深蓝学院
shenlanxueyuan.com

第三章作业讲评

主讲人 张超昱

第一题

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

1. 了解体会卷积的计算过程与相关知识。

（1）针对一维信号 $x[n]$=[1 2 3 4 3 2 1] 与 $y[n]$=[2 0 -2], 计算它们的卷积 $z[n]=x[n]*y[n]$。

（2）针对二维信号 $f[m,n]=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 与 $g[m,n]=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 1 & 0 & 5\\ 2 & 3 & 2 & 1 & 4\\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2\end{bmatrix}$, 计算卷积 $f[m,n]*g[m,n]$。

（3）查找matlab中计算一维与二维卷积的函数，并计算(1)(2)中信号的卷积验证自己计算的正确性。并自己构造计算实例，验证卷积的交换性、结合性与分配性。

（4）若两个一维离散信号 $x[n]$ 与 $y[n]$ 的长度分别为 L 与 l, 那么它们的卷积结果的长度是多少？对于两个二维离散信号呢？

第一题

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- (1)

(1) ① zero padding for x:

$q = [0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \pm 1\ 1\ 0\ 0]_{1\times M}$

② reverse $y[n]$ and move from left to right, multiply by q:

$[-2\ 0\ 2 \rightarrow \quad -2\ 0\ 2]_{1\times(M+2N-2)}$

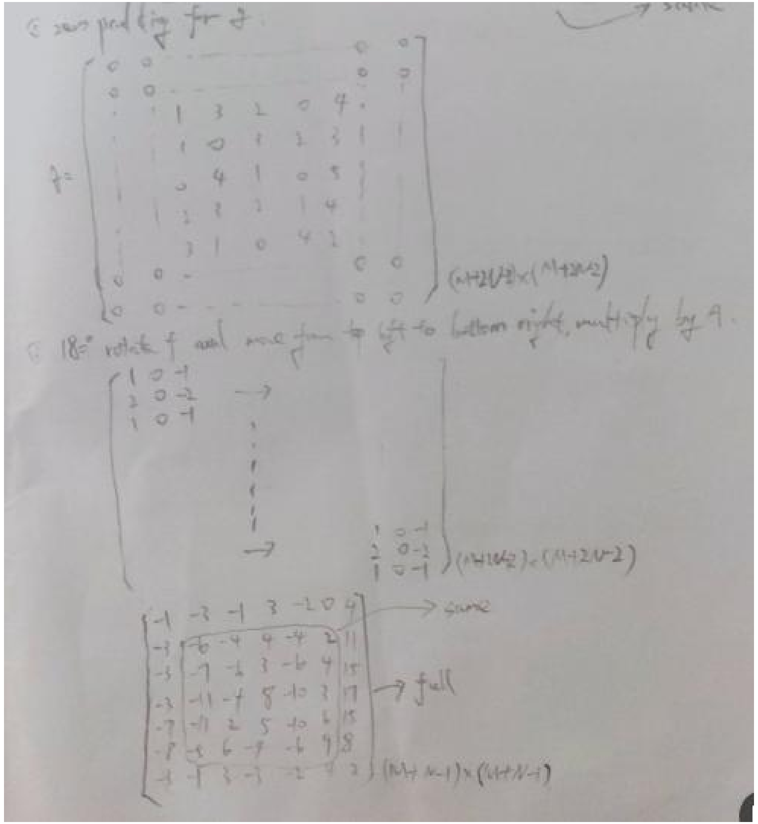
$\Rightarrow [2\ 4\ 4\ 4\ 0\ -4\ -4\ -4\ -2]_{1\times(M+N-1)}$ → full

$[4\ 4\ 4\ 0\ -4\ -4\ -4]_{1\times M}$ → same

③ zero padding for z.

第一题

- (2)



第一题

- (3)　Matlab 指令：

对于(1) for 1D

```
x = [1 2 3 4 3 2 1];
y = [2 0 -2];
a. xy = imfilter(x, y, 'conv', 'full/same');
b. xy = conv(x, y,  'full/same');
```

对于(2) for 2D

```
f = [-1 0 1;-2 0 2;-1 0 1];
g = [1 3 2 0 4;1 0 3 2 3;0 4 1 0 5;2 3 2 1 4;3 1 0 4 2];
fg = imfilter(f, g, 'conv','full/same');
```

注意：选择‘same’时，xy/fg次序会对结果大小产生影响

第一题

- (4)

