数字图像处理

第四讲 频域处理（上）

王伟强

中国科学院大学计算机科学与技术学院

内容回顾（1）

- 在信号处理领域，卷积是一种不可或缺的运算。 $(f*g)[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{N-1} f[m]\, g[n-m]$

  - 针对一维信号 $x[t]$=[1 2 3 2 1] 与 $y[t]$=[2 0 -2], 计算它们的卷积 $z[t]=x[t]*y[t]$

    ✓ $y[-t]$=[-2 0 2]，平移到位置p的地方得到$y[-(t-p)]=y[p-t]$=[-2 0 2],

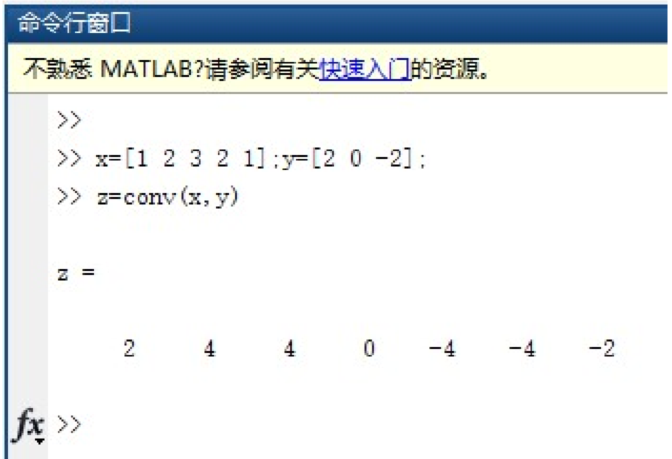
    ✓ $z[0]=0*(-2)+0*0+1*2=2$　　$z[1]=0*(-2)+1*0+2*2=4$

    $z[2]=1*(-2)+2*0+3*2=4$　　$z[3]=2*(-2)+3*0+2*2=0$

    $z[4]=3*(-2)+2*0+1*2=-4$　　$z[5]=2*(-2)+1*0+0*2=-4$

    $z[6]=1*(-2)+0*0+0*2=-2$　所以$z[t]=x[t]*y[t]=[2\quad 4\quad 4\quad 0\ -4\ -4\ -2]$

    ✓ 对于离散情况，输出的信号长度S与输入信号长度L以及卷积核大小l的关系$S=L+l-1$



内容回顾（2）

- 卷积是一种线性运算
  - 针对一维信号 $x[t]$=[1 2 3 2 1] 与 $y[t]$=[2 0 -2]，计算它们的卷积 $z[t]=x[t]*y[t]$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

内容回顾（3）

➢ 卷积是线性移不变系统在空域/时领的数学模型

- 若已知一个线性移不变数字系统对单位脉冲的响应，我们可以知道该系统对任何输入的输出响应，卷积就是获得输出所要采用的数学计算。

一个信号与单位脉冲的卷积仍为这个信号，这里[1]代表单位脉冲

首先 $z[t]=x[t]*y[t]=[1]*[2\ 0\ -2]=[2\ 0\ -2]$，一般地当输入$x[t]=[1]$，$z[t]=x[t]*y[t]=y[t]$

现在有输入先 $x[t]=[1\ 2\ 3]=1\cdot[1\ \ 0\ \ 0]+2\cdot[0\ \ 1\ \ 0]+3\cdot[0\ \ 0\ \ 1]$

=1 · [0]+2 · [1]+3 · [2]，这里的几个单位脉冲构成一组正交基

对每一时刻，竖着看就是卷积

应用线性时不变系统的性质
1.数乘
2.时不变
3.加法闭合(三个信号叠加)

当我们用信号$x_0=1\cdot[1\ \ 0\ \ 0]$刺激系统时，有响应$z_0=[1{*}2\quad 1{*}0\quad 1{*}(-2)\quad 0\quad 0\ ]$

当我们用信号$x_1=2\cdot[0\ \ 1\ \ 0]$刺激系统时，有响应$z_1=[0\quad 2{*}2\quad 2{*}0\quad 2{*}(-2)\quad 0\ ]$

