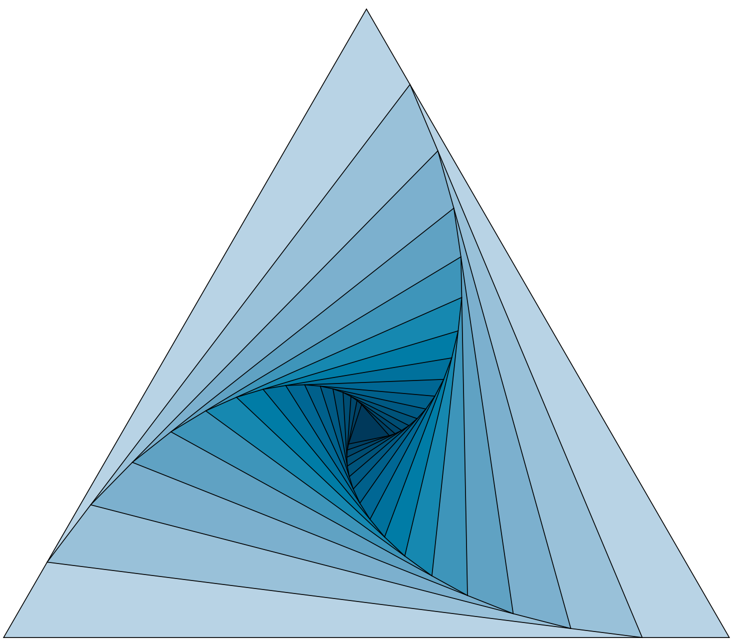
伯克利数学问题

向禹 ◎ 编著

第一版



哈尔滨工业大学出版社

伯克利数学问题

向禹　编著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

前言

从 1977 年开始，加州大学伯克利数学系分校推行笔试考试，作为博士学位的一项重要的考核指标，这项考试替代了一些列标准的资格考试. 考试的目的是决定博士一年级的学生是否已经很好地掌握了基础数学知识，在博士生项目中有合适的机会取得成功.

历史的原因，每次考试只有一半的考生可以通过，并且学生有三次考试机会. 从一开始，这项考试就是在博士学位获取过程中需要客服的重大障碍，因此，它也是在伯克利的博士项目中取得成功的一个最基本的衡量要求. 即便学生有三次机会，大多数人都觉得完成此要求最合适的时间是在第一个月，而不是在学期中或者学期末. 本书就是在这个前提下构思的，目的也是宣传考试的内容，并且帮助本科生在应对考试内容的时候做好准备.

这项考试现在现在一年有两次，在每个学期的第二周进行. 在两天内，每天 6 个小时的时间来完成 9 个题目的笔试任务（在 1998 年以前是 10 题）. 学生从 9 个题里面选 6 个（1988 年以前是 10 选 7）. 大多数考试内容都包含了分析和代数，这是数学系本科生应该良好训练的部分.

以前伯克利在季度制度的时候，考试是一年三次：春，夏和秋. 从 1986 年起，考试就只有一年两次了，分别在一月和二月.

从 1981 年秋季第一次考试起，制度是：允许考两次，每次 6 个小时，总共 14/20 题. 从 1982 年冬季到 1988 年春季，制度是：允许考两次，每次考试 8 个小时，共 14/20 题. 从 1988 年秋季看似，制度是：允许考三次，每次考试 6 个小时，共 12/18 题. 在所有的情形中，考试必须要在博士项目开始的 13 个月内通过.

这本书汇编了超过 1000 道在过去几十年中出现在预备考试中的题，并且现在已经组成了一个非常值得学习的习题集，并且附上了相应的答案. 题目是按学科分类，在各科目内题目难度都是递增的. 当然有时候一个题目可能涉及好几个学科，分类并不容易. 有的题目从现在的角度来看，可能难度比较小，但是绝大部分题目都是相当具有参考价值的，且不少题已经被国内的优秀书籍所收录，相信本书对读者会大有裨益.

本书用 LaTeX 手打，作者翻译水平亦有限，个中错误在所难免，请读者不吝指正.

目录

第一部分

问题

第 1 章

实分析

1.1 基础微积分

1.1.1 证明：$(\cos\theta)^p \leqslant \cos(p\theta)$ 对 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, 0 < p < 1$ 成立

1.1.2 设 $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ 连续可微，且 $f(0)=0$. 证明：

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| \leqslant \sqrt{\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x}.$$

1.1.3 设 $f(x)$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 上的实值函数，满足 $f(1)=1$ 且

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+f^2(x)}.$$

证明：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

存在，且小于 $1+\pi/4$.

1.1.4 设 $f,g:[0,1] \to [0,+\infty)$ 是连续函数，且满足

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x).$$

证明：存在 $t \in [0,1]$ 使得 $f^2(t)+2f(t) = g^2(t)+3g(t)$.

1.1.5 对实轴上的实值函数 f，定义函数 $\Delta f = f(x+1)-f(x)$. 对 $n \geqslant 2$，归纳定义 $\Delta^n f = \Delta(\Delta^{n-1} f)$. 证明：$\Delta^n f = 0$ 当且仅当 f 具有形式 $f(x) = a_0(x)+a_1(x)x+\cdots+a_{n-1}(x)x^{n-1}$，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 均是周期为 1 的周期函数.

1.1.6 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个非常值的函数，满足 $x \leqslant y$ 时 $f(x) \leqslant f(y)$. 证明：存在 $a\in\mathbb{R}$ 和 $c>0$，使得对任意 $x\in[0,1]$ 有 $f(a+x)-f(a-x) \geqslant cx$.

1.1.7 证明或否定（给反例）以下每一个论述：

1. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{t\to a} g(t)=b \quad \text{且} \quad \lim_{t\to b} f(t)=c.$$

则

$$\lim_{t\to a} f\big(g(t)\big)=c.$$

2. 如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数，U 是 $\mathbb{R}$ 中的一个开集，则 $f(U)$ 也是 $\mathbb{R}$ 中的开集.

3. 设 f 是区间 $(-1,1)$ 内的 C^∞ 函数. 假定对任意 $n\geqslant 1$ 和 $x\in(-1,1)$，均有 $|f^{(n)}|\leqslant 1$，则 f 是实解析的：即它在此区间内任意一点的邻域内都有收敛的幂级数展开式.

1.1.8 证明：对任意 $x>0$ 有 $\sin x > x - x^3/6$.

1.1.9 设

$$y(h)=1-2\sin^2(2\pi h), \quad f(y)=\frac{2}{1+\sqrt{1-y}}.$$

证明论断：

$$f\big(y(h)\big)=2-4\sqrt{2}\pi|h|+O(h^2), \quad h\to 0,$$

这里

$$\limsup_{h\to 0}\frac{O(h^2)}{h^2}<+\infty.$$

1.1.10 *1.* 证明：不存在从闭区间 $[0,1]$ 到开区间 $(0,1)$ 的连续映射.

2. 给出一个从开区间 $(0,1)$ 到闭区间 $[0,1]$ 的满射.

3. 证明：第 *2* 部分中的映射不可能是双射.

1.1.11 设 f 是一个二次可微的实值函数，满足对任意 $x\in[a,b]$ 均有 $f''(x)>0$. 求出所有的 $c\in[a,b]$，使得由曲线 $y=f(x)$ 及其在点 $\big(c,f(c)\big)$ 处的切线，以及直线 $x=a, x=b$ 所围成的区域面积最小.

1.1.12 求出所有内接于半轴长分别为 a 和 b 的椭圆的三角形面积的最大值，并描述面积最大的三角形.

注: 也参见问题 **??**.

1.1.13 设 f 是 $[0,+\infty)$ 上的连续实值函数. 设 A 表示那些可以写成 $a=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ 的实数 a 的集合，这里 (x_n) 是某个 $[0,+\infty)$ 上的序列，且满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$. 证明：如果 A 包含数 a 和 b，则 A 包含以 a,b 为端点的整个区间.

1.1.14 证明：对每个充分小的 $\varepsilon>0$，方程

$$x\left(1+\ln\left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{x}}\right)\right)=1, \quad x>0, \quad \varepsilon>0$$

恰有两个解. 设 $x(\varepsilon)$ 是其中较小的一个解，证明：

1. 当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，$x(\varepsilon) \to 0$；
2. 对任意 $x > 0$，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，$\varepsilon^{-s}x(\varepsilon) \to +\infty$.

1.1.15 设 $f(x)$ 是一个实系数多项式，a 是一个实数，且 $f(a) \neq 0$. 证明：存在一个实多项式 $g(x)$，使得如果我们定义 $p(x) = f(x)g(x)$，则我们有 $p(a) = 1, p'(a) = 0$，且 $p''(a) = 0$.

1.1.16 设 $p(z)$ 是一个非常值的实系数多项式，满足对某个实数 a 有 $p(a) \neq 0$，当 $p'(a) = p''(a) = 0$. 证明：方程 $p(z) = 0$ 有一个非实数的根.

1.1.17 设 f 是实轴上的 C^2 函数. 假定 f 有界，且二阶导数也有界. 令

$$A = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|, \quad B = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|.$$

证明：

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{AB}.$$

1.1.18 求出所有满足 $0 < a < b$，且 $a^b = b^a$ 的整数对.

1.1.19 对怎样的正数 a, b，其中 $a > 1$，关于 x 的方程 $\log_a x = x^b$ 有正数解.

1.1.20 π^3 和 3^π 哪一个大?

1.1.21 对怎样的数 $a \in (1, +\infty)$，使得对任意 $x \in (1, +\infty)$ 均有 $x^a \leqslant a^x$?

1.1.22 证明：正数 t 能满足

$$\mathrm{e}^x > x^t, \quad \forall x > 0$$

当且仅当 $t < \mathrm{e}$.

1.1.23 设 $f(x)$ 定义在 $[-1, 1]$ 上，且 $f'''(x)$ 连续. 证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right)\right) - 2f'(0)\right)$$

收敛.

1.1.24 如果 f 是一个开区间上的 C^2 函数，证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

1.1.25 1. 对 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$，证明：

$$\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta.$$

2. 根据第 1 部分，或者通过其他任何方法，证明：如果 $\lambda < 1$，则

$$\lim_{R\to+\infty} R^\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

1.1.26 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，假定 $\mathbb{R}$ 包含一个可数的无穷子集 S，使得如果 p,q 不在 S 中，则

$$\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

证明：f 恒为 0.

1.1.27 设函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 满足

- f 是 C^1 类；
- $f(0)=f(1)=0$；
- f' 是非递增的（即 f 是凹的）.

证明：f 的图像的弧长不超过 3.

1.1.28 设 f 是 $[0,+\infty)$ 上的实值 C^1 函数，满足反常积分 $\int_1^{+\infty}|f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛. 证明：无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛当且仅当积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

1.1.29 设 E 是由所有满足

$$|u(x)-u(y)|\leqslant|x-y|,\quad 0\leqslant x,y\leqslant 1,\quad u(0)=0$$

的连续实值函数 $u:[0,1]\to\mathbb{R}$ 构成的集合. 设 $\varphi:E\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\varphi(u)=\int_0^1\left(u^2(x)-u(x)\right)\mathrm{d}x.$$

证明：φ 在 E 中的某个元素取到其最大值.

1.1.30 设 S 是 $[0,1]$ 上所有满足 $f(0)=0$，且

$$\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\leqslant 1$$

的 C^1 函数 f 构成的集合. 定义

$$J(f)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明：函数 J 在 S 上有界，并求出其上确界. 是否存在函数 $f_0\in S$ 使得 J 在 f_0 取得其最大值? 如果存在，f_0 是什么?

1.1.31 设 f 是 $[0,1]$ 上的一个实值的连续、非负的函数，且满足

$$f^2(t)\leqslant 1+2\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$$

对 $t\in[0,1]$ 成立. 证明：$f(t)\leqslant 1+t,\ t\in[0,1]$.

1.1.32 设 φ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个 C^1 函数，满足当 $x\to+\infty$ 时，

$$\varphi(x)\to a\quad 且\quad \varphi'(x)\to b.$$

证明或者给出反例：b 一定为 0.

1.1.33 证明：

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-k\cos^2 x}},\quad 0\leqslant k<1$$

是 k 的递增函数.

1.1.34 给定

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi},$$

求出 $f'(t)$ 的直接表达式,这里

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x,\quad t>0.$$

1.1.35 定义

$$F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{t^2+xt}\,\mathrm{d}t.$$

计算 $F'(0)$.

1.1.36 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个非零的 C^∞ 函数,满足对任意 x,y 有

$$f(x)f(y)=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

且当 $|x|\to+\infty$ 时, $f(x)\to 0$.

1. 证明：f 是一个偶函数,且 $f(0)=1$.
2. 证明：f 满足微分方程 $f'(x)=f''(0)xf(x)$,并求出满足给定条件的一般函数.

1.1.37 设 S 是由所有在 $[0,1]$ 上满足在有理点处取有理数值的连续实值函数 $f(x)$ 构成的集合, 证明：S 是不可数的.

1.2 极限与连续

1.2.1 设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上有界的,连续的,实值函数. 在 $\mathbb{R}$ 上定义函数 g：

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x,t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

证明：g 是连续的.

1.2.2 设 f 将紧区间 I 映到自己,且满足

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|,\quad \forall x,y\in I,x\neq y.$$

是否存在常数 $M<1$,使得对 $\forall x,y\in I$,有

$$|f(x,y)|\leqslant M|x-y|.$$

1.2.3 设 $[0,1]$ 上的实值函数 f 满足以下两条性质：

- 如果 $[a,b]\subset[0,1]$,则 $f([a,b])$ 包含以 $f(a)$ 和 $f(b)$ 为端点的区间（即 f 具有介值性）.
- 对每个 $c\in\mathbb{R}$,集合 $f^{-1}(c)$ 是闭的.

证明：f 是连续的.

1.2.4 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 一致连续，且 $f(0)=0$. 证明：存在正数 B 使得 $|f(x)|\leqslant 1+B|x|$ 对任意 x 成立.

1.2.5 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上以 1 为周期的周期函数,即 $f(x+1)=f(x)$. 证明：

1. 函数 f 是有上下界的,且能取到其最大值和最小值.
2. 函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.
3. 存在实数 x_0,使得

$$f(x_0+\pi)=f(x_0).$$

1.2.6 设 $h:[0,1)\to\mathbb{R}$ 是定义在半开半闭区间 $[0,1)$ 上的函数. 证明：如果 h 是一致连续的,则存在唯一的连续函数 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$,使得 $g(x)=h(x),\forall x\in[0,1)$.

1.2.7 设 f 是 $[0,+\infty)$ 上的实值连续函数,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在（有限）. 证明：f 是一致连续的.

1.2.8 证明或给出反例：如果函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 的每一点均存在左右极限,则 f 的不连续点的集合是至多可数的.

1.2.9 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(x)\leqslant f(y),\forall x\leqslant y$. 证明：$f$ 的不连续点的集合是有限的或无限可数的.

1.2.10 函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 称为是上半连续的是指：如果给定 $x\in[0,1]$ 和 $\varepsilon>0$,存在一个 $\delta>0$,使得当 $|y-x|<\delta$ 时,$f(y)<f(x)+\varepsilon$. 证明：$[0,1]$ 上的一个上半连续的函数 f 是有上界的,并且在某个 $p\in[0,1]$ 处取到其最大值.

1.2.11 证明：一个从 $\mathbb{R}$ 映到 $\mathbb{R}$ 的函数如果将开集映为开集,则它必定是单调的.

1.2.12 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数,且满足 $|f(x)-f(y)|\geqslant|x-y|$ 对任意 x,y 成立. 证明：f 的值域就是 $\mathbb{R}$.

注: 也参见问题 **??**.

1.2.13 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数,求下列极限：

1.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.2.14 设函数 f 将 $[0,1]$ 映到 $[0,1]$，其图像

$$G_f=\{(x,f(x))|x\in[0,1]\}$$

是单位正方形的闭子集. 证明：f 是连续的.

1.2.15 设 f 是定义在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的实值连续函数，设 $[0,1]$ 上的函数 g 定义为

$$g(x)=\max\{f(x,y)|y\in[0,1]\}.$$

证明：g 是连续的.

1.2.16 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在有界集上是有界的，且满足当 K 为紧集时，$f^{-1}(K)$ 是闭集. 证明：f 是连续的.

1.3 数列、级数与无穷乘积

1.3.1 设 $A_{\geqslant}A_2\geqslant\cdots\geqslant A_k\geqslant 0$，计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(A_1^n+A_2^n+\cdots+A_k^n\right)^{1/n}.$$

注: 也参见问题 **??**.

1.3.2 计算

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{1/n}.$$

1.3.3 设 $x_0=1$，且

$$x_{n+1}=\frac{3+2x_n}{3+x_n},\quad n\geqslant 0.$$

证明：$x_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

1.3.4 定义实数列 (x_n)：

$$x_0=1,\quad x_{n+1}=\frac{1}{2+x_n},n\geqslant 0.$$

证明：(x_n) 收敛，并求其极限.

1.3.5 设 $\alpha\in(0,1)$. 证明：任意满足递推关系

$$x_{n+1}=\alpha x_n+(1-\alpha)x_{n-1}$$

的实数列 (x_n) 闭存在极限，并用 α,x_0,x_1 求出此极限的一个表达式.

1.3.6 设 k 是一个正整数. 求出所有的实数 c，使得每个满足递推式

$$\frac{1}{2}(x_{n+1}+x_{n-1})=c_n$$

的实数列 (x_n) 均以 k 为周期（即 $x_{n+k}=x_n, \forall n$）.

1.3.7 设 a 是一个正实数. 定义数列 (x_n)：

$$x_0=0, \quad x_{n+1}=a+x_n^2, n\geqslant 0.$$

求出关于 a 的充分必要条件，使得极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在（有限）.

1.3.8 设 (x_n) 是实数列，且

$$\lim_{n\to\infty}(2x_{n+1}-x_n)=x.$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$.

1.3.9 设 a 和 x_0 都是正数，递推定义数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$：

$$x_n=\frac{1}{2}\Big(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\Big).$$

证明此数列收敛，并求其极限.

1.3.10 设实数 $x_1\in(0,1)$，递推定义数列 $x_{n+1}=x_n-x_n^{n+1}$. 证明：$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n>0$.

1.3.11 设 $f(x)=1/4+x-x^2$. 对任意实数 x，定义数列 (x_n)：$x_0=x, x_{n+1}=f(x_n)$. 如果此数列收敛，用 x_∞ 表示其极限.

1. 对 $x=0$，证明此数列是有界且非递减的，并求出 $x_\infty=\lambda$.
2. 求出所有的 $x\in\mathbb{R}$，使得 $x_\infty=\lambda$.

1.3.12 Fibonacci 数列 $f_1, f_2, \cdots$ 递推定义为：$f_1=1, f_2=2$，且 $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}, n\geqslant 2$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}$$

存在，并求出此极限.

注: 也参见问题 **??**.

1.3.13 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big)=\ln 2.$$

1.3.14 对正整数 n，设 H_n 表示调和级数的第 n 个部分和：

$$H_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$

设整数 $k>1$，证明：

$$\ln k-\frac{C}{n}<H_{nk}-H_n<\ln k,\quad (n=1,2,\cdots),$$

这里 $\ln k$ 是 k 的自然对数，而 C 是一个常数.

1.3.15 设 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 是一列非负实数，且满足

$$x_{n+1}\leqslant x_n+\frac{1}{n^2},\forall n\geqslant 1.$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

1.3.16 设 (a_n) 和 (ε_n) 都是正实数列. 假定 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$，且存在常数 $k\in(0,1)$，使得 $a_{n+1}\leqslant ka_n+\varepsilon_n$ 对所有 n 成立，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

1.3.17 证明或否定（通过给反例）以下断言：每个无穷实数列 $x_1,x_2,\cdots$ 都有一个非递减或非递增的子列.

1.3.18 设 $b_1,b_2,\cdots$ 是正实数，且满足

$$\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty\quad 且\ \lim_{n\to\infty}(b_n/b_{n+1})=1.$$

还假定 $b_1<b_2<b_3<\cdots$. 证明：比值 $(b_m/b_n)_{1\leqslant n<m}$ 的集合在 $(1,+\infty)$ 内稠密.

1.3.19 以下哪个级数是收敛的?

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!(3n)!}{n!(4n)!}.$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}.$$

1.3.20 设 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 是正数.

1. 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$ 意味着 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}<+\infty$.

2. 证明以上命题的逆命题是错的.

1.3.21 对每个 $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$，考虑级数

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{a^n}{n^b\ln^c n}.$$

求出 (a,b,c) 的取值，使得此级数

1. 绝对收敛；

2. 收敛但不绝对收敛；

3. 发散.

1.3.22 对怎样的实数 x，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^x}$$

是收敛的?

1.3.23 对怎样的实数 a，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^a$$

是收敛的?

1.3.24 设 A 表示十进制数码中不含 9 的正整数的集合，证明：

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a} < +\infty,$$

也就是说，A 定义了调和级数的一个收敛的子级数.

1.3.25 设 $a_1, a_2, \cdots$ 是正数，且满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

证明：存在正数 $c_1, c_2, \cdots$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty \quad 且 \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n < +\infty.$$

1.3.26 计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{2^2} \cos\frac{\pi}{2^3} \cdots \cos\frac{\pi}{2^n}.$$

1.4 微分学

1.4.1 设 $f(x) = x\log(1+x^{-1}), 0 < x < +\infty$.

1. 证明：f 是严格单调递增的.
2. 计算当 $x \to 0$ 和 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 的极限.

1.4.2 设 $f(x), 0 \leqslant x < +\infty$ 可微，且 $f(0) = 0$，$f'(x)$ 在 $x \geqslant 0$ 时是单调递增的. 证明：

$$g(x) = \begin{cases} f(x)/x, & x > 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}.$$

是 x 的增函数.

1.4.3 *1.* 给出一个可微函数的例子 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,使得其导数 f' 是不连续的.

2. 设 f 如 *1* 部分所述. 如果 $f'(0) < 2 < f'(1)$，证明：存在 $x\in[0,1]$，使得 $f'(x)=2$.

1.4.4 设 $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 C^∞ 函数,且满足微分方程

$$y''+y'-y=0, x\in[0,L],$$

这里 L 是一个正的实数. 假定 $y(0)=y(L)=0$,证明：在 $[0,L]$ 上,$y\equiv 0$.

1.4.5 设 $u(x), 0\leqslant x\leqslant 1$ 是一个实值的 C^2 函数,且满足微分方程

$$u''(x)=\mathrm{e}^x u(x).$$

1. 证明：如果 $0<x_0<1$,则 u 不可能在 x_0 处有正的局部极大值. 类似地,证明 u 在 x_0 处不可能有负的局部极小值.

2. 现在假定 $u(0)=u(1)=0$,证明：$u(x)\equiv 0, 0\leqslant x\leqslant 1$.

1.4.6 设 K 是一个实常数. 假定 $y(t)$ 是一个正的可微函数,且满足 $y'(t)\leqslant Ky(t), \forall t\geqslant 0$. 证明：$y(t)\leqslant \mathrm{e}^{Kt}y(0), \forall t\geqslant 0$.

1.4.7 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个可微函数,假定 $f'(x)>f(x), \forall x\in\mathbb{R}$,且 $f(x_0)=0$. 证明：$f(x)>0, \forall x>x_0$.

1.4.8 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的一个二次可微的实值函数，满足 $f(0)=0, f'(0)>0$，且 $f''(x)\geqslant f(x), \forall x\geqslant 0$. 证明：$f(x)>0, \forall x>0$.

1.4.9 设 a 是一个正的常数,证明：方程 $a\,\mathrm{e}^x=1+x+x^2/2$ 恰有一个实根.

1.4.10 设函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 连续,满足 $f(0)=0$,对 $0<x<1$, f 是可微的,且 $0\leqslant f'(x)\leqslant 2f(x)$. 证明：$f$ 恒等于 0.

1.4.11 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数,满足 $f(0)=f(1)=0$. 假定 f'' 在 $0<x<1$ 时存在,且 $f''+2f'+f\geqslant 0$. 证明：$f(x)\leqslant 0, \forall x\in[0,1]$.

1.4.12 设 v_1 和 v_2 是 $\mathbb{R}$ 上得了两个实值的连续函数,满足 $v_1(x)<v_2(x), \forall x\in\mathbb{R}$. 令 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 分别表示方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_1(x) \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_2(x)$$

在 $a<t<b$ 时的解. 如果 $\varphi_1(t_0)=\varphi_2(t_0)$ 对某个 $t_0\in(a,b)$ 成立,证明：对任意 $t\in(t_0,b)$ 有 $\varphi_1(t)\leqslant\varphi_2(t)$.

1.4.13 证明或给出反例：如果 f 和 g 是 $(0,1)$ 上的实值函数,满足

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=0,$$

且 g 和 g' 恒不为零,若

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=c,$$

则
$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=c.$$

1.4.14 设 f 是 $(-1,1)$ 上的实值可微函数，满足当 $x\to 0$ 时，$f(x)/x^2$ 存在有限的极限，这是否意味着 $f''(0)$ 存在? 给出证明或反例.

1.4.15 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个无穷次可微函数，假定对某个正整数 n 有
$$f(1)=f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0,$$
证明：存在某个 $x\in(0,1)$，使得 $f^{(n+1)}(x)=0$.

1.4.16 设 f 是 $(0,+\infty)$ 上正的 C^2 函数，满足 $f'\leqslant 0$ 且 f'' 有界. 证明：$\lim\limits_{t\to+\infty}f'(t)=0$.

1.4.17 设 f 是 $(0,+\infty)$ 上正的可微函数，证明：
$$\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)}\right)^{1/\delta}$$
对每个 x 存在（有限）且非零.

1.4.18 设 $f(x),-\infty<x<+\infty$，是连续的实值函数，满足对 $\forall x\neq 0$，$f'(x)$ 都存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 存在. 证明：$f'(0)$ 存在.

1.4.19 对每个实参数 t，求出三次多项式 $p_t(x)=(1+t^2)x^3-3t^3x+t^4$ 的实根数目及其重数.

1.4.20 设实值函数 f 定义在实轴上一个包含 a 的开区间上，且在 a 处可微. 证明：如果 (x_n) 和 (y_n) 分别是 f 的定义域上的递增数列和递减数列，并且都收敛于 a，则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(a).$$

1.4.21 设 f 是 $[0,1]$ 上连续的实值函数，满足对每个 $x_0\in[0,1)$ 有
$$\limsup_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0.$$
证明：f 是非递减的.

