

# 数字图像处理

## 第六讲 图像复原(下)

---

王伟强

中国科学院大学计算机科学与技术学院

# 内容概要

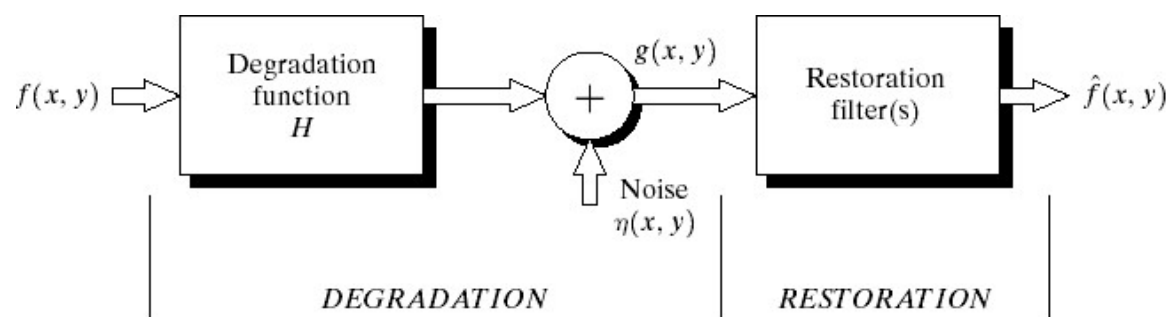
- 图像降质/复原过程模型
- 噪声模型
- 仅存在噪声的空域滤波图像复原
- 频域滤波周期噪声
- 估计退化函数
- 直接逆滤波
- 维纳过滤
- 约束最小二乘滤波

# 图像退化与复原

## ➤ 图像复原

以某种预定义的方式改善给定图像。

## ➤ 图像退化与复原的数学模型



**FIGURE 5.1** A model of the image degradation/restoration process.

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y)$$

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

# 估计退化函数

## ➤ 图像观察估计法

设  $G_s(u, v)$  为观测到图像的子图像,  $\hat{F}_s(u, v)$  为原始子图像的估计值, 假设由于选择我们选择的是强信号区域, 因此噪声可以忽略, 有