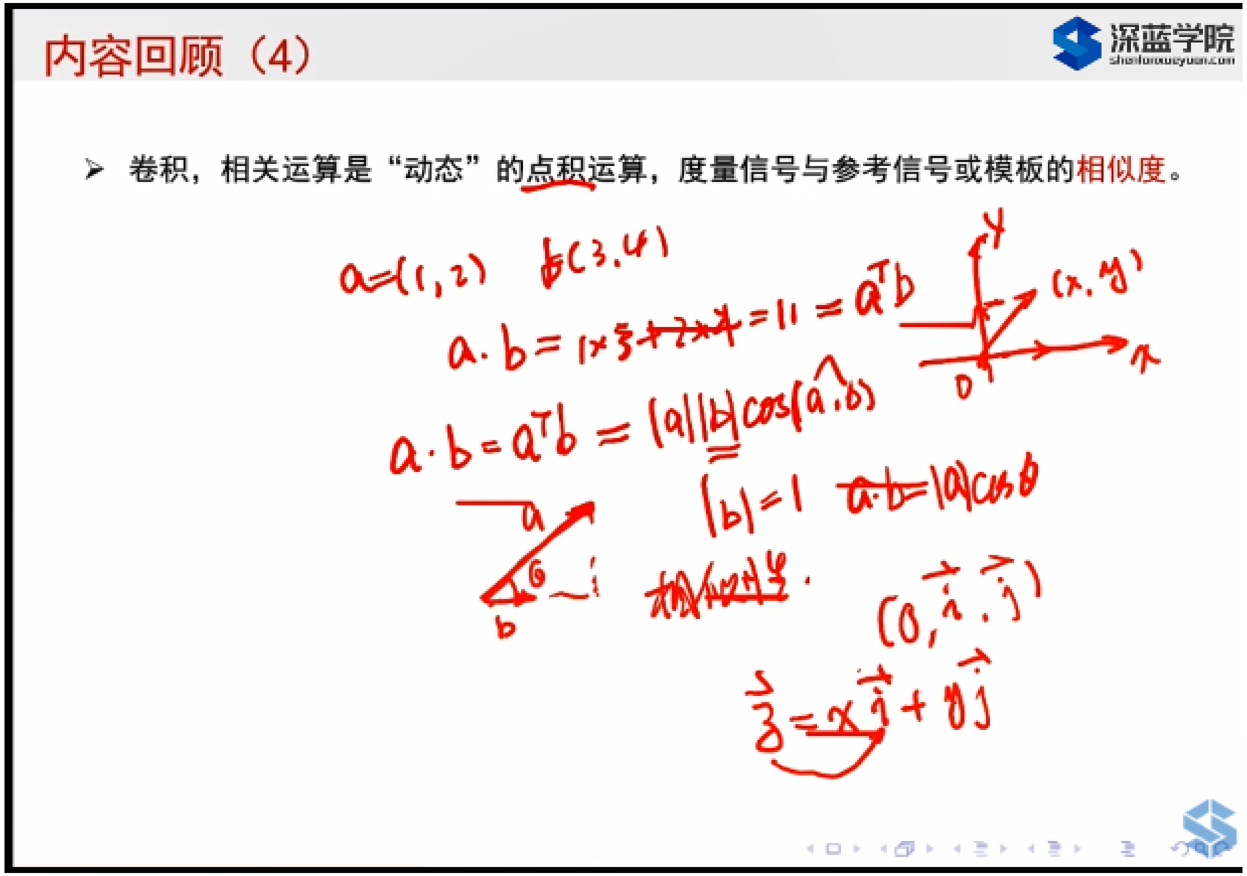
当我们用信号$x_2=3\cdot[0\ \ 0\ \ 1]$刺激系统时，有响应$z_2=[0\quad 0\quad 3{*}2\quad 3{*}0\quad 3{*}(-2)]$

当我们把用信号$x_0\ \ x_1\ \ x_2$叠加起来刺激系统时，有响应变成对应响应的叠加

即 $z[t]=z_0+z_1+z_2=[2,\ 4,\ 4,-4,-6]$

内容回顾（4）

➢ 卷积，相关运算是“动态”的点积运算，度量信号与参考信号或模板的相似度。



内容纲要

- 傅立叶变换
- 频域滤波
- 从空域滤波器获取频域滤波器
- 频域中直接构造滤波器
- 锐化频域滤波器

傅里叶变换

周期函数f的T趋向∞，则f可视为非周期函数

- 任何周期性函数可以表示为不同频率的正弦或余弦的总和，每个乘以不同的系数（傅立叶级数）。
- 即使是不是周期性（但是其曲线下面积是有限的）的函数也可以表示为正弦和/或余弦与数相乘的加权和函数形式（傅里叶变换）。
- 频域是指将一个信号经过傅立叶变换后所得到的信号表示形式。
- 傅里叶变换的目的是将信号表示为各种频率正余弦信号的线性组合。

