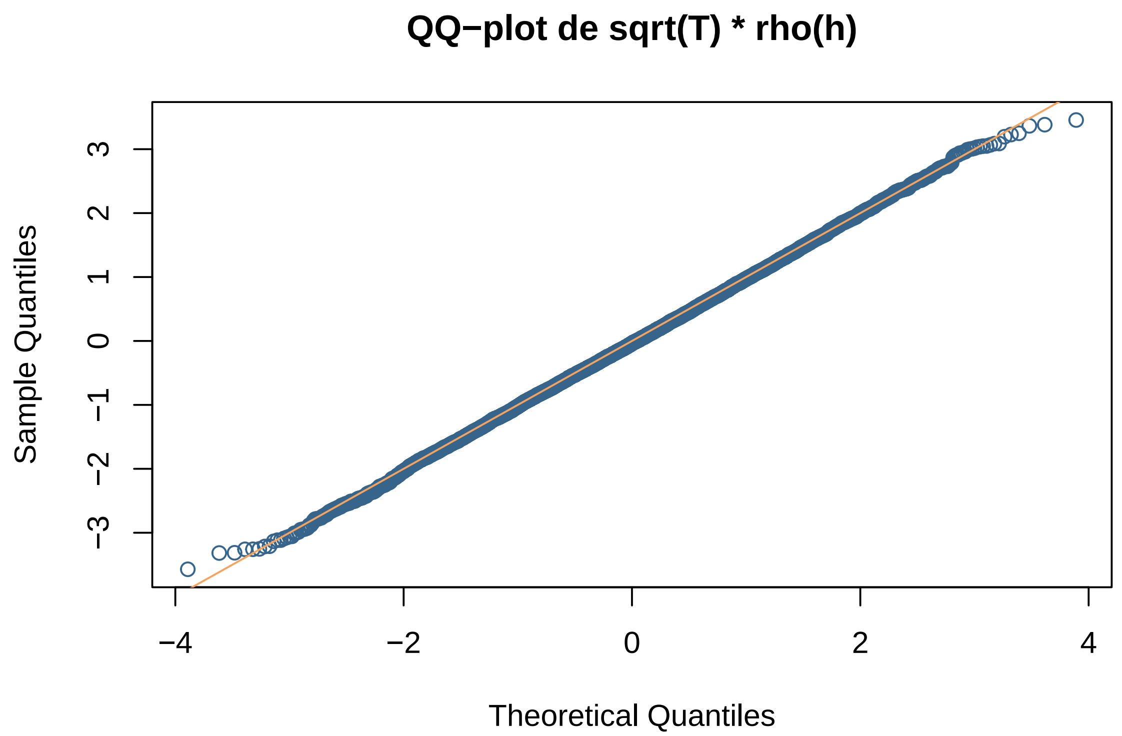
```
N = 10 ^ 4  #nombre de simulations
Time = 1000  #longueur des séries temporelles
rho = NULL
pv = NULL
for (n in 1:N) {
  #on répète l'expérience N fois
  x = rnorm(Time)  #simulation d'un bruit blanc gaussien
  rho = rbind(rho, acf(x, plot = FALSE)$acf)  #calcul et stockage ACF (sans tracer le graphique)
  pv = c(pv, Box.test(x, lag = 5)$p.value) #calcul et stockage p-value du test de Portmenteau
}
```

2.4.2 Vérification que $\sqrt(T) \times \hat{\rho}(h) \sim \mathcal{N}(0,1)$:

```
h = 1
hist(sqrt(Time) * rho[, h+1], # La fonction d'autocorrélation commence à 0.
     main = "Histogramme de sqrt(T) * rho(h)",
     col = palette_couleur[1])
```




```
# Test de normalité :
qqplot = qqnorm(sqrt(Time) * rho[, h+1],
                main = "QQ-plot de sqrt(T) * rho(h)",
                col = palette_couleur[1])
abline(0, 1, col = palette_couleur[2])
```



Commentaire :

On peut retrouver des résultats similaires sur les autres valeurs de h.

2.4.3 L'intervalle de confiance à 95% des coefficients d'auto-corrélation :

```
nb_value <-
  sum(rho[, h + 1] > -1.96 / sqrt(Time) &
        rho[, h + 1] < 1.96 / sqrt(Time)) / N
nb_value # Très proche de 0.95 (prendre N assez grand)
```

```
[1] 0.95
```

```
alpha = 0.05
sum(pv > 0.05) / N
```

```
[1] 0.955
```

```
# HO = c'est un bruit blanc ,  acceptés dans + de 95% des cas
```

2.4.4 Vérification sur une simulation MA(1) :

```
beta = 0.9
sigma = 0.1
rho = NULL ; pv = NULL
N = 10 ^ 4
for (i in 1:N){
  eps = sigma * rnorm(Time + 1)
```

```
  y = eps[2:(Time + 1)] + beta * eps[1:Time]
  rho = rbind(rho, acf(y, plot = FALSE)$acf)
  pv = c(pv, Box.test(y, lag = 5)$p.value)
  }
```