1.4.22 设 I 是 $\mathbb{R}$ 上一个包含 0 的开区间，假定 f' 在 0 的某个邻域内存在，且 $f''(0)$ 存在. 证明：
$$f(x)=f'(0)\sin x+\frac{1}{2}f''(0)\sin^2 x+o(x^2).$$
（$o(x^2)$ 表示当 $x\to 0$ 时，$o(x^2)/x^2\to 0$.）

1.4.23 证明：函数
$$f(z)=\frac{z}{\mathrm{e}^z-1}$$

在 $x = 0$ 处的 Taylor 系数都是有理数.

1.4.24 给出一个具有以下三条性质的函数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$：

- 对 $x < 0$ 和 $x > 2$，有 $f(x) = 0$；
- $f'(1) = 1$；
- f 具有任意阶导数.

1.4.25 证明：如果 n 是一个正整数，α, ε 是实数且 $\varepsilon > 0$，则存在一个任意阶可导的函数实函数 f，满足

1. $|f^{(k)}(x)| \leqslant \varepsilon, k = 0, 1, \cdots, n-1, \forall x \in \mathbb{R}$；
2. $f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \cdots, n-1$；
3. $f^{(n)}(0) = \alpha$.

1.4.26 设 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续可微的，且以 1 为周期的非负周期函数. 证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{1 + cf(x)}\right)$$

当 $c \to +\infty$ 时，关于 x 一致趋于 0.

1.4.27 令 I 表示开区间 $(0, 1)$，设 $f: I \to \mathbb{C}$ 是 C^1 函数（即其实部和虚部分别连续可微）. 假定当 $t \to 0^+$ 时，$f(t) \to 0$, $f'(t) \to C \neq 0$. 证明：函数 $g(t) = |f(t)|$ 对充分小的 $t > 0$ 是 C^1 的，且 $\lim\limits_{t \to 0^+} g'(t)$ 存在，并求出此极限.

1.4.28 设 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 C^∞ 函数，假定 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处存在一个局部极小值. 证明：存在一个圆心在 y 上的圆盘，它在 f 的图像上方，且经过点 $\big(0, f(0)\big)$.

1.5 积分学

1.5.1 设 f 是 $[a, b]$ 上的实值函数，假定 f 可微且 f' 是 Riemann 可积的，证明：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

1.5.2 利用 Riemann 积分的性质证明：如果 f 是 $[0, 1]$ 上的非负连续函数，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，则 $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$.

1.5.3 设 f 是连续的实值函数，证明：存在 $\xi \in [0, 1]$，使得

$$\int_0^1 f(x)x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}f(\xi).$$

1.5.4 设 f 是一元实值函数，满足

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

对任意 $x \in [a,b]$ 均存在. 证明：f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

1.5.5 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,对任意 $b\in(0,1)$, f 在 $[b,1]$ 上可积.

1. 如果 f 有界,证明：f 在 $[0,1]$ 上可积.
2. 如果 f 无界呢?

1.5.6 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续,满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

证明：存在序列 (x_n) 满足当 $n\to\infty$ 时,$x_n\to+\infty$, $x_n f(x_n)\to 0$,且 $x_n f(-x_n)\to 0$.

1.5.7 令

$$f(x)=\mathrm{e}^{x^2/2}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t,\ x>0.$$

1. 证明：$0<f(x)<1/x$.
2. 证明：$f(x)$ 在 $x>0$ 时严格递增.

1.5.8 设 $\varphi(s)$ 是 $[1,2]$ 上的 C^2 函数,且 φ 和 φ' 在 $s=1,2$ 处均为 0. 证明：存在常数 $C>0$,使得对任意 $\lambda>1$,有

$$\left|\int_1^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{C}{\lambda^2}.$$

1.5.9 给定 $a\in[0,1]$,求出 $[0,1]$ 上的所有非负连续函数 f,使得其满足如下三个条件：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1,$$
$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=a,$$
$$\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=a^2.$$

1.5.10 设 f 是 $[0,1]$ 上的可微函数,且满足

$$\sup_{0<x<1}|f'(x)|=M<+\infty.$$

对任意正整数 n,证明：

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(j/n)}{n}-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{2n}.$$

1.5.11 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是一致连续函数，且

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在（有限）. 证明：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

1.5.12 设 f 是 $[0,+\infty)$ 上的实值连续函数，且

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

存在. 证明：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

1.5.13 设 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 是定义在正实数集上的单调递减函数，满足

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty.$$

证明：

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$

1.5.14 设 f 是连续的实值函数，满足 $f(x)\geqslant 0$ 对任意 x 成立，且

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty.$$

证明：当 $n\to\infty$ 时，

$$\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\,\mathrm{d}x\to 0.$$

1.5.15 求积分

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

的近似值，保证前两位小数的精确度，即求出数 I^*，使得 $|I-I^*|<0.005$.

1.5.16 证明以下极限是存在有限的：

$$\lim_{t\to0^+}\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x^4+t^4)^{1/4}}+\ln t\right).$$

1.5.17 设 f 和 f' 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且当 $x\geqslant 10^{10}$ 时，$f(x)=0$. 证明：

$$\int_0^{+\infty}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x\leqslant 2\sqrt{\int_0^{+\infty}x^2[f(x)]^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^{+\infty}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x}.$$

1.5.18 设 $f:[0,+\infty)$ 是连续且严格递增的函数，且 $f(0)=0$. 令 $g=f^{-1}$. 证明：

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y\geqslant ab.$$

对任意正数 a,b 都成立，并求出取等条件.

1.5.19 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上连续的实值函数，且反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛. 在 $\mathbb{R}$ 上定义函数 g：

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,\mathrm{d}x,$$

证明：g 是连续的.

1.5.20 设 f 和 g 都是 $\mathbb{R}$ 上连续的实值函数，满足 $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=0$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|\,\mathrm{d}x<+\infty$. 在 $\mathbb{R}$ 上定义函数 h：

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y,$$

证明：$\lim\limits_{|x|\to+\infty} h(x)=0$.

1.5.21 证明：积分

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x \quad 和 \quad \int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x$$

都收敛.

1.5.22 设 $f(x), 0\leqslant x\leqslant 1$ 是一个连续的实值函数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=f(1).$$

1.5.23 计算

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x,$$

这里 $a>0$ 是一个常数.

1.5.24 证明：

$$I=\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

作为反常积分是收敛的，并求出 I 的值.

1.5.25 证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

作为反常积分是收敛的，但

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=+\infty.$$

1.6 函数列

1.6.1 证明或给出反例：如果 f 是 $[0,1]$ 上非递减的实值函数，则存在 $[0,1]$ 上的一列连续函数 $\{f_n\}$，使得对每个 $x \in [0,1]$ 有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

1.6.2 设 $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, n=1,2,\cdots$ 可微，且对任意 n 和 x 有 $|f_n'(x)| \leqslant 1$. 假定

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

证明 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的.

1.6.3 设 $\{f_n\}$ 是一列将单位区间映为自己的非递减的函数列，假定

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

是逐点收敛的，且 f 是连续函数. 证明：对 $0 \leqslant x \leqslant 1$，当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$. 注意这里的 f_n 不一定是连续的.

1.6.4 设 f 以及 $f_n, n=1,2,\cdots$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数，假定当 $n\to\infty$ 时，只要 $x_n \to x$，就有 $f(x_n)\to f(x)$. 证明：f 是连续函数. 注意这里的函数 f_n 并没有假定连续.

1.6.5 假定一列函数 $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到某个函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，且对每个正整数 n，极限 $c_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ 存在. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 都存在且相等.

1.6.6 *1.* 给出一列 C^1 函数的例子

$$f_k:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, \quad k=1,2,\cdots,$$

满足 $f_k(0)=0, \forall k$，且对任意 x，当 $k\to\infty$ 时，$f_k'(x)\to f_0'(x)$，但 $f_k(x)$ 不是收敛于 $f_0(x)$ 的.

2. 给出一个额外的条件，使得对任意 x，当 $k\to\infty$ 时，$f_k(x)\to f_0(x)$.

1.6.7 证明：如果 f 是从 $[0,1]$ 到自身的同胚（即 f 是连续的双射，且其逆映射也是连续的），则存在一列多项式 $\{p_n\}, n=1,2,3,\cdots$，使得 p_n 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f，且每个 p_n 都是 $[0,1]$ 到自身的同胚.

1.6.8 设对 $n=1,2,\cdots$，$f_n:[0,1]\to[0,+\infty)$ 是连续函数，假定有

$$f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant f_3(x) \geqslant \cdots, \forall x \in [0,1]. \tag{$*$}$$

令 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 以及 $M = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)$.

1. 证明：存在 $t\in[0,1]$ 使得 $f(t)=M$.

2. 通过例子说明，如果(∗) 不成立，而仅仅知道对每个 $x \in [0,1]$，存在 n_x，使得对所以的 $n \geqslant n_x$ 有 $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$，则第 1 部分中的结论不一定成立.

1.6.9 设 $f_1, f_2, \cdots$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，满足 $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall x \in [0,1]$. 问序列 $\{f_n\}$ 是否在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0?

1.6.10 设整数 $k \geqslant 0$，定义一列映射

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^k}{x^2+n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

对怎样的 k，能使得此函数列在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛? 对怎样的 k，又能使得此函数列在 $\mathbb{R}$ 的任意有界子集上一致收敛?

1.6.11 设 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 连续，$k \in \mathbb{N}$. 证明：在次数不超过 k 的实多项式中，存在一个 $P(x)$ 使得

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - P(x)|$$

取到最小值.

1.6.12 设 $\{P_n\}$ 是一列次数不超过 D（一个固定的整数）的实多项式. 假定对 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$P_n(x)$ 逐点收敛于 0，证明：P_n 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.

1.6.13 设 f 是紧区间 $[a,b]$ 上的一个实值连续函数. 给定 $\varepsilon > 0$，证明：存在多项式 p 使得 $p(a) = f(a), p'(a) = 0$，且 $|p(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a,b]$.

1.6.14 对每个正整数 n，定义 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \cos nx$. 证明：序列 $\{f_n\}$ 不存在一致收敛的子序列.

1.6.15 设 $\mathcal{C}_{[0,1]}$ 表示 $[0,1]$ 上所以连续函数构成的空间，定义

$$d(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\,\mathrm{d}x.$$

1. 证明：d 是 $\mathcal{C}_{[0,1]}$ 上的一个距离.
2. 证明：$(\mathcal{C}_{[0,1]}, d)$ 不是一个完备距离空间.

1.6.16 Arzelà-Ascoli 定理断言，一个距离空间 Ω 上的一列实值连续函数 $\{f_n\}$，如果满足

(1) Ω 是紧的；

(2) $\sup \|f_n\| < +\infty$（这里 $\|f_n\| = \sup\{|f_n(x)|, x \in \Omega\}$）；

(3) 序列 $\{f_n\}$ 是等度连续的，

则 $\{f_n\}$ 是准紧的（即有一个一致收敛的子列）. 设 Ω 是实轴上的一个子集，分别给出以下不是准紧的序列的例子：(1) 和 (2) 满足而 (3) 不满足；(1) 和 (3) 满足而 (2) 不满足；(2) 和 (3) 满足而 (1) 不满足. 在每种情形中，画出每个序列中典型函数的草图.

1.6.17 设函数 $f_n:[0,1]\to[0,1](n=1,2,\cdots)$ 满足：只要 $|x-y|\geqslant 1/n$，就有 $|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant|x-y|$. 证明：序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在一个一致收敛的子序列.

1.6.18 设 $\{f_n\}$ 是 $[0,1]$ 上的一列实值 C^1 函数，满足对所有 n，有

$$|f_n'(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}\quad(0<x\leqslant 1),$$

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

证明：此序列存在一个在 $[0,1]$ 上一致收敛的子序列.

1.6.19 设 M 表示在 $[0,1]$ 上的满足 f' 连续的实值连续函数 f 构成的集合，定义范数

$$\|f\|=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|+\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|.$$

问 M 的哪些子集是紧的.

1.6.20 设 (a_n) 是一列非零实数，证明：函数列 $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f_n(x)=\frac{1}{a_n}\sin(a_nx)+\cos(x+a_n)$$

有一个子列收敛到一个连续函数.

1.6.21 设 $\{f_n\}$ 是一列从 $[0,1]$ 映到 $\mathbb{R}$ 的连续函数. 假定对每个 $x\in[0,1]$，当 $n\to\infty$ 时，均有 $f_n(x)\to 0$. 且对所有 n，存在常数 K，使得

$$\left|\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant K<+\infty.$$

问是否有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

1.6.22 设 $\{g_n\}$ 是 $[0,1]$ 上的一列二次可微函数，满足 $g_n(0)=g_n'(0)=0,\forall n$. 假定对所有 n 和 $x\in[0,1]$ 有 $|g_n''(x)|\leqslant 1$，证明：存在 $\{g_n\}$ 的一个子列在 $[0,1]$ 上一致收敛.

1.6.23 设 K 是定义在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续实值函数，F 表示 $[0,1]$ 上形如

$$f(x)=\int_0^1 g(y)K(x,y)\,\mathrm{d}y$$

的 f 构成的函数族，其中 g 是 $[0,1]$ 上满足 $|g|\leqslant 1$ 的连续函数. 证明：函数族 F 是等度连续的.

1.6.24 设 $\{g_n\}$ 一列从 $[0,1]$ 映到 $\mathbb{R}$ 的 Riemann 可积函数，且对所有的 n 和 x 有 $|g_n(x)|\leqslant 1$. 定义

$$G_n(x)=\int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明：$\{G_n\}$ 有一个一致收敛的子列.

1.6.25 设 $\{f_n\}$ 是一列定义在 $[0,1]$ 上的连续实值函数，满足对任意 n，有

$$\int_0^1 [f_n(y)]^2 \, \mathrm{d}y \leqslant 5.$$

定义 $g_n:[0,1] \to \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \int_0^1 \sqrt{x+y} f_n(y) \, \mathrm{d}y.$$

1. 求出一个常数 K，使得对任意 n，有 $|g_n(x)| \leqslant K$.
2. 证明：序列 $\{g_n\}$ 存在一个一致收敛的子列.

1.6.26 设 $\{f_n\}$ 是一列从 $[0,1]$ 映到 $\mathbb{R}$ 的连续函数，满足

$$\int_0^1 \big(f_n(x) - f_m(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

假定 $K:[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 连续，定义 $g_n:[0,1] \to \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \int_0^1 K(x,y) f_n(y) \, \mathrm{d}y.$$

证明：序列 $\{g_n\}$ 一致收敛.

1.6.27 设 $\varphi_1, \varphi_2. \cdots, \varphi_n, \cdots$ 是 $[0,1]$ 上非负连续的函数，且对每个 $k = 0, 1, \cdots$，极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^k \varphi_n(x) \, \mathrm{d}x$$

存在. 证明：对 $[0,1]$ 上的每个连续函数 f，极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\varphi_n(x) \, \mathrm{d}x$$

均存在.

1.6.28 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 为实数，证明：无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}}{n^2}$$

在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到一个连续的极限函数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. 进一步证明，极限

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) \, \mathrm{d}x$$

存在.

1.6.29 定义 ζ 函数

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$$

证明：$\zeta(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有定义，且存各阶连续的导数.

1.6.30 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，令

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x+\frac{k}{n}\right).$$

证明：$f_n(x)$ 在每个有限区间 $[a,b]$ 上都一致收敛.

1.6.31 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续实值函数，满足

$$|f(x)|\leqslant\frac{C}{1+x^2},$$

其中 C 是一个正的常数. 在 $\mathbb{R}$ 上定义函数 F：

$$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+n).$$

1. 证明：F 是连续的以 1 为周期的周期函数.
2. 证明：如果 G 是连续的以 1 为周期的周期函数，则

$$\int_0^1 F(x)G(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.6.32 证明：对任意连续函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 和 $\varepsilon>0$，存在一个形如

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}C_k x^{4k}$$

的函数，这里 n 是某个整数，而 $C_0,\cdots,C_n\in\mathbb{Q}$，满足 $|g(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对任意 $x\in[0,1]$ 成立.

1.7 Fourier 级数

1.7.1 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是满足

$$\begin{cases} f(x)=x, & -\pi\leqslant x<\pi \\ f(x+2n\pi)=f(x), & \forall n\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

的唯一函数.

1. 证明：f 的 Fourier 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2 \sin nx}{n}.$$

2. 证明：此级数不是一致收敛的.
3. 对每个 $x \in \mathbb{R}$,求出此级数的和.

1.7.2 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是周期为 2π 的周期函数,满足 $f(x) = x^3, -\pi \leqslant x < \pi$.

1. 证明：f 的 Fourier 级数具有形式 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$,并写出 b_n 的一个积分表达式（不需要计算出来）.
2. 证明：此 Fourier 级数对任意 x 均收敛.
3. 证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2\pi^6}{7}.$$

1.7.3 设 $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ 连续,且满足

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = 0$$

对任意整数 $n \geqslant 1$ 成立. 问 f 是否恒为零?

1.7.4 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续实值函数,满足

$$f(x) = f(x+1) = f\left(x + \sqrt{2}\right)$$

对任意 x 成立. 证明：f 是常数.

1.7.5 是否存在一个连续的实值函数 $f(x), 0 \leqslant x \leqslant 1$,使得

$$\int_0^1 x f(x) \, \mathrm{d}x = 1 \quad \text{且} \quad \int_0^1 x^n f(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

对 $n = 0, 2, 3, 4, \cdots$ 成立? 给出一个例子或者证明不存在这样的 f.

1.7.6 设 g 是 2π 周期的函数,且在 $[-\pi, \pi]$ 上连续,其 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

设 f 的周期为 2π,且满足微分方程

$$f''(x) + k f(x) = g(x),$$

这里 $k \neq n^2, n = 1, 2, 3, \cdots$. 求出 f 的 Fourier 级数,并证明其处处收敛.

1.7.7 设 f 是 $[0,2\pi]$ 上的二次可微的实值函数，且满足中

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 = f(2\pi) - f(0).$$

证明：

$$\int_0^{2\pi} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{2\pi} [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

1.7.8 设 f 和 g 都是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，且满足 $f(x+1) = f(x), g(x+1) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.8 凸函数

1.8.1 设 $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ 连续，且 $f(0)=0$. 证明：存在一个连续的凹函数 $g:[0,1] \to \mathbb{R}$，满足 $g(0)=0$ 且 $g(x) \geqslant f(x), \forall x \in [0,1]$.

注: 函数 $g:I \to \mathbb{R}$ 称为是凹的是指：

$$g\big(tx+(1-t)y\big) \geqslant tg(x)+(1-t)g(y)$$

对任意 $x, y \in I$ 和 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 成立.

1.8.2 设 $f:I \to \mathbb{R}$（这里 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间）满足 $f(x) > 0, x \in I$. 假定对任意实数 c，$\mathrm{e}^{cx}f(x)$ 在 I 上是凸的，证明：$\ln f(x)$ 在 I 上是凸的.

注: 函数 $g:I \to \mathbb{R}$ 称为是凸的是指：

$$g\big(tx+(1-t)y\big) \leqslant tg(x)+(1-t)g(y)$$

对任意 $x, y \in I$ 和 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 成立.

1.8.3 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的实值连续函数，满足如下平均值不等式：

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x=h} f(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad h > 0.$$

证明：

1. f 在任意闭区间上的最大值都在其中一个端点处取到.
2. f 是凸的.

第 2 章 多元微分学

2.1 极限与连续

2.1.1 设函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 满足以下两个条件:

- 只要 K 是 $\mathbb{R}$ 的一个紧子集,$f(K)$ 就是紧的;
- 如果 $\{K_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一列单调递减的子集,则

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}f(K_n).$$

证明: f 是连续的.

2.1.2 证明: 如果映射 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的图像在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上是闭的,则 g 是连续的. 其逆命题是否正确?

注: 也参见问题 1.2.14.

2.1.3 假定 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为开集,设映射 $h:U\to\mathbb{R}^n$ 是从 U 到 $\mathbb{R}^n$ 的同胚,且是一致连续的. 证明: $U=\mathbb{R}^n$.

2.1.4 设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的实值连续函数,且满足

- 对每个 $y_0\in\mathbb{R}$,函数 $x\mapsto f(x,y_0)$ 是连续的;
- 对每个 $x_0\in\mathbb{R}$,函数 $y\mapsto f(x_0,y)$ 是连续的;
- 当 K 是 $\mathbb{R}^2$ 的紧子集时,$f(K)$ 也是紧的,

证明: f 是连续的.

2.1.5 设 f 是从球体 $B_n=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\,|\,\|\boldsymbol{x}\|<1\}$ 到自身的连续映射(这里 $\|\cdot\|$ 表示 Euclide 范数),且对所有非零的 $\boldsymbol{x}\in B_n$ 都有 $\|f(\boldsymbol{x})\|<\|\boldsymbol{x}\|$. 设 $\boldsymbol{x}_0$ 是 B_n 中的一个非零点,并定义序列 $(\boldsymbol{x}_k):x_k=f(\boldsymbol{x}_{k-1})$,证明: $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\mathbf{0}$.

第二部分

答案

第 1 章 实分析

1.1 基础微积分

1.1.1 令 $f(\theta)=\cos(p\theta)-(\cos\theta)^p$. 我们有 $f(0)=0$,且对 $0<\theta<\pi/2$,

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=-p\sin(p\theta)+p\cos^{p-1}\theta\sin\theta\\&=p\Big(-\sin(p\theta)+\frac{\sin\theta}{\cos^{1-p}\theta}\Big)\\&>0\end{aligned}$$

由于 $\sin x$ 在 $[0,\pi/2]$ 上单调递增,且 $\cos^{1-p}\theta\in(0,1)$. 我们得到 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 时, $f(\theta)\geqslant 0$,这就证明题中的不等式.

1.1.2 设 $x\in[0,1]$. 根据 $f(0)=0$,利用 Cauchy-Schwarz 不等式,我们有

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\Big|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\Big|\\&\leqslant\sqrt{\int_0^x|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^x 1^2\,\mathrm{d}t}\\&\leqslant\sqrt{\int_0^x|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t},\end{aligned}$$

结论得证.

1.1.3 由于 f' 为正, f 是增函数,所以对 $t>1$,我们有 $f(t)>f(1)=1$. 因此,对 $t>1$,

$$f'(t)=\frac{1}{t^2+f^2(t)}<\frac{1}{t^2+1},$$

因此

$$f(x)=1+\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&< 1 + \int_1^x \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&< 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，且不会超过 $1+\pi/4$. 严格的不等号成立，是因为

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= 1 + \int_1^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t \\
&< 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 1 + \pi/4.
\end{aligned}
$$

1.1.4 用 M 表示 f 和 g 的共同上界. 由于 f 和 g 都是连续的，而 $[0,1]$ 为紧集，因此存在 $\alpha,\beta \in [0,1]$，使得 $f(\alpha) = g(\beta) = M$. 定义函数 $h(x) = f(x)-g(x)$，则它满足 $h(\alpha) = M-g(\alpha) \geqslant 0, h(\beta) = f(\beta)-M \leqslant 0$. 由于 h 是连续的，它必然在 α 与 β 之间存在零点 $t \in [0,1]$. 那么我们有 $f(t) = g(t)$，所以 $f^2(t)+3f(t) = g^2(t)+3g(t)$.

1.1.5 称具有题中形式的函数为一个周期多项式，如果其中 x^k 是具有非零系数的次数最大的项，则称其度为 k.

如果 a 是 1- 周期的，则 $\Delta(af) = a\Delta f$ 对任意 f 成立，所以，由归纳法可知，$\Delta^n(af) = a\Delta^n f, \forall n$.

我们将用完全归纳法证明结论. 对 $n=1$，结论成立：$\Delta f = 0$ 当且仅当 f 是 1- 周期的. 假定结论对 $1,\cdots,n-1$ 已经成立，如果

$$
f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}
$$

是一个度至多为 $n-1$ 的周期多项式，则

$$
\Delta f = a_1\Delta^n x + \cdots + a_{n-1}\Delta^n(x^{n-1}).
$$

而归纳假设说明，所有项中除了可能的最后一项之外，其他项全部为零. 我们有 $\Delta^n(x^{n-1}) = \Delta^{n-1}\Delta(x^{n-1})$，由二项式定理知这是一个度为 $n-2$ 的多项式. 所以归纳假设也意味着 $\Delta^n(x^{n-1}) = 0$，于是充分性得证.

对于必要性，假定 $\Delta^n f = 0$. 由归纳假设，Δf 是一个度不超过 $n-2$ 的周期多项式. 假定我们能找到一个周期多项式 g，其度不超过 $n-1$，使得 $\Delta g = \Delta f$. 则由 $\Delta(f-g) = 0$，可知函数 $f-g$ 是 1- 周期的，这意味着 f 是一个周期多项式，且其度不超过 $n-1$，正好满足题意. 因此，只需要证明如下断言：如果 h 是一个度为 $n(n=0,1,\cdots,n)$ 的周期多项式，那么存在一个度为 $n+1$ 的周期多项式，使得 $\Delta g = h$.

如果 $n=0$,我们取 $g=hx$. 假定 h 的度 $n>0$,且假定断言对度小于 n 的情形已经成立. 那么不失一般性,我们可以假定 $h=ax^n$,这里 a 是 1- 周期的. 由二项式定理,

$$h-\Delta\left(\frac{ax^{n+1}}{n+1}\right)$$

是一个度为 $n-1$ 的周期多项式,那么它等于 Δg_1,而 g_1 是某个度为 n 的周期多项式,并且我们有 $h=\Delta g$,这里

$$g=\frac{ax^{n+1}}{n+1}+g_1,$$

得证.

1.1.6 由于 f 是递增的,且非常值,那么存在 $r_0<s_0$ 使得 $f(r_0)<f(s_0)$. 我们不妨假定 $\delta=s_0-r_0>1$. 令 $\Delta=f(s_0)-f(r_0)$.

取 $[r_1,s_1]$ 或者是 $[r_0,(r_0+s_0)/2]$,或者是 $[(r_0+s_0)/2,s_0]$,使得 $f(s_1)-f(r_1)$ 较大(如果他们相等则任取一个即可). 则 $f(s_1)-f(r_1)\geqslant\Delta/2$. 类似地取 $[r_2,s_2]$ 是 $[r_1,s_1]$ 的左半或右半区间,使得 $f(s_2)-f(r_2)$ 较大. 不停地取下去,则 $s_i-r_i=2^{-i}\delta$,且 $f(s_i)-f(r_i)\geqslant 2^{-i}\Delta$.