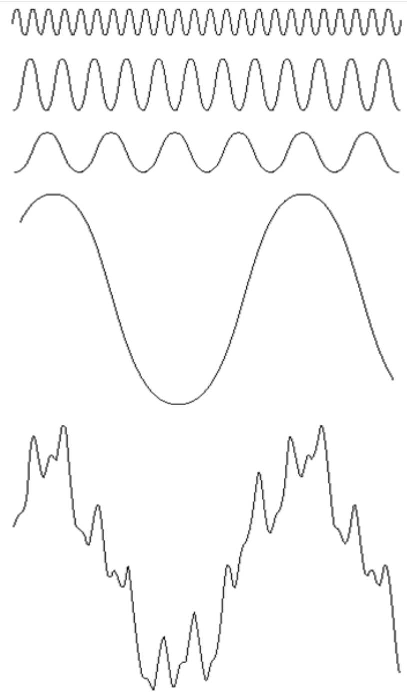


FIGURE 4.1 The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

连续傅里叶变换

对于正交基组成的正交阵A
y=A*x，则x=(A^H)y=Ah*y
Ah为A的共轭转置

- 一维傅立叶变换及其逆变换

f可视为与无穷维向量，即一组正交基做内积

傅里叶变换

u是转动频率(圈/s)
角频率ω=2Π/T=2Πu

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx, where\ j=\sqrt{-1}$$

int{e(j2Πu)*e(j2Πu)dx}=1;
int{e(j2Πu1)*e(j2Πu2)dx}=0,u1!=u2;
说明这是一组标准正交基（有待证明）

傅里叶逆变换

相当于在度量f(x)和exp(-2jΠux)的相似性

欧拉公式

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux}du \qquad e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

F(u)可视为f在exp(j2Πux)这组正交基下的的坐标

- 二维傅里叶变换及其逆变换

傅里叶变换

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

傅里叶逆变换

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

连续傅里叶变换举例

```
int(f*exp(jx))=int(f*cos(x))+j*int(f*sin(x)=a+j*b
|int(f*exp(jx))| = sqrt(a^2+b^2)
```

实际此处为离散型

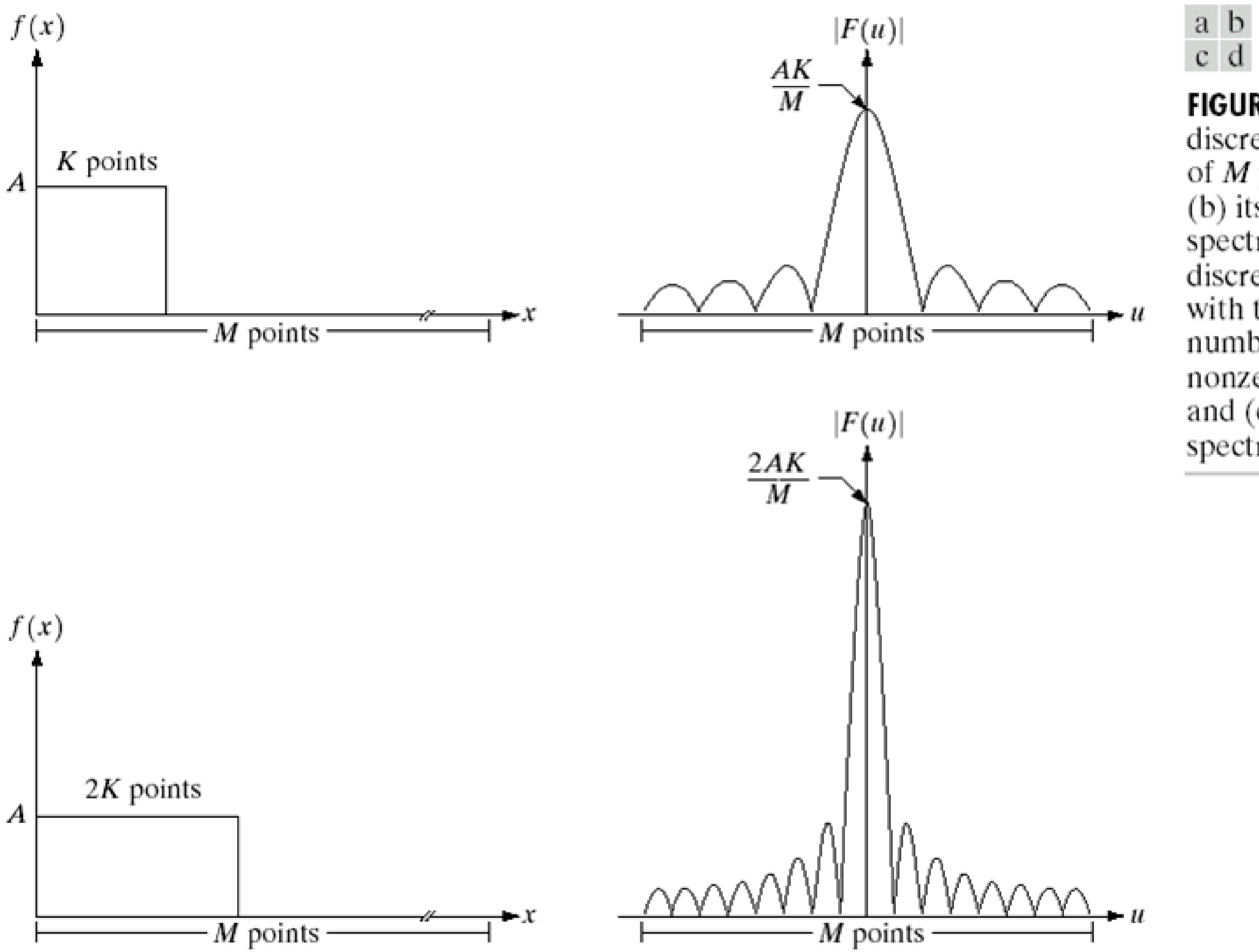


FIGURE 4.2 (a) A discrete function of M points, and (b) its Fourier spectrum. (c) A discrete function with twice the number of nonzero points, and (d) its Fourier spectrum.