2.4.4.1 Simulation :

2.4.5 Vérifier que $\hat{\rho}(1)$ n'est plus dans l'intervalle pour un MA(1) :

```
h = 1
nb_value = sum(rho[,h+1] > -1.96/sqrt(Time) &
      rho[,h+1] < 1.96/sqrt(Time))/N
nb_value
```

```
[1] 0
```

```
# Test du bruit blanc :
alpha = 0.05
sum(pv > alpha) / N
```

```
[1] 0
```

Commentaire :

L'intervalle de confiance n'est plus respecté pour un MA(1) (on rejette l'hypothèse de bruit blanc).

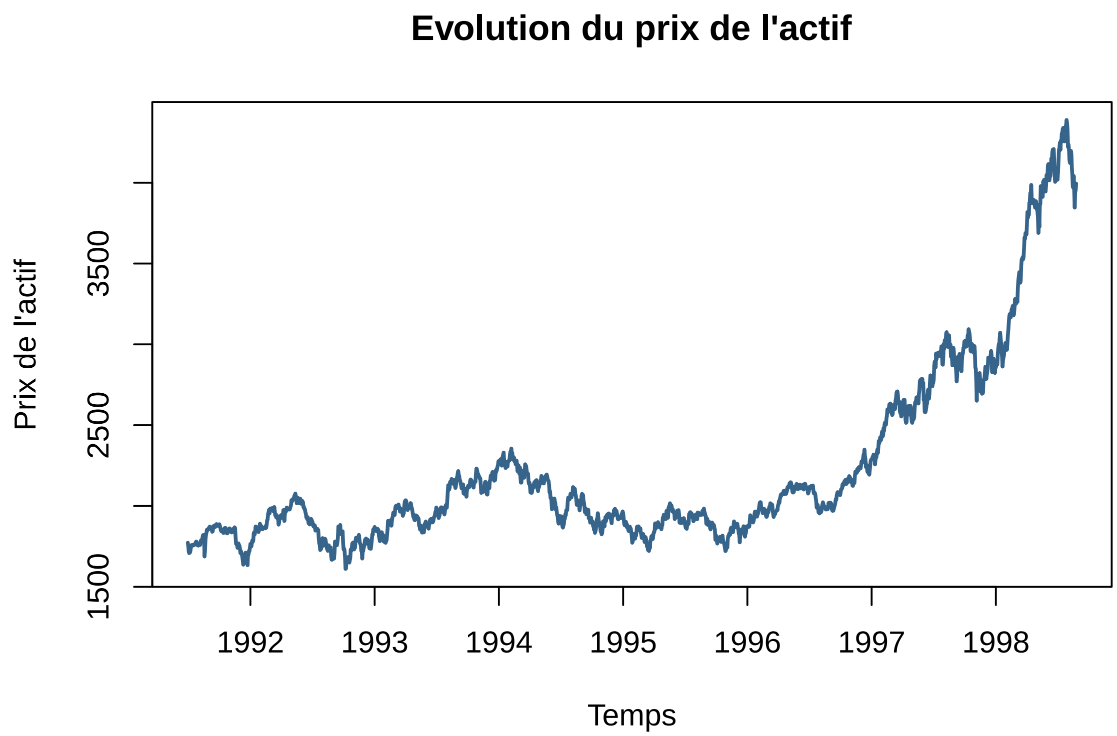
On rejette l'hypothèse de bruit blanc pour un MA(1) (on a une dépendance entre les valeurs successives).