令 $a=\lim r_i$,且设 $c=\Delta/(2\delta)$. 给定 $x\in(0,1]$,取第一个使得 $2^{-i}\delta\leqslant x$ 的整数 $i\geqslant 0$. 则 $2^{-i}\delta\geqslant x/2$. 区间 $[r_i,s_i]$ 包含点 a,且其长度 $\leqslant x$,所以 $[r_i,s_i]\subset[a-x,a+x]$. 由于 f 递增,

$$f(a+x)-f(a-x)\geqslant f(s_i)-f(r_i)\geqslant 2^{-i}\Delta=2c2^{-i}\delta\geqslant cx.$$

最后,不等式 $f(a+x)-f(a-x)\geqslant cx$ 对 $x=0$ 显然成立.

1.1.7 *1.* 错误. 对于

$$f(t)=g(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases},$$

我们有 $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=\lim\limits_{t\to 0}f(t)=0$,但 $\lim\limits_{t\to 0}f\big(g(t)\big)=1$.

2. 错误. $f(t)=t^2$ 将开区间 $(-1,1)$ 映为 $[0,1)$,这不是开的.

3. 正确. 设 $x,x_0\in(-1,1)$. 由 Taylor 定理,存在 $\xi\in(-1,1)$ 使得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n\quad(n\in\mathbb{N}).$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^n}{n!}=0,$$

所以
$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
对任意 $x_0\in(-1,1)$ 都成立，即 f 是实解析的.

1.1.8 **方法一** 令 $f(x)=\sin x-x-x^3/6$，则 $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$，且 $f'''(x)=1-\cos x$，于是 $f'''(x)\geqslant 0,\forall x$，且对 $0<x<2\pi$，有 $f'''(x)>0$. 于是对 $x>0$，有 $f''(x)=\int_0^x f'''(t)\,\mathrm{d}t>0$. 类似地，$f'(x)=\int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t>0$，那么最后 $f(x)=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t>0$.

方法二 令 $f(x)=\sin x-x-x^3/6$，则
$$\begin{aligned}f'(x)&=\cos x-1+\frac{x^2}{2},\\ f''(x)&=-\sin x+x,\\ f'''(x)&=-\cos x+1.\end{aligned}$$
现在 $f'''(x)\geqslant 0$，且等号只在离散的点 $2n\pi,n\in\mathbb{Z}$ 处取到，因此 f'' 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增. 由于 $f''(0)=0$，我们得到 $f''(x)>0,\forall x>0$，因此 f' 在 $\mathbb{R}^+$ 上严格递增. 由于 $f'(0)=0$，我们得到 $f'(x)>0,\forall x>0$，因此 f 在 $\mathbb{R}^+$ 上严格递增. 由于 $f(0)=0$，我们得到 $f(x)>0,\forall x>0$，证毕.

方法三 考虑 $\sin x$ 在 0 处的带 Lagrange 余项的 5 阶 Taylor 展开，对 $x>0$，我们有
$$\sin x=x-\frac{x^3}{+}\frac{x^5}{5!}+\frac{\cos^6\xi}{6!},$$
这里 $\xi\in(0,x)$. 由于 $x^5/5!>0$，且 $\cos^6\xi/6!\geqslant 0$，那么原不等式成立.

1.1.9 $\sin x$ 的 3 阶 Maclaurin 展开式为
$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+O(x^5),\quad x\to 0,$$
因此
$$\sin^2 x=x^2+O(x^4),\quad x\to 0.$$
因此，当 h 在 0 的邻域范围内时，我们有 $y(h)=1-8\pi^2h^2+O(h^4)$（或者，注意到 $y(h)=\cos(4\pi h)$，然后利用余弦函数的展开式）. 因此
$$\begin{aligned}f\big(y(h)\big)&=\frac{2}{1+\sqrt{8\pi^2h^2+O(h^4)}}\\ &=\frac{2}{1+2\sqrt{2}\pi|h|+O(h^2)},\quad h\to 0.\end{aligned}$$

利用 Maclaurin 展开式 $2/(1+x) = 2 - 2x + 2x^2 + O(x^2)$，我们得到

$$f\big(y(h)\big) = 2 - 4\sqrt{2\pi}|h| + O(h^2), \quad h \to 0.$$

1.1.10 *1.* 设 $f:[0,1] \to (0,1)$ 是一个连续的满射. 考虑序列 $(x_n): x_n \in f^{-1}\big((0,1/n)\big)$. 由 Balzono-Weierstrass 定理，我们可以假定 (x_n) 收敛到某个 $x \in [0,1]$. 由连续性，我们有 $f(x) = 0$，这是不可能的. 因此，这样的函数不存在.

2. 取 $g(x) = |\sin 2\pi x|$ 即可.

3. 设 $g:(0,1) \to [0,1]$ 是一个连续的双射，令 $x_0 = g^{-1}(0), x_1 = g^{-1}(1)$. 不失一般性，假定 $x_0 < x_1$（否则考虑 $1-g$）. 由介值定理，我们有 $g([x_0,x_1]) = [0,1]$. 而 $x_0, x_1 \in (0,1)$，那么 g 不是单射，矛盾.

1.1.11 令 $A(c)$ 表示题中所指区域的面积. $f'' > 0$ 意味着 f 是凸函数，因此 f 的图像总是在其切线的上方，且我们有

$$A(c) = \int_a^b \big(f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)\big)\,\mathrm{d}x.$$

A 的导数为

$$\begin{aligned} A'(c) &= -\int_a^b f''(c)(x-c)\,\mathrm{d}x \\ &= -f''(c)\frac{b^2-a^2}{2} + (b-a)cf'(c) \\ &= f''(c)(b-a)\Big(c - \frac{a+b}{2}\Big), \end{aligned}$$

因此极小值在 $c = (a+b)/2$ 处取到. 而 A' 是单调递增的，A 是凸函数，因此 A 在 $[a,b]$ 上的最小值只在 $c = (a+b)/2$ 处取到.

1.1.12 **方法一** 利用椭圆的参数方程

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$

椭圆上的三个点可以表示为

$$(a\cos t_i, b\sin t_i), \quad i = 1,2,3.$$

因此，内接三角形的面积可表示为

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a\cos t_1 & b\sin t_1 \\ 1 & a\cos t_2 & b\sin t_2 \\ 1 & a\cos t_3 & b\sin t_3 \end{vmatrix} = \frac{ab}{2}\begin{vmatrix} 1 & \cos t_1 & \sin t_1 \\ 1 & \cos t_2 & \sin t_2 \\ 1 & \cos t_3 & \sin t_3 \end{vmatrix},$$

它等于单位圆内接三角形面积的 ab 倍. 在圆的情形下,给定在所有的内接三角形中,如果给定底边长为 $2w(0 < w \leqslant 1)$,其面积在等腰三角形的情形时最大,此时面积为

$$g(w) = w\big(1 + \sqrt{1-w^2}\big).$$

容易知道 g 在区间 $[0,1]$ 上的最大值在 $w = \sqrt{3}/2$ 处取到,此时恰为一个等边三角形,且面积为 $3\sqrt{3}/4$. 或者,固定三角形的一边为底,我们很容易知道,在所有的内接三角形中,具有最大面积的三角形是等腰三角形,因为此时的高是最大的,说明底边上的两个角是一样的. 固定另一条边为底,我们发现此三角形也当然是等腰的. 因此,面积的最大值在

$$t_2 = t_1 + \frac{2\pi}{3} \quad 和 \quad t_3 = t_2 + \frac{2\pi}{3}$$

时取到. 这时,相应的内接于单位圆的三角形是等边的.

对于半轴长分别为 a, b 的椭圆,相应的内接三角形面积的最大值为 $3ab\sqrt{3}/4$.

方法二 设 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为伸缩函数 $f(x,y) = (ax, by)$. 根据积分的换元公式,我们有

$$\operatorname{vol}\big(f(T)\big) = |\det f| \cdot \operatorname{vol}(T).$$

由于 f 的行列式为常数,接着之前证明的步骤,最大面积在等边三角形时取到,且其面积为

$$\operatorname{vol}\big(f(T)\big) = ab \cdot \operatorname{vol}(T) = 3ab\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

1.1.13 假定 a, b 都在 A 中,且 $a < b$,设 $a < c < b$. 令 (x_n) 和 (y_n) 是 $[0,+\infty)$ 中的两个趋于 $+\infty$ 数列,分别满足 $a = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ 和 $b = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$. 如果有必要的话,从两个数列中各删除有限项,我们可以假定 $f(x_n) < c$ 且 $f(y_n) > c, \forall n$. 那么由介值定理,对每个 n 都存在介于 x_n 和 y_n 之间的点 z_n,使得 $f(z_n) = c$. 且显然 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$,因此 $c \in A$,证毕.

1.1.14 对每个 $x > 0$,从方程 $x\big(1 + \ln(1/\varepsilon\sqrt{x})\big) = 1$ 中解出 ε 得 $\varepsilon = \mathrm{e}/(x^{1/2}\mathrm{e}^{1/x})$,我们将右边设为 $f(x)$.

对 $x > 0$,定义 $g(x) = x^{1/2}\mathrm{e}^{1/x} = \mathrm{e}/f(x)$,则 $g'(x) = x^{-3/2}\mathrm{e}^{1/x}(x-2)/2$. 于是 g 在 $(0,2]$ 上严格递减,且 $[2,+\infty)$ 上严格递减. 进一步,有 $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$,且 $g(2) > 0$,因此 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,$f$ 在 $(0,2]$ 上严格递增,在 $[2,+\infty)$ 上严格递减,在 $(0,+\infty)$ 上连续,且 $f(2) = \sqrt{\mathrm{e}/2}$. 分别用 f_1, f_2 表示 f 在 $(0,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 上的限制. 则对每个 $0 < \varepsilon < \sqrt{\mathrm{e}/2}$,给定的方程恰有两个解,即 $x = f_1^{-1}(\varepsilon), x_2 = f_2^{-1}(\varepsilon)$,较小的解即为 $x = f_1^{-1}(\varepsilon)$. 由于 f_1 是严格单调递增且连续的,且 $f(0^+) = 0$,我们推出 $\varepsilon \to 0^+$ 时,$x(\varepsilon) \to 0$.

固定 $s>0$，现在 $\varepsilon^{-s}x(\varepsilon)=(\mathrm{e}/x^{1/2}\mathrm{e}^{1/x})^{-s}x=\mathrm{e}^{-s}x^{1+s/2}x\,\mathrm{e}^{s/x}$，这里 $x=x(\varepsilon)=f_1^{-1}(\varepsilon)$. 当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，$x\to 0^+$. 而函数 $x\mapsto \mathrm{e}^{-s}x^{1+s/2}\mathrm{e}^{s/x}$ 在 $x\to 0^+$ 时的极限为 $+\infty$，这就证明了第二部分.

1.1.15 设 g 是一个多项式，

$$g(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n.$$

如果我们取

$$a_0=\frac{1}{f(a)},\quad a_1=-\frac{f'(a)g(a)}{f(a)},\quad a_2=-\frac{f''(a)g(a)+f'(a)g'(a)}{f(a)},$$

直接计算可以验证 g 满足题意.

1.1.16 假定 p 的所有根都是实根，令 $\deg p=n$. 我们有

$$p(z)=(z-r_1)^{n_1}(z-r_2)^{n_2}\cdot(z-r_k)^{n_k},$$

这里 $r_1<r_2<\cdots<r_k$，且 $\sum_{i=1}^k n_i=n$. 对上式求导，我们可知当 $n_i>1$ 时，r_i 是 p' 的 n_i-1 重根. 将这些重数相加，我们发现已经找到了 p' 的 $n-1$ 个根中的 $n-k$ 个. 现在由 Rolle 定理，对每个 $i,1\leqslant i\leqslant k-1$，存在点 $s_i,r_i<s_i<r_{i+1}$，使得 $p'(s_i)=0$. 因此，我们找到了 p' 剩下的 $k-1$ 个根，并且它们是互异的. 现在我们知道 a 是 p' 的根而不是 p 的根，因此 $a\neq r_i,\forall i$. 但 a 时 p'' 的根，所以 a 一定是 p' 的重根，因此 $a\neq s_i,\forall i$. 所以，a 不是 p' 的根，矛盾.

1.1.17 设 $x\in\mathbb{R}$ 且 $h>0$. 由 Taylor 定理，存在 $w\in(x,x+2h)$ 使得

$$f(x+2h)=f(x)+2hf'(x)+2h^2f''(w),$$

或者写为

$$f'(x)=\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}-hf''(w).$$

取绝对值，然后利用题设条件，我们有

$$|f'(x)|\leqslant\frac{A}{h}+hB.$$

现在令 $h=\sqrt{A/B}$，即得到

$$|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{AB}.$$

1.1.18 **方法一** 考虑函数 $f(x)=\ln x/x$，我们有 $a^b=b^a$ 当且仅当 $f(a)=f(b)$. 现在 $f'(x)=(1-\ln x)/x^2$，所以 f 对 $x<\mathrm{e}$ 递增，对 $x>\mathrm{e}$ 递增. 要想题中的等式成立，一定有 $0<a<\mathrm{e}$，因此 a 是 1 或 2，且 $b>\mathrm{e}$. 对 $a=1$，显然是无解的. 对 $a=2$，则 $b=4$ 满足. 而 f 在 $x>\mathrm{e}$ 时递减，因此这就是唯一的解.

方法二 显然，a,b 具有相同的素因子. 令 $b=a+t$，这里 t 是某个整数. 于是 $a^a a^t=b^a$，这意味着 $a^a|b^a$，于是 $a|b$，那么 $b=ka$，k 是某个大于 1 的整数. 现在 $b^a=(ka)^a=a^b$，则意味着 k 是 a 的某个幂次，因此 $b=a^m$，m 是某个大于 1 的整数. 现在 $b^a=a^{ma}=a^{a^m}$，当且仅当 $ma=a^m$，显然可知此时只有唯一解 $a=m=2$，因此 $a=2,b=2^2=4$.

方法三 令 $b=a(1+t)$，t 是某个正数. 则方程 $a^b=b^a$ 等价于以下任意一个式子：

$$\begin{aligned}a^{a(1+t)}&=\big(a(1+t)\big)^a,\\(a^a)^{1+t}&=a^a(1+t)^a,\\(a^a)^t&=(1+t)^a,\\a^t&=1+t.\end{aligned}$$

由指数函数的幂级数展开可知 $\mathrm{e}^t>1+t$ 对 $t>0$ 成立，也就是对 $a<\mathrm{e}$ 成立. 而 $a=1$ 是不可能，必有 $a=2$. 最初的方程则变为

$$2^b=b^2,$$

考虑 b 的素因子分解，显然可得 $b=4$.

1.1.19 原方程可写为 $a^{x^b}=x$，或者

$$\frac{\ln x}{x^b}=\ln a.$$

此方程有解，当且仅当 $\ln a$ 在函数 $x\mapsto(\ln x)/x^b$ 的值域内. 不难得知此函数的值域是 $(-\infty,1/b\mathrm{e}]$. 因此，原方程有解，当且仅当 $1<a<\mathrm{e}^{1/b\mathrm{e}}$.

1.1.20 **方法一** 令 $f(x)=3^x x^{-3}, x>0$，我们有

$$f'(x)=\frac{3^x(x\ln 3-3)}{x^4}>0,\quad x>\frac{3}{\log 3}.$$

由于 $3/\log 3<3<\pi$，我们有 $f(3)=1<f(\pi)=3^\pi/\pi^3$，即 $\pi^3<3^\pi$.

方法二 可以对函数 $f(x)=\ln(x)/x$ 进行同样的分析，此函数对 $x>\mathrm{e}$ 递减. 也可以考虑函数 $g(x)=x^3-3^x$ 和 $h(x)=(3+x)^{\pi-x}$.

1.1.21 固定 $a\in(1,+\infty)$，在 $(1,+\infty)$ 上考虑函数 $f(x)=a^x x^{-a}$，我们尝试求出其最小值. 由于 $\ln f(x)=x\ln a-a\ln x$，我们

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln a-\frac{a}{x},$$

说明 $f'(x)$ 在 $(1,a/\ln a)$ 上为负，在 $(a/\ln a,+\infty)$ 上为正. 因此，f 在 $(1,+\infty)$ 上的最小值在 $x_a=a/\ln a$ 处取到，且

$$\ln f(x_a)=a-a\ln\left(\frac{a}{\ln a}\right)=a\ln\left(\frac{\mathrm{e}\ln a}{a}\right).$$

要想 a 满足题中的条件，当且仅当 $\mathrm{e}\ln a/a \geqslant 1$. 要得到哪个 a 满足条件，在 $(1,+\infty)$ 上考虑函数 $g(y)=\ln y/y$,我们有

$$g'(y)=\frac{1-\ln y}{y^2},$$

由此可知 g 在 $(1,+\infty)$ 上的最大值在 $y=\mathrm{e}$ 处取到,最大值为 $g(\mathrm{e})=1/\mathrm{e}$. 由于在 $(1,+\infty)\backslash\mathrm{e}$ 上,$g(y)<1/\mathrm{e}$,我们得知 $\mathrm{e}\ln a/a<1$ 对任意 $a\in(1,+\infty)\backslash\mathrm{e}$ 成立,因此 $a=\mathrm{e}$ 是 $(1,+\infty)$ 上唯一的满足条件的数.

1.1.22 令 $g(x)=\mathrm{e}^x/x^t, x>0$. 由于当 $x\to 0$ 和 $x\to+\infty$ 时,均有 $g(x)\to+\infty$,因此在中间必有一个最小值. 在最小值处,

$$g'(x)=\mathrm{e}^x x^{-t}(1-t/x)=0,$$

因此最小值在 $x=t$ 处取到,此时

$$g(x)=g(t)=\mathrm{e}^t/t^t=(\mathrm{e}/t)^t.$$

于是

$$\mathrm{e}^x\geqslant\left(\frac{x\,\mathrm{e}}{t}\right)^t,$$

且右边的式子当且仅当 $t<\mathrm{e}$ 时,它严格大于 x^t.

1.1.23 在区间 $[-1,1]$ 上,f 可以写成二阶 Lagrange 余项的 Maclaurin 多项式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}x^3,$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 在上式中令 $x=\pm1/n$,并结合要证明的结果,我们有

$$\begin{aligned} n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(-\frac{1}{n}\right)\right)-2f'(0)&=n\left(\frac{2f'(0)}{n}+\frac{f^{(3)}(\alpha_n)}{6n^3}+\frac{f^{(3)}(\beta_n)}{6n^3}-2f'(0)\right)\\ &=\frac{f^{(3)}(\alpha_n)+f^{(3)}(\beta_n)}{6n^2}, \end{aligned}$$

这里 $\alpha_n,\beta_n\in[-1,1]$. 由于 f''' 连续，存在 $M>0$，使得 $|f'''(x)|<M$ 对任意 $x\in[-1,1]$ 成立,因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(-\frac{1}{n}\right)\right)-2f'(0)\right|\leqslant\frac{M}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty.$$

1.1.24 由 Taylor 定理,

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)+\frac{f''(z)}{2}h^2,$$

其中 z 介于 x 与 $x+h$ 之间. 类似地,

$$f(x-h)-f(x)=-f'(x)h+\frac{f''(w)}{2}h^2,$$

w 介于 x 与 $x-h$ 之间. 将两式相加,除以 h^2,再令 $h\to 0$ 即证得所求结果.

1.1.25 *1.* 几何图形

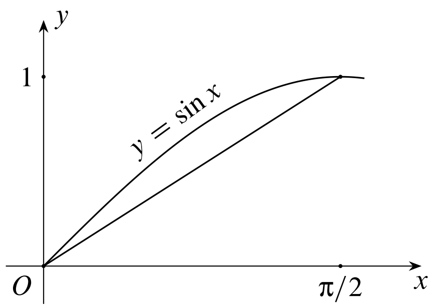


图 1.1

说明了

$$\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

严格的分析证明可以通过 $\sin\theta$ 在区间 $[0,\pi/2]$ 上是凹函数（二阶导数为负）的事实来写.

也可以通过下面的几何构造来说明（首先由 József Sándor 发现，后来由冯跃峰重新发现）:

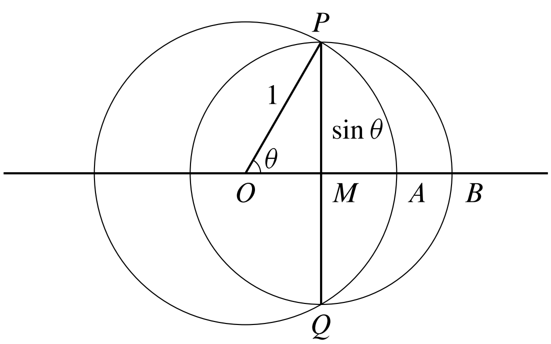


图 1.2

$$\begin{aligned} OB=OM+MB\geqslant OM &\Rightarrow \overset{\frown}{PBQ}\geqslant\overset{\frown}{PAQ}\\ &\Rightarrow \pi\sin\theta\geqslant 2\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin\theta \geqslant \frac{2\theta}{\pi}.$$

2. **方法一** 不等式

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\, R\,\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-2R\theta/\pi}\, R\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\pi \mathrm{e}^{-2R\theta/\pi}\Big|_0^{\pi/2} \\ &< \pi \end{aligned}$$

称为 Jordan 引理. 于是所求的极限为

$$\begin{aligned} \lim_{R\to+\infty} R^{\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \lim_{R\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\, R\,\mathrm{d}\theta \\ &< \lim_{R\to+\infty} R^{\lambda-1}\pi = 0. \end{aligned}$$

方法二 我们有

$$R^{\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = R^{\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta + R^{\lambda}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

由于 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/3$ 时，$\cos\theta\geqslant 1/2$，而 $\sin\theta$ 在 $[0,\pi/2]$ 上是增函数，我们有

$$\begin{aligned} R^{\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta &\leqslant 2R^{\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + R^{\lambda}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R\sin(\pi/3)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2R^{\lambda-1}\left(1-\mathrm{e}^{-R\sin(\pi/3)}\right) + \frac{R^{\lambda}\pi}{6}\mathrm{e}^{-R\sin(\pi/3)} \\ &= o(1) \quad (R\to\infty). \end{aligned}$$

1.1.26 设 $T=\mathbb{R}\backslash S$，由于每个非空区间都包含无穷个数，T 在 $\mathbb{R}$ 中是稠密的.

固定 $p\in T$，定义 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，

$$F(x)=\int_p^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

则 F 在 T 上恒为零，那么由 F 的连续性可知 F 在 $\mathbb{R}$ 上恒为零. 因此，我们就证明了 $F'=f\equiv 0$.

1.1.27 由 Rolle 定理知，存在 $c\in(0,1)$，使得 $f'(c)=0$. 而 f 的凹性说明 f 在 $(0,c)$ 上递增，在 $(c,1)$ 上递减. f 的图像在 $[0,c]$ 上的弧长为

$$L_{(0,c)}=\int_0^c \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{c}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2},$$

其中 $\xi_k \in \big(kc/n, (k+1)c/n\big)$. 由 Lagrange 中值定理,我们可以假定 ξ_k 满足

$$f'(\xi_k) = \frac{f\big((k+1)c/n\big) - f(kc/n)}{c/n}.$$

由于 f 是递增的,我们得到

$$\begin{aligned} L_{(0,c)} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{(c/n)^2 + \big[f\big((k+1)c/n\big) - f(kc/n)\big]^2} \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \big[c/n + f\big((k+1)c/n\big) - f(kc/n)\big] \\ & c + f(c). \end{aligned}$$

类似地,可得 $L_{(c,1)} \leqslant 1 - c + f(c)$,所以 $L_{[0,1]} \leqslant c + f(c) + 1 - c + f(c) \leqslant 3$.

1.1.28 $\int_1^{+\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛意味着 $\int_1^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,这说明极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 如果此极限不是 0,那么 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 均发散,因此我们可以假定 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 那么当 $r \to +\infty$ 时,$\int_{\lfloor r\rfloor}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x \to 0$(这里 $\lfloor r\rfloor$ 表示不超过 r 的最大整数),这意味着 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$(这是 n 是正整数)存在. 换句话说,$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的收敛性等价于 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的收敛. 因此,只需要证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n) \right| < +\infty.$$

我们有

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n) \right| &= \left| \int_n^{n+1} \big(f(x) - f(n)\big) \right| \\ &= \left| \int_n^{n+1} \int_n^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \int_n^{n+1} \int_n^{n+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \int_n^{n+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n) \right| < \int_1^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty,$$

得证.

1.1.29 我们有

$$|u(x)| = |u(x) - u(0)| \leqslant |x|,$$

且

$$|u^2(x)-u(x)| = |u(x)|\,|u(x)-1| \leqslant |x|(|x|+1),$$

所以

$$|\varphi(u)| \leqslant \int_0^1 |u^2(x)-u(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}.$$

等号成立当且仅当 $|u(x)| = x$ 且 $|u(x)-1| = x+1$,也就是 $u(x) = -x$,这刚好在 E 中.

1.1.30 由题意有

$$\begin{aligned} J(f) &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \int_t^1 f'(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned} |J(f)|^2 &= \left(\int_0^1 (1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \\ &\leqslant \int_0^1 (1-t)^2\,\mathrm{d}t \int_0^1 [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $f'(t) = \sqrt{3}(1-t)$,此时 $f(x) = \sqrt{3}(x-x^2/2)$. 即 J 在 S 上有上界,其上确界为 $\sqrt{3}/3$,且在 $f_0(x) = \sqrt{3}(x-x^2/2)$ 时取到其最大值.

1.1.31 令

$$u(t) = 1 + 2\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

我们有

$$u'(t) = 2f(t) \leqslant 2\sqrt{u(t)},$$

所以

$$\sqrt{u(t)} - 1 = \int_0^t \frac{u'(s)}{2\sqrt{u(s)}}\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \mathrm{d}s = t,$$

因此

$$f(t) \leqslant \sqrt{u(t)} \leqslant 1 + t.$$

1.1.32 我们将证明一定有 $b = 0$. 通过减去或者乘以常数,我们可以假定 $a = 0 \leqslant b$. 给定 $\varepsilon > p$,取 $R \geqslant 1$ 使得对任意 $x \geqslant R$,有

$$|\varphi(x)| \leqslant \varepsilon$$

且

$$\varphi'(x) \geqslant b/2 \geqslant 0.$$

由微积分基本定理得

$$\varphi(x) = \varphi(R) + \int_R^x \varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$2\varepsilon \geqslant \varphi(x) - \varphi(R) \geqslant \int_R^x \frac{b}{2}\,\mathrm{d}x = (x-R)b/2.$$

取 $x = 5R$，我们得到

$$b \leqslant \varepsilon/R \leqslant \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，因此必有 $b = 0$.