一维离散傅里叶变换

f(x)是由连续函数在x处采样而得的离散函数，x∈Z，采样间隔为Δx(空域/时域采样)，
同理u也是整数，且采样间隔为Δu(频域采样)，且Δx*Δu为定值

- 一维离散傅立叶变换（DFT）及其逆变换

傅里叶变换

$$F(u) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-\frac{j2\pi ux}{M}} \quad for\ u = 0, 1, 2, ..., M-1$$

逆傅立叶变换：

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u)e^{\frac{j2\pi ux}{M}} \quad for\ x = 0, 1, 2, ..., M-1$$

由于 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ ，那么离散傅立叶变换可重新定义为

$$F(u) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)[\cos\frac{2\pi ux}{M} - j\sin\frac{2\pi ux}{M}]$$
$$for\ u = 0, 1, 2, ..., M-1$$

频域：函数$F(u)$的自变量u所在的定义域的范围，u描述变换中对应的频率分量的频率。

频率分量：$F(u)$的M项中的每一项。

一维离散傅里叶变换

$F(u)$ 可以用极坐标来表示:

$$F(u) = |F(u)|e^{j\phi(u)}$$

其中 $|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{\frac{1}{2}}$ （幅度或幅度频谱）

1

$$\phi(u) = \tan^{-1}[\frac{I(u)}{R(u)}]$$ （相位角或相位谱）

$I(u)$: $F(u)$ 的虚部

$R(u)$: $F(u)$ 的实部

功率谱:

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

二维离散傅里叶变换

二维离散傅里叶变换 （2D DFT）及其逆变换

傅立叶变换：

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

$$for\ u=0,1,2,...,M-1,\ \ v=0,1,2,...,N-1$$

傅立叶反变换：

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

$$for\ x=0,1,2,...,M-1,\ \ y=0,1,2,...,N-1$$

u，v：频率变量

x，y：空间变量

二维离散傅里叶变换

我们定义傅立叶频谱，相位角和功率谱如下：

$$|F(u,v)| = [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(频谱)}$$

$$\phi(u,v) = \tan^{-1}[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}] \qquad \text{(相位角)}$$

$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v) \qquad \text{(功率谱)}$$

其中

$I(u,v)$： $F(u,v)$ 的虚部。

$R(u,v)$： $F(u,v)$ 的实部。

二维离散傅里叶变换的性质

- 空域平移性质

$$\Im[f(x-x_0,y-y_0)]=F(u,v)e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N})}$$

- 频域平移性质

$$\Im[f(x,y)e^{\,j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})}\,]=F(u-u_0,v-v_0)$$

$$\Im[f(x,y)(-1)^{x+y}]=F(u-\frac{M}{2},v-\frac{N}{2})$$

相当于将频谱的原点移到了取值范围的中心
注意x,y,u,v都是整数

- 平均和对称性质

$$F(0,0)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y) \qquad \text{(平均)}$$

$$F(u,v)=F^*(-u,-v) \qquad \text{(共轭对称)}$$

$$|F(u,v)|=|F(-u,-v)| \qquad \text{(对称)}$$

二维离散傅里叶变换的性质

- 可分离性质

$$F(u,v) = \Im[f(x,y)]$$

内部是关于x的一位傅里叶变换

1/(M*N)

$$= \Sigma_y[\Sigma_x f(x,y)exp(-j2\pi\frac{xu}{M})]exp(-j2\pi\frac{yv}{N})$$

$$= \Sigma_y F(u,y)exp(-j2\pi\frac{yv}{N})$$

外部是关于y的一位傅里叶变换

$F(u,v)$ 的二维离散傅立叶变换可通过以下计算方式获得

- ✓ 对图像 $f(x,y)$ 每一行计算其一维傅立叶变换得到 $F(u,y)$
- ✓ 对图像 $F(u,y)$ 再进行一维离散傅立叶变换。

(a)f(x,y) (b) F(u,y) (c)F(u,v)

二维离散傅里叶变换的性质

离散傅里叶变换的情况确实比较麻烦一些，我就说连续的情况吧：

$\mathbb{R}^d$ 上的函数 $f(x), x \in \mathbb{R}^d$ 的傅里叶变换 $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\exp(-2\pi i x \cdot \xi)dx$, $\xi \in \mathbb{R}^d$