2.4.6 Test de normalité des rendements dans la modélisation de Black-Scholes :

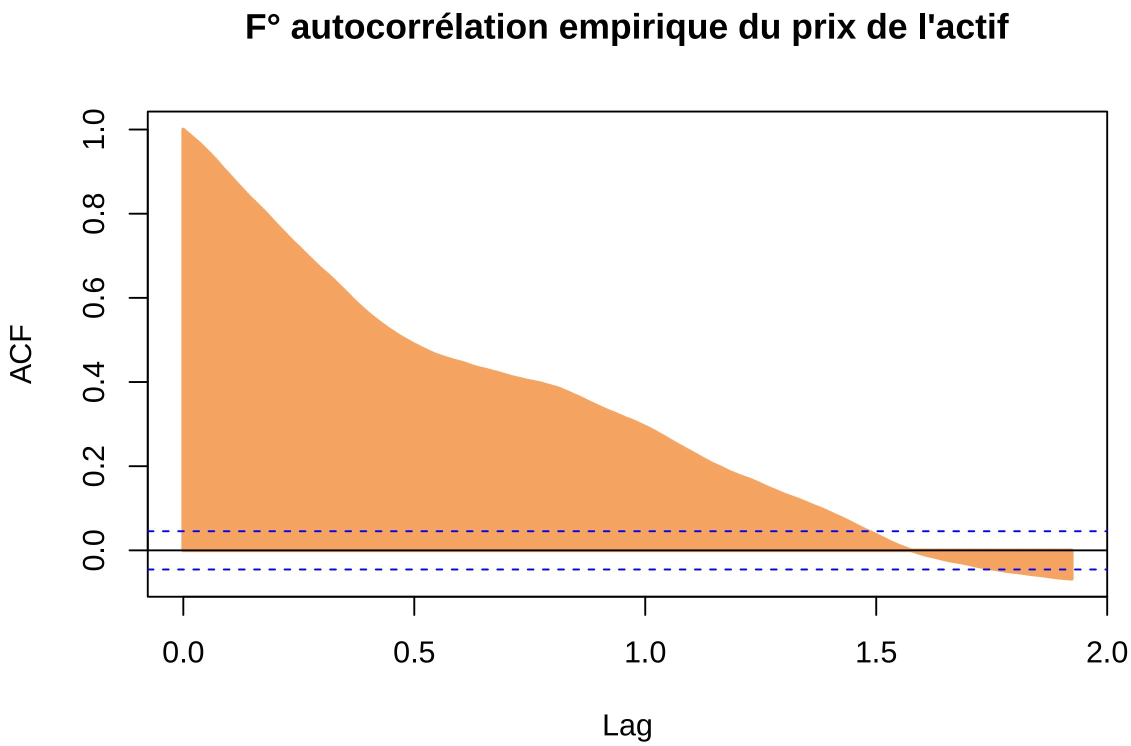
$$X_t = ln(\frac{S_t}{S_{t-1}}) = ln(S_t) - ln(S_{t-1}) S_t : \text{Prix de l'actif à l'instant t} Hypothse : X_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) iid$$

```

x = EuStockMarkets[, 3]
plot(
  x,
  main = "Evolution du prix de l'actif",
  ylab = "Prix de l'actif",
  xlab = "Temps",
  type = "l",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2
)
```

2.4.6.1 Importation et représentation graphique :

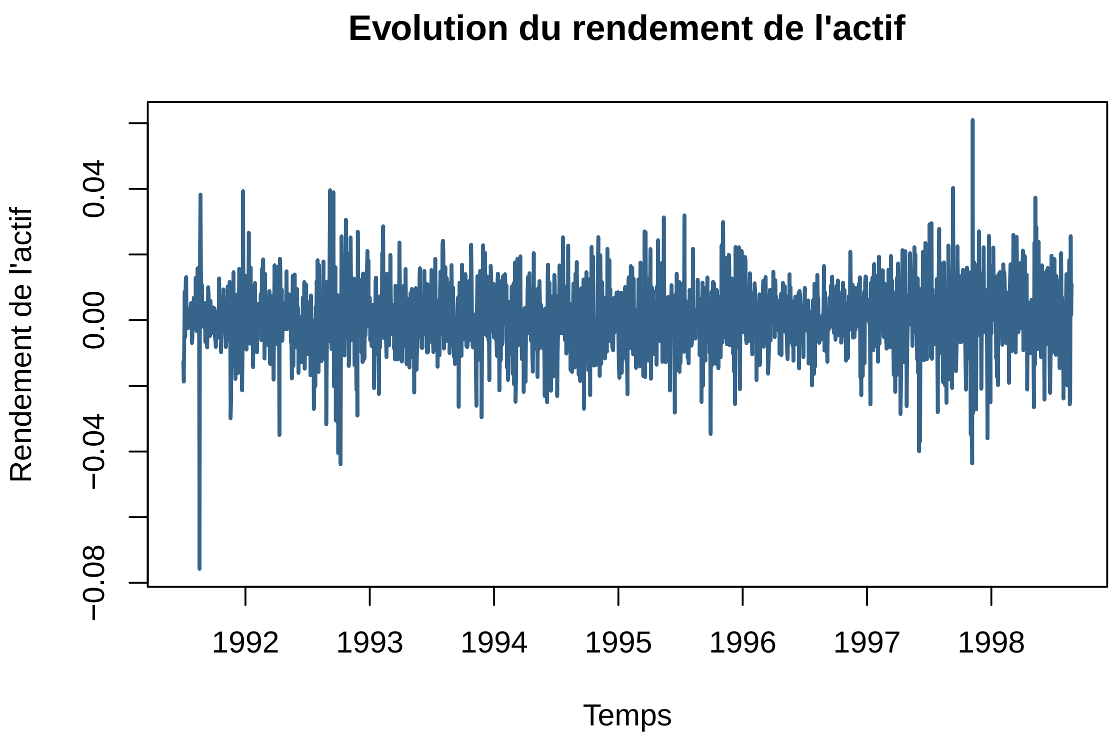



```
acf(
  x,
  main = "F° autocorrélation empirique du prix de l'actif",
  col = palette_couleur[2],
  lwd = 2,
  lag.max = 500
)
```

