Mouvement

1. Mouvements

- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} \triangleq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- $\forall i (\|\overrightarrow{e_i}\| = 1)$
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \triangleq \dot{y}$
- $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \triangleq \ddot{y}$

1.1. Coordonnées cartésiennes

1.2. Coordonnées cylindriques

- $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$
- $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$
- $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$

1.3. Coordonnées sphériques

- $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$
- $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + rsin(\theta)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$
- $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$

1.4. Coordonnées polaires

- $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$
- $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$
- $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$

1.5. Mouvements particuliers

2. Dynamique

2.1. Interactions et forces

Champ gravitationnel

$$\vec{g}(A) \triangleq -G\frac{m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

Force gravitationnelle:

$$\overrightarrow{F}(A) \triangleq m_A \cdot \vec{g}(A) = -G\frac{m_A m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

Champ électrique:

$$\overrightarrow{E}(A) \triangleq \frac{q\overrightarrow{e_r}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

Force électro-statique (*Loi de Coulomb*):

$$\overrightarrow{F}(A) \triangleq q_A \cdot \overrightarrow{E}(A) = \frac{q_A q\overrightarrow{e_r}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

Forces de frottement:

- Visqueux:

$$\vec{f} \triangleq -\alpha\vec{v}$$

- Turbulents:

$$\vec{f} \triangleq -C_x\frac{\rho S}{2}v\vec{v}$$

Force de rappel d'un ressort (*Loi de Hooke*):

$$\overrightarrow{F} \triangleq -k(l - l_0)\overrightarrow{e_x}$$

Poussée d'Archimède:

$$\overrightarrow{\Pi} \triangleq -\rho V\vec{g}$$

2.2. Masse et quantité de mouvement

Centre de masse G:

$$\sum m_i\overrightarrow{GP_i} = \vec{0} \iff \overrightarrow{OG} \triangleq \frac{1}{m}\sum m_i\overrightarrow{OP_i}$$

Quantité de mouvement:

$$\vec{p} \triangleq m\vec{v}$$

2.3. Principes fondamentaux de la dynamique

2.3.1. Lois de Newton

2.3.1.a. Principe d'inertie ***(Première loi de Newton)***

Système en mouvement rectiligne uniforme $\iff \sum \overrightarrow{F} = \vec{0}$

2.3.1.b. Principe fondamental de la dynamique ***(Seconde loi de Newton)***

$$\dot{p} = \sum \overrightarrow{F}$$

$$\implies \dot{m}\vec{v} + m\dot{\vec{v}} = \sum \overrightarrow{F}$$

Pour une masse constante:

$$m\vec{a} = \sum \overrightarrow{F}$$

2.3.1.c. Principe d'action/réaction ***(Troisième loi de Newton)***

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$$

2.3.2. Trajectoire balistique

Référentiel: Terrestre
Système: Objet de masse m
Bilan: $\overrightarrow{P}$

La seconde loi de Newton donne:

$$m\vec{a} = \overrightarrow{P} \implies \vec{a} = \vec{g} = -g\overrightarrow{e_z}$$

$$\overset{\int}{\implies} \vec{v} = (v_0 \cos\alpha)\overrightarrow{e_x} + (-gt + v_0 \sin\alpha)\overrightarrow{e_z}$$

$$\overset{\int}{\implies} \overrightarrow{OM} = (v_0 t \cos\alpha)\overrightarrow{e_x} + (-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha)\overrightarrow{e_z}$$

2.3.3. Chute dans un fluide

2.3.4. Système masse-ressort

Référentiel: Terrestre
Système: Objet de masse m
Bilan: $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{F}$

La seconde loi de Newton donne:

$$m\vec{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F}$$

Après avoir projeté sur $\overrightarrow{e_x}$:

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0)$$

On pose $X := x - l_0$

On a alors:

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

avec $\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$

Méthode 1

donc

$$X \triangleq \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t$$

Or $X(0) = \alpha$ d'où $\alpha = X_0$ et $\frac{dX}{dt} = \beta\omega_0$ d'où $\beta = \frac{v_0}{\omega_0}$

Ainsi:

$$X = X_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_{0t}$$

□

Méthode 2

donc:

$$X \triangleq X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Or:

$$X_0 = X_m \cos \varphi$$

et $v_0 = -X_m \omega_0 \sin \varphi$

Donc:

$$X_m = \sqrt{X_m^2} = \sqrt{X_m^2 \cos(\varphi)^2 + X_m^2 \sin(\varphi)^2} = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

Ainsi:

$$X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

□

2.3.5. Pendule simple

2.3.6. Particule chargée dans un champ électrique uniforme

Force de Lorentz:

- Contribution électrique:

$$\overrightarrow{F_{élec}} \triangleq q\overrightarrow{E}$$

- Contribution magnétique:

$$\overrightarrow{F_{mag}} \triangleq q\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

3. Aspects énergétiques

3.1. Travail d'une force

Travail infinitésimal:

$$\delta W \triangleq \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \overrightarrow{F} \cdot \vec{v} \cdot \mathrm{d}t$$

d'où le travail global:

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{F}) \triangleq \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

Cas d'une force constante:

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Puissance:

$$\mathscr{P} \triangleq \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F} \cdot \vec{v}$$

3.2. Champs de forces conservatives

3.2.1. Travail du poids

$$W_{A \to B}(\overrightarrow{P}) = mg(\Delta_{A \to B} z)$$

3.2.2. Travail de la force électrostatique

$$W_\Gamma(\overrightarrow{F_{élec}}) = \int_\Gamma q\overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\ell$$

$$= \int_\Gamma q\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\overrightarrow{e_x}\right) \cdot \left(\partial x\overrightarrow{e_x} + \partial y\overrightarrow{e_y} + \partial z\overrightarrow{e_z}\right)$$

$$= q(\Delta_{A \to B} U)$$