1.1.33 设 $0 \leqslant k_1 < k_2 < 1$，则对任意 $x \in (0, \pi/2)$，

$$\begin{aligned}
-k_1 \cos^2 x &> -k_2 \cos^2 x, \\
\sqrt{1 - k_1 \cos^2 x} &> \sqrt{1 - k_2 \cos^2 x}, \\
\frac{1}{\sqrt{1 - k_1 \cos^2 x}} &< \frac{1}{\sqrt{1 - k_2 \cos^2 x}}, \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k_1 \cos^2 x}}\,\mathrm{d}x &< \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k_2 \cos^2 x}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

1.1.34 利用变量替换 $y = x\sqrt{t}$，我们有

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{t}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{t}},
\end{aligned}$$

所以

$$f'(t) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} t^{-3/2}.$$

1.1.35 令

$$G(u, v, x) = \int_v^u \mathrm{e}^{t^2 + xt}\,\mathrm{d}t,$$

则 $F(x) = G(\cos x, \sin x, x)$，所以

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} \\
&= \mathrm{e}^{u^+ xu}(-\sin x) - \mathrm{e}^{v^+ xv}\cos x + \int_v^u t\,\mathrm{e}^{t^+ xt}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

且

$$F'(0) = -1 + \int_0^1 t\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-3).$$

1.1.36 方法一 *1.* 设 $f(z) \neq 0$,则

$$f(x)f(z) = f\left(\sqrt{x^2+z^2}\right) = f(-x)f(z),$$

所以 $f(x) = f(-x)$,且 f 是偶函数. 而且 $f(0)f(z) = f(z)$,所以 $f(0) = 1$. *2.* 我们将用数学归纳法来证明 $f(\sqrt{n}x) = f^n(x)$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 结论对 $n = 1$ 显然成立,假定结论对 $n = k$ 成立,我们有

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{k+1}x\right) &= f\left(\sqrt{\left(\sqrt{k}x\right)^2 + x^2}\right) \\ &= f\left(\sqrt{k}x\right)f(x) = f^k(x)f(x) = f^{k+1}(x). \end{aligned}$$

如果 $p, q \in \mathbb{N}$,则

$$f(p) = f\left(\sqrt{p^2}\cdot 1\right) = [f(1)]^{p^2},$$

且

$$f(|p|) = f\left(\sqrt{q^2}\cdot|p/q|\right) = \left(f(|p/q|)\right)^{q^2},$$

由此得到

$$\left(f(p/q)\right)^{q^2} = \left(f(1)\right)^{p^2}.$$

- 如果 $f(1) > 0$,我们有
$$f(p/q) = \left(f(1)\right)^{p^2/q^2},$$
于是由 f 在 $\mathbb{R}$ 上的连续性可得
$$f(x) = \left(f(1)\right)^{x^2}.$$
- 如果 $f(1) = 0$, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 的一个稠密集上恒为零,因此它在任意点均为零,与题设矛盾.
- 要说明 $f(1) < 0$ 不可能成立, 只需考虑 q 为偶数而 q 为奇数, 我们有 $f(p/q) > 0$,所以 f 在 $\mathbb{R}$ 的一个稠密集上恒为正,那么 $f(1) \geqslant 0$.

注意到我们只运用了 f 的连续性和它的函数方程.

求导容易验证 f 满足所给的微分方程. 于是,满足条件的一般函数为

$$c^{x^2},$$

其中 $0 < c < 1$.

方法二 *1.* 取 $x=y=0$，得 $[f(0)]^2=f(0)$，因此 $f(0)=0$ 或 1. 如果 $f(0)=0$，则对任意 x 有 $0=f\left(\sqrt{x^2}\right)$，因此 $f(x)=0,\forall x>0$. 如果存在 y 使得 $f(y)\neq 0$，则 $f(x)f(y)=0$ 意味着 $f(x)=0,\forall x$. 因此只要 $f(0)=0$，那么有 $f(x)\equiv 0$. 由于我们题设中 f 是非零的，因此必有 $f(0)=1$. 在函数方程中取 $y=0$，我们得到 $f(x)=f\left(\sqrt{x^2}\right)=f(-x)$，所以 f 为偶函数.
2. 等式两边关于 y 求导可得

$$f(x)f'(y)=f'(r)r_y,$$

这里 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，而 r_y 表示 r 对 y 的偏导数. 再次求导得

$$f(x)f''(y)=f''(r)r_y^2+f'(r)r_{yy}.$$

由于 $r_y=y/r$ 且 $r_{yy}=x^2/r^3$，取 $y=0$ 我们得到

$$f'(x)=f''(0)xf(x),$$

此微分方程的解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{f''(0)x^2/2}.$$

由于 f 在无穷远处取零，必有 $f''(0)/2=-\gamma<0$. 因此 $f(x)=\mathrm{e}^{-\gamma x^2}$，这里 γ 是某个正的常数.

1.1.37 设 C 是所有使得 $\varepsilon_n=1$ 或 -1 的序列 $\varepsilon=(\varepsilon_n)_1^\infty$ 构成的集合，它是一个不可数集. 对 $\varepsilon\in C$，令 f_ε 表示 $[0,1]$ 上的满足如下条件的函数：

1. $f_\varepsilon(0)=0$；
2. 对任意正整数 n，有 $f_\varepsilon(1/n)=\varepsilon_n/n$；
3. 在每个区间 $[1/(n+1),1/n]$ 上，f_ε 是一个线性函数，其端点值就是 2 中所给的值.

每个函数 f_ε 都是连续的：f_ε 在 $(0,1]$ 上的连续显然，而在 0 处连续性由 $|f(x)|\leqslant x$ 可得. 每个 f_ε 在有理点处取有理值，如果 x 是点 $a=1/(n+1)$ 和 $b=1/n$ 之间的一个有理点，则 $x=(1-t)a+tb$，这里 t 是 $[0,1]$ 上的某个有理数. 因此由 $f_\varepsilon(a)$ 和 $f_\varepsilon(b)$ 均为有理数可知 $f_\varepsilon(x)=(1-t)f_\varepsilon(a)+tf_\varepsilon(b)$ 也是有理数. 那么函数 f_ε 就构成了 S 的一个不可数子集，这说明 S 是不可数的.

1.2 极限与连续

1.2.1 固定 x_0. 我们有

$$|g(x)-g(x_0)|=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{-R} + \int_{-R}^{R} + \int_{R}^{+\infty} \frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

这里 R 是一个正数. 固定 $\varepsilon > 0$, 由 f 的有界性以及 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ 的收敛性，我们可以取 R 使得上式右端的第一个和最后一个积分都小于 $\varepsilon/3$. 由于 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，则它在紧集 $[x_0 - 1, x_0 + 1] \times [-R, R]$ 上一致连续. 因此，存在 $\delta \in (0,1)$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，

$$|f(x,t) - f(x_0,t)| < \frac{\varepsilon}{6R}, \quad \forall\, t \in [-R, R].$$

因此，对 $|x - x_0| < \delta$，中间的积分也小于 $\varepsilon/3$，这意味着 $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$，这就证明了 g 的连续性.

1.2.2 考虑 $f(x) = \sin x$，由 Lagrange 中值定理得

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y) = \cos\xi(x - y), \quad \xi \in (0,1).$$

且由于 $|\cos\xi| < 1$，这意味着当 $x \neq y$ 时，

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

如果 $M < 1$ 使得对 $\forall x, y \in I$ 有

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y|,$$

那么取 $x = 0$，并令 $y \to 0$，我们得到 $|f'(0)| \leqslant M < 1$，这和 $f'(0) = 1$ 矛盾.

1.2.3 假定 f 在 $\xi \in [0,1]$ 处不连续，则对某个 $\varepsilon > 0$，存在序列 (x_n) 收敛到 ξ，且 $|f(x_n) - f(\xi)| > \varepsilon$ 对所有 n 成立. 由第一个条件可知，存在一个序列 (y_n) 介于 ξ 和 x_n 之间，且 $|f(y_n) - f(\xi)| = \varepsilon$，则

$$\begin{aligned} y_n &\in f^{-1}\big(f(\xi) + \varepsilon\big) \cup f^{-1}\big(f(\xi) - \varepsilon\big), \\ \xi &\notin f^{-1}\big(f(\xi) + \varepsilon\big) \cup f^{-1}\big(f(\xi) - \varepsilon\big), \end{aligned}$$

这个第二个条件矛盾.

1.2.4 存在 $\delta >)$，当 $|x - y| \leqslant \delta$ 时，$|f(x) - f(y)| \leqslant 1$. 置 $B = 1/\delta$，任取 $x > 0$，令 $n_x = \lfloor x/\delta \rfloor$ 表示不超过 x/δ 的最大整数，则

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(0)| \\ &\leqslant |f(x) - f(n_x\delta)| + \sum_{j=1}^{n} \big|f(j) - f\big((j-1)\delta\big)\big| \\ &\leqslant 1 + n_x \leqslant 1 + Bx. \end{aligned}$$

这个证明对 $x<0$ 也是类似的.

1.2.5 *1.* 设 f_1 是 f 在 $[0,2]$ 上的限制，由周期性可知 f 和 f_1 的值域是相同的，所以 f 能取到其最大值和最小值.

2. 对任意 $\varepsilon>0$，由于 f_1 是紧集上的连续函数，因此它是一致连续的. 于是存在 $\delta>0$，使得对 $a,b\in[0,2]$，当 $|a-b|<\varepsilon$ 时，

$$|f_1(a)-f_1(b)|<\delta.$$

设 $x,y\in\mathbb{R}$ 满足 $|x-y|<\delta$，则存在 $x_1,x_2=x_1+x,y_1,y_2=y_1+1\in[0,2]$，满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x),f(y_1)=f(y_2)=f(y)$，且 $|x_i,y_j|<\delta$ 对某个 $i,j\in\{1,2\}$ 成立，于是结论成立.

3. 设 f 分别在 ξ_1 和 ξ_2 处取到其最大值和最小值，则

$$f(\xi+\pi)-f(\xi_1)\leqslant 0\quad \text{且} f(\xi_2+\pi)-f(\xi_2)\geqslant 0.$$

由于 f 是连续的，那么由介值定理可知结论得证.

1.2.6 设 (x_n) 是 $[0,1)$ 中一列收敛到 0 的数. 由于 h 是一致连续的，给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|x-y|<\delta$ 时，$|h(x)-h(y)|<\delta$. 因此，我们有

$$|h(x_n)-h(x_m)|<\delta$$

对充分大的 m,n 成立. $\big(h(x_n)\big)$ 于是为 Cauchy 列，那么它是收敛的，不妨设收敛到 ξ. 如果 (y_n) 是另一个收敛到 0 的序列，对 $h(y_1),h(y_2),\cdots$ 进行类似的讨论可知 $\lim\limits_{n\to\infty}h(y_n)=\xi$. 定义函数 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases}h(x), & x\in[0,1)\\ \xi, & x=0\end{cases},$$

显然就是 h 在 $[0,1]$ 上唯一的连续延拓.

1.2.7 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$. 给定 $\varepsilon>0$，存在 $K>0$，使得当 $x\geqslant K$ 时，$|f(x)-a|<\varepsilon/2$. 如果 $x,y\geqslant K$，则我们有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-a|+|a-f(y)|\leqslant\varepsilon.$$

区间 $[0,K]$ 是紧的，所以 f 在其上一致连续，即存在 $\delta>0$，使得当 $|x-y|<\delta$ 时，$|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$. 最后，如果 $x\leqslant K,y>K$ 且 $|f(x)-f(y)|<\delta$，我们有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(K)|+|f(K)-f(y)|<\varepsilon,$$

因此,只要 $x, y \geqslant 0$ 且 $|x-y|<\delta$ 时,就有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$,证毕.

1.2.8 方法一 设 E 表示 f 的所有不连续点的集合,我们有 $E=E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$,这里

$$
\begin{aligned}
& E_1=\{x \in E \mid f(x-)=f(x+)<f(x)\}, \quad E_2=\{x \in E \mid f(x-)>f(x+1)\}, \\
& E_3=\{x \in E \mid f(x-)=f(x+)>f(x)\}, \quad E_4=\{x \in E \mid f(x-)<f(x+1)\} .
\end{aligned}
$$

对 $x \in E_1$，令 $a_x \in \mathbb{Q}$ 满足 $f(x-)<a_x<f(x+)$. 现在取 $b_x, c_x \in \mathbb{Q}$ 使得 $b_x<x<c_x$,且

$$
b_x<t<c_x, x \neq t \Rightarrow f(t)<a_x .
$$

由 $x \mapsto(a_x, b_x, c_x)$ 定义的映射 $\varphi: E_1 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ 是单射，因为如果 $x \neq y$，则 $(a_x, b_x, c_x)=(a_y, b_y, c_y)$ 意味着 $f(y)<a_x<f(y)$. 所以 E_1 是至多可数的.

对 $x_{\in} E_2$，取 $a_x \in \mathbb{Q}$ 使得 $f(-)>a_x>f(x+)$，并选取 $b_x, c_x \in \mathbb{Q}$ 使得 $b_x<x<c_x$,且

$$
b_x<t<x \Rightarrow f(t)>a_x,
$$

而

$$
t<c_x \Rightarrow f(t)<a_x .
$$

这是一个从 E_2 到 $\mathbb{Q}^3$ 的单射,所以 E_2 是至多可数的.

类似的方法可对 E_3 和 E_4 得出相同的结果,而可数集的并仍然可数,结论得证.

方法二 函数 $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$
\sigma(x)=\max \{|f(x)-f(x+)|,|f(x)-f(x-)|\},
$$

注意到 $\sigma(x)>0$ 当且仅当 x 是 f 的不连续点.

对每个 $n \in \mathbb{N}$,集合 D_n 定义为

$$
D_n=\left\{x \in \mathbb{R} \left\lvert\, \sigma(x) \geqslant \frac{1}{n}\right.\right\}
$$

显然 f 的不连续点的集合 $D=\cup_{n=1}^{\infty} D_n$. 我们将证明每个 D_n 都没有聚点，因而是可数的. 如果 $a \in D_n$，根据 $f(a+)=\lim\limits_{x \rightarrow a^{+}} f(x)$，存在 $\delta>0$，使得对任意 $x \in(a, a+\delta)$,我们有

$$
f(a+)-\frac{1}{4 n}<f(x)<f(a+)+\frac{1}{4 n},
$$

即对此区间内的每个点 x，有 $\sigma(x) \leqslant 1/(2n)$. 用同样的方式，我们能找到一个开集 $(a-\delta, a)$，使得其中不包含 D_n 中的点，这说明 D_n 是由孤立点构成的集合，因而可数，进而 D 可数.

1.2.9 根据问题 1.2.8，只需要证明 f 在所有点处具有单侧极限. 对任意 $x \in \mathbb{R}$，由于 f 是增函数，我们有

$$-\infty < \sup_{y<x}\{f(y)\} = f(x-) \leqslant f(x+) = \inf_{y<x}\{f(y)\} < +\infty.$$

1.2.10 给定 $\varepsilon > 0$，对每个 $x \in [0,1]$，设 δ_x 如题所设，令 $I_x = (x-\delta_x, x+\delta_x)$. 开区间 $\{I_x\}$ 覆盖了区间 $[0,1]$，那么由 $[0,1]$ 的紧性与 Heine-Borel 定理，我们可以取一个有限子覆盖

$$[0,1] \subset I_{x_1} \cup I_{x_2} \cup \cdots \cup I_{x_n}.$$

记 $M = \max\{f(x_i)+\varepsilon\}$. 如果 $x \in [0,1]$，则 $f(x) < M$，且由上述可知 f 是有界的.

设 N 表示 f 在 $[0,1]$ 上的上确界. 则存在一列 (x_n)，使得 $\big(f(x_n)\big)$ 趋于 N：由于 $[0,1]$ 是紧的，由 Bolzano-Weierstrass 定理，(x_n) 有一个收敛的子列，因此我们不妨假定 (x_n) 收敛到某个 $p \in [0,1]$. 由 f 的上半连续性和 $\big(f(x_n)\big)$ 的收敛性，对充分大的 n，我们有 $f(x_n) < f(p)+\varepsilon$ 且 $N < f(x_n)+\varepsilon$，合起来得到 $f(p) \leqslant N < f(p)+\varepsilon$. 由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性，我们得到 $f(p) = N$.

1.2.11 假定 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续，且将开集映为开集，但不是单调的. 不失一般性，假定存在三个数 $a < b < c$，使得 $f(a) < f(b) > f(c)$. 由 Weierstrass 定理，f 在 $[a,c]$ 内存在最大值，这个最大值点不可能是 a 或 c. 那么 $f(a,c)$ 不可能是开集，因为它包含 M，而对 $\varepsilon > 0$，$M+\varepsilon$ 不在其中. 由此可知 f 一定是单调的.

1.2.12 所给不等式说明 f 是一一映射，所以 f 是严格单调的，且将开区间映为开区间，于是 $f(\mathbb{R})$ 是开集.

设 $z_n = f(x_n)$ 是 $f(\mathbb{R})$ 中收敛于 $z \in \mathbb{R}$ 的一个数列，则 z_n 是 Cauchy 列. 且由题中不等式可知，x_n 也是 Cauchy 列，记 $x = \lim x_n$. 由连续性我们有 $f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = z$，因此 $f(\mathbb{R})$ 也是闭的，于是 $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

1.2.13 *1.* 对 $\varepsilon > 0$，令

$$L = \max_{x\in[0,1]}(|f(x)|+1) \quad 且 \quad 0 < \delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2L}, 1\right\}$$

我们有

$$\left|\int_{1-\delta}^{1} x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{1-\delta}^{1} x^n|f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant L\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

且

$$\left|\int_{0}^{1-\delta} x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{0}^{1-\delta} (1-\delta)^n|f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant L\delta^{n+1},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$
2. 我们将证明
$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n\big(f(x)-f(1)\big)\,\mathrm{d}x=0.$$
对 $\varepsilon>0$,存在充分小的 $\delta>0$,使得当 $x\in[1-\delta,1]$ 时,$|f(x)-f(1)|<\varepsilon/2$. 我们有
$$\begin{aligned}\left|n\int_{1-\delta}^1 x^n\big(f(x)-f(1)\big)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant n\int_{1-\delta}^1 x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant n\int_{1-\delta}^1 x^n\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$
再令 $L=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-f(1)|$,则
$$\left|n\int_0^{1-\delta} x^n\big(f(x)-f(1)\big)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant n\int_0^{1-\delta}x^nL\,\mathrm{d}x=n\frac{(1-\delta)^{n+1}}{n+1}\to 0,$$
因此我们断言的结论成立.

现在只需注意到
$$n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=n\int_0^1 x^n\big(f(x)-f(1)\big)\,\mathrm{d}x+n\int_0^1 f(1)x^n\,\mathrm{d}x,$$
因此原极限为 $f(1)$.

1.2.14 假定 f 是不连续的，则存在一个 $\varepsilon>0$，和 $x\in[0,1]$，序列 (x_n) 趋于 x，且对任意 n 有 $|f(x)-f(x_n)|\geqslant\varepsilon$. 在 G_f 上考虑点列 $\big(x_n,f(x_n)\big)$，由于单位圆是紧的，由 Bolzona-Weierstrass 定理，此点列有一个收敛的子列，那么我们不妨假定 $\big(x_n,f(x_n)\big)$ 收敛到某个点 (y,z). 那么必有序列 (x_n) 收敛于 y，由极限的唯一性可知 $x=y$. 由于 G_f 是闭的，我们有 $z=f(x)$. 因此 $\big(f(x_n)\big)$ 收敛到 $f(x)$，这与最初的假设矛盾.

此题的逆命题也是正确的，参见问题 2.1.2.

1.2.15 对每个 $y\in[0,1]$，考虑函数 $g_y(x)=f(x,y)$，则 $g(x)=\sup g_y(x)$. 由于 f 一致连续，函数族 $\{g_y\}$ 是等度连续的. 只需要证明一组等度连续函数的逐点上确界是连续的. 给定 $\varepsilon>0, x_0\in[0,1]$，存在 y_0 使得
$$g_{y_0}(x_0)\leqslant g(x_0)<g_{y_0}(x_0)+\varepsilon.$$
设正数 δ 满足对所有的 y，当 $|r-s|<\delta$ 时，$|g_y(r)-g_y(s)|<\varepsilon$. 且 $|x_0-x_1|<\delta$，存在 y_1 使得
$$g_{y_1}(x_1)\leqslant g(x_1)<g_{y_1}(x_1)+\varepsilon.$$

进一步，由 $\{g_y\}$ 的连续性，我们有

$$|g_{y_0}(x_0)-g_{y_0}(x_1)|<\varepsilon \quad \text{且} \quad |g_{y_1}(x_0)-g_{y_1}(x_1)|<\varepsilon.$$

将以上式子结合起来得到

$$g_{y_0}(x_0)<g_{y_0}(x_1)+\varepsilon<g(x_1)+\varepsilon<g_{y_1}(x_1)+2\varepsilon,$$

且

$$g_{y_1}(x_1)<g_{y_1}(x_0)+\varepsilon<g(x_0)+\varepsilon<g_{y_0}(x_0)+2\varepsilon.$$

这两个不等式说明 $|g_{y_1}(x_1)-g_{y_0}(x_0)|<2\varepsilon$，集合最初的两个不等式，说明 $|g(x_0)-g(x_1)|<3\varepsilon$. 由于此不等式对所有的 ε, x_0，以及 x_0 附近的 x_1 均成立，所以 g 是连续的.

1.2.16 我们只需证明当 F 是闭集时，$f^{-1}(F)$ 也是闭集即可. 设 F 是 $\mathbb{R}$ 的一个闭子集，令 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $f^{-1}(F)$ 中的收敛到 x_0 的一个序列，只需证明 $x_0\in f^{-1}(F)$. 对 $n>0$，令 $y_n=f(x_n)$. 序列 $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ 在 F 中，且有界（由于 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 有界）. 通过取子列的方法，我们可以假定序列 $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛，不妨设收敛到 y_0. 因为 F 是闭的，所以 $y_0\in F$. 那么集合 $K=\{y_0,y_1,y_2,\cdots\}$ 是紧的，因此 $f^{-1}(K)$ 也是紧的，那么 $f^{-1}(K)$ 包含它的聚点. 而序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 在 $f^{-1}(K)$ 中，且收敛到 x_0，所以 $x_0\in f^{-1}(K)$，自然 $x_0\in f^{-1}(F)$，证毕.

1.3 数列、级数与无穷乘积

1.3.1 首先 $A_1^n\leqslant A_1^n+\cdots+A_k^n\leqslant kA_1^n$，所以我们有

$$\begin{aligned}A&=\lim_{n\to\infty}(A_1^n)^{1/n}\leqslant\lim_{n\to\infty}(A_1^n+\cdots+A_k^n)^{1/n}\\&=\leqslant\lim_{n\to\infty}(kA_1^n)^{1/n}=A_1.\end{aligned}$$

这说明所求极限等于 A_1.

1.3.2 方法一 设 $p_1=1, p_2=(2/1)^2, p_3=(3/2)^3,\cdots,p_n=\big(n/(n-1)\big)^n$. 则

$$\frac{p_1p_2\cdots p_n}{n}=\frac{n^n}{n!},$$

由于 $p_n\to \mathrm{e}$，所以我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^n/n!)^{1/n}=\mathrm{e}$.

方法二 由于指数函数的连续性，我们令

$$L_n=\ln n-\frac{1}{n}(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n),$$

则极限 $L=\exp\big(\lim\limits_{n\to\infty}L_n\big)$ 存在. 由于

$$\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln(n-1)\leqslant\int_1^n\ln x\,\mathrm{d}x=n\ln n-n+1,$$

当 $n\to\infty$ 时,我们有

$$L_n\geqslant(1-1/n)\ln n-\ln n+1-1/n=1-(1+\ln n)/n\to 1.$$

另一方面,

$$\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n\geqslant\int_1^n\ln x\,\mathrm{d}x=n\ln n-n+1,$$

所以

$$L_n\leqslant\ln n-(n\ln n-n+1)/n=1-1/n\to 1.$$

于是 $L_n\to 1$,那么 $L=\exp(1)=\mathrm{e}$.

方法三 与方法二类似,$L=\exp\big(\lim\limits_{n\to\infty}L_n\big)$,其中

$$\begin{aligned}L_n&=\frac{1}{n}\ln\frac{n^n}{n!}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{n}{k}\\&=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\to-\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x=1,\end{aligned}$$

因此 $L=\mathrm{e}$.

1.3.3 **方法一** 显然,对任意 n 有 $x_n\geqslant 1$. 所以,如果极限存在,它必然 $\geqslant 1$,并且我们可以在递推关系里面取极限得到

$$x_\infty=\frac{3+2x_\infty}{3+x_\infty}.$$

换句话说,$x_\infty^2+x_\infty-3=0$,那么 x_∞ 是此方程的正根,即 $x_\infty=\big(-1+\sqrt{13}\big)/2$.

要证明此极限存在,我们利用递推关系得到

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\frac{3+2x_n}{3+x_n}-\frac{3+2x_{n-1}}{3+x_{n-1}}\\&=\frac{3(x_n-x_{n-1})}{(3+x_n)(3+x-n+1)}.\end{aligned}$$

因此,$|x_{n+1}-x_n|\leqslant|x_n-x_{n-1}|/3$. 递推下去可知

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant 3^{-n}|x_1-x_0|=\frac{1}{3^n\cdot 4}.$$

由比较判别法,可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛,因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n-x_1$,得证.

方法二 要证明该数列极限的存在性，定义

$$g(x)=\frac{3+2x}{3+x},$$

我们有

$$|g'(x)|\leqslant\frac{3}{16}\leqslant 1, x\geqslant 1,$$

然后由不动点定理即可.

1.3.4 **方法一** 我们归纳证明对 $n\geqslant 1$，有 $0<x_n<1/2$. 首先，$0<x_1=1/3<1/2$. 假定对 $n\geqslant 1$ 有 $0<x_n<1/2$，则 $2/5<x_{n+1}=1/(2+x_n)<1/2$，这就完成了归纳证明.