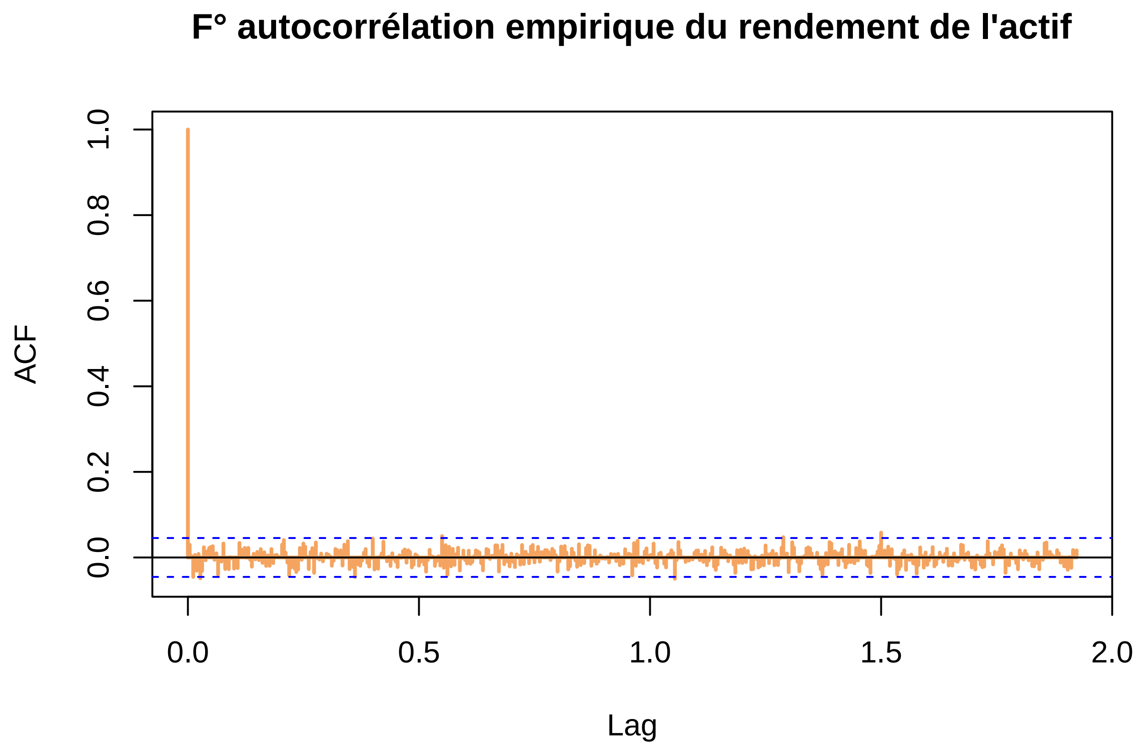



```r
y = diff(log(x))
plot (
  y,
  main = "Evolution du rendement de l'actif",
  ylab = "Rendement de l'actif",
  xlab = "Temps",
  type = "l",
  col = palette_couleur[1],
  lwd = 2
)
```

2.4.6.2 Log différenciation de l'actif :




```
acf(
  y,
  main = "F° autocorrélation empirique du rendement de l'actif",
  col = palette_couleur[2],
  lwd = 2,
  lag.max = 500
)
```

