Mouvement

1. Mouvements

1.1. Coordonnées cartésiennes

1.2. Coordonnées cylindriques

- $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$
- $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$
- $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$

1.3. Coordonnées sphériques

- $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$
- $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + rsin(\theta)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$
- $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$

1.4. Coordonnées polaires

- $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$
- $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$
- $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$

1.5. Mouvements particuliers

2. Dynamique

2.1. Interactions et forces

Champ gravitationnel

$$\vec{g}(A) = -G\frac{m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

Force gravitationnelle:

$$\overrightarrow{F}(A) = m_A \cdot \vec{g}(A) = -G\frac{m_A m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

Champ électrique:

$$\overrightarrow{E}(A) = \frac{q\overrightarrow{e_r}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

Force électro-statique (*Loi de Coulomb*):

$$\overrightarrow{F}(A) = q_A \cdot \overrightarrow{E}(A) = \frac{q_A q\overrightarrow{e_r}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

Forces de frottement:

- Visqueux:

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$$

- Turbulents:

$$\vec{f} = -C_x\frac{\rho S}{2}v\vec{v}$$

Force de rappel d'un ressort (*Loi de Hooke*):

$$\overrightarrow{F} = -k(l - l_0)\overrightarrow{e_x}$$

Poussée d'Archimède:

$$\overrightarrow{\Pi} = -\rho V\vec{g}$$

2.2. Masse et quantité de mouvement

Centre de masse G:

$$\sum m_i\overrightarrow{GP_i} = \vec{0} \iff \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum m_i\overrightarrow{OP_i}$$

Quantité de mouvement:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

2.3. Principes fondamentaux de la dynamique

2.3.1. Lois de Newton

2.3.1.a. Principe d'inertie *(Première loi de Newton)*

Système en mouvement rectiligne uniforme $\iff \sum \overrightarrow{F} = \vec{0}$

2.3.1.b. Principe fondamental de la dynamique *(Seconde loi de Newton)*

$$\dot{p} = \sum \overrightarrow{F}$$

$$\implies \dot{m}\vec{v} + m\dot{\vec{v}} = \sum \overrightarrow{F}$$

Pour une masse constante:

$$m\vec{a} = \sum \overrightarrow{F}$$

2.3.1.c. Principe d'action/réaction *(Troisième loi de Newton)*

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$$

2.3.2. Trajectoire balistique

Référentiel: Terrestre
Système: Objet de masse m
Bilan: $\overrightarrow{P}$

La seconde loi de Newton donne:

$$m\vec{a} = \overrightarrow{P} \implies \vec{a} = \vec{g} = -g\overrightarrow{e_z}$$

$$\overset{\int}{\Longrightarrow} \vec{v} = (v_0 \cos\alpha)\overrightarrow{e_x} + (-gt + v_0 \sin\alpha)\overrightarrow{e_z}$$

$$\overset{\int}{\Longrightarrow} \overrightarrow{OM} = (v_0 t \cos\alpha)\overrightarrow{e_x} + (-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha)\overrightarrow{e_z}$$

2.3.3. Chute dans un fluide

TODO

2.3.4. Système masse-ressort

Référentiel: Terrestre
Système: Objet de masse m
Bilan: $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{F}$

La seconde loi de Newton donne

$$m\vec{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F}$$

Après avoir projeté sur $\overrightarrow{e_x}$

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0)$$

On pose $X := x - l_0$

On a alors

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

avec $\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$

Méthode 1

Donc

$$X \triangleq \alpha \cos\omega_0 t + \beta \sin\omega_0 t$$

Or $X(0) = \alpha$ d'où $\alpha = X_0$ et $\frac{dX}{dt} = \beta\omega_0$ d'où $\beta = \frac{v_0}{\omega_0}$

