

# Mouvement

## 1. Mouvements

### 1.1. Coordonnées cartésiennes

### 1.2. Coordonnées cylindriques

- $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$
- $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$
- $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$

### 1.3. Coordonnées sphériques

- $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$
- $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
- $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$

### 1.4. Coordonnées polaires

- $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$
- $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
- $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$

### 1.5. Mouvements particuliers

## 2. Dynamique

### 2.1. Interactions et forces

Champ gravitationnel

$$\vec{g}(A) = -G \frac{m}{r^2} \vec{e}_r$$

Force gravitationnelle:

$$\vec{F}(A) = m_A \cdot \vec{g}(A) = -G \frac{m_A m}{r^2} \vec{e}_r$$

Champ électrique:

$$\vec{E}(A) = \frac{q \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$

Force électro-statique (*Loi de Coulomb*):

$$\vec{F}(A) = q_A \cdot \vec{E}(A) = \frac{q_A q \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$

Forces de frottement:

- Visqueux:

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v}$$

- Turbulents:

$$\vec{f} = -C_x \frac{\rho S}{2} v \vec{v}$$

Force de rappel d'un ressort (*Loi de Hooke*):

$$\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{e}_x$$

Poussée d'Archimède:

$$\vec{\Pi} = -\rho V \vec{g}$$

## 2.2. Masse et quantité de mouvement

Centre de masse  $G$ :

$$\sum m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0} \iff \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum m_i \overrightarrow{OP_i}$$

Quantité de mouvement:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

## 2.3. Principes fondamentaux de la dynamique

### 2.3.1. Lois de Newton

#### 2.3.1.a. Principe d'inertie (**Première loi de Newton**)

Système en mouvement rectiligne uniforme  $\iff \sum \vec{F} = \vec{0}$

#### 2.3.1.b. Principe fondamental de la dynamique (**Seconde loi de Newton**)

$$\begin{aligned}\dot{\vec{p}} &= \sum \vec{F} \\ \implies \dot{m}\vec{v} + m\dot{\vec{v}} &= \sum \vec{F}\end{aligned}$$

Pour une masse constante:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

#### 2.3.1.c. Principe d'action/réaction (**Troisième loi de Newton**)

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$$

### 2.3.2. Trajectoire balistique

Référentiel: Terrestre

Système: Objet de masse  $m$

Bilan:  $\vec{P}$

La seconde loi de Newton donne:

$$m\vec{a} = \vec{P} \implies \vec{a} = \vec{g} = -g\vec{e}_z$$

$$\stackrel{f}{\Rightarrow} \vec{v} = (v_0 \cos \alpha) \vec{e}_x + (-gt + v_0 \sin \alpha) \vec{e}_z$$

$$\stackrel{f}{\Rightarrow} \overrightarrow{OM} = (v_0 t \cos \alpha) \vec{e}_x + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha\right) \vec{e}_z$$

### 2.3.3. Chute dans un fluide

TODO

### 2.3.4. Système masse-ressort

Référentiel: Terrestre

Système: Objet de masse  $m$

Bilan:  $\vec{P}$ ,  $\vec{N}$ ,  $\vec{F}$

La seconde loi de Newton donne

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$$

Après avoir projeté sur  $\vec{e}_x$

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0)$$

On pose  $X := x - l_0$

On a alors

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

avec  $\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$

#### Méthode 1

Donc

$$X \triangleq \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t$$

Or  $X(0) = \alpha$  d'où  $\alpha = X_0$  et  $\frac{dX}{dt} = \beta \omega_0$  d'où  $\beta = \frac{v_0}{\omega_0}$

Ainsi

$$X = X_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

□

## Méthode 2

Donc

$$X \triangleq X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Or

$$X_0 = X_m \cos \varphi$$

et

$$v_0 = -X_m \omega_0 \sin \varphi$$

Donc

$$X_m = \sqrt{X_m^2} = \sqrt{X_m^2 \cos^2(\varphi) + X_m^2 \sin^2(\varphi)} = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

Ainsi

$$X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

□

## 2.3.5. Pendule simple

## 2.3.6. Particule chargée dans un champ électrique uniforme

Force de Lorentz

- Contribution électrique

$$\overrightarrow{F_{elec}} = q\overrightarrow{E}$$

- Contribution magnétique

$$\overrightarrow{F_{mag}} = q\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

# 3. Aspects énergétiques

## 3.1. Travail d'une force

Travail infinitésimal

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

d'où le travail global

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Cas d'une force constante

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

La puissance est définie par

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

## 3.2. Champs de forces conservatives

### 3.2.1. Travail du poids

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = mg(\Delta_{A \rightarrow B} z)$$

### 3.2.2. Travail de la force électrostatique

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{elec}) &= \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_A^B q \left( -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x \right) \cdot \left( \partial x \vec{e}_x + \partial y \vec{e}_y + \partial z \vec{e}_z \right) \\ &= q(\Delta_{A \rightarrow B} U) \end{aligned}$$

### 3.2.3. Energie potentielle

$$dEp = -\delta W$$

$$\Longleftrightarrow \Delta_{B \rightarrow A} E_p = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Autre définition d'une force:

$$\vec{F} = - \frac{dE_p}{dx} \vec{e}_x$$

## 3.3. Différentes formes d'énergie

### 3.3.1. Energie cinétiques

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

### 3.3.2. Energie potentielle de pesanteur

$$\begin{aligned} \Delta_{A \rightarrow B} E_{pp} &= -W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = mg \Delta_{B \rightarrow A} z \\ \implies E_{pp} &= mgz \end{aligned}$$

### 3.3.3. Energie potentielle électrique

$$E_{pc} = qV$$

### 3.3.4. Energie élastique d'un ressort

$$\begin{aligned} \Delta_{A \rightarrow B} E_{pr} &= -W_{A \rightarrow B}(\overrightarrow{F_{ressort}}) \\ &= - \int_A^B -k(\Delta x) dx \\ &= \left[ \frac{k(\Delta x)^2}{2} \right]_{x_0}^x \\ &= \frac{k(\Delta x)^2}{2} \end{aligned}$$

### 3.3.5. Energie mécanique

$$E_m = E_c + E_{pp}$$

## 3.4. Théorèmes de l'énergie

### 3.4.1. Théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F})$$
$$\Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F})$$

Démo:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}$$
$$\Rightarrow \vec{v} \cdot m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot \sum \vec{F}$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$
$$\Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F})$$