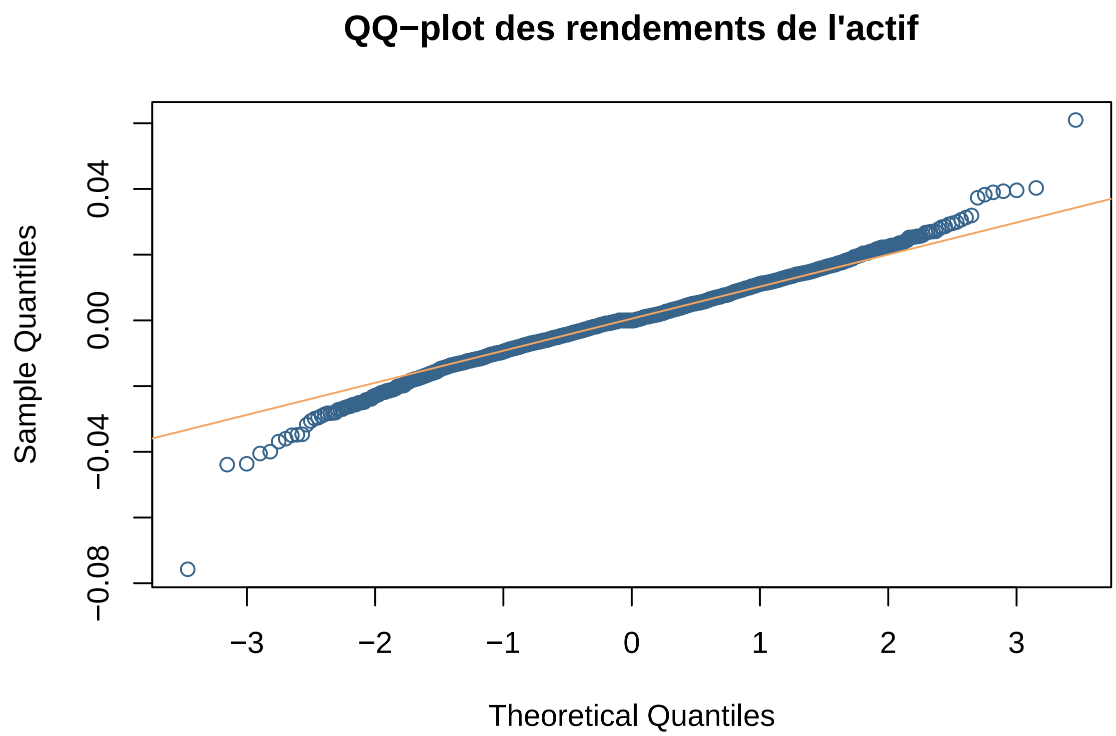



```r
Box.test(y, lag = 5) #test de Portmanteau (BB)
```

2.4.6.3 Test sur le BB et la normalité des rendements :

```
    Box-Pierce test

data:  y
X-squared = 7.3488, df = 5, p-value = 0.196
```

```r
qqnorm(y,
       main = "QQ-plot des rendements de l'actif",
       col = palette_couleur[1])
qqline(y, col = palette_couleur[2])
```




```r
shapiro.test(y) #test de normalité des rendements
```

```
	Shapiro-Wilk normality test

data:  y
W = 0.98203, p-value = 1.574e-14
```

Rappel :

Le test de Shapiro permet de tester l'hypothèse nulle de normalité des résidus.

$$\begin{cases} H_0 : \text{Les résidus suivent une loi normale} \\ H_1 : \text{Les résidus ne suivent pas une loi normale} \end{cases}$$

Le test de Box-Pierce permet de tester l'hypothèse nulle d'indépendance des observations d'une série temporelle.

$$\begin{cases} H_0 : \rho(1) = 0, \text{X est un bruit blanc} \\ H_1 : \rho(1) \neq 0, \text{X n'est pas un bruit blanc} \end{cases}$$

Dans notre cas, les log-rendements de la série temporelle ne suivent pas une loi normale mais sont des bruits blancs. C'est-à-dire que les rendements sont indépendants et identiquement distribués.

2.5 Exercice 6 :

On se base sur une modèle AR(1) :

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \epsilon_t \text{ avec } \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

2.5.1 Créer une fonction d'estimation du maximun de vraissemblance associé à la série temporelle :

```
ar1.estim = function(x) {
  n = length(x)
  x1 = x[1:(n - 1)]
  x2 = x[2:n]
  alpha = sum(x1 * x2) / sum(x1 ^ 2)
  sigma = sqrt(sum((x2 - alpha * x1) ^ 2) / n)
  return(c(alpha, sigma))
}

# Création d'une série temporelle :
alpha = 0.9 ; sigma = 0.1 ; Time = 1000
x = arima.sim(model = list(ar = alpha), n = Time, sd = sigma)

# Fonction créée :
yf = ar1.estim(x)

# Estimation R :
y = ar(x, aic = FALSE, order.max = 1, demean = FALSE, method = "ols")

# Résultats :
data.frame(
  Explication = c("Vrai valeur", "Estimation F°", "Estimation R"),
  alpha = round(c(alpha,yf[1], y$ar[1]),4),
  sigma = round(c(sigma, yf[2], y$var.pred[1]),4))
```

```
    Explication  alpha  sigma
1   Vrai valeur 0.9000 0.1000
2 Estimation F° 0.8999 0.0978
3  Estimation R 0.8999 0.0096
```

2.5.2 Etude sur les estimateurs par simulation :

```
Nsimu = 10 ^ 2 ; alpha = 0.9 ; sigma = 0.1
tabT = c(20,100,1000,10000) # Différentes longueur de série

# Matrice de stockage des estimations :
alphaols = matrix(0, Nsimu, length(tabT))
sigmaols = matrix(0, Nsimu, length(tabT))
alphamle = matrix(0, Nsimu, length(tabT))
sigmamle = matrix(0, Nsimu, length(tabT))

for (i in 1:length(tabT)) {
  T = tabT[i]
  for (j in 1:Nsimu) {
    x = arima.sim(model = list(ar = alpha), sd = sigma, n = T)
    fit = ar(x, aic = FALSE, order.max = 1, demean = FALSE, method = 'ols')
    alphaols[j, i] = fit$ar
    sigmaols[j, i] = fit$var.pred
```

```r
    fit = ar(x, aic = FALSE, order.max = 1, demean = FALSE, method = 'mle')
    alphamle[j, i] = fit$ar
    sigmamle[j, i] = fit$var.pred
  }
}
```

```r
# Comparaison du biais des estimateurs :
data.frame (
  Duration = tabT,
  MLE_mean = round(apply(alphamle, 2, mean),4),
  OLS_mean = round(apply(alphaols, 2, mean),4)
)
```