令 $f(x)=1/(2+x)$，方程 $f(x)=x$ 在区间 $[0,1/2]$ 上只有唯一解 $p=\sqrt{2}-1$. 进一步，当 $0<x<1/2$ 时，$|f'(x)|=1/(2+x)^2<1/4$. 那么利用 Lagrange 中值定理，对 $n\geqslant 1$ 有

$$|x_{n+1}-p|=|f(x_n)-f(p)|\leqslant\frac{1}{4}|x_n-p|.$$

递推下去，我们得到

$$|x_{n+1}-p|\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^2|x_{n-1}-p|\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^n|x_1-p|.$$

因此，数列 (x_n) 的极限为 $\sqrt{2}-1$.

方法二 令 $f(x)=1/(2+x), 0\leqslant x\leqslant 1$. 则 f 将闭区间 $[0,1]$ 映为 $[1/3,1/2]\subset[0,1]$. 且

$$|f'(x)|=\left|\frac{1}{(2+x)^2}\right|\leqslant\frac{1}{4}, x\in[0,1].$$

因此 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是一个压缩映射，且 Lipschitz 常数 $1/4<1$，所以 f 有唯一的不动点，且上述定义的数列 $x_{n+1}=f(x_n)$ 收敛到 y. 我们有 $y=1/(2+y)$，于是 $y=\sqrt{2}-1$.

1.3.5 **方法一** 由所给递推式可得 $x_{n+1}-x_n=(\alpha-1)(x_n-x_{n-1})$，因此归纳可知 $x_n-x_{n-1}=(\alpha-1)^{n-1}(x_1-x_0)$. 这说明此数列是 Cauchy 列，因而收敛. 所以

$$x_n-x_0=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=(x_1-x_0)\sum_{k=1}^{n}(\alpha-1)^{k-1},$$

取极限，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{(1-\alpha)x_0+x_1}{2-\alpha}.$$

方法二 递推式可以写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_n\\x_{n-1}\end{pmatrix},\quad 这里\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\alpha&1-\alpha\\1&0\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

直接计算可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1 和 $\alpha - 1$，相应的特征向量分别为 $\boldsymbol{v}_1 = (1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{v}_2 = (\alpha - 1, 1)^{\mathrm{T}}$. 进一步计算可知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \frac{(1-\alpha)x_0 + x_1}{2-\alpha}\boldsymbol{v}_1 + \frac{x_0 - x_1}{2-\alpha}\boldsymbol{v}_2.$$

因此，

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \frac{(1-\alpha)x_0 + x_1}{2-\alpha}\boldsymbol{v}_1 + (\alpha-1)^n \frac{x_0 - x_1}{2-\alpha}\boldsymbol{v}_2.$$

由于 $|\alpha - 1| < 1$，我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha-1)^n = 0$，因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{(1-\alpha)x_0 + x_1}{2-\alpha}.$$

1.3.6 所给递推关系可以写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{这里}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2c & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

数列 (x_n) 以 k 为周期，当且仅当 $\boldsymbol{A}^k = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $\lambda^2 - 2c\lambda + 1$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $c \pm \sqrt{c^2 - 1}$. $\boldsymbol{A}^k = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 的一个必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均 k 次单位根，这意味着 $c = \cos(2\pi j/k), j = 0, 1, \cdots, \lfloor k/2 \rfloor$. 如果 c 具有前述形式且 $0 < j < k/2$（即 $-1 < c < 1$），则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是互异的（即 $\boldsymbol{A}$ 是可对角化的），且等式 $\boldsymbol{A}^k = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 成立. 如果 $c = 1$ 或 -1，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值不是互异的，且 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 或 $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$，此时 $\boldsymbol{A}^k \neq \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. 因此，要想 (x_n) 以 k 为周期，当且仅当 $c = \cos(2\pi j/k)$，这里 j 为整数，且 $0 < j < k/2$.

1.3.7 如果 $\lim x_n = x_\infty \in \mathbb{R}$，我们有 $x_\infty = a + x_\infty^2$，所以

$$x_\infty = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$$

因此必有 $a \leqslant 1/4$.

反过来，假定 $0 < a \leqslant 1/4$. 由于 $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_{n-1}^2$，那么由归纳原理，$(x_n)$ 是非递减的，且

$$x_{n+1} = a + x_n^2 < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

这说明 (x_n) 是有界的，从而 (x_n) 是收敛的.

1.3.8 首先，我们归纳证明 (x_n) 是有界的：取充分大的 M，使得对任意 n 均有 $\max\{|x_n|, |2_{n+1} - x_n|\} \leqslant M$. 于是

$$|x_{n+1}| = \left|\frac{x_n + (2x_{n+1} - x_n)}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}(|x_n| + |2x_{n+1} - x_n|) \leqslant M,$$

这说明 (x_n) 是有界的，现在来计算极限. 注意到

$$x_{n+1} = \frac{x_n + (2x_{n+1} - x_n)}{2},$$

两边取上极限得

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \frac{1}{2}\Big(\limsup_{n\to\infty} x_n + x\Big),$$

于是 $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant x$. 同理我们可得 $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant x$，这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

1.3.9 令 $y_n = x_n/\sqrt{a}$，只需证明 $y_n \to 1$ 即可. 序列 (y_n) 满足递推关系

$$y_n = \frac{1}{2}\Big(y_{n-1} + \frac{1}{y_{n-1}}\Big).$$

由算术-几何平均值不等式可知

$$y_n \geqslant \sqrt{y_{n-1} \cdot \frac{1}{y_{n-1}}} = 1,$$

于是对任意 n，都有

$$y_{n-1} - y_n = \frac{1}{2}\Big(y_{n-1} - \frac{1}{y_{n-1}}\Big) \geqslant 0,$$

这说明 (y_n) 是非递减的. 而它又是有下界的，所以它是收敛的. 设 $y_n \to y$，那么递推式说明

$$y = \frac{1}{2}\Big(y + \frac{1}{y}\Big),$$

即 $y = 1/y$，因此 $y = 1$.

1.3.10 显然，$0 \leqslant x_{n+1} = x_n(1 - x_n^n) \leqslant x_n \leqslant \cdots \leqslant x_1$ 对任意 n 成立. 于是

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n^n) \geqslant x_n(1 - x_1^n),$$

因此

$$x_n \geqslant x_1 \prod_{k=1}^{n}(1 - x_1^k) = x_1 \exp\Bigg(\sum_{k=1}^{n} \ln(1 - x_1^k)\Bigg).$$

由于 $\ln(1-x_1^k)=O(x_1^k), k\to\infty$，上述和式在 $n\to\infty$ 时，会趋于一个有限值 L，那么我们得到

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \geqslant x_1\exp(L) > 0.$$

1.3.11 *1.* 我们有

$$f(x)=\frac{1}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$

所以 x_n 有上界 $1/2$，且由归纳法可知 x_n 是非递减的. 用 λ 表示其极限，则

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2.$$

且由于 x_n 只取非负值，因此 $\lambda=1/2$. *2.* 显然，由以上 f 的表达式可知，当 $x\leqslant -1/2$ 时，$f(x)\leqslant x$. 且当 $x\geqslant 3/2$ 时，$f(x)\leqslant -1/2$. 也就是说当 $x\leqslant 1/2$ 或 $x\geqslant 3/2$ 时，数列是发散的.

另一方面，如果 $|x-1/2|<1$，我们得到

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\left|x-\frac{1}{2}\right|.$$

所以，对于这样的初值，我们有

$$\left|x_{n+1}-\frac{1}{2}\right|<\left|x-\frac{1}{2}\right|^n=o(1).$$

1.3.12 假定极限 $\lim f_{n+1}/f_n=a<+\infty$，那么由 f_n 的递增性可知 $a\geqslant 1$. 我们有

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}=1+\frac{f_{n-1}}{f_n},$$

令 $n\to\infty$，我们得到

$$a=1+\frac{1}{a}\Leftrightarrow a^2-a-1=0.$$

此二次方程有一个正根

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

现在我们来证明序列 (f_{n+1}/f_n) 是 Cauchy 列. 由 f_n 的定义可知

$$\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}-\frac{f_n}{f_{n-1}}\right|=\left|\frac{f_{n-1}^2-f_nf_{n-2}}{f_{n-1}^2+f_{n-1}f_{n-2}}\right|.$$

由于 f_n 是递增序列，

$$f_{n-1}(f_{n-1}-f_{n-2})\geqslant 0\Leftrightarrow f_{n-1}^2+f_{n-1}f_{n-2}\geqslant 2f_{n-1}f_{n-2},$$

于是我们得到
$$\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}-\frac{f_n}{f_{n-1}}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\frac{f_n}{f_{n-1}}-\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}\right|.$$
那么归纳可知
$$\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}-\frac{f_n}{f_{n-1}}\right|\leqslant\frac{1}{2^{n-2}}\left|\frac{f_3}{f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right|.$$
因此由三角形不等式，知对所有 $m>n$，
$$\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}-\frac{f_n}{f_{n-1}}\right|\leqslant\left|\frac{f_3}{f_2}-\frac{f_2}{f_1}\right|\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2^{k-2}}.$$
显然当 $n\to\infty$ 时，右边是趋于 0 的，因此序列 (f_{n+1}/f_n) 是 Cauchy 列，证毕.

1.3.13 **方法一** 我们有
$$\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n},$$
这是函数 $1/(1+x)$ 把区间 $[0,1]$ 等分为 n 个子区间的 Riemann 和，因此有
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln 2.$$
方法二 利用不等式
$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^k,\quad k\geqslant 2,$$
我们得到
$$\begin{aligned}\ln 2&=\ln\left(\prod_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{k-1}\right)=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)^k\\&>\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}>\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)^k=\ln\left(\prod_{k=n+1}^{2n}\frac{k+1}{k}\right)\\&=\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\to\ln 2.\end{aligned}$$
因此，由夹逼准则可得
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\ln 2.$$
方法三 我们有
$$\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} - 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\Big) \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n},
\end{aligned}
$$

那么根据 $\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 展开式即证得所求结果.

1.3.14 我们有

$$
\begin{aligned}
H_{nk} - H_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{nk} \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{k}\right),
\end{aligned}
$$

上式右边是积分 $\int_1^k \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 把区间 $[1,k]$ 等分为 $(k-1)n$ 个子区间的 Riemann 下和. 由于 Riemann 下和小于对应的积分值 $\ln k$，我们得到 $H_{nk} - H_n < \ln k$.

要得到另一半不等式，利用不等式 $\ln(1+x) < x, x > 0$ 可得

$$
\begin{aligned}
\ln k - (H_{nk} - H_n) &= \sum_{i=n}^{nk-1} \ln\frac{i+1}{i} - \sum_{i=n}^{nk} \frac{1}{i} \\
&< \sum_{i=n}^{nk-1} \frac{1}{i} - \sum_{i=n+1}^{nk-1} \frac{1}{i} = \frac{1}{n} - \frac{1}{nk} < \frac{1}{n},
\end{aligned}
$$

即取 $C = 1$ 即可.

1.3.15 **方法一** 设 $n > 0$. 对 $m \geqslant n$，我们有

$$
x_m \leqslant x_n + \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k^2} \leqslant x_n + \xi_n,
$$

这里

$$
\xi_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}.
$$

对 m 取上极限，我们有

$$
x_n \geqslant \limsup_{m\to\infty} x_m - \xi_n.
$$

由于级数 $\sum 1/k^2$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$. 再对 n 取下极限，我们得到

$$
\liminf_{n\to\infty} x_n \geqslant \limsup_{m\to\infty} x_m - \liminf_{n\to\infty} \xi_n \geqslant \limsup_{m\to\infty} x_m.
$$

而反向的不等式显然成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

方法二 注意到对 $n \geqslant 2$ 有

$$
x_{n+1} < x_n + \frac{1}{n(n-1)} = x_n + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},
$$

于是

$$x_{n+1}+\frac{1}{n}<x_n+\frac{1}{n-1}.$$

这说明正数列 $\left(x_n+\frac{1}{n-1}\right)$ 是单调递减的，因此它收敛，那么

$$x_n=\left(x_n+\frac{1}{n-1}\right)+\frac{1}{n-1}$$

也是收敛的.

1.3.16 固定 $\delta>0$，取 n_0 使得对任意 $n\geqslant n_0$ 均有 $\varepsilon_n<\delta$，则

$$\begin{aligned}
a_{n_0+1}&\leqslant ka_{n_0}+\varepsilon_{n_0}<ka_{n_0}+\delta,\\
a_{n_0+2}&<k^2a_{n_0}+k\delta+\varepsilon_{n_0+1}<k^2a_{n_0}+(1+k)\delta,\\
a_{n_0+3}&<k^3a_{n_0}+(k+k^2)\delta+\varepsilon_{n_0+2}<k^3a_{n_0}+(1+k+k^2)\delta,
\end{aligned}$$

由归纳法可得

$$a_{n_0+m}<k^ma_{n_0}+(1+k+\cdots+k^{m-1})\delta<k^ma_{n_0}+\frac{\delta}{1-k}.$$

令 $m\to\infty$，我们得到

$$\limsup_{n\to\infty}a_n\leqslant\frac{\delta}{1-k}.$$

由于 δ 是任意的，我们有 $\limsup\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant 0$，而 $a_n>0,\forall n$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

1.3.17 如果 (x_n) 是无界的，不失一般性，假定其没有有限的上界. 取 $x_{n_1}=x_1$，而对每个 $k\in\mathbb{N}$，取 x_{n_k} 使得 $x_{n_k}>\max\{k,x_{n_{k-1}}\}$，那么这显然是 (x_n) 的一个递增子列.

如果 (x_n) 是有界的，那么它必有一个收敛子列，不妨设为 $\lim y_n=\xi$. (y_n) 有一个收敛到 $\xi+$（这是指大于 ξ 且收敛于 ξ 的意思）或 $\xi-$ 的子列. 假定 (z_n) 就是 (y_n) 的收敛到 $\xi+$ 的子列，取 $z_{n_1}=z_1$，对每个 $k\geqslant 1$，令 $\xi\leqslant z_{n_k}<z-n_{k-1}$，那么这就是 (x_n) 的单调子列.

1.3.18 假定存在 $x>1,\varepsilon>0$，使得 $|b_m/b_n-x|\geqslant\varepsilon$ 对所有的 $1\leqslant n<m$ 成立. 由于 $\lim(b_n/b_{n+1})=1$，那么对充分大的 k，存在一个整数 $n_k>k$，使得

$$\begin{cases}b_m/b_k<x, & m<n_k\\ b_m/b_k>x, & m>n_k\end{cases}.$$

特别地，对每个 k，

$$\frac{b-n_k+1}{b_k}-\frac{b_{n_k}}{b_k}\geqslant 2\varepsilon\Rightarrow\frac{b_{n_k+1}}{b_{n_k}}-1\geqslant 2\varepsilon\frac{b_k}{b_{n_k}}>\frac{2\varepsilon}{x}>0.$$

当 $k \to \infty$ 时，$n_k \to \infty$，上式左边趋于 0，矛盾.

1.3.19 *1.* 利用比值判别法，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\frac{(2n)!(3n)!}{n!(4n)!}}{\frac{(2n+2)!(3n+3)!}{(n+1)!(4n+4)!}} &= \frac{n!(4n)!(2n+2)(2n+1)(2n)!(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(2n)!(3n)!(n+1)n!(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} \\ &\to \frac{27}{64} < 1,\end{aligned}$$

那么此级数收敛.

2. 当 $n \to \infty$ 时，

$$\frac{1}{n^{1+1/n}} \sim \frac{1}{n},$$

那么此级数发散.

1.3.20 *1.* 利用算术-几何平均值不等式得

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}),$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2}a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n < +\infty.$$

2. 我们给出如下反例即可：

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 2k-1 \\ \frac{1}{n^4}, & n = 2k \end{cases}.$$

那么 $\sqrt{a_{2n-1}a_{2n}} = \sqrt{a_{2n}a_{2n+1}} = 1/(2n)^2$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 显然发散.

1.3.21 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)^b(\ln n+1)^c}\frac{n^b \ln^c n}{a^n}\right| = |a|,$$

于是此级数当 $|a| < 1$ 时绝对收敛，而 $|a| > 1$ 时发散.

- $a = 1$.

  (1) 如果 $b > 1$，令 $b = 1 + 2\varepsilon$，则当 $n \to \infty$ 时，

  $$\frac{1}{n^{1+2\varepsilon}\ln^c n} = o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right),$$

  那么此时级数是绝对收敛的.

  (2) 如果 $b = 1$，那么级数当 $c > 1$ 时（绝对）收敛，而 $c \leqslant 1$ 时发散.

(3) 如果 $b<1$,那么级数发散.

- $a=-1$. 由 Leibniz 判别法可知,级数收敛当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^b\ln^c n}=0,$$

这等价于 $b>0$,或者 $b=0,c>0$.

1.3.22 注意到当 $n\to\infty$ 时,

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^x}=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})n^x}\sim\frac{1}{n^{x+1/2}},$$

因此根据比较判别法知,原级数收敛当且仅当 $x>1/2$.

1.3.23 当 $n\to\infty$ 时,

$$\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^a\sim\left(\frac{1}{6n^3}\right)^a=\frac{1}{6^a n^{3a}},$$

那么级数收敛当且仅当 $3a>1$,即 $a>1/3$.

1.3.24 对 $n=1,2,\cdots$,在 A 中不超过 10^n 的项数为 9^n-1,因此我们有

$$\sum_{a\in A}\frac{1}{a}=\sum_{n\geqslant 1}\sum_{\substack{10^{n-1}\leqslant a<10^n\\ a\in A}}\frac{1}{a}\leqslant\sum_{n\geqslant 1}\frac{9^n}{10^{n-1}}=10\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{9}{10}\right)^n<+\infty.$$

1.3.25 **方法一** 令 $S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. 设 $N_0=0$, 由收敛性可知, 对每个 $k>0$, 存在 $N_k>N_{k-1}$,使得

$$\sum_{N_k+1}^{\infty}a_n\leqslant\frac{S}{4^k}.$$

对 $N_k+1\leqslant n\leqslant N_{k+1}$,取 $c_n=2^k$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=+\infty$. 由于级数通项均为正,我们可以重排级数,使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_na_n=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{N_k+1}^{N_{k+1}}c_na_n\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}2^k\sum_{N_k+1}^{\infty}a_n=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}S=2S.$$

方法二 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,那么对每个 k,存在正整数 N_k,使得 $\sum_{n=N_k}^{\infty}a_n<1/k^3$. 令

$$c_n=\begin{cases}1, & n<N_1\\ k, & N_k\leqslant n<N_{k+1}\end{cases}.$$

则 $c_n\to+\infty$,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_na_N\leqslant\sum_{n=1}^{N_1-1}a_n+\sum_{k=1}^{\infty}k\sum_{n=N_k}^{\infty}a_k$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&< +\infty.
\end{aligned}
$$

方法三 令 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 记 $S_0 = 0, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. 对正整数 n,令

$$c_n = \frac{\sqrt{S - S_{n-1}} - \sqrt{S - S_n}}{a_n} = \frac{\sqrt{S - S_{n-1}} - \sqrt{S - S_n}}{S_n - S_{n-1}}.$$

注意到 $S_n \to S$,那么

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{S - S_{n-1}} + \sqrt{S - S_n}} \to +\infty,$$

且此时

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{S - S_{n-1}} - \sqrt{S - S_n}\right) = \sqrt{S}.$$

1.3.26 利用公式 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$,我们有

$$
\begin{aligned}
1 = \sin\frac{\pi}{2} &= 2\sin\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^2} = 2^2\sin\frac{\pi}{2^3}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3} \\
&= \cdots = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n},
\end{aligned}
$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}\frac{\pi}{2^n}} = \frac{2}{\pi}.$$

1.4 微分学

1.4.1 *1.* 我们有 $\exp\big(f(x)\big) = (1 + 1/x)^x$,这是一个增函数. 而指数函数也是增函数,因此 f 是增函数.

2. 我们有

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1) - \ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/(x+1) - 1/x}{-1/x^2} = 0.$$

另一方面,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

1.4.2 **方法一** 设 $0 < s < t$,则由 Lagrange 中值定理,存在 $u \in (0, s), v \in (s, t)$,使得

$$f(s) = f(s) - f(0) = sf'(u),$$

$$f(t)-f(s)=(t-s)f'(v).$$

于是

$$\frac{f(s)}{s}=f'(u)\leqslant f'(v)=\frac{f(t)-f(s)}{t-s}.$$

这个不等式即可化为 $f(s)/s\leqslant f'(t)/t$，因此 g 是区间 $(0,+\infty)$ 上的增函数. 现在 $g(0)=f'(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)/x=\lim\limits_{x\to0}g(x)$. 固定 $x>0$，对 $0<t<x$ 有 $g(t)\leqslant g(x)$. 令 $t\to0$，我们得到 $g(0)\leqslant g(x)$，因此 g 在 $[0,+\infty)$ 上递增.

方法二 由于 $f(0)=0$，且 f' 递增，那么对 $x>0$，存在 $\xi_x\in(0,x)$，使得

$$f(x)=f(x)-f(0)=xf'(\xi_x)<xf'(x).$$

因此

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0,$$

这说明 g 是 x 的增函数.

1.4.3 *1.* 函数 $f(x)$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases},$$

则

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

2. 令 $g(x)=f(x)-2x,x\in[0,1]$，则有 $g'_+(0)<0<g'_-(1)$. 那么

$$g'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}<0,$$

因此存在充分小的 $\delta>0$，使得当 $0<x<\delta$ 时，$f(x)<f(0)$. 同理，当 x 在 1 的左半邻域内有 $f(x)<f(1)$. 因此 g 在 $[0,1]$ 上的最小值必在 $(0,1)$ 内的某点 c 处取到，于是 $g'(c)=0$，即 $f'(c)=2$.

1.4.4 假定 y 在 ξ 处取到正的最大值，则 $y(\xi)>0,y'(\xi)=0,y''(\xi)\leqslant0.$，这与微分方程相矛盾. 因此，$y$ 的最大值为 0. 类似地，y 也不能取到负的最小值，因此 y 恒为 0.

1.4.5 *1.* 假定 u 在 x_0 处取到局部极大值值，且 $u(x_0)>0$. 则 $u''(x_0)\leqslant0$，但 $u''(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}u(x_0)>0$，矛盾. 所以不可能有正的局部极大值. 类似地，如果 u 在 x_0 处有负的极小值，则 $u''(x_0)\geqslant0$，那么我们必有 $u(x_0)\geqslant0$，因此 u 不可能有负的极小值.

2. 假定 $u(0)=u(1)=0$. 如果对某个 $x_0\in(0,1)$,有 $u(x_0)\neq 0$,则由于 u 是连续的,u 必然会取到一个正的局部极大值或负的局部极小值,这和第 *1* 部分矛盾.

1.4.6 **方法一** 由所给不等式我们得到

$$0\geqslant \mathrm{e}^{-Kt}\,y'(t)-K\,\mathrm{e}^{-Kt}\,y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathrm{e}^{-Kt}\,y(t)\Big),\quad t\geqslant 0.$$

从 0 到 t 积分,对 $t\geqslant 0$ 我们有

$$\mathrm{e}^{-Kt}\,y(t)-y(0)\leqslant 0,$$

这就证明了要求的不等式.

方法二 令 $z(t)=\ln y(t)$,则 $z'(t)=y'(t)/y(t)\leqslant K$. 由 Lagrange 中值定理,存在 $u\in(0,t)$,使得 $z(t)-z(0)=z'(u)t\leqslant Kt$,因此 $z(t)\leqslant Kt+\ln y(0)$. 由于指数函数是递增的,我们得到 $y(t)\leqslant \mathrm{e}^{Kt}\,y(0)$,等号成立当且仅当 $t=0$.

1.4.7 **方法一** 不失一般性, 假定 $x_0=0$. 由于 f 是连续的, 且 $f(0)=0$, 存在 $\delta>0$,使得当 $x\in[0,\varepsilon)$ 时,$f'(x)>f(x)>0$. 假定 $f(x)$ 不是对所有的正数 x 均为正,令 $c=\inf\{x>0|\,f(x)\leqslant 0\}$. 由于 f 连续,且在原点附近为正,我们有 $c>0$ 且 $f(c)=0$. 由 Rolle 定理,存在 $d\in(0,c)$ 使得 $f'(d)=0$. 而由 c 的定义,我们有 $f'(d)>f(d)>0$,矛盾.

方法二 令 $g(x)=\mathrm{e}^{-x}\,f(x)$,则 $g'(x)=\mathrm{e}^{-x}\,\big(f'(x)-f(x)\big)>0$. 由于 g 是增函数,我们有 $g(x)=\mathrm{e}^{-x}\,f(x)>g(x_0)=0,\forall x>x_0$.

1.4.8 假定对某个正的 x, 有 $f(x)\leqslant 0$, 则 $a=\inf\{x>0|\,f(x)\leqslant 0\}$ 为正. 由 f 的连续性, $f(a)=0$. 设 $b\in(0,a)$, 则 $f(b)>0$. 由 Lagrange 中值定理, 存在 $c\in(b,a)$,使得 $f'(c)=\big(f(a)-f(b)\big)/(a-b)<0$. 再对 f' 在区间 $(0,c)$ 上应用 Lagrange 中值定理, 存在 $d\in(0,c)$, 使得 $f''(d)=\big(f'(c)-f'(0)\big)/c<0$. 由于 $0<d<a$, $f(d)>0$,这和 $f''(x)\geqslant f(x), x\in(0,a)$ 矛盾.

1.4.9 **方法一** 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为 $f(x)=a\,\mathrm{e}^x-1-x-x^2/2$,我们有

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\quad 且\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

所以 f 至少有一个实根 x_0. 我们有

$$f'(x)=a\,\mathrm{e}^x-1-x>a\,\mathrm{e}^x-1-x-\frac{x^2}{2}=f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

因此,由题 1.4.7, f 没有其他实根了.

方法二 令 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}(1+x+x^2/2)-a$,则

$$f'(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(1+x-1-x-\frac{x^2}{2}\right)=-\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-x}\leqslant 0,$$

且 $f'(x)=0$ 只在 $x=0$ 处成立,这说明 f 是单调递减的. 且

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-a<0,$$

因此 $f(x)$ 只有唯一的零点,即原方程只有唯一实根.