$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{\hat{F}_s(u, v)}$$

前提是噪声幅度  
比较弱, 远小于  
真实图像信号

然后我们可以从  $H_s(u, v)$  推导出完整的函数  $H(u, v)$

## ➤ 实验估计方法

$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A}$$

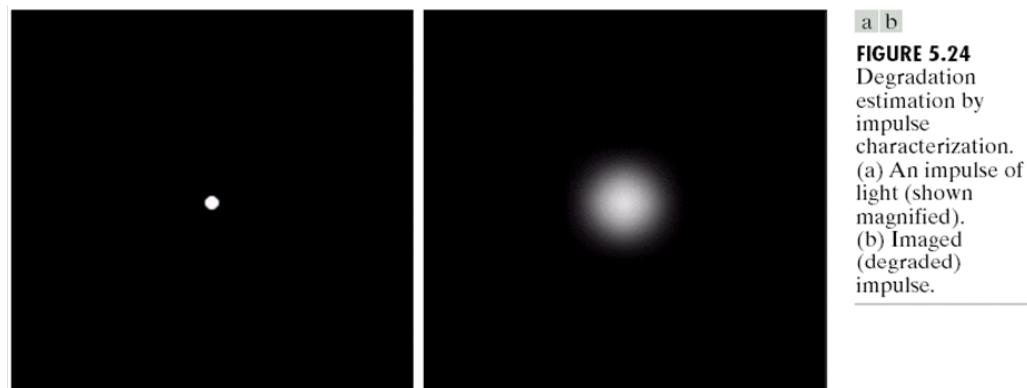
A 可以是一个特  
殊图像, 如纯白  
, 黑白等

## ➤ 模型估计法

Hufnagel 等 [1964] 基于大气湍流的物理特征提出

$$H(u, v) = \exp[-k(u^2 + v^2)^{5/6}]$$

# 大气湍流模型的示例

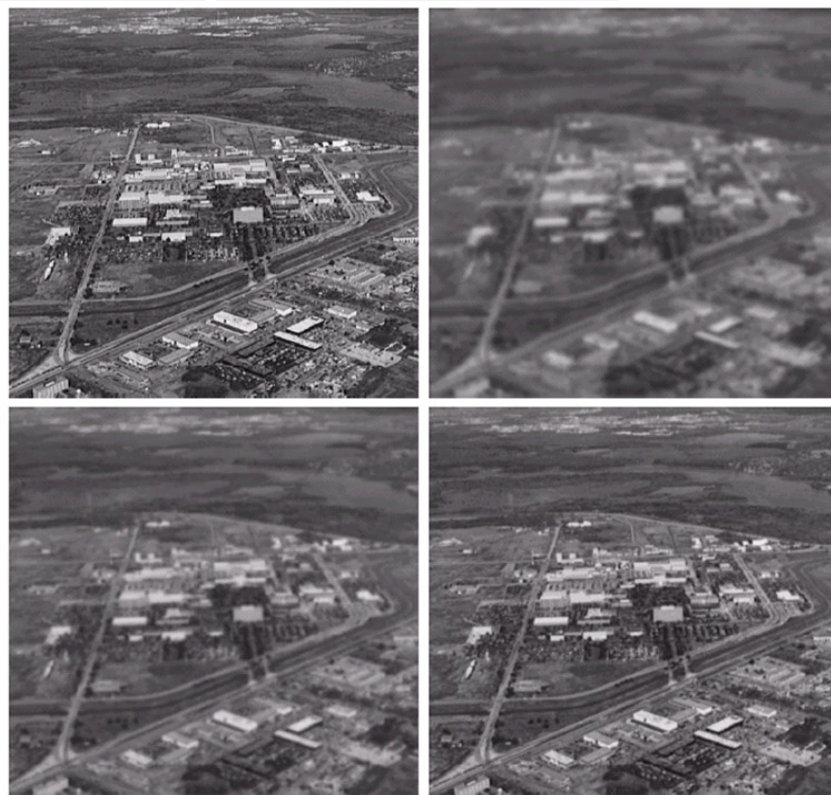


a b

**FIGURE 5.24**  
Degradation estimation by impulse characterization. (a) An impulse of light (shown magnified). (b) Imaged (degraded) impulse.

a b  
c d

**FIGURE 5.25**  
Illustration of the atmospheric turbulence model. (a) Negligible turbulence,  $k = 0.0025$ . (b) Severe turbulence,  $k = 0.0025$ . (c) Mild turbulence,  $k = 0.001$ . (d) Low turbulence,  $k = 0.00025$ . (Original image courtesy of NASA.)



# 建模运动带来的图像模糊退化

现在，假设一幅图像由于相机的匀速直线运动变得成像模糊了，该过程可以建模为

$$g(x, y) = \int_0^T f(x - x_0(t), y - y_0(t)) dt$$

$x_0$ 和 $y_0$ 是相机或物体的运动方程，积分相当于不同时刻图像的叠加

我们对它进行傅里叶变换，有

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp(-j2\pi(ux + vy)) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^T f(x - x_0(t), y - y_0(t)) dt \right] \exp(-j2\pi(ux + vy)) dx dy \\ &= \int_0^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0(t), y - y_0(t)) \exp(-j2\pi(ux + vy)) dx dy \right] dt \end{aligned}$$

积分内部变成了对 $f$ 的傅里叶变换

# 建模运动带来的图像模糊退化

傅里叶变换的平移性质，空域的平移相当于频域的旋转

$$= \int_0^T F(u, v) \exp(-j2\pi(ux_0(t) + vy_0(t))) dt$$

$$= F(u, v) \int_0^T \exp(-j2\pi(ux_0(t) + vy_0(t))) dt$$

因此,

$$H(u, v) = \int_0^T \exp(-j2\pi(ux_0(t) + vy_0(t))) dt$$

特别地，若  $x_0(t) = at/T, y_0(t) = 0$ ，那么

T相当于相机的快门时间，a相当于速度，t相当于运动时间

$$H(u, v) = \int_0^T \exp(-j2\pi uat/T) dt = \frac{T}{\pi ua} \sin(\pi ua) \exp(-j\pi ua)$$