2.5.2.1 Comparaison en moyenne :

```
  Duration MLE_mean OLS_mean
1       20   0.8500   0.8462
2      100   0.8819   0.8802
3     1000   0.8973   0.8972
4    10000   0.9005   0.9005
```

Commentaire :

Au regard des moyennes l'estimateur est asymptotiquement sans biais (biais tend vers 0 lorsque T grandit)

```r
data.frame(
  duration = tabT,
  MLE = round(apply(alphamle, 2, var),4),
  OLS = round(apply(alphaols, 2, var),4))
```

2.5.2.2 Comparaison de la variance des estimateurs :

```
  duration    MLE    OLS
1       20 0.0136 0.0167
2      100 0.0025 0.0023
3     1000 0.0002 0.0002
4    10000 0.0000 0.0000
```

Commentaire :

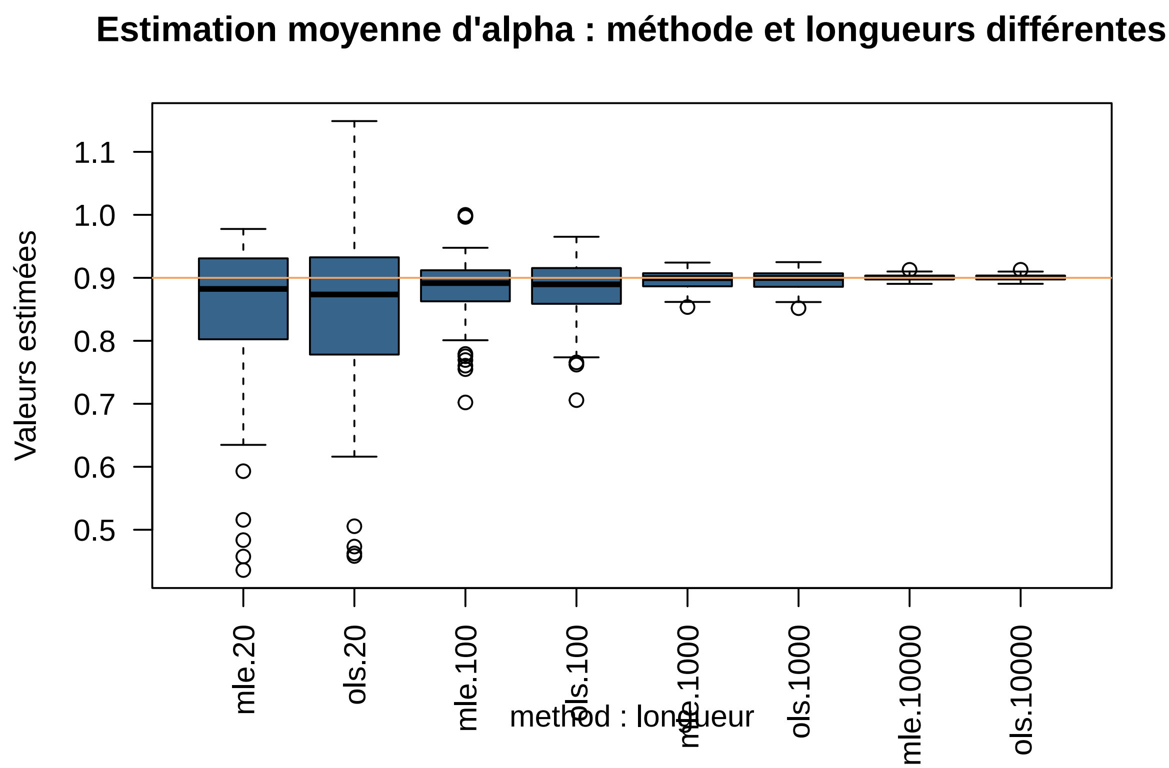
La variance des estimateurs tend vers 0 lorsque T grandit (convergence ordre 2)

```r
alpha = cbind(alphaols, alphamle)
sigma = cbind(sigmaols, sigmamle)

method = cbind(matrix('ols', Nsimu, length(tabT)), matrix('mle', Nsimu, length(tabT)))

longueur = cbind(matrix(rep(tabT, Nsimu), Nsimu, length(tabT), byrow = TRUE),
                 matrix(rep(tabT, Nsimu), Nsimu, length(tabT), byrow = TRUE))
```