Ainsi

$$X = X_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin\omega_{0t}$$

□

Méthode 2

Donc

$$X \triangleq X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Or

$$X_0 = X_m \cos\varphi$$

et

$$v_0 = -X_m \omega_0 \sin\varphi$$

Donc

$$X_m = \sqrt{X_m^2} = \sqrt{X_m^2 \cos(\varphi)^2 + X_m^2 \sin(\varphi)^2} = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

Ainsi

$$X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

□

2.3.5. Pendule simple

2.3.6. Particule chargée dans un champ électrique uniforme

Force de Lorentz

- Contribution électrique

$$\overrightarrow{F_{élec}} = q\overrightarrow{E}$$

- Contribution magnétique

$$\overrightarrow{F_{mag}} = q\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

3. Aspects énergétiques

3.1. Travail d'une force

Travail infinitésimal

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \overrightarrow{F} \cdot \vec{v}\mathrm{d}t$$

d'où le travail global

$$W_{A \to B}(\overrightarrow{F}) = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

Cas d'une force constante

$$W_{A \to B}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

La puissance est définie par

$$\mathscr{P} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F} \cdot \vec{v}$$

3.2. Champs de forces conservatives

3.2.1. Travail du poids

$$W_{A \to B}(\overrightarrow{P}) = mg(\Delta_{A \to B} z)$$

3.2.2. Travail de la force électrostatique

$$W_{A \to B}(\overrightarrow{F_{élec}}) = \int_A^B q\overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\ell$$

$$= \int_A^B q\Big(-\frac{\partial U}{\partial x}\overrightarrow{e_x}\Big) \cdot \Big(\partial x\overrightarrow{e_x} + \partial y\overrightarrow{e_y} + \partial z\overrightarrow{e_z}\Big)$$

$$= q(\Delta_{A \to B} U)$$

3.2.3. Energie potentielle

$$\mathrm{d}Ep = -\delta W$$

$$\iff \Delta_{B\to A}Ep = -\int_A^B \overrightarrow{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

Autre définition d'une force:

$$\overrightarrow{F} = -\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{e_x}$$

3.3. Différentes formes d'énergie

3.3.1. Energie cinétiques

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2$$

3.3.2. Energie potentielle de pesanteur

$$\Delta_{A\to B}Epp = -W_{A\to B}(\overrightarrow{P}) = mg\Delta_{B\to A}z$$
$$\implies Epp = mgz$$

3.3.3. Energie potentielle électrique

$$Epc = qV$$

3.3.4. Energie élastique d'un ressort

$$\Delta_{A\to B}Epr = -W_{A\to B}(\overrightarrow{F_{ressort}})$$
$$= -\int_A^B -k(\Delta x)\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{k(\Delta x)^2}{2}\right]_{x_0}^{x}$$
$$= \frac{k(\Delta x)^2}{2}$$

3.3.5. Energie mécanique

$$Em = Ec + Epp$$

3.4. Théorèmes de l'énergie

3.4.1. Théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta Ec = \sum W(\overrightarrow{F})$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}Ec}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\overrightarrow{F})$$

Démo:

D'après le Principe Fondamental de la Dynamique:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{F}$$

Donc:

$$\vec{v} \cdot m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \cdot \sum \overrightarrow{F}$$

Par linéarité de $\sum$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, on trouve:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = \sum \overrightarrow{F} \cdot \vec{v}$$

On reconnait la définition de l'énergie cinétique et de la puissance:

$$\frac{\mathrm{d}Ec}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\overrightarrow{F})$$

On isole enfin Ec:

$$\mathrm{d}Ec = \sum \mathscr{P}(\overrightarrow{F}) \cdot \mathrm{d}t$$

$$\implies \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}Ec = \int_{t_i}^{t_f} \left(\sum \mathscr{P}(\overrightarrow{F})\mathrm{d}t\right) = \sum \int_{t_i}^{t_f} \mathscr{P}(\overrightarrow{F})\mathrm{d}t$$

$$\implies \Delta Ec = \sum W(\overrightarrow{F})$$

□