Mouvement

1. Mouvements

- $ullet \left\langle ec{u},ec{v}
 ight
 angle = ec{u}\cdotec{v} riangleq \|ec{u}\|\cdot\|ec{v}\|\cdot\cos(ec{u},ec{v})$
- $ullet \forall i (\|\overrightarrow{e_i}\| = 1)$
- $ullet rac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} riangleq \dot{y}$
- $ullet rac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} riangleq \ddot{y}$

1.1. Coordonnées cartésiennes

1.2. Coordonnées cylindriques

- $oldsymbol{OM} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{re_r} + \overrightarrow{ze_z}$
- $oldsymbol{ec{v}} = \dot{ec{r}}\overrightarrow{e_r} + r\dot{ heta}\overrightarrow{e_ heta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$
- $oldsymbol{ec{a}} = (\ddot{r} r\dot{ heta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{ heta} + r\ddot{ heta})\overrightarrow{e_ heta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$

1.3. Coordonnées sphériques

- $lacksquare \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$
- $ullet ec v = \dot r \overrightarrow{e_r} + r \dot heta \overrightarrow{e_ heta} + r sin(heta) \dot arphi \overrightarrow{e_arphi}$
- $oldsymbol{ec{a}}=\dot{ec{v}}$

1.4. Coordonnées polaires

- $lacksquare \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$
- $ullet ec{v}=\dot{r}\overrightarrow{e_r}+r\dot{ heta}\overrightarrow{e_ heta}$
- $ullet \ ec a = (\ddot r r \dot heta^2) \overrightarrow {e_r} + (2 \dot r \dot heta + r \ddot heta) \overrightarrow {e_ heta}$

1.5. Mouvements particuliers

2. Dynamique

2.1. Interactions et forces

Champ gravitationnel

$$ec{g}(A) riangleq -Grac{m}{r^2} \overrightarrow{e_r}$$

Force gravitationnelle:

$$\overrightarrow{F}(A) riangleq m_A \cdot ec{g}(A) = -G rac{m_A m}{r^2} \overrightarrow{e_r}$$

Champ électrique:

$$\overrightarrow{E}(A) riangleq rac{q\overrightarrow{e_r}}{4\piarepsilon_0\cdot r^2}$$

Force électro-statique (Loi de Coulomb):

$$\overrightarrow{F}(A) riangleq q_A \cdot \overrightarrow{E}(A) = rac{q_A q \overrightarrow{e_r}}{4\pi arepsilon_0 \cdot r^2}$$

Forces de frottement:

Visqueux:

$$ec{f} riangleq -lpha ec{v}$$

• Turbulents:

$$ec{f} riangleq -C_x rac{
ho S}{2} v ec{v}$$

Force de rappel d'un ressort (Loi de Hooke):

$$\overrightarrow{F} riangleq -k(l-l_0)\overrightarrow{e_x}$$

Poussée d'Archimède:

$$\overrightarrow{\Pi} \triangleq -
ho V \overrightarrow{g}$$

2.2. Masse et quantité de mouvement

Centre de masse G:

$$\sum m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0} \iff \overrightarrow{OG} riangleq rac{1}{m} \sum m_i \overrightarrow{OP_i}$$

$$ec{p} riangleq m ec{v}$$

2.3. Principes fondamentaux de la dynamique

2.3.1. Lois de Newton

2.3.1.a. Principe d'inertie (Première loi de Newton)

Système en mouvement rectiligne uniforme $\iff \sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$

2.3.1.b. Principe fondamental de la dynamique (Seconde loi de Newton)

$$egin{aligned} \dot{p} &= \sum \overrightarrow{F} \ \ \implies \dot{m} ec{v} + m \dot{ec{v}} &= \sum \overrightarrow{F} \end{aligned}$$

Pour une masse constante:

$$mec{a}=\sum \overrightarrow{F}$$

2.3.1.c. Principe d'action/réaction (Troisième loi de Newton)