2.5.2.3 Représentation graphique boxplot :

```r
boxplot(alpha ~ method + longueur, las = 2, col = palette_couleur[1],
        main = "Estimation moyenne d'alpha : méthode et longueurs différentes",
        ylab = "Valeurs estimées")

abline(h = 0.9, col = palette_couleur[2])
```

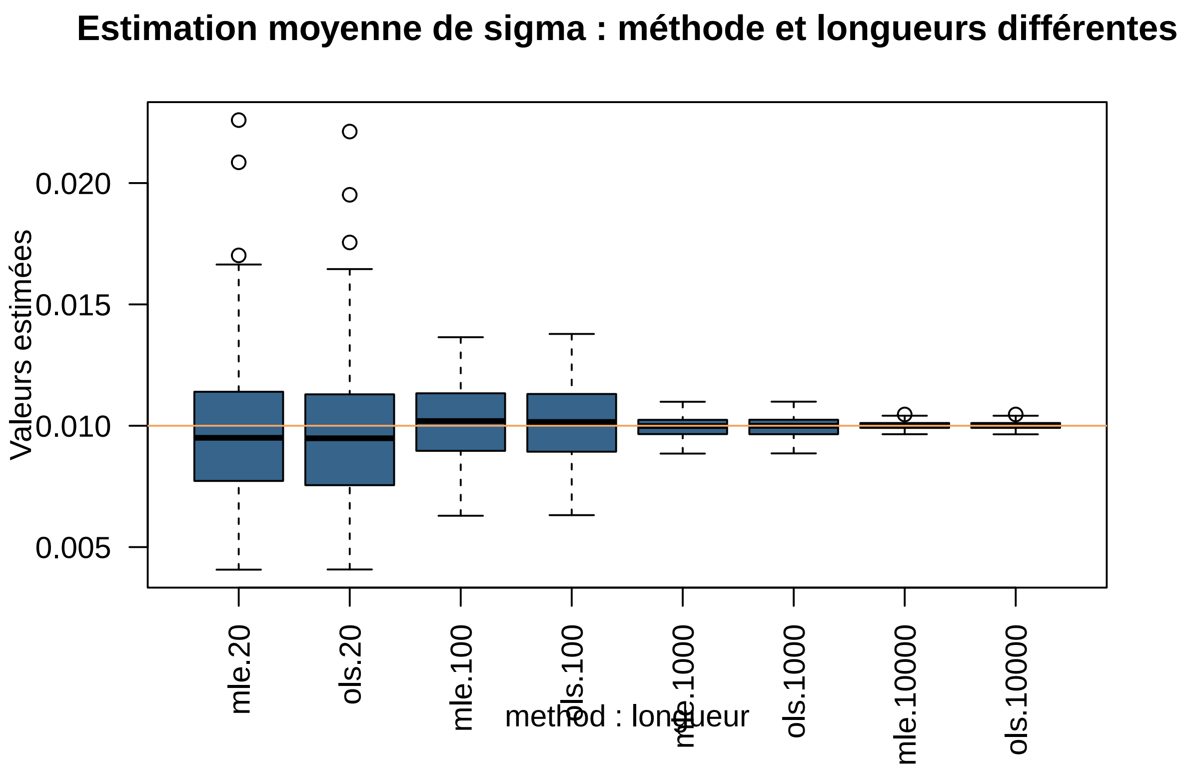
2.5.2.3.1 Estimation moyenne des alpha :




```r
# 0.9 Correspond à la vraie valeur de alpha
```

```r
boxplot(sigma ~ method + longueur, las = 2, col = palette_couleur[1],
        main = "Estimation moyenne de sigma : méthode et longueurs différentes",
        ylab = "Valeurs estimées")
abline(h = 0.1 ^ 2, col = palette_couleur[2])
```

2.5.2.4 Estimation moyenne de sigma :



Commentaire :

Les deux méthodes (mle et ols) donnent des résultats proches. La méthode mle semble donner des résultats légèrement meilleurs pour les petits échantillons. On observe une sous-estimation pour les petites séries temporelles (T=20). On observe une convergence lorsque T tend vers l'infini.