若  $y_0(t) = bt/T$  而不是 0，那么

既有水平运动，又有垂直运动

$$H(u, v) = \frac{T}{\pi(ua + vb)} \sin(\pi(ua + vb)) \exp(-j\pi(ua + vb))$$



# 利用matlab对运动产生的图像模糊进行建模

- 运动产生的图像模糊可以通过matlab图像处理工具箱中的函数 `fspecial` 进行建模

`PSF = fspecial('motion',len,theta)`

`g = imfilter(f,PSF,'circular');`

`g = g+noise;`

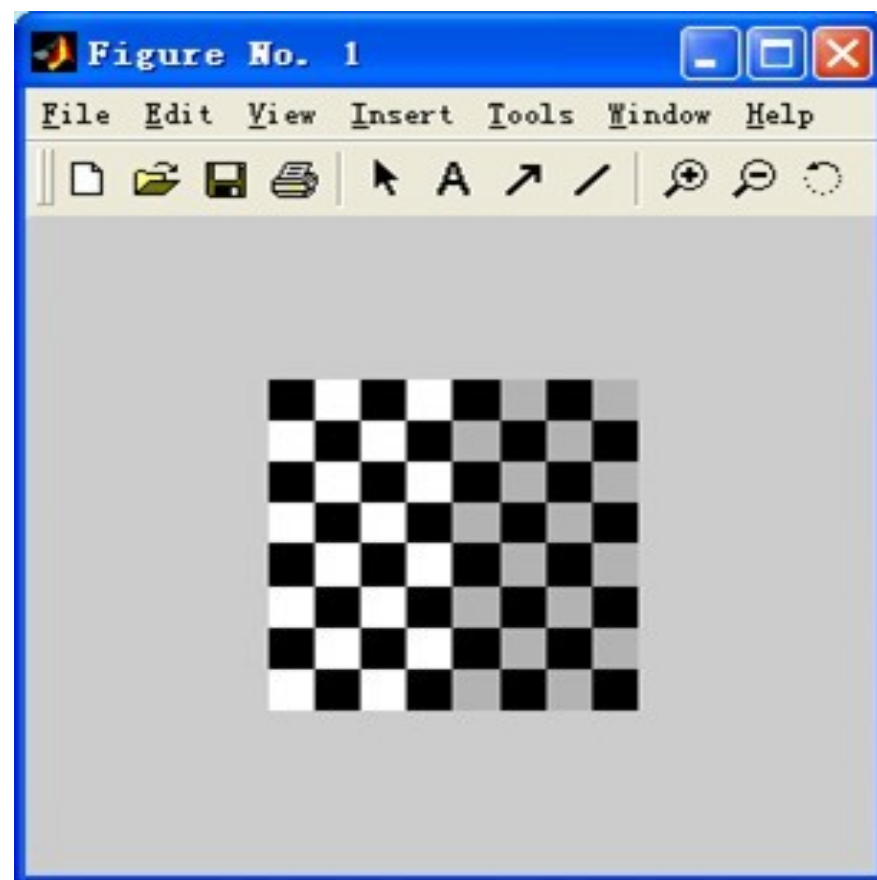
运动模糊滤波器，len代表平移的距离，theta代表平移的方向

- 测试图像可以通过函数 `checkerboard` 来生成，它的语法是