旋转不变性是说对 x 进行一个旋转 Rx 其中 R 是一个正交矩阵且 $\det R = 1$ ，那么对 $f(Rx)$ 进行傅里叶变换得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(Rx)\exp(-2\pi i x \cdot \xi)dx$$

令 $y = Rx$, $x = R^{-1}y$ ，那么注意不妨这里认为 x, y 都是列向量，那么

$R^{-1}y \cdot \xi = (R^{-1}y)^T \xi = y^T R\xi = y \cdot (R\xi)$ ，代入上式即为

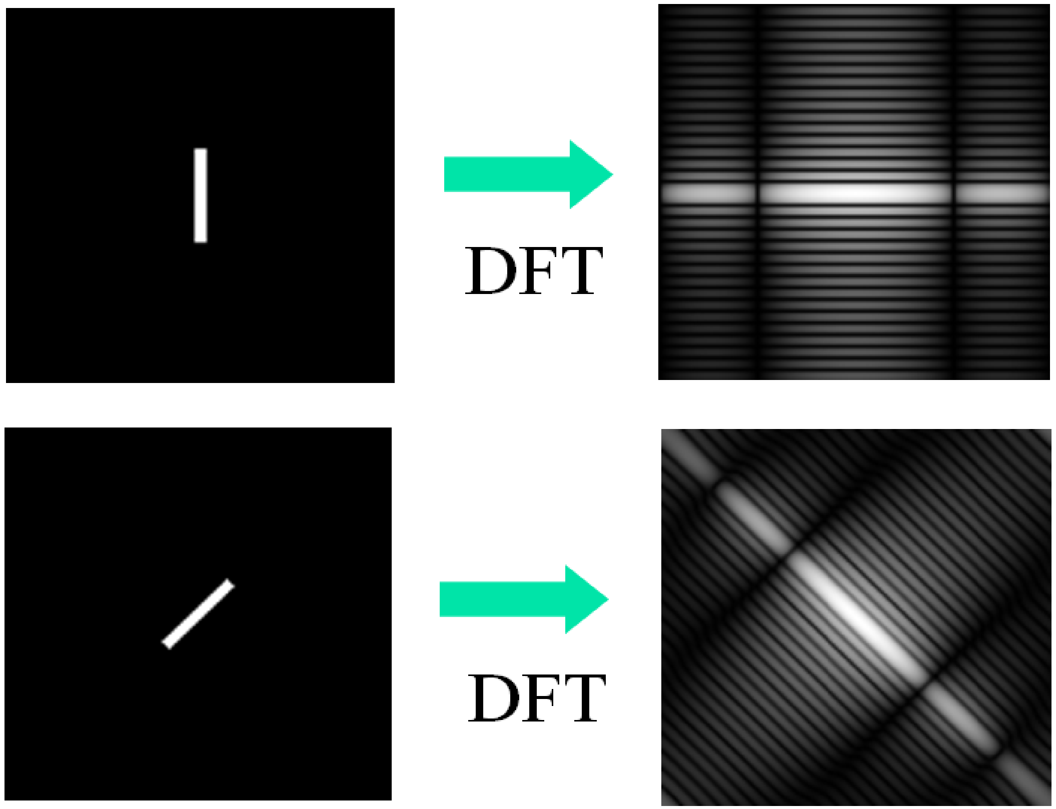
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\exp(-2\pi i y \cdot (R\xi))dy = \hat{f}(R\xi)$$

- 旋转性质

令

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, u = \omega\cos\varphi, v = \omega\sin\varphi$$

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$$



二维离散傅里叶变换的性质

实际工程中，基本都是有限长度的信号，因此将其均视为周期信号，周期为其长度

- 周期性

$$f(x,y) = f(x+M,y) = f(x,y+N) = f(x+M,y+N)$$
$$F(u,v) = F(u+M,v) = F(u,v+N) = F(u+M,v+N)$$