对于1维离散信号，x和y，长度分别为 M 和 N，则其卷积长度为 M+N-1；

对于2维离散信号，f和g，大小分别为 M×N 和 m×n，则其卷积大小为 (M+m-1)×(N+n-1)。

第二题

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

2. 认识并了解线性时不变系统以及与卷积的内在联系。

（1）我们用H表示一个系统，对于任意输入信号 $f(t)$ 与 $g(t)$, 请用数学语言描述需要满足怎样的约束该系统才是一个线性时不变系统。

（2）一维信号 $x[n]$=[1 2 3 4 3 2 1] 与 $y[n]$=[2 0 -2], 你能用矩阵乘法计算它们的卷积 $z[n]=x[n]*y[n]$吗？（提示：将$y[n]$变成一个 9行9列的矩阵Y，$x[n]$变成一个填充后的9维的向量**x**，那么我们就可以用$\mathbf{z}=Y\mathbf{x}$）。

（3）利用 (2) 的计算结果，我们是否可以猜想任何两个信号的卷积运算都可以写成矩阵乘积的形式呢？思考一下怎样构造卷积核矩阵Y，该矩阵具有怎样的特点？果真如此，我们就可以认识到卷积是一种线性运算。那么，卷积的性质结合性与分配性就是显然的了。

（4）（选作思考题）假设我们用H表示一个线性时不变离散系统，我们知道了该系统在单位脉冲输入时候的输出为$h[n]$, 那么对于系统的任何输入$x[n]$，我们都可以计算出该系统的输出$y[n]$为$x[n]$与$h[n]$的卷积，你能说明其中的道理吗？

第二题

- (1)

仿照空域的线性移不变系统的性质

(1) a. Linear: H close under

① Addition:

$$H[f(t)+g(t)] = H[f(t)] + H[g(t)]$$

② Scalar multiplication:

$$H[a f(t)] = a H[f(t)]$$

b. Time-Invariant:

If $H[f(t)] = g(t)$, then $H[f(t-a)] = g(t-a)$ for any $a \in \mathbb{R}$

第二题

- (2) (3)

(2)

let $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & & & & \\ & -1 & 0 & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & & & & \\ & & & & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(M+N-1)\times(M+2N-2)}$ $\vec{b} = [0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0\ 0]^T_{1\times(M+2N-2)}$

then $z[n] = x[n] * y[n] = A\cdot\vec{b}$

第二题

- (4)

(4) δ : unit impulse

$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$, h denote the response of δ, $h = H(\delta[n])$

$$y[n] = H(x[n]) = H\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,H(\delta[n-k]) \longrightarrow \text{linearity}$$

($x[k]$ as scalar)

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] \longrightarrow \text{Time-invariant}$$

$$= (x * h)[n]$$

$\therefore$ 我们可以通过 x, h 得到 $y[n]$

第三题

3. 拉普莱斯算子在图像处理与分析中是一种非常有名的滤波器，其定义形式为

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

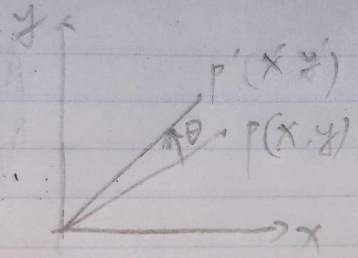
该算子有一个重要性质就是各向同性或者说旋转不变性，你能证明它吗？

提示：请看课本章后习题3.25，你需要证明图像经过旋转后，（x, y）处像素跑到了一个新的位置（x', y'），但是在旋转前后两个位置处计算出来的拉普拉斯算子的值是没有变化的。

第三题

Laplacian:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = [f(x+1,y)+f(x-1,y)+f(x,y+1)+f(x,y-1)] - 4f(x,y)$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta \\ s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

第三题

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

$$\therefore\ \nabla^2 f(x',y') = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \qquad \frac{\partial x}{\partial x'} = c\theta \quad \frac{\partial x}{\partial y'} = -s\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial x'} = s\theta \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = c\theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}c\theta + \frac{\partial f}{\partial y}s\theta\right)$$

$$= c\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial x'} + c\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial x'} + s\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial x'} + s\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x'}$$

$$= c^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + s^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2c\theta s\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

第二题

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y'}\left(-s\theta\frac{\partial f}{\partial x} + c\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= -s\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial y'} - s\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial y'} + c\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial y'} +$$

$$c\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial y'}$$

$$= s^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + c^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

$$\therefore \nabla^2 f(x', y') = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \nabla^2 f(x, y)$$

$\therefore$ Q.E.D.