1.4.10 设 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 定义为 $g(x)=\mathrm{e}^{-2x}f(x)$,我们有

$$g'(x)=\mathrm{e}^{-2x}\big(f'(x)-2f(x)\big)\leqslant 0,$$

所以 g 是不增的函数. 由于 $g(0)=0$ 且 g 是非负的,因此 $g\equiv 0$. 同理 $f\equiv 0$.

1.4.11 在区间 $[0,1]$ 上定义 $g(x)=\mathrm{e}^{x}f(x)$,我们有

$$g''(x)=\mathrm{e}^{x}\big(f''(x)+2f'(x)+f(x)\big)\geqslant 0,$$

所以 g 是凸函数. 即对任意 $x\in(0,1)$, 点 $\big(x,g(x)\big)$ 必然在连接点 $\big(0,g(0)\big)$ 和 $\big(1,g(1)\big)$ 的弦的下方. 因此 $g(x)\leqslant 0$,结论得证.

1.4.12 由 φ_1 和 φ_2 满足所给的微分方程,我们有

$$\varphi_1'(t)=v_1\big(\varphi_1(t)\big),\quad \varphi_2'(t)=v_2\big(\varphi_2(t)\big).$$

由于 $\varphi_1(t_0)=\varphi_2(t_0)$,根据题设可知 $\varphi_1'(t_0)<\varphi_2'(t_0)$. 因此,存在点 $s_0>t_0$,是得对 $t_0\leqslant t\leqslant s_0$,有 $\varphi_1(t)\leqslant\varphi_2(t)$. 假定存在点 $s_0<t<b$,使得 $\varphi_1(t)>\varphi_2(t)$,令 $t_1\geqslant s_0$ 表示所有这样的 t 的下确界. 有连续性,我们必有 $\varphi_1(t_1)=\varphi_2(t_1)$. 那么,重复以上讨论,我们可知必存在点 $s_1>t_1$,使得当 $t_1<t<s_1$ 时,$\varphi_1(t)\leqslant\varphi_2(t)$,这和 t_1 的定义矛盾.

1.4.13 取 $f(x)=x^2\sin(1/x)$ 以及 $g(x)=x$,则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$,且

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

而极限

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

不存在.

1.4.14 结论是否定的,可取反例

$$f(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases},$$

那么直接计算可得

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(3x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

不存在，即 $f''(0)$ 不存在.

1.4.15 由 Rolle 定理，存在 $x_1\in(0,1)$，使得 $f'(x_1)=0$. 而 $f'(0)=0$，因此存在 $x_2\in(0,x_1)$ 使得，$f''(x_2)=0$. 反复使用 Rolle 定理，可知存在 $x_n\in(0,x_{n-1})$，使得 $f^{(n)}(x_n)=0$. 因此，存在 $x\in(0,x_n)\subset(0,1)$，使得 $f^{(n+1)}(x)=0$.

1.4.16 由于 $f'\leqslant 0$ 且 $f\geqslant 0$，我们断言 f 是单调的，且极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\xi$ 存在. 因此，对任意 $\delta>0$，我们有

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t+\delta)-f(t)}{\delta}=0.$$

另一方面，存在 $\theta\in(t,t+\delta)$，使得

$$\frac{f(t+\delta)-f(t)}{\delta}=f'(t)+\frac{1}{2}\delta f''(\theta).$$

因此，

$$\lim_{t\to+\infty}\sup|f'(t)|\leqslant\frac{1}{2}\delta\sup_{\theta}|f''(\theta)|.$$

令 $\delta\to 0$，我们得到 $\lim\limits_{t\to+\infty}f'(t)=0$.

1.4.17 由于 f 为正，且 $\ln x$ 为连续函数，那么

$$\begin{aligned}\ln\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)}\right)^{1/\delta}&=\lim_{\delta\to 0}\ln\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)}\right)^{1/\delta}\\&=\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln f(x+\delta x)-\ln f(x)}{\delta}\\&=x\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln f(x+\delta x)-\ln f(x)}{\delta x}\\&=x\big(\ln f(x)\big)'=\frac{xf'(x)}{f(x)}.\end{aligned}$$

那么两边取指数，可知原极限为 $\exp\big(xf'(x)/f(x)\big)$，证毕.

1.4.18 利用 L'Hospital 法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{h}=\lim_{x\to 0}f'(x),$$

而左边的极限就是 $f'(0)$.

1.4.19 我们有

$$\begin{aligned}p_t(x)&=(1+t^2)x^3-3t^3x+t^4,\\p_t'(x)&=3(1+t^2)x^2-3t^3,\\p_t''(x)&=6(1+t^2)x.\end{aligned}$$

- $t<0$. 在这种情形下，$p_t'>0$，且当 x 趋于 $-\infty$ 时，$p_t(x)<0$；而当 $x\to+\infty$ 时，$p_t(x)>0$. 那么由零点定理及单调性，可知 p_t 恰有一个实根，其重数为 1.
- $t=0$. 现在 $p_t(x)=x^3$，此时只有一个实根，重数为 3.
- $t>0$. 我们有
$$p'\left(\pm\sqrt{\frac{t^3}{1+t^2}}\right)=0.$$
且不难判定
$$p'\left(\sqrt{\frac{t^3}{1+t^2}}\right)$$
是局部极小值，而
$$p'\left(-\sqrt{\frac{t^3}{1+t^2}}\right)$$
是局部极大值.

  我们来研究 p_t 在这些极值点处的值. 由于 $p_t(0)>0$, $p_t'(0)<0$，那么这个极大值必为正. 我们有
$$p'\left(\sqrt{\frac{t^3}{1+t^2}}\right)=t^4\left(1-\sqrt{\frac{t}{1+t^2}}\right)\triangleq A_t.$$
我们得到

  (1) $0<t<2-\sqrt{3}$. 在这种情形下，我们有 $A_t>0$，所以 p_t 只有一个一重实根.

  (2) $2-\sqrt{3}<t<2+\sqrt{3}$. 现在 $A_t<0$，则 p_t 有三个一重实根.

  (3) $t>2+\sqrt{3}$. 我们有 $A_t>0$，则 p_t 只有一个一重实根.

1.4.20 令
$$h(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a),$$
则 $\lim\limits_{x\to a}h(x)=0$，且 $f(x)=f(a)+\big(f'(a)+h(x)\big)(x-a)$，于是
$$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=\frac{f'(a)(y_n-x_n)+h(x)(y_n-a)-h(x_n)(x_n-a)}{y_n-x_n}.$$
所以
$$\begin{aligned}\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}-f'(a)\right|&\leqslant|h(y_n)|\Big(\frac{y_n-a}{y_n-x_n}\Big)+|h(x_n)|\Big(\frac{a-x_n}{y_n-x_n}\Big)\\&\leqslant|h(y_n)|+|h(x_n)|\\&=o(1)\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

1.4.21 通过变量替换，只需要证明 $f(1) \geqslant f(0)$. 不失一般性，假定 $f(0)=0$. 定义函数

$$g(x) = f(x) - f(1)x.$$

由于 g 是连续的，它必然在某个 $\xi \in [0,1]$ 处取到最大值. 我们可以假定 $\xi < 1$，因此 $g(1)=g(0)=0$. 由于当 $\xi < x < 1$ 时，$g(\xi) \geqslant g(x)$，我们有

$$0 \geqslant \limsup_{x\to\xi^+} \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} = -f(1) + \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

由于最右边的一项是非负的，我们有 $f(1) \geqslant 0$，证毕.

1.4.22 当 $x \to 0$ 时，根据带 Peano 余项的 Taylor 公式有

$$f(x) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2).$$

注意到 $x \to 0$ 时，$x - \sin x = o(x^2)$，因此

$$\begin{aligned}
&f(x) - f'(0)\sin x - \frac{1}{2}f''(0)\sin^2 x \\
={}& f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2) - f'(0)\sin x - \frac{1}{2}f''(0)\sin^2 x \\
={}& f'(0)(x-\sin x) + \frac{1}{2}f''(0)(x^2 - \sin^2 x) + o(x^2) \\
={}& o(x^2),
\end{aligned}$$

证毕.

1.4.23 我们有

$$1 = f(x)\left(\frac{\mathrm{e}^z - 1}{z}\right) = (\xi_0 + \xi_1 z + +\xi_2 z^2 + \cdots)\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots\right).$$

将右边乘开，我们得到 $\xi_0 = 1$，且

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\xi_{n-k}}{(k+1)!} = 0.$$

由此，很容易归纳得知所有的 ξ_i 都是有理数.

1.4.24 定义函数 f 为

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3-1/x+2/(2x-3)}, & 0 < x < \frac{3}{2} \\ 0, & x \leqslant 0 \text{ 或 } x \geqslant \frac{3}{2} \end{cases},$$

则 f 满足所有条件（如图 1.3）.

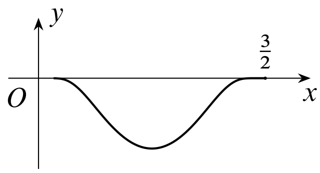


图 1.3

这个例子的构造基于这样一个函数

$$\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases},$$

它具有任意阶导数,且 $x \leqslant 0$ 时,导数恒为 0.

1.4.25 令 $g(x) = \sin^n x$,那么由 $\sin x$ 的 Taylor 公式可知,g 在 0 处的第一个非零的导数为 $g^{(n)}(0) = n!$. 对任意正数 λ,令 $c = \alpha/(n!\lambda^n)$,则 $f(x) = c\sin^n(\lambda x)$ 满足 $f^{(n)}(0) = c\lambda^n n! = \alpha$.

存在正数 M,使得对 $x \in [0, 2\pi]$ 有 $|g^{(k)}(x)| \leqslant M, k = 1, 2, \cdots, n-1$. 由于 g 及其导数都是 2π 周期的函数,那么 $|g^{(k)}(x)| \leqslant M$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 和 $k < n$ 都成立. 因此

$$|f^{(k)}(x)| = |c\lambda^k g^{(k)}(x)| \leqslant |c|\lambda^k M = C\lambda^{k-n}$$

对任意实数 x 均成立,这里 $C = |\alpha|/n!$. 取 $\lambda \geqslant \max\{1, C/\varepsilon\}$,保证 $|f^{(k)}(x)| \leqslant \varepsilon$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 及 $k = 0, 1, \cdots, n-1$ 都成立.

1.4.26 由条件可知 f 存在最小值 $m \geqslant 0$. 注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{1 + cf(x)}\right) = \frac{f'(x)}{\big(1 + cf(x)\big)^2}.$$

- $m > 0$. 那么由于 f' 连续,因此 f' 是有界的,所以

$$\lim_{c \to +\infty} \frac{f'(x)}{\big(1 + cf(x)\big)^2} = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $m = 0$. 由 Fermat 引理可知,如果 $f(x_0) = 0$,则必有 $f'(x_0) = 0$. 那么由 f' 的连续性可知,对 $\forall \varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$ 时,使得当 $|f(x)| < \delta$ 时,$|f'(x)| < \varepsilon$. 当 c 充分大时,可使 $1/\sqrt{c} < \delta$. 那么当 $f(x), 1/\sqrt{c}$ 时,$|f'(x)| < \varepsilon$. 于是当 $c \to +\infty$ 时,如果 $f(x) < 1/\sqrt{c}$,则

$$\frac{|f'(x)|}{\big(1 + cf(x)\big)^2} < \varepsilon.$$

如果 $f(x) \geqslant 1/\sqrt{c}$，则

$$\frac{|f'(x)|}{\left(1+cf(x)\right)^2} \leqslant \frac{M}{\left(1+\sqrt{c}\right)^2} \to 0.$$

因此，只要 $c \to +\infty$，其导数的极限关于 x 一致趋于 0.

1.4.27 我们断言存在 $\varepsilon > 0$，使得对任意 $t \in (0,\varepsilon)$ 有 $f(t) \neq 0$. 否则假定存在一列 $x_n \to 0$，使得 $f(x_n) = 0$. 在每个子区间 $[x_{n+1}, x_n]$ 上考虑实函数 $\operatorname{Re} f(x)$，我们可以找到一列 $t_n \to 0, t_n \in [x_{n+1}, x_n]$，使得 $\operatorname{Re} f'(t_n) = 0$ 对所有 n 都成立. 但由于 $\lim\limits_{t\to 0^+} f'(t) = C$，这意味着 $\operatorname{Re} C = 0$. 在同样的情形下，讨论 $f(x)$ 的虚部，我们得到 $\operatorname{Im} C = 0$，矛盾.

存在 $\delta < 0$，使得 $f(t)$ 在 $(0,\delta)$ 内非零，那么它与 C^∞ 的绝对值函数

$$|\quad| : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}_+$$

的复合，就在 $(0,\delta)$ 内定义了一个 C^1 函数 $g(t) = |f(t)|$. 显然当 $x \in (0,\delta)$ 时，

$$f(t)\begin{cases} > 0, & C > 0 \\ < 0, & C < 0 \end{cases}, \quad g'(t) = \begin{cases} f'(t), & C > 0 \\ -f'(t), & C < 0 \end{cases}.$$

于是 $\lim\limits_{t\to 0^+} g'(t) = |C|$.

1.4.28 由 Taylor 公式可知，存在常数 $C > 0$，使得当 $|x| < 1$ 时.

$$|f(x) - f(0) - f'(0)x| \leqslant Cx^2.$$

由于 $f'(0) = 0$，我们实际上有 $|f(x) - f(0)| \leqslant Cx^2$. 因此由三角形不等式可得当 $|x| < 1$ 时，$f(x) \leqslant f(0) + Cx^2$. 我们有：如果点 (x, y) 在 f 的图像上或其下方且 $|x| < 1$ 时，必有 $y \leqslant f(0) + Cx^2$.

现在考虑中心在 $\big(0, f(0)+b\big)$，半径为 b 的圆盘，这里 $0 < b < 1$ 将在最后选定. 显然，$\big(0, f(0)\big)$ 在 D 的边界上. 另一方面，如果 $(x, y) \in D$，则 $|x| < b < 1$ 且

$$\begin{aligned} x^2 + \left(y - f(0) - b\right)^2 &< b^2, \\ |y - f(0) - b| &< \sqrt{b^2 - x^2}, \\ y > f(0) + b - \sqrt{b^2 - x^2}& \\ = f(0) + b - b\sqrt{1 - x^2/b^2}& \\ \geqslant f(0) + b - b\Big(1 - \frac{x^2}{2b^2}\Big)&. \end{aligned}$$

由于当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$\sqrt{1-x} \leqslant 1 - x/2$，因此

$$y > f(0) + \frac{x^2}{2b}.$$

如果 $1/(2b) \geqslant c$，则存在点 (x,y) 在 f 的图像的上方，只需取 $b = \min\{1/2, 1/(2c)\}$，结论即得证.

1.5 积分学

1.5.1 设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是 $[a,b]$ 的任意划分. 由于 f' 是 Riemann 可积的，那么 f' 在每个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上都有一个有限的上确界 M_i 和下确界 m_i.

由 Lagrange 中值定理，

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

其中中间的式子等于 $f(b) - f(a)$，这个值介于此划分的 Riemann 下和与上和之间，而这两个和都收敛到 f' 在区间 $[a,b]$ 的积分值，因此我们有

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

1.5.2 假定存在 $c \in (0,1)$ 使得 $f(c) > 0$. 那么由 f 的连续性可知，存在区间 $[a,b] \supset c$ 使得 $f(x) > f(c)/2, x \in [a,b]$. 于是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant f(c)(b-a)/a > 0,$$

因此

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^1 f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

矛盾，这意味着对任意 $x \in (0,1)$，均有 $f(x) = 0$. 那么由根据连续性可知 $f(x) = 0, x \in [0,1]$.

1.5.3 **方法一** 由于 f 是连续的，它必然取到自己的最小值 m 和最大值 M，于是

$$m\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x,$$

即

$$3 \leqslant 3\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M.$$

那么由介值定理，存在点 $\xi \in [0,1]$，使得

$$f(\xi) = 3\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

方法二 令

$$F(t)=\int_0^t x^2 f(x)\,\mathrm{d}x,\quad G(t)=\int_0^t x^2\,\mathrm{d}x,$$

则对 $F(t),G(t)$ 在 $[0,1]$ 上用 Cauchy 中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\frac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

注意到 $F'(t)=t^2 f(t), G'(t)=t^2$，化简即得

$$f(\xi)=3\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.5.4 由于 f 的不连续点均是第一类的，那么这些不连续点是没有聚点的（详细证明参见问题 1.2.8），且构成一个有限集. 设 $d_1<d_2<\cdots<d_n$ 是 f 的不连续点的集合，则 f 在每个满足 $d_n<x<y<d_{n+1}$ 的区间 $[x,y]$ 上都是连续的. 应用问题 1.5.5 的结论（同时对区间的两个端点），f 在每个区间 $[d_n,d_{n+1}]$ 上都是可积的，所以 f 在 $[a,b]$ 可积.

1.5.5 *1.* 设对 $x\in[0,1]$ 有 $|f(x)|\leqslant M$. 如果 (b_n) 是一个单独递减趋于 0 的数列，则 $\int_{b_n}^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant M$ 是有界的，且单调递增的数列，那么它必然收敛. 我们得到 $|f|$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积，因此 f 也是 Riemann 可积的.

2. 对任意 $0<b<1$，函数 $f(x)=1/x$ 在区间 $[b,1]$ 上可积，但它在 $[0,1]$ 上不可积.

1.5.6 利用换元公式可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\big(|f(x)|+|f(-x)|\big)\,\mathrm{d}x.$$

如果对 $x>1$，我们有 $x\big(|f(x)|+|f(-x)|\big)>1$，那么可以得出积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，这是矛盾的. 因此，必存在 x_1 使得 $x_1\big(|f(x_1)|+|f(-x_1)|\big)\leqslant 1$. 如果对所有的 $x>\max\{2,x_1\}$，我们有

$$x\big(|f(x)|+|f(-x)|\big)>\frac{1}{2}.$$

我们会得到积分 $\int_{\max\{2,x_1\}}^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性，因此存在 $x_2>x_1$ 使得 $x_2\big(|f(x_2)|+|f(-x_2)|\big)\leqslant 1/2$. 重复此过程，我们就可以定义一个数列 (x_n) 使得 $x_{n+1}>\max\{n+1,x_n\}$ 且 $x_n\big(|f(x_n)|+|f(-x_n)|\big)\leqslant 1/n$. 于是 $x_n\to+\infty$，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n|f(x_n)|=\lim_{n\to\infty}x_n|f(-x_n)|=0.$$

1.5.7 **方法一** *1.* 令 $t=x+s$，我们得到

$$f(x)=\mathrm{e}^{x^2/2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x+s)^2}\,\mathrm{d}s=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx-s^2/2}\,\mathrm{d}s.$$

由于 $s>0,\mathrm{e}^{-s^2/2}<1$,所以 $\mathrm{e}^{-sx-s^2/2}<\mathrm{e}^{-sx}$ 对所有正数 x 成立,于是

$$0<f(x)<\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{x}.$$

2. 设 $0<x_1<x_2$. 对 $s>0$ 有 $\mathrm{e}^{-sx_1-s^2/2}>\mathrm{e}^{-sx_2-s^2/2}$,所以

$$f(x_1)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx_1-s^2/2}\,\mathrm{d}s>\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{sx_2-s^2/2}\,\mathrm{d}s=f(x_2).$$

方法二 *1.* 函数 f 显然是正的,利用分部积分我们得到

$$\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/t}\,\mathrm{d}t=\int_x^{+\infty}\frac{1}{t}\big(-\mathrm{e}^{-t^2/2}\big)'\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x}-\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

因此,

$$f(x)=\frac{1}{x}-\mathrm{e}^{x^2/2}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}\,\mathrm{d}t<\frac{1}{x}.$$

2. 我们有

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\left(\frac{1}{x}-\mathrm{e}^{x^2/2}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}\,\mathrm{d}t\right)\\
&=-\frac{1}{x^2}+x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{x^2}\\
&=x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}\,\mathrm{d}t>0,
\end{aligned}$$

因此 f 是增函数.

1.5.8 注意到 $\varphi(1)=\varphi(2)=0$. 利用分部积分得

$$\begin{aligned}
\int_1^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}}{\mathrm{i}\lambda}\varphi(x)\Big|_1^2-\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\int_1^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\int_1^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

再次利用分部积分得

$$\int_1^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\lambda^2}\int_1^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\varphi''(x)\,\mathrm{d}x.$$

取绝对值即得

$$\left|\int_1^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\int_1^2|\varphi''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

由于 $\varphi\in C^2$,右边的积分是有限的,证毕.

1.5.9 设 f 是一个这样的函数,由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$a=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \left(\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&\leqslant a,
\end{aligned}
$$

因此所有的不等号都成为等号. 我们有 $x\sqrt{f(x)} = k\sqrt{f(x)}$,所以 $f(x) \equiv 0$,这与

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

矛盾,因此不存在这样的函数 f.

1.5.10 我们有

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(j/n)}{n} - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{f(j/n)}{n} - \int_{j/n}^{(j+1)/n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \int_{j/n}^{(j+1)/n} |f(j/n) - f(x)|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

对每个 $x \in \big(j/n, (j+1)/n\big)$,由 Lagrange 中值定理,存在 $c \in (j/n, x)$,使得

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(j/n)}{x - j/n}.$$

由于 $|f'(x)| \leqslant M, x \in (0,1)$,所以

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(j/n)}{n} - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \int_{j/n}^{(j+1)/n} M(x - j/n)\,\mathrm{d}x \\
&= M\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{(j+1)^2}{2n^2} - \frac{j^2}{2n^2}\right) - \frac{j}{n^2} \\
&= M\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2n^2} = \frac{M}{2n}.
\end{aligned}
$$

1.5.11 假定结论不成立,则对某个 $\varepsilon > 0$,存在一列实数列 (x_n),使得 $x_n \to +\infty$,且 $|f(x_n)| \geqslant \varepsilon$. 不失一般性,我们可以假定 $f(x_n) \geqslant \varepsilon$.

由于 f 是一致连续的,则存在 $\delta > 0$,使得当 $|x - y| < \delta$ 时,$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. 于是

$$\sum_{n\geqslant 1} \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{n\geqslant 1} 2\delta\frac{\varepsilon}{2} = +\infty,$$

这与积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的收敛性矛盾.

1.5.12 利用 L'Hopspital 法则

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x \int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(f(x)+\int_0^x f(t)\,dt\right)}{e^x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\int_0^x f(t)\,dt\right).
\end{aligned}
$$

这就说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

1.5.13 **方法一** 反证法，假定对某个 $\varepsilon>0$ 和一列 $(x_n)\to+\infty$，使得 $x_n f(x_n)\geqslant \varepsilon$. 那么由于 f 是单调递减的，我们有 $f(x)\geqslant \varepsilon/x$ 对充分大的 x 成立，这就和 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 矛盾，因此必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

方法二 对任意 $\varepsilon>0$，由 Cauchy 收敛原理可知，当 $x\to+\infty$ 时，

$$
\varepsilon > \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt \geqslant \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x)\,dt = \frac{1}{2}xf(x).
$$

这就说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

1.5.14 令

$$
F(t)=\int_0^t f(x)\,dx,
$$

则 $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)=A$ 存在. 利用分部积分得

$$
\int_0^t xf(x)\,dx=\int_0^t x\,dF(x)=xF(x)\Big|_0^t-\int_0^t F(x)\,dx=tF(t)-\int_0^t F(x)\,dx.
$$

于是利用 L'Hospital 法则得

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t xf(x)\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\left(F(t)-\frac{\int_0^t F(x)\,dx}{t}\right)\\
&= A-\lim_{t\to+\infty}\frac{\int_0^t F(x)\,dx}{t}=A-\lim_{t\to+\infty}F(t)\\
&= A-A=0.
\end{aligned}
$$

那么题中极限自然为 0.

1.5.15 利用 $\sin x$ 的 Maclaurin 展开式，我们得到

$$
\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.
$$

上述级数对每个 x 的值都是交错的，所以我们有

$$
\left|\frac{\sin x}{x}-\sum_{n=0}^{k}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right|\leqslant\frac{x^{2k+2}}{(2k+3)!}.
$$

取 $k=2$,我们有

$$\left|I-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{3!}\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^4}{5!}\,\mathrm{d}x,$$

这里取近似值 $I^*=71/144$,误差小于 0.00013.

1.5.16 令

$$I(t)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x^4+t^4)^{1/4}}+\ln t,$$

只需要证明当 $t>0$ 时，函数 $I(t)$ 是单调递增且有下界的. 对 $x,t\geqslant 0$，我们有 $(x+t)^4\geqslant x^4+t^4$,所以

$$I(t)\geqslant\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+t}+\ln t=\int_t^{1+t}\frac{\mathrm{d}u}{u}+\ln t=\ln(1+t)\geqslant 0.$$

我们现在对 $t>0$ 证明 $I'(t)\geqslant 0$. 我们有

$$I(t)=\int_0^t\frac{\mathrm{d}x}{t\big((x/t)^2+1\big)^{1/4}}+\int_t^1\frac{\mathrm{d}x}{t\big((x/t)^2+1\big)^{1/4}}+\ln t,$$

令 $y=x/t$,我们得到

$$I(t)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{(y^4+1)^{1/4}}+\int_1^{\frac{1}{t}}\frac{\mathrm{d}y}{(y^4+1)^{1/4}}+\ln t,$$

所以

$$I'(t)=\frac{-1}{t^2(1/t^4+1)^{1/4}}+\frac{1}{t}\geqslant 0.$$

1.5.17 利用分部积分可得

$$\int_0^{+\infty}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}2xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

那么由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\left|\int_0^{+\infty}xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\sqrt{\int_0^{+\infty}x^2[f(x)]^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^{+\infty}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x}.$$

1.5.18 **方法一** 考虑图 1.4,不等式左边是两个阴影区域的面积和. 这两个区域加起来包含了一个边长分别为 a 和 b 的矩形,由此可知不等式成立. 等号成立当且仅当 $b=f(a)$,此时这两个区域刚好构成一个矩形.