- 线性

$$\Im(af(x,y) + bg(x,y)) = a\Im(f(x,y)) + b\Im(g(x,y))$$

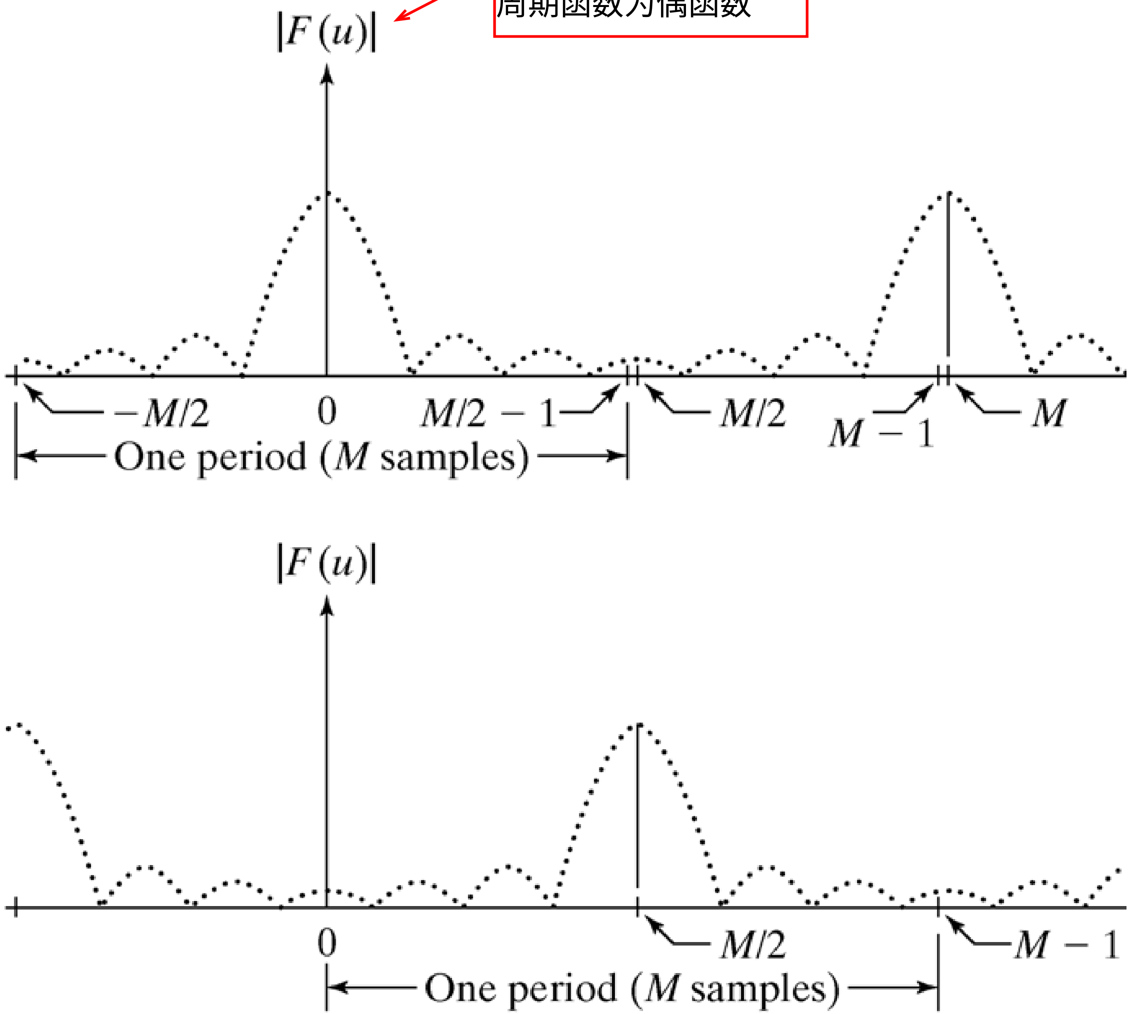
注意求导实际上是一种线性变换，相当于数乘，因此系数可以拿出来
j2Πu=jω=s，即可以推广到拉氏变换

- 微分性质

$$\Im(\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n}) = (j2\pi u)^n \Im(f(x,y)) = (j2\pi u)^n F(u,v)$$
$$\Im((-j2\pi u)^n f(x,y)) = \frac{\partial^n F(u,v)}{\partial u^n}$$
$$\Im(\nabla^2 f(x,y)) = -4\pi^2(u^2+v^2)F(u,v)$$