`C = checkerboard(NP,M,N)`

`f=checkerboard(8);`

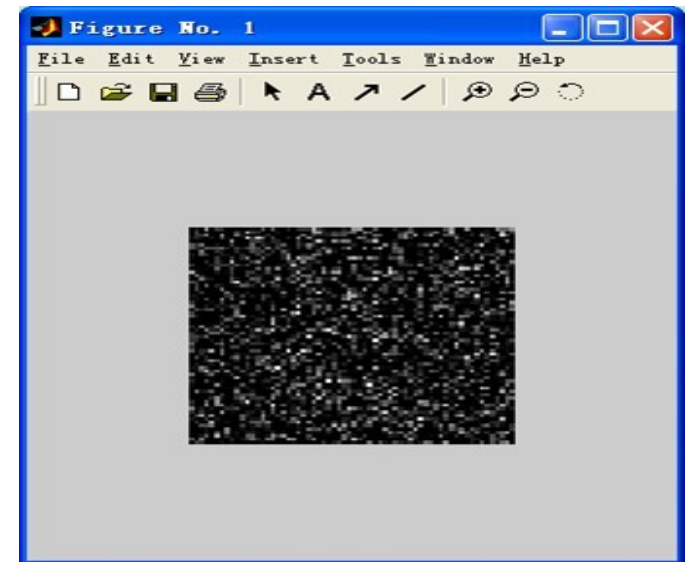
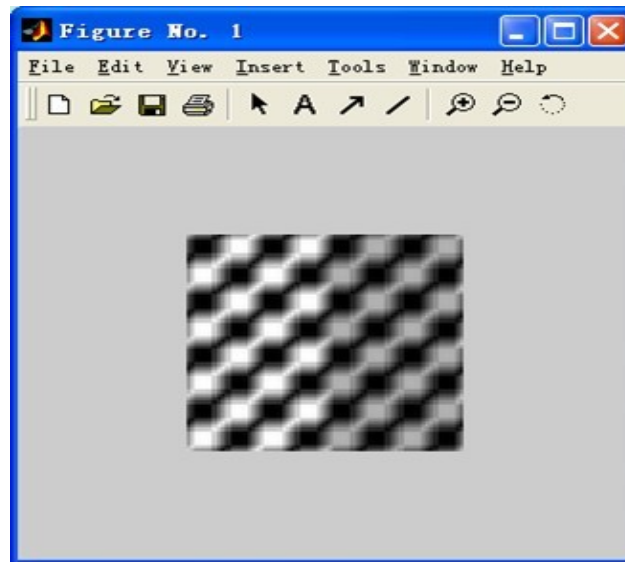
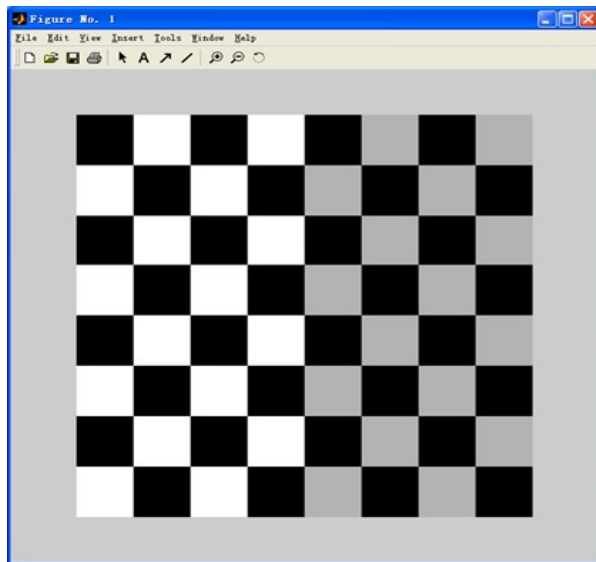
`imshow(f)`





# 利用matlab对运动产生的图像模糊进行建模举例

```
PSF=fspecial('motion',7,45);  
gb=imfilter(f,PSF,'circular');  
noise=imnoise(zeros(size(f)),'gaussian',0,0.001);  
g=gb+noise;  
imshow(pixeldup(f,8),[])  
imshow(gb); imshow(noise,[])
```