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$$

2.3.2. Trajectoire balistique

Référentiel: Terrestre

Système: Objet de masse m

Bilan: \overrightarrow{P}

La seconde loi de Newton donne:

$$egin{aligned} mec{a} = \overrightarrow{P} &\Longrightarrow ec{a} = ec{g} = -g \overrightarrow{e_z} \ &\Longrightarrow ec{v} = (v_0 \cos lpha) \overrightarrow{e_x} + (-gt + v_0 \sin lpha) \overrightarrow{e_z} \ &\Longrightarrow \overrightarrow{OM} = (v_0 t \cos lpha) \overrightarrow{e_x} + (-rac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin lpha) \overrightarrow{e_z} \end{aligned}$$

2.3.3. Chute dans un fluide

2.3.4. Système masse-ressort

Référentiel: Terrestre

Système: Objet de masse m

Bilan: \overrightarrow{P} , \overrightarrow{N} , \overrightarrow{F}

La seconde loi de Newton donne:

$$mec{a}=\overrightarrow{P}+\overrightarrow{N}+\overrightarrow{F}$$

Après avoir projeté sur $\overrightarrow{e_x}$:

$$m\ddot{x}=-k(x-l_0)$$

On pose $X := x - l_0$

On a alors:

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

avec
$$\omega_0 := \sqrt{rac{k}{m}}$$

Méthode 1

donc

$$X \triangleq \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t$$

Or
$$X(0)=lpha$$
 d'où $lpha=X_0$ et $rac{dX}{dt}=eta\omega_0$ d'où $eta=rac{v_0}{\omega_0}$

Ainsi:

$$X=X_0\cos\omega_0 t+rac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_{0t}$$

Méthode 2

donc:

$$X \triangleq X_m \cos(\omega_0 t + arphi)$$

Or:

$$X_0 = X_m \cos \varphi$$

et
$$v_0 = -X_m \omega_0 \sin arphi$$

Donc:

$$X_m=\sqrt{X_m^2}=\sqrt{X_m^2\cos(arphi)^2+X_m^2\sin(arphi)^2}=\sqrt{X_0^2+\left(rac{v_0}{\omega_0}
ight)^2}$$

Ainsi:

$$X = \sqrt{X_0^2 + \left(rac{v_0}{\omega_0}
ight)^2}\cos(\omega_0 t + arphi)$$

2.3.5. Pendule simple

2.3.6. Particule chargée dans un champ électrique uniforme

Force de Lorentz:

• Contribution électrique:

$$\overrightarrow{F_{elec}} riangleq q\overrightarrow{E}$$

• Contribution magnétique:

$$\overrightarrow{F_{mag}} riangleq q ec{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

3. Aspects énergétiques

3.1. Travail d'une force

Travail infinitésimal:

$$\delta W riangleq \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d} ec{\ell} = \overrightarrow{F} \cdot ec{v} \cdot \mathrm{d} t$$

d'où le travail global:

$$W_{A o B}(\overrightarrow{F}) riangleq\int_A^B \overrightarrow{F}\cdot \mathrm{d}ec{\ell}$$

Cas d'une force constante:

$$W_{A o B}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}\cdot \overrightarrow{AB}$$

Puissance:

$$\mathscr{P} riangleq rac{\delta W}{\mathrm{d}t} = \stackrel{
ightarrow}{F} \!\cdot ec{v}$$

3.2. Champs de forces conservatives

3.2.1. Travail du poids

$$W_{A o B}(\stackrel{
ightarrow}{P})=mg(\Delta_{A o B}z)$$

3.2.2. Travail de la force électrostatique

$$egin{aligned} W_{\Gamma}(\overrightarrow{F_{\ell lec}}) &= \int_{\Gamma} q \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\ell \ \ &= \int_{\Gamma} q \Big(-rac{\partial U}{\partial x} \overrightarrow{e_x} \Big) \cdot \Big(\partial x \overrightarrow{e_x} + \partial y \overrightarrow{e_y} + \partial z \overrightarrow{e_z} \Big) \ &= q(\Delta_{A
ightarrow B} U) \end{aligned}$$