二维离散傅里叶变换性质图示

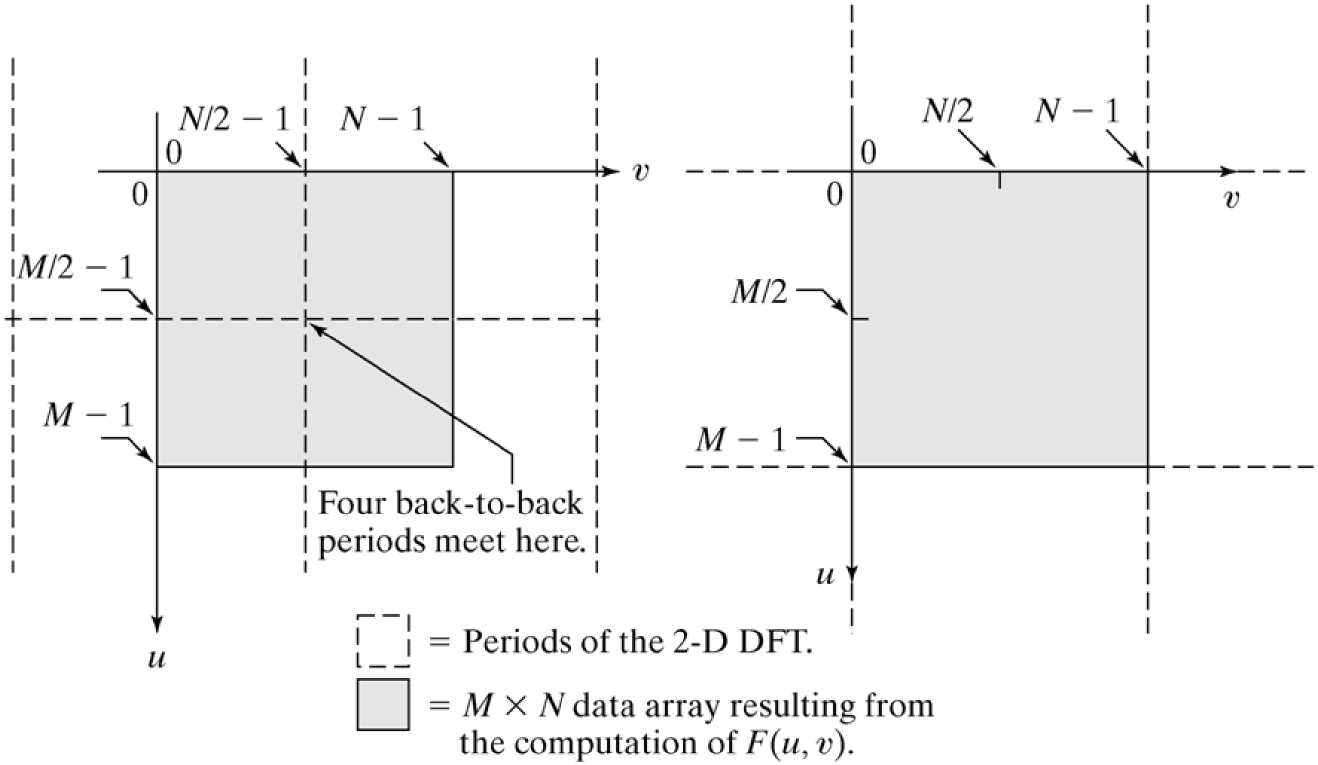
f(x)为实函数时（即函数值为实数），此周期函数为偶函数



a
b

FIGURE 4.1 (a) Fourier spectrum showing back-to-back half periods in the interval $[0, M-1]$. (b) Centered spectrum in the same interval, obtained by multiplying $f(x)$ by $(-1)^x$ prior to computing the Fourier transform.

二维离散傅里叶变换性质图示



a b

FIGURE 4.2 (a) $M \times N$ Fourier spectrum (shaded), showing four back-to-back quarter periods contained in the spectrum data. (b) Spectrum obtained by multiplying $f(x, y)$ by $(-1)^{x+y}$ prior to computing the Fourier transform. Only one period is shown shaded because this is the data that would be obtained by an implementation of the equation for $F(u, v)$.

二维离散傅里叶变换的性质

- 卷积定理

联系空域(时域)和
频域的运算

$$\Im(f(x,y)*g(x,y))=F(u,v)G(u,v)$$

$$\Im(f(x,y)g(x,y))=F(u,v)*G(u,v)$$

对卷积所傅里叶变换，等于对二者
分别做傅里叶变换后结果相乘

- 相关定理

取共轭

$$\Im(f(x,y)\circ g(x,y))=F^*(u,v)G(u,v)$$

$$\Im(f(x,y)\circ f(x,y))=|F(u,v)|^2$$

自相关和功率谱为
一对傅里叶变换对

$$\Im(f^*(x,y)g(x,y))=F(u,v)\circ G(u,v)$$

$$\Im(|f(x,y)|^2)=F(u,v)\circ F(u,v)$$

能量保持（书上没
有的性质），又叫
帕塞瓦尔定理：
对一个信号序列求
平方和，等于对其
傅里叶变换做平方
和

在 物理学 和 工程学 中, 帕塞瓦尔定理通常描述如下:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2\,df$$

其中$X(f)=\mathcal{F}\{x(t)\}$为 $x(t)$ 的连续傅立叶变换（以归一化酉形式），而f代表x的频率分量（非角频率）

帕塞瓦尔定理的此表达形式解释了波形$x(t)$依时间域t累积的总能量与该波形的傅立叶变换$X(f)$在频域域f累积的总能

- 伸缩性质

$$\Im(f(ax,by))=\frac{1}{|ab|}F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$$

空域横向收缩，对应频
域横向拉伸，且幅值降
低，此时|a|>1
（乘缩除涨）

一些有用的傅立叶变换对

- $\delta(x,y) \Leftrightarrow 1$
- $A2\pi\sigma^2 exp(-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)) \Leftrightarrow Aexp(-\frac{(u^2+v^2)}{2\sigma^2})$
- $\cos(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(u+u_0, v+v_0) + \delta(u-u_0, v-v_0)]$
- $\sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow \frac{1}{2}j[\delta(u+u_0, v+v_0) - \delta(u-u_0, v-v_0)]$