# 逆滤波

- 对于一幅被退化函数  $H$  降质的图像，最简单的复原方法就是直接采用逆滤波，即

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)}$$

- 进一步，我们可以得到

$$\hat{F}(u, v) = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

- 如果退化函数在某一个频率点的值为零或很小的值，那么比值  $N(u, v)/H(u, v)$  很容易压制信号，造成  $F(u, v)$  的估计存在较大误差。一种解决方法是只利用原点附近退化函数的值来进行逆滤波的计算。

可以设定一个范围，当  $u^2 + v^2 < R^2$  时，才去计算逆滤波，范围外面令  $H=0$ ，相当于一个低通滤波，又叫受限逆滤波

# 逆滤波

取太小也不好，导致一些有效信号被砍掉（因为一般图像的有效信号都集中在低频中心区）

a b  
c d

**FIGURE 5.27**  
Restoring  
Fig. 5.25(b) with  
Eq. (5.7-1).  
(a) Result of  
using the full  
filter. (b) Result  
with  $H$  cut off  
outside a radius of  
40; (c) outside a  
radius of 70; and  
(d) outside a  
radius of 85.



由此可见噪声的频率在70和85之间

而且H在高频往往幅值很小，也会放大噪声的影响

# 维纳滤波

- 维纳滤波器寻求能最小化下面的统计误差函数的估计值  $\hat{f}$

$$e^2 = E\{(f - \hat{f})^2\}$$

其中  $E$  为求取数学期望值的算子,  $f$  为没有退化的图像。这个表达式在频域中的解为

$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v)/S_f(u, v)} \right] G(u, v)$$

其中  $H(u, v)$  为退化函数

$$|H(u, v)|^2 = H^*(u, v)H(u, v)$$

$H^*(u, v)$  为  $H(u, v)$  的复共轭

$S_\eta(u, v) = |N(u, v)|^2$  : 噪声的功率谱

$S_f(u, v) = |F(u, v)|^2$  : 未退化图像功率谱

这两项通常很难获得  
逆滤波可以看作是噪声不存在时的维纳滤波 ( $S_\eta=0$ )

# 维纳滤波

$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right] G(u, v)$$

所以我们通常把两个功率谱的比值看作一个常数K



a b c

**FIGURE 5.28** Comparison of inverse- and Wiener filtering. (a) Result of full inverse filtering of Fig. 5.25(b). (b) Radially limited inverse filter result. (c) Wiener filter result.



# 维纳滤波



a b c  
d e f  
g h i

**FIGURE 5.29** (a) Image corrupted by motion blur and additive noise. (b) Result of inverse filtering. (c) Result of Wiener filtering. (d)–(f) Same sequence, but with noise variance one order of magnitude less. (g)–(i) Same sequence, but noise variance reduced by five orders of magnitude from (a). Note in (h) how the deblurred image is quite visible through a “curtain” of noise.

# Matlab中的维纳滤波

➤ `fr=deconvwnr(g,PSF)`

deconvolution with wiener, 因为是逆过程, 所以叫去卷积

➤ `fr=deconvwnr(g,PSF,NSPR)`

PSF是点扩散函数, 即h (滤波器的别称, 信号处理里面)  
NSPR是 $S_n/S_f$ , 又叫噪信比, 噪声和信号的功率之比

`fr=deconvwnr(g,PSF,NACORR,FACORR)`

NACORR, 噪声的自相关函数; FACORR, 信号的自相关函数

$$|F(u, v)|^2 = \mathfrak{S}[f(x, y) \circ f(x, y)]$$

功率谱和自相关构成一对傅里叶变换对  
自相关, 即f与f自身做相关运算correlation

➤ 如果复原的图像显示振铃现象, 有时在调用deconvwnr之前使用edgetaper函数会有所帮助

`J=edgetaper(I,PSF)`

振铃现象也叫吉布斯效应, 原因是原始信号的不连续点处附近, 傅里叶级数的收敛(到原始信号)会慢很多, 因此会出现周期性震荡, 但是其能量偏差仍然是收敛到0的(详见信号课第6讲笔记)