第四题

4. Sobel边缘检测算子由于其简单有效，是科研中应用最为广泛的边缘检测算子。它的模板形式为

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

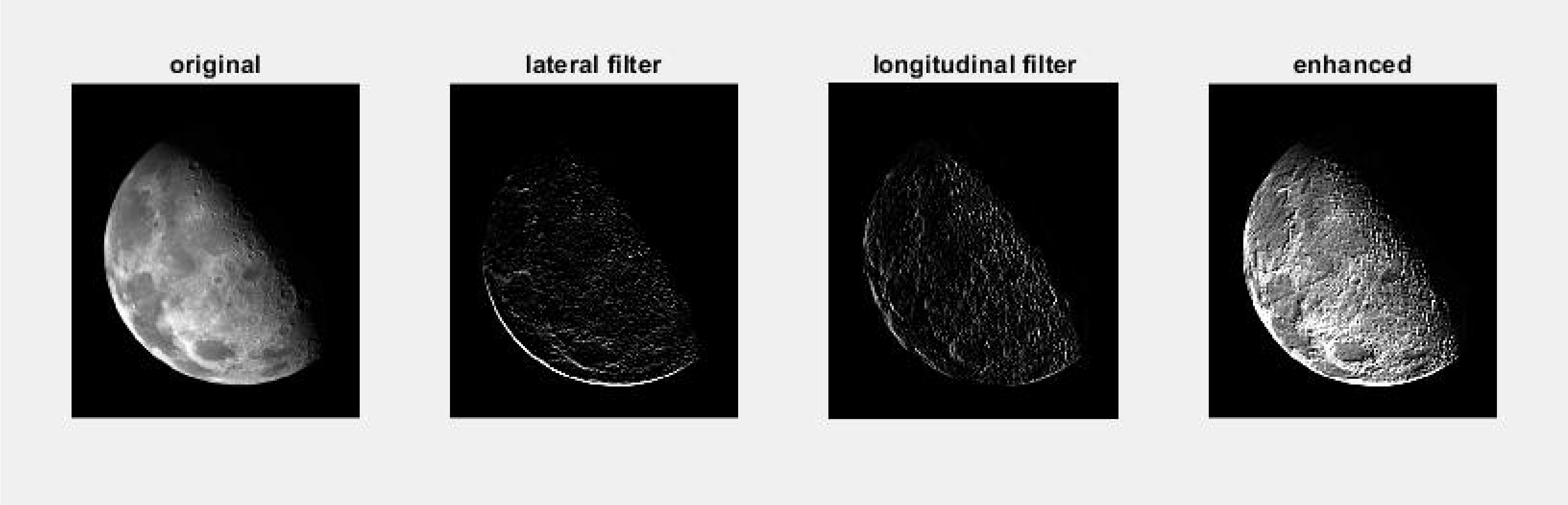
-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

分别计算在某个像素位置对应的竖直与水平方向的导数，请将该模板转化成对应的类似于拉普拉斯算子的数学计算式。Matlab中有对应的实现函数，本讲中我们已经展示了利用拉普拉斯算子对图像进行锐化增强处理，请思考利用Sobel边缘检测算子来设计图像锐化增强算法，并用Matlab来实现验证你的想法进行实验验证其有效性。

第四题

```
% sobel
f = imread('Fig0310(a)(Moon Phobos).tif');
f = imread('Fig0316(a)(moon).tif');
f = im2double(f);
w_sobel_lat = [-1 -2 -1;0 0 0;1 2 1];
w_sobel_lon = [-1 0 1;-2 0 2;-1 0 1];
fw_lat = imfilter(f, w_sobel_lat, 'conv', 'replicate');
fw_lon = imfilter(f, w_sobel_lon, 'conv', 'replicate');
% enhance
f_en = f+a0*fw_lat+a1*fw_lon;
```

第四题



第五题

5.（选作题）中值滤波器是一种非常实用的非线性平滑滤波器。在科研中应用广泛，并不仅仅限于图像处理与分析领域，它的核心计算是对邻域或窗口内的对象进行排序，从而找出均值。在计算机算法中，排序算法很多，通常计算复杂度最快也要 $O(n\log n)$。鉴于图像中的排序数值是可数的0-255，你是否可以设计一种算法快速计算若干个像素的均值，计算复杂度可以达到 $O(n)$？

（提示：可以利用直方图与累计积分函数的思想）

第五题

1. 初始化灰度值概率数组L，大小为255;
2. 对于每个像素，其灰度值为i：

   L[i] += 1;

   最后再将L除以总像素数，转化为灰度值概率;
3. 初始化累积概率p=0;

   对于L中的每一个概率非零的灰度值i：

   p += L[i];

   若p == 0.5:

   j = 下一个概率非零的灰度值;

   则中值 mid = (i+j)/2;

   break;

   若p > 0.5:

   则中值 mid = i;

   break;

在线问答

Q&A

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听！

Thanks for Listening