方法二 不失一般性,假定 $f(a)\leqslant b$,我们有

$$ab=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^a\big(b-f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

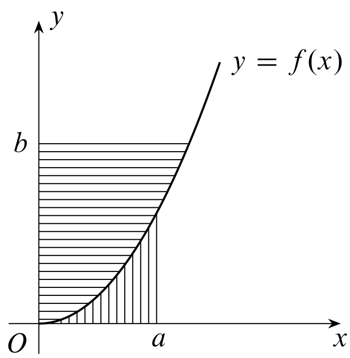


图 1.4

第二个积分等于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(b-f\left(\frac{(k+1)a}{n}\right)\right).$$

对 $0\leqslant k\leqslant n-1$,

$$\frac{a}{n}=\frac{(k+1)a}{n}-\frac{ka}{n}=g\circ f\left(\frac{(k+1)a}{n}\right)-g\circ f\left(\frac{ka}{n}\right).$$

将此式代入上述极限,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(b-f\left(\frac{(k+1)a}{n}\right)\right)\left(g\circ f\left(\frac{(k+1)a}{n}\right)-g\circ f\left(\frac{ka}{n}\right)\right).$$

将所有项乘开,重新排列以后写成

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}g\circ f\left(\frac{ka}{n}\right)\left(f\left(\frac{(k+1)a}{n}\right)-\frac{ka}{n}\right)+ab-af(a).$$

由于 g 是连续的,上式等于

$$\int_0^{f(a)}g(y)\,\mathrm{d}y+a\big(b-f(a)\big).$$

而当 $y\in\big(f(a),b\big)$ 时,$g(y)\geqslant a$,我们有

$$a\big(b-f(a)\big)\leqslant\int_{f(a)}^{b}g(y)\,\mathrm{d}y.$$

这就证明了所需的不等式,且等号成立当且仅当 $f(a)=b$.

方法三 视 b 为常数,a 为变数,令

$$F(a)=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y-ab,a\geqslant 0$$

于是 $F'(a)=f(a)-b$，由 f 的严格递增性可知 $f(a)=b$ 时 $F(a)$ 取最小值

$$F_{\min}(a)=F\big(f^{-1}(b)\big)=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{f(a)} g(y)\,\mathrm{d}y-af(a).$$

其中第二个积分作换元 $x=g(y)$，即 $y=f(x)$ 可得

$$\begin{aligned}\int_0^{f(a)} g(y)\,\mathrm{d}y&=\int_0^a x\,\mathrm{d}f(x)\\&=xf(x)\big|_0^a-\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x\\&=af(a)-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此 $F_{\min}(a)\geqslant 0$，证毕.

1.5.19 对任意 $\varepsilon>0$，取充分大的 R 使得 $\int_{|x|\geqslant R}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon/4$. 那么对任意 y 有

$$\int_{|x|\geqslant R}|f(x)\cos(xy)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.$$

所以

$$\begin{aligned}|g(z)-g(y)|&=\int_{|x|\geqslant R} f(x)(\cos xz-\cos xy)\,\mathrm{d}x+\int_{|x|\leqslant R} f(x)(\cos xz-\cos xy)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\int_{|x|\leqslant R}|f(x)|\,|\cos xz-\cos xy|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

最后的积分当 $z\to y$ 时趋于 0，这是因为 $\cos(xz)$ 在紧区间 $-R\leqslant x\leqslant R$ 上一致收敛于 $\cos(xy)$. 因此，当 $|z-y|$ 充分小时，

$$|g(z)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

这就证明了 g 的连续性.

1.5.20 设 M 是 $|f|$ 的一个上界，令

$$K=\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

对任意 $\varepsilon>0$. 由于 $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=0$，那么存在 $R_1>0$，当 $|x|>R_1$ 时，$|f(x)|<\varepsilon$. 由于 K 是有限的，那么存在 $R_2>0$，使得 $\int_{|x|>R_2}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon$. 对 $|x|>R_1+R_2$，我们有

$$|h(x)|\leqslant\int_{-R_1}^{R_2}|f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}y+\int_{|y|>R_2}|f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \varepsilon \int_{-R_1}^{R_2} |g(y)|\,\mathrm{d}y + M \int_{|y|>R_2} |g(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \varepsilon(K+M).
\end{aligned}
$$

由 ε 的任意性,结论得证.

1.5.21 作换元 $t=x^2$,则

$$
\int_0^{+\infty} \cos x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \cos x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.
$$

注意到 $1/(2\sqrt{t})$ 单调递减,积分 $\int_1^A \cos t\,\mathrm{d}t$ 有界,所以由 Dirichlet 判别法知第二个积分收敛,因此原积分收敛. 同理,$\int_0^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

1.5.22 方法一 令 $p(x)=\sum_{j=0}^k a_j x^j$ 是一个多项式,我们有

$$
\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 x^n p(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^k \frac{n+1}{n+j+1}a_j = \sum_{j=0}^k a_j = p(1).
$$

那么原结论对于多项式函数是成立的. 现在设 f 是一个连续函数,对任意 $\varepsilon>0$,由 Stone-Weierstrass 逼近定理,存在多项式 p 使得 $|f(x)-p(x)|<\varepsilon, x\in[0,1]$. 所以

$$
\begin{aligned}
\left|(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x - f(1)\right| &\leqslant \left((n+1)\int_0^1 x^n |f(x)-p(x)|\,\mathrm{d}x\right) \\
&\quad + \left|(n+1)\int_0^1 x^n p(x)\,\mathrm{d}x - f(1)\right| \\
&\leqslant \varepsilon + \left|(n+1)\int_0^1 x^n p(x)\,\mathrm{d}x - f(1)\right| \\
&\to \varepsilon + |p(1)-f(1)| \\
&< 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

由于 ε 是任意的,结论得证.

方法二 参见问题 1.2.13.

1.5.23 方法一 注意到 $\ln x$ 在 0 的附近是可积的,在无穷远处被 $\sqrt{x}$ 控制,因此所给的积分是存在. 作换元 $x=a/t$,我们有

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\ln a}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\ln a}{a}\arctan t\Big|_0^{+\infty} - J \\
&= \frac{\pi\ln a}{a} - J.
\end{aligned}
$$

对积分 J 换元 $t=-1/u$，我们得到 $J=-J$，因此 $J=0$. 所以，原积分值为 $\pi\ln a/(2a)$.

方法二 我们将此积分分成两部分，作换元 $x=a^2/y$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x&=\int_0^a\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^a\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+\int_a^0\frac{\ln(a^2/y)}{a^2+(a^2/y)^2}\Big(-\frac{a^2}{y}\Big)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^a\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x++\int_0^a\frac{2\ln a-\ln y}{a^2+y^2}\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^a\frac{2\ln a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\\&=2\frac{\ln a}{a}\arctan\frac{y}{a}\Big|_0^a\\&=\frac{\pi\ln a}{2a}.\end{aligned}$$

方法三 利用留数定理，并且如问题 **??** 的解答的讨论，对 $f(z)=\ln z/(z^2+a^2)$，我们有

$$\int_{-\infty}^0 f(z)\,\mathrm{d}z+\int_0^{+\infty}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}a)=\frac{\pi}{a}\Big(\ln a+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\Big).$$

在负实轴上，我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 f(z)\,\mathrm{d}z&=\int_{-\infty}^0\frac{\ln(-x)+\pi\mathrm{i}}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{\pi\mathrm{i}}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+\frac{\pi^2\mathrm{i}}{2a},\end{aligned}$$

因此，

$$2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a}\Big(\ln a+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\Big),$$

且

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi\ln a}{2a}.$$

1.5.24 由于 $\sin x\leqslant 1$，要证明积分 I 收敛，只需要证明 $I>-\infty$. 由 $\sin x$ 关于直线 $x=\pi/2$ 的对称性，我们有

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2x/\pi)\,\mathrm{d}x \\
&> -\infty.
\end{aligned}
$$

其中第一个不等号成立是因为在 $[0,\pi/2]$ 上，$\sin x \geqslant 2x/\pi$，参见问题 1.1.25. 令 $x = 2u$，我们有

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2u)\,\mathrm{d}u \\
&= 2\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2\,\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos u)\,\mathrm{d}u\Big).
\end{aligned}
$$

第一个积分等于 $(\pi/2)\ln 2$. 由于 $\cos u = \sin(\pi/2-u)$，最后一个积分为

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(\pi/2-u)\big)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u.
$$

上述等式变为 $I = \pi\ln 2 + 2I$，因此 $I = -\pi\ln 2$.

1.5.25 第一个积分的收敛性可参见问题 1.5.21. 而

$$
\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \geqslant \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x},
$$

其中右边的第一个式子对应的积分为 $+\infty$，而第二个式子对应的积分收敛，因此

$$
\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = +\infty.
$$

1.6 函数列

1.6.1 令 B 表示定义在 $[0,1]$ 上的连续函数的逐点极限的函数构成的集合. 显然区间的特征函数 χ_I 在 B 中. 注意到 f 是单调的，一个区间的原像仍是一个区间，且 B 中元素的线性组合也在 B 中. 不失一般性，假定 $f(0)=0, f(1)=1$. 对 $n \in \mathbb{N}$，定义函数 g_n 为

$$
g_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k}{n}\chi_{f^{-1}([\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}))}(x) + \frac{n-1}{n}\chi_{f^{-1}([\frac{n-1}{n},1])}(x).
$$

由此函数的构造，我们容易得知 $\max\limits_{x\in[0,1]} |g_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n}$，现在考虑下面的结论：

引理 1.6.1. 设 $\{h_n\} \subset B$ 满足 $\max\limits_{x\in[0,1]} |h_n(x)| \leqslant A_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < +\infty$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} h_n \in B$. 由于

$$|g_{2^{k+1}} - g_{2^k}| \leqslant |g_{2^{k+1}} - f| + |g_{2^k} - f| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}, \quad 且 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < +\infty,$$

我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(g_{2^{k+1}} - g_{2^k}\right) = f - g_2 \in B,$$

所以 $f - g_2 + g_2 = f \in B$.

证明. 对每个 n,令 h_n 表示 $\{\varphi_k^n\} \subset B$ 的逐点极限,且 $|h_n(x)| \leqslant A_n, x \in [0,1]$. 考虑函数 $\Phi_k = \sum_{n=1}^{k} \varphi_k^n$. 给定 $\varepsilon > 0$,取 m 使得 $\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n < \varepsilon/3$. 则 $\sum_{n=m+1}^{\infty} |h_n(x)| < \varepsilon/3$ 且 $\sum_{n=m+1}^{\infty} |\varphi_k^n(x)| < \varepsilon/3$.

对 $x \in [0,1]$,取 K 使得

$$|h_n(x) - \varphi_K^n(x)| < \frac{\varepsilon}{3m}, \quad n = 1, 2, \cdots, m.$$

对 $k > K$ 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) - \Phi_k(x)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |h_n(x) - \varphi_k^n(x)| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |h_n(x)| + \sum_{n=m+1}^{k} |\varphi_k^n(x)| \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} h_n \in B$. □

1.6.2 方法一 设实数 $a < b$,且 $\varepsilon > 0$. 取 n 充分大,使得

$$|f_n(a) - g(a)| < \varepsilon \quad 且 \quad |f_n(b) - g(b)| < \varepsilon.$$

那么由 Lagrange 中值定理得

$$\begin{aligned}
|g(a) - g(b)| &\leqslant |g(a) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_n(b)| + |f_n(b) - g(b)| \\
&< 2\varepsilon + |f_n'(\xi)|\,|b - a|,
\end{aligned}$$

这里 $a < \xi < b$. 由于上述不等式对任意 $\varepsilon > 0$ 成立,则

$$|g(a) - g(b)| < |b - a|,$$

这就证明了 g 的连续性.

方法二 设 $N>0$，我们来证明 g 在 $[-N,N]$ 上是连续的. 对任意 $n\in\mathbb{N}$，由 Lagrange 中值定理有

$$|f_n(x)-f_n(y)|=|f_n'(\xi)(x-y)|\leqslant 2N,\quad x,y\in[-N,N].$$

所以序列 $\{f_n\}$ 是有界的. 而

$$|f_n(x)-f_n(y)|=|f_n'(\xi)(x-y)|\leqslant|x-y|$$

说明 $\{f_n\}$ 是等度连续的. 由 Arzelà-Ascoli 定理,我们可以假定 $\{f_n\}$ 在 $[-N,N]$ 上一致收敛,那么其极限函数 g 也是连续函数. 再由 N 的任意性,结论得证.

1.6.3 对任意 $\varepsilon>0$，由一致连续性，存在 $\delta>0$，使得当 $|x-y|<\delta$ 时，$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 取正整数 N 使得 $1/N<\delta$，对 $0\leqslant k\leqslant N$，令 $\xi_k=k/N$，并将区间 $[0,1]$ 分成子区间 $[\xi_{k-1},\xi_k]$，$1\leqslant k\leqslant N$. 由于 f_n 逐点趋于 f，通过在有限集 $\{\xi_k\}$ 上取最大值，我们可知存在 $M>0$，使得如果 $n\geqslant M$，则 $|f_n(\xi_k)-f(\xi_k)|<\varepsilon$ 对 $0\leqslant k\leqslant N$ 成立. 每个 f_n 都是非递减的，所以对 $x\in[\xi_{k-1},\xi_k]$，我们有

$$f(\xi_{k-1})-\varepsilon<f_n(x)<f(\xi_{k-1})+2\varepsilon\iff|f_n(x)-f(\xi_{k-1})|<2\varepsilon.$$

因此，

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant|f_n(x)-f(\xi_{k-1})|+|f(\xi_{k-1})-f(x)|<3\varepsilon.$$

由于这个不等式不依赖于 x，因此是一致收敛的.

1.6.4 假定 f 是不连续的，则存在实数 x 和正数 ε，对任意 $\delta>0$，存在 $y\in(x-\delta,y+\delta)$，使得 $|f(x)-f(y)|\geqslant\varepsilon$.

对每个正整数 m，取 $y_m\in(x-1/m,x+1/m)$ 使得 $|f(x)-f(y_m)|\geqslant\varepsilon$. 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(y_m)=f(y_m)$，因此，给定 $\varepsilon>0$，对每个 m，我们可以找到整数 n_m，使得

$$|f_{n_m}(y_m)-f(y_m)|<\varepsilon/2,$$

并且我们可以使得 $n_1<n<2<\cdots$.

定义数列 (x_n)，当 $n_{m-1}<n\leqslant n_m$ 时，$x_n=y_m$. 则 $x_n\to x$，但 $f_n(x_n)\not\to f(x)$，因为对每个 m，

$$\begin{aligned}|f_{n_m}(x_{n_m})-f(x)|&=|f_{n_m}(y_m)-f(x)|\\&\geqslant|f(x)-f(y_m)|-|f(y_m)-f_{n_m}(y_m)|\\&>\varepsilon-\varepsilon/2=\varepsilon/2.\end{aligned}$$

1.6.5 由题设知，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 n_0，使得

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (n \geqslant n_0, p \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}).$$

从而知

$$|C_{n+p} - C_n| = \lim_{x\to+\infty} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \quad (n \geqslant n_0, p \in \mathbb{N}).$$

这说明存在极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c$. 由此存在 n_1，使得 $|c_{n_1} - c| < \varepsilon$. 又存在 X，使得当 $x > X$ 时，$|f_{n_1}(x) - c_{n_1}| < \varepsilon$. 最后，当 $x > X$ 时，我们有

$$\begin{aligned} |f(x) - c| &\leqslant |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - c_{n_1}| + |c_{n_1} - c| \\ &< 3\varepsilon, \end{aligned}$$

由此即得所证.

1.6.6 *1.* 对 $k \in \mathbb{N}$，定义连续函数 g_k 为

$$g_k(x) = \begin{cases} 4k - 16k^2\left|x - \frac{3}{4}k\right|, & x \in \left[\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}\right] \\ 0, & x \notin \left[\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}\right] \end{cases}.$$

定义 $f_0 \equiv 0$，而对 $k > 0$，令 $f_k(x) = \int_0^x g_k(t)\,\mathrm{d}t$. 我们有 $f_k \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $f_k(0) = 0$，且 $f_k'(x) = g_k(x) \to 0 = f_0'(x), \forall x \in \mathbb{R}_+$. 然而

$$\lim_{n\to\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^x g_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g_k(t)\,\mathrm{d}t = 1 \neq f_0(x).$$

2. $f_k'(x) \to f_0'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致.

1.6.7 由于 f 是 $[0,1]$ 到自身的同胚，不失一般性，我们可以假定 f 是严格递增的（否则将 h 用 $1 - f$ 替换），且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 我们首先处理 f' 是连续函数的情形. 由 Stone-Weierstrass 逼近定理，存在一列多项式 $\{P_n\}$ 一致收敛到 f. 由于 $f' > 0$，我们不妨假定（通过加上一个小的常数）每个 P_n 都是正的. 进一步，由于 P_n 是一致收敛的，

$$\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = f(1) = 1.$$

定义 a_n 为

$$a_n^{-1} = \int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

那么我们可以用 $a_n P_n$ 来代替 P_n，所以我们可以假定

$$\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

现在考虑多项式

$$Q_n(x) = \int_0^x P_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

则 $Q_n(0)=0, Q_n(1)=1$，且 $Q_n'(x)=P_n(x)>0$ 对所有 x 和 n 都成立. 因此 Q_n 是单位区间到自身的同胚，而且由其定义可知，Q_n 一致收敛于 f.

只需要证明单位区间到自身的任意递增的同胚可以被 C^1 同胚一致逼近即可. 设 $r>0$，且

$$f_r(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{1-x^{-r}}, & 0<x\leqslant 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

直接计算可知 $f\in C^1\big([0,1]\big)$, $f(1)=1$, $f_r'(0)=0$，且 $f_r'(1)=r$. 对 $r,s>0$，令

$$g_{rs}(x) = \begin{cases} f_r(x), & x\in[0,1] \\ -f_s(-x), & x\in[-1,0] \end{cases}.$$

每个 g_{rs} 都是 C^1 函数，满足 $g_{rs}(0)=0, g_{rs}(1)=1, g_{rs}(-1)=-1, g_{rs}'(-1)=s$，且 $g_{rs}'(1)=r$. 通过伸缩和平移，我们可以在任何区间上找到一个 C^1 函数，使得函数及其导数在端点处的值等于任意给定的正数.

我们现在用下列方式来逼近任意一个连续的同胚 f：给定 $\varepsilon>0$，取 $n>0$，使得若 $|x-y|<1/n$，则 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$（这是可能的，因为 $[0,1]$ 是紧集，所以 f 在其上一致连续）. 将 $[0,1]$ 等分为 $2n$ 个区间，在区间 $[2k/(2n),(2k+1)/(2n)], 0\leqslant k\leqslant n-1$ 上，用连接 $f(2k/2n)$ 和 $f\big((2k+1)/2n\big)$ 的线段逼近 f. 在其他区间上，用以上定义的合适的函数连接这些线段，使得函数是 C^1 的. 由于 f 是一个增函数，这个函数与 f 的差不会超过 ε.

1.6.8 *1.* 对任意整数 ε，令 $S_\varepsilon=\{x\in[0,1]|\,f(x)\geqslant M-\varepsilon\}$. $f(x)\geqslant M-\varepsilon$ 当且仅当对每个 n，有 $f_n(x)\geqslant M-\varepsilon$. 所以，$S=\cap_{n\geqslant 1} f_n^{-1}\big([M-\varepsilon,+\infty)\big)$，因此每个 S_ε 是闭的. 由上确界的定义，每个 S_ε 都是非空的. 且如果 ε_i 是无穷个正数，则 $\cap_i S_{\varepsilon_i}=S_{\min\varepsilon_i}\neq\varnothing$. 由于 $[0,1]$ 是紧的，所有 S_ε 的交是非空的. 设 t 属于这个交集，则对任意 $\varepsilon>0$ 有 $M\geqslant f(t)\geqslant M-\varepsilon$，所以 $f(t)=M$.

2. 取 $f_n(x)=\min\{nx,1-x\}$ 即可.

1.6.9 固定 $\varepsilon>0$，对每个 n，令 $G_n=\{x|\,f_n(x)<\varepsilon\}$. 则

- 由于 f_n 是连续的，则 G_n 是开的.
- 由于 $f_n\geqslant f_{n+1}$，则 $G_n\subset G_{n+1}$.
- 由于对每个 x，$f_n(x)\to 0$，$[0,1]=\cup_{n=1}^{\infty}G_n$.

$[0,1]$ 为紧集，则存在有限个 G_n 覆盖了 $[0,1]$. 由上述第二条结论，存在 N 使得对所有 $n\geqslant N$，有 $G_n=[0,1]$. 由 G_n 的定义可知，对所有 $n\geqslant N$，我们有 $0\leqslant f_n(x)<\varepsilon$

对任意 $x \in [0,1]$ 成立. 这说明序列 f_n 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.

1.6.10 如果 f_n 在 E 上逐点收敛于 $f(x)$，则 f_n 在 E 上一致收敛于 f 当且仅当 $n \to \infty$ 时，$\sup\limits_E |f_n(x) - f(x)| \to 0$. 我们注意到如果 $A \subset B$，则

$$\sup_A |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_B |f_n(x) - f(x)|.$$

- $k = 0$. 在这种情形下，$|f_n(x)| \leqslant 1/n$，所以当 $x \to \infty$ 时，$\sup\limits_{\mathbb{R}} |f_n| \to 0$. 因此 f_n 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛，进而在 $\mathbb{R}$ 的每个有界子集上也收敛.
- $k = 1$. $f_n(x) = x/(x^2+n)$ 逐点收敛于 0，且其导数为 $f_n'(x) = (n-x^2)/(x^2+n)^2$，所以 $|f_n|$ 在 $x = \sqrt{n}$ 处取到其最大值，

  $$\sup |f_n| = f_n(\sqrt{n}) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

  所以当 $n \to \infty$ 时，$\sup |f_n| \to 0$，因此 f_n 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛，进而在有界集上一致收敛.
- $k = 2$. $f_n(x) = x^2/(x^2+n)$，且 $\sup |f_n| = 1$，那么 f_n 在 $\mathbb{R}$ 上不是一致收敛的. 然而，由于 f_n 是偶函数，且在 $\mathbb{R}_+$ 上递增，它在 $[-a,a]$ 上的上确界 $\sup |f_n| = f_n(a) = a^2/(a^2+n)$，所以当 $n \to \infty$ 时，$\sup |f_n| \to 0$，那么 f_n 在有界集上是一致收敛的.
- $k \geqslant 3$. 此时仍有 $f_n(x)$ 逐点收敛于 0，但 $\sup |f_n| = +\infty$，因此 f_n 在 $\mathbb{R}$ 上不是一致收敛的. 和上面的讨论一样，$|f_n|$ 是偶函数，且在 $\mathbb{R}_+$ 上递增，这可以直接观察或通过计算导数

  $$f_n'(x) = \frac{x^{k-1}\big((k-2)x^2 + kn\big)}{(x^2+n)^2}.$$

  所以在 $[-a,a]$ 上，当 $n \to \infty$ 时，$\sup |f_n| = f_n(a) \to 0$，$f_n$ 在有界集上一致收敛.

因此当且仅当 $k = 0$ 或 1 时，f_n 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛，而对所有 k，f_n 都在有界集上一致收敛.

1.6.11 设 $\mathcal{P}_k$ 表示所有次数不超过 k 的多项式的集合，且令

$$L = d(f, \mathcal{P}_k) = \inf\{\|f - P\| \,|\, P \in \mathcal{P}_k\},$$

这里

$$\|f - P\| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - P(x)|.$$

于是们存在一列包含在 $\mathcal{P}_k$ 中的多项式 $\{P_n\}$，使得 $\|f - P_n\| \to L$. 那么对每个 $M > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\|P_n\| \leqslant \|P_n - f\| + \|f\| \leqslant M.$$

设 $x_1,\cdots,x_k\in[0,1]$ 是 k 个不同的数. 则对所有的 $i=1,\cdots,k$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 有 $|p_x(x_i)|\leqslant\|P_n\|$. 序列 $\big(P_n(x_1)\big)$ 是有界的,我们不妨假定它是收敛的（否则可以考虑其子列）. 我们可以重复此过程,并可以对任意 $i=1,\cdots,k$,假定存在某个常数 y_i,使得 $\lim\limits_{l\to\infty}P_n(x_i)=y_i$. 令 $P(x)=\sum_{i=1}^{k}y_i\omega_i(x)$,其中

$$\omega_i(x)=\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_k)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)},$$

即 P 是 Lagrange 插值多项式. 显然对 $i=1,\cdots,k$, 存在正的常数 L_i, 使得 $|\omega_i(x)|\leqslant L_i$ 对任意 $x\in[0,1]$ 成立. 因此,对所有的 $x\in[0,1]$,我们有

$$\begin{aligned}|P_n(x)-P(x)|&\leqslant\sum_{i=1}^{k}|P_n(x_i)-y_i||\omega_i(x)|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{k}L_i|P_n(x_i)-y_i|\to 0.\end{aligned}$$

这意味着对这个多项式 $P\in\mathcal{P}_k$, 我们有 $P_n\to P$, 但 $\|P_n-f\|\to L$, 这里 $L=\|P-f\|$,即

$$d(f,\mathcal{P}_k)=\|f-P\|,P\in\mathcal{P}_k.$$

因此 P 就是一个次数不超过 k 的多项式,它使得 $d(f,\mathcal{P}_k)$ 取到最小值.

1.6.12 设 $a_0,a_1,\cdots,a_D$ 是 $[0,1]$ 内的 $D+1$ 个不同的点,定义多项式 f_m 为

$$f_m(x)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq m}}^{D}\frac{x-a_i}{a_m-a_i},\quad m=0,1,\cdots,D,$$

满足 $i\neq m$ 时, $f_m(a_i)=0$,而 $f_m(a_m)=1$. 任意次数不超过 D 的多项式 $P(x)$ 可以写为

$$P(x)=\sum_{m=0}^{D}P(a_m)f_m(x),$$

因为上式右边的多项式次数不超过 D,却和 P 在 $D+1$ 个点的取值相同.

对 $x\in[0,1],m=0,1,\cdots,D$,设 M 是 $|f_m(x)|$ 的一个上界. 给定 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbb{N}$,使得当 $n\geqslant N$ 时,

$$|P_n(a_m)|\leqslant\frac{\varepsilon}{(D+1)M},$$

于是我们有

$$|P_n(x)|\leqslant\sum_{m=0}^{D}|P_n(a_m)||f_m(x)|<\varepsilon,$$

因此，P_n 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.