2.5.3 Création d'une fonction de prédiction pour le modèle AR(1) :

Calcul de l'écart type et de la moyenne de la prédiction :

Prédiction de X_t à partir de $(X_1, ..., X_{t-h})$:

```
predictionAR1 = function(x, a, sig, hmax) {
  return(list(moy = x * a ^ (1:hmax),
              sig = sqrt(sig ^ 2 * (1 - a ^ (2 * (1:hmax))) / (1 - a ^ (2)))))
}
```

2.5.4 Simulation et prédiction : (A reprendre simplification possible dans le code)

```
alpha = 0.9 ; sig = 0.1 ; Time = 10 ^ 5
X = arima.sim(model = list(ar = alpha),sd = sig, n= Time)

moypred = NULL
sigpred = NULL
h = 1  #horizon de prévision
for (t in (h + 1):Time) {
  pred = predictionAR1(X[t - h], alpha, sig, h)
  moypred[t] = pred$moy[h]
  sigpred[t] = pred$sig[h]
```

```r
}

IC_pr_value = sum(X > moypred - 1.96 * sigpred &
      X < moypred + 1.96 * sigpred, na.rm = TRUE) / (Time - h + 1)

cat("Pourcentage de valeur dans l'intervalle = ", round(IC_pr_value,4), "\n")
```

```
Pourcentage de valeur dans l'intervalle =  0.951
```

2.6 Exercice 7 :

2.6.1 Trouver les racines d'un polynôme caractéristique :

```r
cat("Racines du polynôme : ", polyroot(c(1, -.9, .3)), "\n")
```

```
Racines du polynôme :  1.5+1.040833i 1.5-1.040833i
```

```r
cat("Module des racines : ", Mod(polyroot(c(1, -.9, .3))), "\n")
```

```
Module des racines :  1.825742 1.825742
```

Commentaire :

Proposition si le module des racines est supérieur à 1 alors le processus est stationnaire.

2.6.2 Calcul de l'ACF avec Yule-Walker à l'aide du système d'équations :

```r
alpha1 = 0.1
alpha2 = -0.3
sigma = 1

mat = cbind(
  c(1, -alpha1, -alpha2, 0, 0, 0),
  c(-alpha1, 1 - alpha2, -alpha1, -alpha2, 0, 0),
  c(-alpha2, 0, 1, -alpha1, -alpha2, 0),
  c(0, 0, 0, 1, -alpha1, -alpha2),
  c(0, 0, 0, 0, 1, -alpha1),
  c(0, 0, 0, 0, 0, 1)
)
b = c(sigma ^ 2, 0, 0, 0, 0, 0)

gamma = solve(mat, b)  #Fonction_autocovariance
f_autocor = gamma / gamma[1]  # Fonction_autocorrélation
```

2.6.3 Simulation et comparaison sur la fonction d'autocorrélation :

```r
x = arima.sim(model = list(ar = c(alpha1, alpha2)),
              sd = sigma,
              n = 10 ^ 4)

auto_cor_empi <- acf(x, lag.max = 5, plot = FALSE)$acf
auto_cor_theo <- ARMAacf(ar = c(alpha1, alpha2), lag.max = 5)
auto_cov_empi <- acf(x, lag.max = 5, type='covariance', plot=FALSE)$acf

# Affichage des résultats :
```

```r
data.frame(
  Lag = 1:5,
  Yule_walker = round(f_autocor[2:6],4),
  Empirique = round(auto_cor_empi[2:6],4),
  Théorique = round(auto_cor_theo[2:6],4))
```

```
  Lag Yule_walker Empirique Théorique
1   1      0.0769    0.0870    0.0769
2   2     -0.2923   -0.2947   -0.2923
3   3     -0.0523   -0.0605   -0.0523
4   4      0.0825    0.0761    0.0825
5   5      0.0239    0.0301    0.0239
```

2.6.4 Création d'une fonction d'estimation Yule-Walker pour un modèle AR(2) :

On se base uniquement sur le système d'équations preant en compte les 3 premières valeurs de l'ACF.

```r
fitYWAR2 = function(x) {
  # Afc empirique :
  gammac = acf(x, lag.max = 2, type = 'covariance',
               plot = FALSE)$acf

  # Matrice A et vecteur b :
  A = matrix(c(gammac[2], gammac[1], gammac[2], gammac[3], gammac[2],
               gammac[1], 1, 0, 0), nrow = 3)
  b = c(gammac[1], gammac[2], gammac[3])
  thetamom = solve(A, b)
  return(thetamom)
}

# Vérification :
x = arima.sim(model = list(ar = c(alpha1, alpha2)),
              sd = sigma,
              n = 10 ^ 4)
resultat_r = ar(x, AIC= FALSE, order.max = 2,method = "yule-walker")
resultat_f = fitYWAR2(x)

# Affichage des résultats :
data.frame(
  Explication = c("Vrai valeur", "Estimation F°", "Estimation R"),
  alpha1 = round(c(alpha1, resultat_f[1], resultat_r$ar[1]), 4),
  alpha2 = round(c(alpha2, resultat_f[2], resultat_r$ar[2]), 4),
  sigma = round(c(sigma, resultat_f[3], resultat_r$var.pred[1]), 4))
```

```
    Explication alpha1 alpha2  sigma
1   Vrai valeur 0.1000 -0.300 1.0000
2 Estimation F° 0.0904 -0.303 1.0219
3  Estimation R 0.0904 -0.303 1.0222
```