# Matlab中的维纳滤波

```
PSF=fspecial('motion',7,45);  
g=imread('Fig0507(d).tif');  
fr1=deconvwnr(g,PSF);  
Sn=abs(fft2(noise)).^2;  
nA=sum(Sn(:))/prod(size(noise));  
Sf=abs(fft2(f)).^2;  
fA=sum(Sf(:))/prod(size(f));  
R=nA/fA;  
fr2=deconvwnr(g,PSF,R);  
NCORR=fftshift(real(ifft2(Sn)));  
ICORR=fftshift(real(ifft2(Sf)));  
fr3=deconvwnr(g,PSF,NCORR,ICORR);
```

平均功率谱，或平均  
能量

同上一頁的式子，自相关和  
功率谱是一对傅里叶变换对  
(fftshift只是平移)

# 约束最小二乘法图像复原算法

- 对于本章讨论的所有方法来说，普遍都需要已知退化函数  $H$  的所有信息。
- 使用维纳滤波方法存在的困难：必须知道未退化图像和噪声的功率谱。
- 对功率谱比的恒定估计有时可以取得很好的结果，但并不意味着它总是一种很好的解决方法。
- 下面将要讨论的约束最小二乘滤波方法只需要知道噪声的均值和方差。
- 如果我们用矩阵来建模退化过程，有

可以通过平坦区域来估计噪声

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y)$$

$$g = Hf + \eta$$

把  $f, g, \eta$  都化为以列展开的向量，把卷积转化为矩阵运算

# 约束最小二乘滤波图像复原

- 该方法的核心是H对噪声的敏感性问题。缓解这个问题的一种方法是将复原计算建立在一个图像平滑度的度量上。
- 拉普拉斯算子(图像的二阶导数)似乎是一个不错的选择。

$$\min C = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} [\nabla^2 f(x, y)]^2$$

$$\text{满足: } \|g - H\hat{f}\| = \|\eta\|$$

此时已知g  
, H, n

该条件比前面的等  
式条件要弱

该问题在频域中的解为

$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} \right] G(u, v)$$

$$p(x, y) = \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ -1, & 4, & -1 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}$$

p为拉普拉斯算子，其傅  
里叶变换为P

# 约束最小二乘滤波图像复原

- 让  $r = g - H\hat{f}$  并且  $\varphi(r) = r^T r = \|r\|^2$

通过gamma求得Fhat，反傅里叶变换得到fhat，从而求得r，从而求得Phi(r)。调整gamma是使Phi(r)接近 $\|n\|^2$ ，即为每一点噪声的平方和。