1.6.13 对任意 $\varepsilon>0$，令 $\delta=\varepsilon/(b-a+2)$，易知存在多项式 $P(x)$，满足 $P(a)=f(a)$，且对对任意 $x\in[a,b]$ 有

$$|P(x)-f(x)|<\delta.$$

令 $g(x)\in C[a,b]$，满足 $g(a)=P'(a)$，且可以使得

$$\int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x<\delta.$$

设多项式 $Q(x)$ 满足 $Q(a)=g(a)=P'(a)$，且

$$|Q(x)-g(x)|<\delta, \forall x\in[a,b].$$

我们令

$$p(x)=P(x)-\int_a^x Q(t)\,\mathrm{d}t,$$

那么 $p(a)=P(a)=f(a)$，

$$\begin{aligned}|p(x)-f(x)|&\leqslant|p(x)-P(x)|+|P(x)-f(x)|\\&\leqslant\int_a^x|Q(t)|\,\mathrm{d}t+\delta\\&\leqslant\int_a^x|Q(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t+\int_a^x|g(t)|\,\mathrm{d}t+\delta\\&<\delta(b-a+2)=\varepsilon,\end{aligned}$$

且 $p'(a)=P'(a)-Q(a)=0$.

1.6.14 假定 f_{n_j} 一致收敛于 f，则 f 是连续的，且 $f(0)=\lim\limits_{j\to\infty}\cos 0=1$. 所以存在 $\varepsilon>0$，当 $|x|<\varepsilon$ 时，$f(x)>1/2$. 如果 j 充分大，由一致收敛性我们有

$$|f(x)-f_{n_j}(x)|<\frac{1}{2}, \forall x, \quad \frac{\pi}{2n_j}<\varepsilon.$$

对这样一个 j，以及 $x=\frac{\pi}{2n_j}$，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&<f(x)\leqslant|f(x)-f_{n_j}(x)|+|f_{n_j}(x)|\\&<\frac{1}{2}+f_{n_j}(x)=\frac{1}{2}\left|\cos\frac{\pi}{2}\right|=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

矛盾.

1.6.15 *1.* 显然我们有 $d(f,f)=0$，且 $d(f,g)=d(g,f)$，所以我们只需要证明当 $f\neq g$ 时，$d(f,g)>0$，以及三角形不等式. 如果 $f\neq g$，则 $|f-g|$ 在一个小的区

间上为正，因此对应的被积函数和积分都是非零的. 现在，函数 $a \mapsto a/(1+a)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，因此对 $a=|f-g|, b=|g-h|, c=|f-h|$，我们有 $c \leqslant a+b$，且

$$\frac{c}{1+c} \leqslant \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

这就说明三角形不等式成立.

2. 对自然数 n，定义 f_n 为

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 1/x, & 1/n \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}.$$

容易验证序列 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 列，因为对任意 n, m，我们有

$$\begin{aligned} d(f_m, f_n) &= \int_0^{\max\{1/m,1/n\}} \frac{|f_m(x)-f_n(x)|}{1+|f_m(x)-f_n(x)|}\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^{\max\{1/m,1/n\}} \mathrm{d}x \\ &= \max\{1/m, 1/n\}. \end{aligned}$$

假定 $\left(\mathcal{C}_{[0,1]}, d\right)$ 是完备的，并设 f 表示序列 $\{f_n\}$ 的极限. 如果对某个 $a \in (0,1]$ 有 $f(a) \neq 1/a$，则由连续性，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $x \in (a-\varepsilon, a]$ 时，$|1/x - f(x)| \leqslant \varepsilon$. 因此

$$d(f_n, f) \leqslant \int_{a-\varepsilon}^{a} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\mathrm{d}x$$

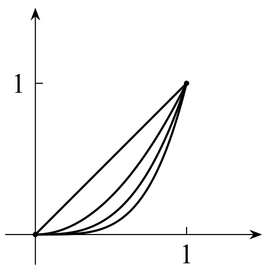
对充分大的 n 成立. 但上式右边是一个与 n 无关的正的常数，这就与 f_n 收敛于 f 矛盾. 因此 $f(a) = 1/a$ 对任意 $a \in (0,1]$ 成立，这与 f 在 $[0,1]$ 上的连续性矛盾. 因此，$\left(\mathcal{C}_{[0,1]}, d\right)$ 不是完备的.

1.6.16 (a) 设 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ 定义为 $f_n(x) = x^n$. $[0,1]$ 是紧的，$\|f_n\| = 1$，但序列 f_n 不是等度连续的.

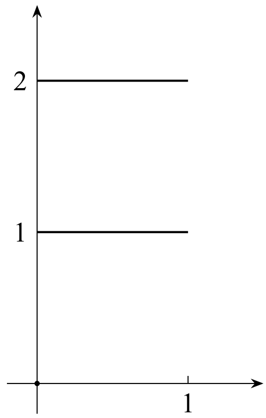
(b) 设 $\Omega = [0,1]$，且 $g_n(x) = n$. 此序列显然是等度连续的，Ω 是紧的，但 g_n 不存在收敛的子列.

(c) 考虑 $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h_n(x) = \chi_{[n-1,n+1]}(x)\cos\left((x-n)\pi/2\right)$，这里 $\chi_{[a,b]}$ 表示区间 $[a,b]$ 的特征函数. $\|h_n\| \leqslant 1$，且序列是等度连续的，但它不存在收敛的子列.

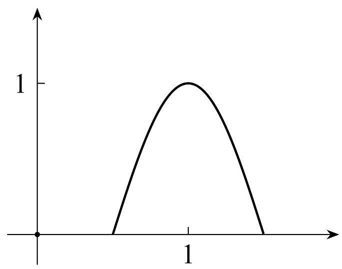
1.6.17 对每个 n，令 g_n 表示在点 $k/n, k = 0,1,\cdots,n$ 处等于 f_n，而在每个区间 $[(k-1)/n, k/n]$ 上为线性的函数. 由 f_n 的假设可知，g_n 在之前每个区间上的斜率斜率不超过 1，因此 g_n 是 Lipschitz 常数不超过 1 的 Lipschitz 函数. 于是序列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致等度连续的，那么由 Arzelà-Ascoli 定理，它由一个一致收敛的子列



(a) f_n



(b) g_n



(c) h_n

$\{g_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$. 令 g 表示这个极限函数. 固定 $x \in [0,1]$,对每个 j,设 x_j 是 $[0,1]$ 内一个形如 $k/n_j(k=0,\cdots,n_j)$ 的点,满足 $1/n_j \leqslant |x-x_j| < 2/n_j$. 我们有

$$\begin{aligned}|g(x)-f_{n_j}(x)| &\leqslant |g(x)-g_{n_j}(x)| + |g_{n_j}(x)-g_{n_j}(x_j)| + |f_{n_j}(x_j)-f_{n_j}(x)| \\ &\leqslant |g(x)-g_{n_j}(x)| + \frac{2}{n_j} + \frac{2}{n_j}.\end{aligned}$$

令 $j \to \infty$,右式第一个求和式一致趋于 0,这说明 f_{n_j} 一致收敛于 g.

1.6.18 由 Arzelà-Ascoli 定理,只需证明序列 $\{f_n\}$ 是等度连续且一致有界的.

对 $0 \leqslant x < y \leqslant 1$ 和任意的 n,

$$|f_n(y)-f_n(x)| = \left|\int_x^y f_n'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^y t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{y}-2\sqrt{x}.$$

函数 $F(x)=2\sqrt{x}$ 在 $[0,1]$ 上连续,因此是一致连续的. 所以,对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$ 使得只要当 $x,y \in [0,1]$ 且 $|y-x| < \delta$ 时,就有 $|F(y)-F(x)| < \varepsilon$ 成立,这就证明了序列的等度连续性.

由于 $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$,函数 f_n 不可能恒正或横负,因此存在 $x_n \in [0,1]$ 使得 $f_n(x_n)=0$. 因此由上述已经得到的估计式,对任意 x 有

$$|f_n(x)| \leqslant 2|\sqrt{x}-\sqrt{x_n}| \leqslant 2.$$

一致有界性得证.

1.6.19 我们断言 M 的一个子集 A 是紧集当且仅当它是闭集且有界,且 $\{f'|f \in A\}$ 是等度连续的. 如果 A 满足所有这些条件,且 $\{f_n\}$ 是 A 中的一个子序列,则 $\{f_n\}$ 和 $\{f_n'\}$ 是有界且等度连续的. 那么由 Arzelà-Ascoli 定理,存在子序列 $\{f_{n_j}\}$,使得

$\{f_{n_j}\}$ 和 $\{f'_{n_j}\}$ 是一致收敛的，进而是 Cauchy 列. 由于 M 是完备的，且 A 是闭的，则 $\{f_{n_j}\}$ 在 M 中收敛于某个 $f \in A$，所以 A 是紧的.

另一方面，如果 A 是紧集，考虑空间

$$\widetilde{M} = \{(f, f')|f \in M\}, \quad \widetilde{A} = \{(f, f')|f \in A\}.$$

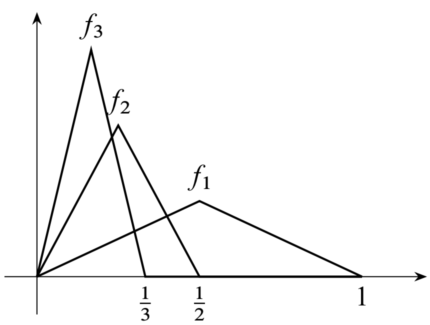
则 $\widetilde{A}$ 在 $\widetilde{M}$ 中是紧的，因此它的每个投影也是紧的. 由 Arzelà-Ascoli 定理可知 $\{f'|f \in A\}$ 是等度连续的.

1.6.20 我们考虑三种情形：

- (a_n) 有一个收敛于 0 的子列. 则相应的 $\{f_n\}$ 的子列收敛于 $x + \cos x$，是一个连续函数.
- (a_n) 有一个子列极限 $a \neq 0$. 则相应的 $\{f_n\}$ 的子列收敛于
$$\frac{1}{a}\sin(ax) + \cos(x + a),$$
这是连续的.
- $|a_n| \to \infty$. 在这种情形下，$\frac{1}{a_n}\sin(a_n x) \to 0$，且 $\cos(x + a_n)$ 的结果取决于于 $a_n(\operatorname{mod} 2\pi)$. 定义数列 (b_n) 为 $b_n \equiv a_n(\operatorname{mod} 2\pi), b_n \in [0, 2\pi]$. 由于 $[0, 2\pi]$ 是紧的，(b_n) 有一个收敛的子集，不妨设收敛于 b. 那么相应的子列 $\{f_n\}$ 收敛于 $\cos(x + b)$，是一个连续函数.

1.6.21 答案是否定的. 考虑函数列 $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$，其图像是由经过 $(0, 0), (1/2n, n), (1/n, 0)$ 到 $(1, 0)$ 的线段构成. 此函数序列逐点收敛于 0，但对任意 n 有

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$



1.6.22 我们有

$$g_n(x) = g_n(0) + g_n'(0)x + \frac{g_n''(\xi)}{2}x^2 = \frac{g_n''(\xi)}{2}x^2,$$

这里 $\xi \in (0,1)$. 所以对任意 $x \in [0,1]$ 有

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{2},$$

且

$$|g_n'(x)| = |g_n'(x) - g_n'(0)| \leqslant |g_n''(\xi)(x-0)| \leqslant 1.$$

因此对 $x, y \in [0,1]$ 有

$$|g_n(x) - g_n(y)| \leqslant |x-y|.$$

序列 $\{g_n\}$ 是等度连续且一致有界的，所以由 Arzelà-Ascoli 定理，它有一个一致收敛的子列.

1.6.23 给定 $\varepsilon > 0$. 由于 K 是一个紧集上的连续函数，它是一致连续的. 因此存在 $\delta > 0$，当 $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} < \delta$ 时，

$$|K(x_1, y_1) - K(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

设 f, g 如题所述，并假定 $x_1, x_2 \in [0,1]$ 满足 $|x_1 - x_2| < \delta$，则

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &= \left| \int_0^1 g(y)\big(K(x_1,y) - K(x_2,y)\big)\,\mathrm{d}y \right| \\
&\leqslant \int_0^1 |g(y)|\big|K(x_1,y) - K(x_2,y)\big|\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \int_0^1 1 \cdot \varepsilon\,\mathrm{d}y = \varepsilon.
\end{aligned}$$

由于上述估计式对 F 中的所有 f 均成立，所以 F 是等度连续的.

1.6.24 对任意 $x \in [0,1]$，均有 $|G_n(x)| \leqslant \int_0^1 \mathrm{d}t = 1$，因此 $\{G_n(x)\}$ 是一致有界的. 对任意 $x, y \in [0,1]$，有

$$|G_n(x) - G_n(y)| = \left| \int_x^y g_n(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant |x-y|,$$

因此 $\{G_n(x)\}$ 是等度连续的，由 Arzelà-Ascoli 定理，它有一个一致收敛的子列.

1.6.25 *1.* 由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\begin{aligned}
|g_n(x)| &\leqslant \sqrt{\int_0^1 (x+y)\,\mathrm{d}y}\sqrt{\int_0^1 \big(f_n(y)\big)\,\mathrm{d}y} \\
&\leqslant \sqrt{\int_0^1 (1+y)\,\mathrm{d}y} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{\frac{15}{2}}.
\end{aligned}$$

2. 由于 $\sqrt{x+y}$ 是单位闭圆盘上的连续函数，因此它是一致连续的. 因此，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \delta$ 时，

$$|\sqrt{x_1+y_1}-\sqrt{x_2+y_2}|<\varepsilon.$$

特别地，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，$|\sqrt{x_1+y}-\sqrt{x_2+y}|<\varepsilon$，因此

$$\begin{aligned}|g_n(x_1)-g_n(x_2)| &= \left|\int_0^1 \left(\sqrt{x_1+y}-\sqrt{x_2+y}\right) f_n(y)\,\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \varepsilon \int_0^1 |f_n(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant 5\varepsilon.\end{aligned}$$

由于上述 δ 对所有的 n 都成立，函数族 $\{g_n\}$ 是等度连续的. 而我们已经证明了一致有界性，因此由 Arzelà-Ascoli 定理，它有一个一致收敛的子列.

1.6.26 我们首先证明 $\{g_n\}$ 在上确界范数下是一个 Cauchy 列. 由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\begin{aligned}|g_n(x)-g_m(x)| &\leqslant \int_0^1 |K(x,y)|\big(f_n(y)-f_m(y)\big)\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \sqrt{\int_0^1 |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y}\sqrt{\int_0^1 |f_n(y)-f_m(y)|^2\,\mathrm{d}y}.\end{aligned}$$

因此，

$$\sup_{x\in[0,1]} |g_n(x)-g_m(x)| \leqslant \sup_{x\in[0,1]} \sqrt{\int_0^1 |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y}\sqrt{\int_0^1 |f_n(y)-f_m(y)|^2\,\mathrm{d}y}.$$

由于 K 是连续的，那么它是可积的. 令 $M=\sup\limits_{x,y\in[0,1]}|K(x,y)|$，我们有

$$\|g_n(x)-g_m(y)\| \leqslant M\sqrt{\int_0^1 |f_n(y)-f_m(y)|^2\,\mathrm{d}y} \to 0,$$

这说明 $\{g_n\}$ 在上确界范数下为 Cauchy 列. 而 $\mathcal{C}[0,1]$ 在此范数下是完备的，因此 $\{g_n\}$ 是一致收敛的.

1.6.27 我们将对 $\mathcal{C}[0,1]$ 上配备了上确界范数

$$\|f-g\| = \sup\{|f(x)-g(x)|\,|x\in[0,1]\}$$

的空间应用 Stone-Weierstrass 逼近定理. 令 $f\in\mathcal{C}[0,1]$，以及 $\{p_n\}$ 是一列在上确界范数意义下收敛于 f 的多项式. 利用我们对 $k=0$ 的假设可知，存在正数 M，使得对任意 n，有 $|\int_0^1 \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant M$. 对任意 $\varepsilon>0$，存在整数 $k(\varepsilon)$，使得当 $k\geqslant k(\varepsilon)$ 时，$\|f-p_{k(\varepsilon)}\| \leqslant \varepsilon/(3M)$. 由于 $\int_0^1 p_{k(\varepsilon)}(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，它是一个 Cauchy 列，所以存在整数 $n(\varepsilon)$ 使得

$$\left|\int_0^1 p_{k(\varepsilon)}(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 p_{k(\varepsilon)}(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{,} \quad \forall m,n\geqslant n(\varepsilon),$$

此时，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x\right|\\
=&\left|\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 p_{k(\varepsilon)}(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x\right|\\
&+\left|\int_0^1 p_{k(\varepsilon)}(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 p_{k(\varepsilon)}(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x\right|\\
&+\left|\int_0^1 p_{k(\varepsilon)}\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\int_0^1 |f(x)-p_{k(\varepsilon)(x)}\varphi_n(x)|\,\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{3}+\int_0^1 |f(x)-p_{k(\varepsilon)(x)}|\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x\\
\leqslant&\|f-p_{k(\varepsilon)}\|\int_0^1 \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x+\|f-p_{k(\varepsilon)}\|\int_0^1 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x\\
\leqslant&\,\varepsilon.
\end{aligned}
$$

因此序列 $\int_0^1 f\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$ 是 Cauchy 列，从而它收敛.

1.6.28 由于

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}\quad \text{且}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty,$$

根据 Weierstrass 判别法知，所给的级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到某个连续函数 f. 由其一致收敛性，我们有

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}}{n^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2T}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}}{n^2}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n T}{n^2\lambda_n T}\text{[1]}.$$

由于

$$\left|\frac{\sin\lambda_n T}{n^2\lambda_n T}\right|\leqslant\frac{1}{n^2},$$

再次由 Weierstrass 判别法知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n T}{n^2\lambda_n T}$$

关于 T 是一致收敛的. 因此，我们有

$$
\begin{aligned}
\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\,\mathrm{d}x&=\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n T}{n^2\lambda_n T}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n T}{n^2\lambda_n T}=\sum_{\lambda_n=0}\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}
$$

[1]约定 $\sin x/x$ 在 $x=0$ 处的值为 1.

1.6.29 令 $\sigma > 1$，只需要证明 $\zeta(x)$ 对 $x \geqslant \sigma$ 有定义，且具有连续的导数. 对 $x \geqslant \sigma$，由于 $n^{-x} \leqslant n^{-\sigma}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ 收敛，那么由 Weierstrass 判别法，此级数一致收敛，因此 $\zeta(x)$ 是连续函数. 要要证他具有各阶连续的导数，我们将级数求导 k 次，得到

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

只需证明此级数对 k 是一致收敛的. 由于

$$\left|\frac{(-\ln n)^k}{n^x}\right| \leqslant \frac{(\ln n)^k}{n^{\sigma}},$$

而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^{\sigma}}$ 是收敛的，因此级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

一致收敛，得证.

1.6.30 给定区间 $[a,b]$ 和 $\varepsilon > 0$，由于 f 是连续的，它在区间 $[a,b+1]$ 上是一致连续的. 那么存在 $N > 0$ 使得当 $n \geqslant N$ 且 $|x-y| < 1/n$ 时，我们有 $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. 我们将证明对任意 $x \in [a,b]$，$f_n(x)$ 一致收敛于

$$\int_x^{x+1} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

取定 x 以及 $n \geqslant N$，利用积分中值定理，我们有

$$\begin{aligned}
\left|\int_x^{x+1} f(y)\,\mathrm{d}y - f_n(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+k/n}^{x+(k+1)/n} f(y)\,\mathrm{d}y - f_n(x)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k)}{n} - f_n(x)\right| \quad x+\frac{k}{n} < a_k < x+\frac{k+1}{n} \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|f(a_k) - f(x+k/n)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

由于上式对任意 x 成立，证毕.

1.6.31 设 $\alpha > 0$，则对 $|n| > 4\alpha$，当 $x \in [-\alpha,\alpha]$ 时，

$$|f(x+n)| \leqslant \frac{C}{1+n^2/2} = M_n.$$

由于级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，级数

$$\sum_{|n|>4\alpha} f(x+n)$$

是一致收敛的. 于是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

在 $[-\alpha,\alpha]$ 上一致收敛于 $F(x)$，且 $F(x)$ 在此区间上是连续的. 由 α 的任意性，F 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

我们有

$$\begin{aligned} F(x+1)-F(x) &= \lim_{\alpha\to\infty}\sum_{n=-\alpha}^{\alpha}\big(f(x+1+n)-f(x+n)\big) \\ &= \lim_{\alpha\to\infty}\big(f(x+1+\alpha)-f(x-\alpha)\big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

最后一个等号成立是根据我们对 f 的假设.

如果 G 是周期为 1 的连续函数，由于级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

在 $[0,1]$ 上一致收敛，所以

$$\int_0^1 F(x)G(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^1 f(x+n)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

在上式右边的每一个积分中，令 $y=x+n$，由于 $G(y-n)=G(y)$，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_n^{n+1} g(y)G(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)G(y)\,\mathrm{d}y.$$

1.6.32 给定 f 和 $\varepsilon>0$，定义 $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ 为 $h(x)=f\big(\sqrt[4]{x}\big)$. 由 Stone-Weierstrass 逼近定理，存在多项式 P 使得 $|P(x)-h(x)|<\varepsilon/2$ 对 $x\in[0,1]$ 成立，由此我们得到

$$|P(x^4)-f(x)| = |P(x^4)-h(x^4)| < \varepsilon/2.$$

如果 $P=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$，取 $C_0,\cdots,C_n\in\mathbb{Q}$ 使得 $\sum_{k=0}^{n}|a_k-C_k|<\varepsilon/2$，则我们有

$$\left|\sum_{k=0}^{n} C_k x^{4k} - f(x)\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n} C_k x^{4k} - \sum_{k=0}^{n} a_k x^{4k}\right| + \left|\sum_{k=0}^{n} a_k x^{4k} - f(x)\right| < \varepsilon.$$

1.7 Fourier 级数

1.7.1 *1.* 对 $n \in \mathbb{N}$,我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0,$$

因为上述被积函数为奇函数. 且有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n},\end{aligned}$$

所以 f 的 Fourier 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2}{n}\sin nx.$$

2. 如果级数是一致收敛的，则 f 是连续的，但 f 不连续，所以级数不是一致收敛的.

3. 由于 f 和 f' 是分段连续的,我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2}{n}\sin nx &= \frac{f(x-)+f(x+)}{2}\\ &= \begin{cases} f(x), & x \neq (2n+1)\pi \\ 0, & x = (2n+1)\pi \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

1.7.2 *1.* 由于 $f(x)$ 是一个奇函数,对 $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

其 Fourier 级数具有形式 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$,其中

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

2. 由于 f 和 f' 是分段连续的,我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx &= \frac{f(x-)+f(x+)}{2}\\ &= \begin{cases} f(x), & x \neq (2n+1)\pi \\ 0, & x = (2n+1)\pi \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

3. 根据 Parseval 定理有，

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

而其中所有的 $a_n=0$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^6\,\mathrm{d}x=\frac{2}{7}\pi^6.$$

1.7.3 根据 Carleson 于 1966 年证明的结果，平方可积的函数几乎处处收敛于自己. 我们将函数 f 作奇延拓，所得函数的正弦级数的系数均为 0，因此 f 的傅里叶级数处处收敛于 0，那么 f 几乎处处为零. 再根据 f 的连续性可知 f 恒为零.

1.7.4 由于 f 以 $\sqrt{2}$ 为周期，我们有

$$\hat{f}(n)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{e}^{-2n\pi\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f\left(x+\sqrt{2}\right)\mathrm{e}^{-2n\pi\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x.$$

令 $y=x+\sqrt{2}$，我们得到

$$\hat{f}(n)\,\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}f(y)\,\mathrm{e}^{-2n\pi\mathrm{i}y}\,\mathrm{d}y.$$

由于 f 也是以 1 为周期的，我们有

$$\hat{f}(n)=\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}\int_0^1 f(y)\,\mathrm{e}^{-2n\pi\mathrm{i}y}\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}\,\hat{f}(n).$$

当 $n\neq 0$ 时，$\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}\neq 1$，所以当 $n\neq 0$ 时，$\hat{f}(n)=0$，所以 f 是常数.

1.7.5 **方法一** 假定这样的 f 存在，由于 e^x 的幂级数展开式一致收敛，对任意 $n>0$，我们有

$$\begin{aligned}\hat{f}(n)&=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-2\pi n\mathrm{i}}{k!}\int_0^1 f(x)x^k\mathrm{d}x=-2\pi n\mathrm{i}.\end{aligned}$$

上述结论与 Riemann-Lebesgue 引理矛盾，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{f}(n)=0$，所以这样的函数不存在.

方法二 根据已知假设，函数 $x^2f(x)$ 与所有的多项式正交，因此由 Stone-Weierstrass 逼近定理，$x^2f(x)$ 必然恒为零，因此 f 也恒为零，这与第一个积分矛盾.

1.7.6 因为 f'' 存在，所以 f 的 Fourier 级数收敛于 f. 设 f 的 Fourier 级数为

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx).$$

由于 $f''=g-kf$ 是连续的,通过把 f 的 Fourier 级数逐项微分两次,可得

$$\frac{k\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big((k-n^2)\alpha_n\cos nx+(k-n^2)\beta_n\sin nx\Big)=$$
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

所以我们有

$$\alpha_0=\frac{a_0}{k},\quad \alpha_n=\frac{a_n}{k-n^2},\quad \beta_n=\frac{b_n}{k-n^2},\quad n\geqslant 1.$$

1.7.7 考虑 f 的 Fourier 级数,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

我们有 $a_0=0$,根据 Parseval 定理得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x&=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\\&\leqslant\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2a_n^2+n^2b_n^2\right)=\int_0^{2\pi}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

1.7.8 由 Riemann-Lebesgue 引理可知,结论对所有形如

$$\cos k\pi x \quad 和 \quad \sin k\pi x$$

的 $g(x)$ 是成立的. 由积分的线性性可知,此结果可推广到所有的三角多项式

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos k\pi x+b_n\sin k\pi x).$$

接下来我们要利用三角函数在上确界范数意义下,在连续函数里面是稠密的这个事实,将其推广到所有的连续函数. 对任意 $\varepsilon>0$,存在 $p_\varepsilon(x)$ 如上所述,使得

$$|g(x)-p_\varepsilon(x)|<\varepsilon,$$

则

$$\begin{aligned}\Bigg|&\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\\&-\left(\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)p_\varepsilon(nx)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 p_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x\right)\Bigg|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \left|\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\big(g(nx)-p_\varepsilon(nx)\big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\big(g(x)-p_\varepsilon(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f(x)|\,|g(nx)-p_\varepsilon(nx)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\int_0^1 |g(x)-p_\varepsilon(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant 2\varepsilon\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$