- 可以证明  $\varphi(r)$  是关于  $\gamma$  的单调递增函数 所以我们可通过调整  $\gamma$ ，使得

$$\|r\|^2 = \|\eta\|^2 \pm a$$

L2-norm和之前的取模操作（即求向量的长度）其实是一样的

- 问题是：我们如何计算  $\|\eta\|^2$  呢？

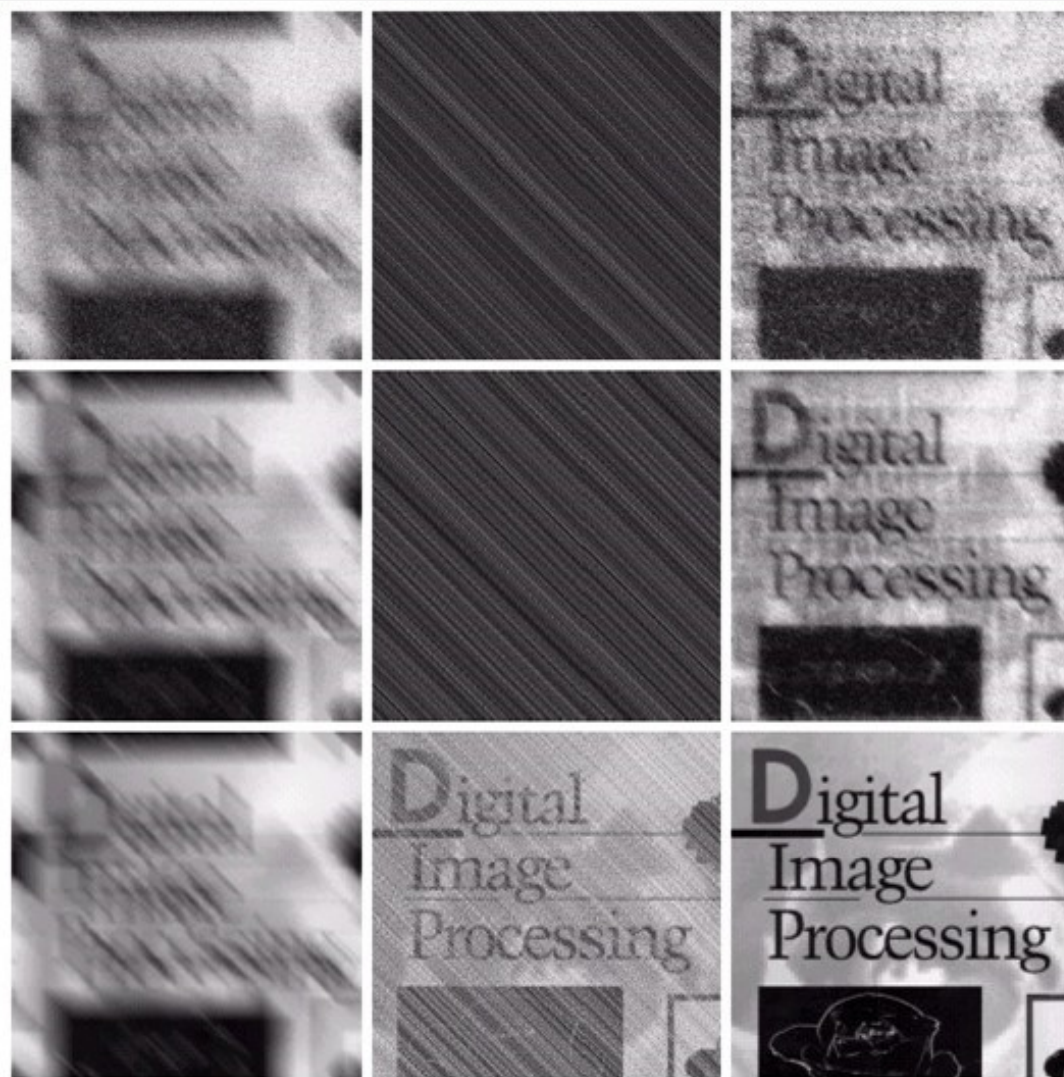
$$\|\eta\|^2 = MN[\sigma_\eta^2 + m_\eta^2]$$

$$\sigma_\eta^2 = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\eta(x, y) - m_\eta]^2$$

$$m_\eta = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta(x, y)$$

证明很简单，直接带入即可，结论是平方的期望减去期望的平方等于方差

# 约束最小二乘滤波图像复原效果



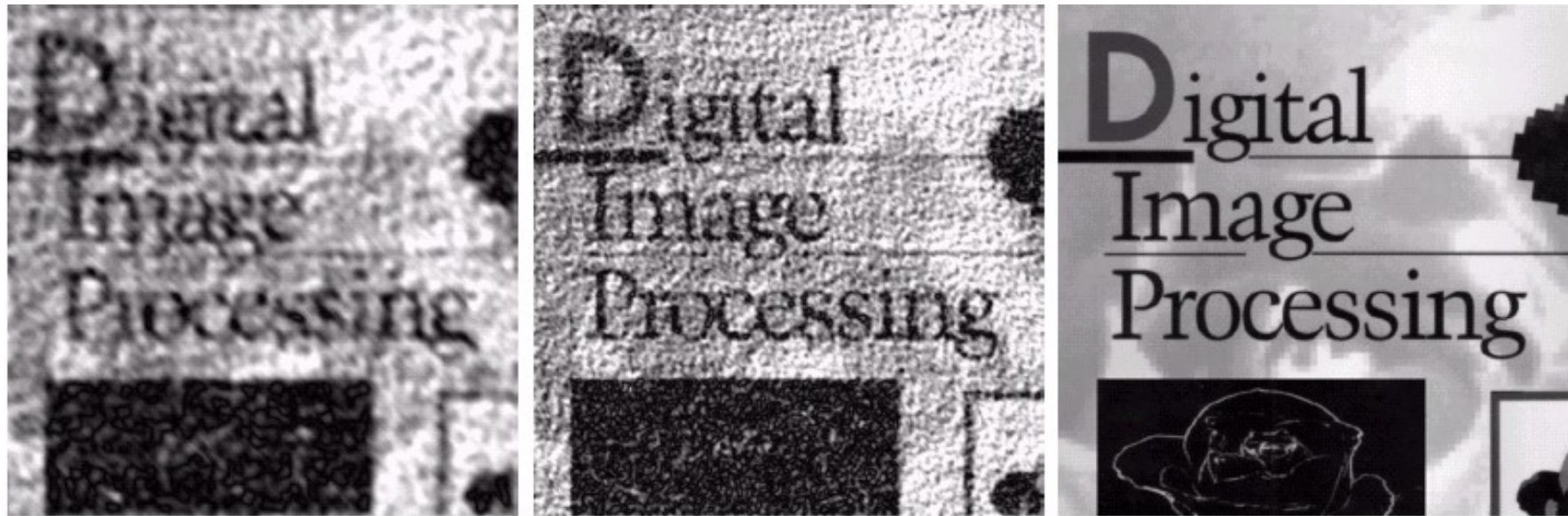
a b c  
d e f  
g h i

**FIGURE 5.29** (a) Image corrupted by motion blur and additive noise. (b) Result of inverse filtering. (c) Result of Wiener filtering. (d)–(f) Same sequence, but with noise variance one order of magnitude less. (g)–(i) Same sequence, but noise variance reduced by five orders of magnitude from (a). Note in (h) how the deblurred image is quite visible through a “curtain” of noise.



# 约束最小二乘滤波图像复原效果

还有一种图像降质是图像畸变，即有些像素的位置发生了改变，此时可以用一些几何变换的方法去复原



a b c

**FIGURE 5.30** Results of constrained least squares filtering. Compare (a), (b), and (c) with the Wiener filtering results in Figs. 5.29(c), (f), and (i), respectively.

# 作业

1. 在利用最佳陷波滤波器去除周期性噪声时，通过最小化局部方差  $\sigma^2$  来为每一个像素位置获取一个合适的调制数值，请从数学上推导如何由

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial w(x, y)} = 0$$

获得

$$w(x, y) = \frac{\overline{g(x, y)\eta(x, y)} - \bar{g}(x, y)\bar{\eta}(x, y)}{\bar{\eta}^2(x, y) - \bar{\eta}^2(x, y)}$$

2. 在静态场景图像获取中，一部摄像机在垂直方向上做了匀速直线运动，用时为  $T_1$ ，然后突然转换为水平运动，用时为  $T_2$ ，假设运动改变方向的时间与快门的开关时间可忽略不计，请用一个数学表达式建模运动模糊函数  $H(u, v)$ 。



# 作业

3. （**选作题**）利用matlab生成讲义中的棋盘格图像，并对它进行运动模糊处理后，进一步施加高频的正弦波周期性噪声，生成一幅经过运动模糊与噪声干扰的图像，请用matlab编写代码进行受限逆滤波图像复原，不断从小到大调整截止频率半径并观察图像的复原效果，寻找噪声频率与截止半径的不同关系下受限逆滤波方法对图像复原的有效性。