高斯函数的傅里叶变换还是高斯函数

从正交基的角度考虑一个剩下实部之和，一个剩下虚部之和

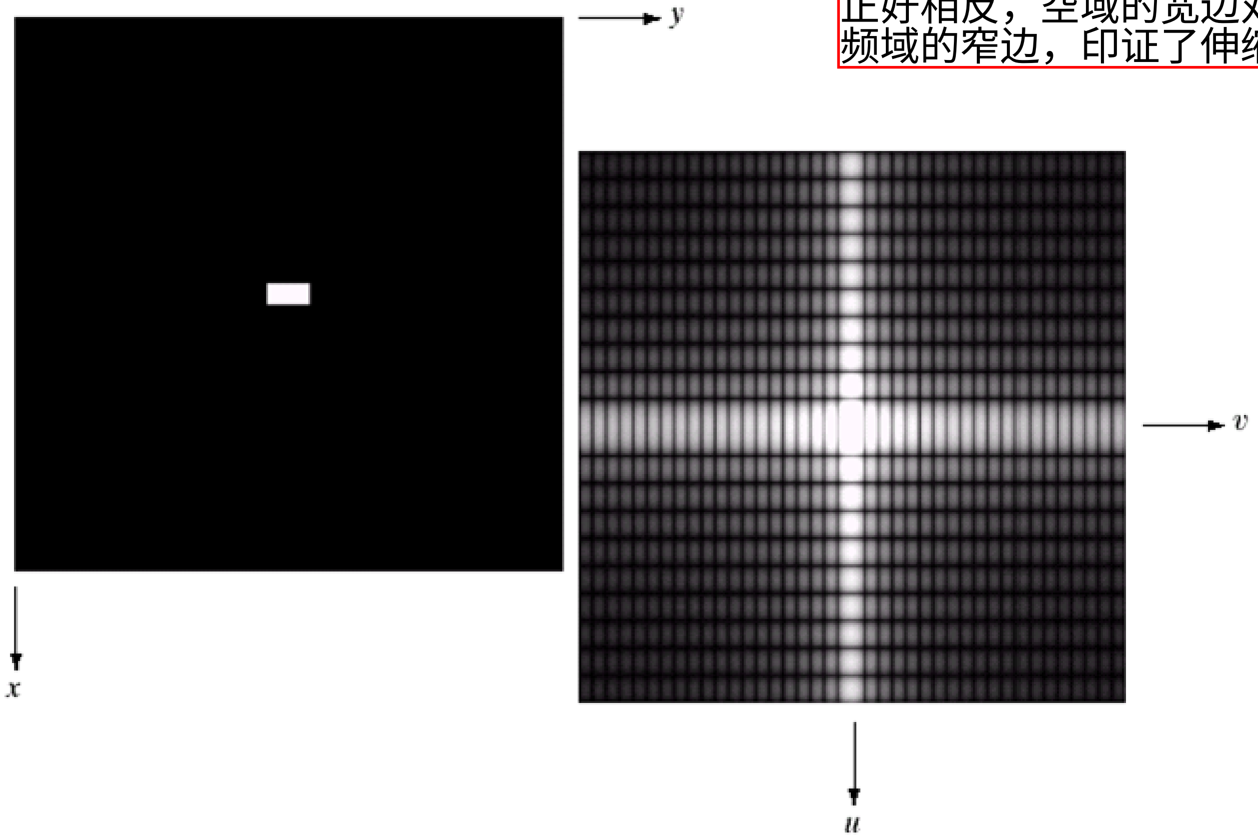
exp(-pi*(x^2+y^2))和exp(-pi(u^2v^2))是一对傅里叶变换对

二维离散傅里叶变换

注意空域和频域的宽窄对应正好相反，空域的宽边对应频域的窄边，印证了伸缩性

a b

FIGURE 4.3
(a) Image of a 20 × 40 white rectangle on a black background of size 512 × 512 pixels.
(b) Centered Fourier spectrum shown after application of the log transformation given in Eq. (3.2-2). Compare with Fig. 4.2.



Matlab中的二维离散傅里叶变换

- ✓ 在工程实践中使用快速傅里叶变换（FFT）算法来计算离散傅立叶变换及其反变换。可以利用matlab中的函数fft2计算获得 $M \times N$ 图像阵列 f 的FFT，其具有简单的语法如下：

F=fft2(f)

一维信号是fft()

此函数返回的傅里叶变换也具有大小$M \times N$，数据的原点位于左上角，四个四分之一周期在频率矩形的中心相交。

- ✓ 可通过使用函数abs获得傅里叶幅度谱：

S=abs(F)

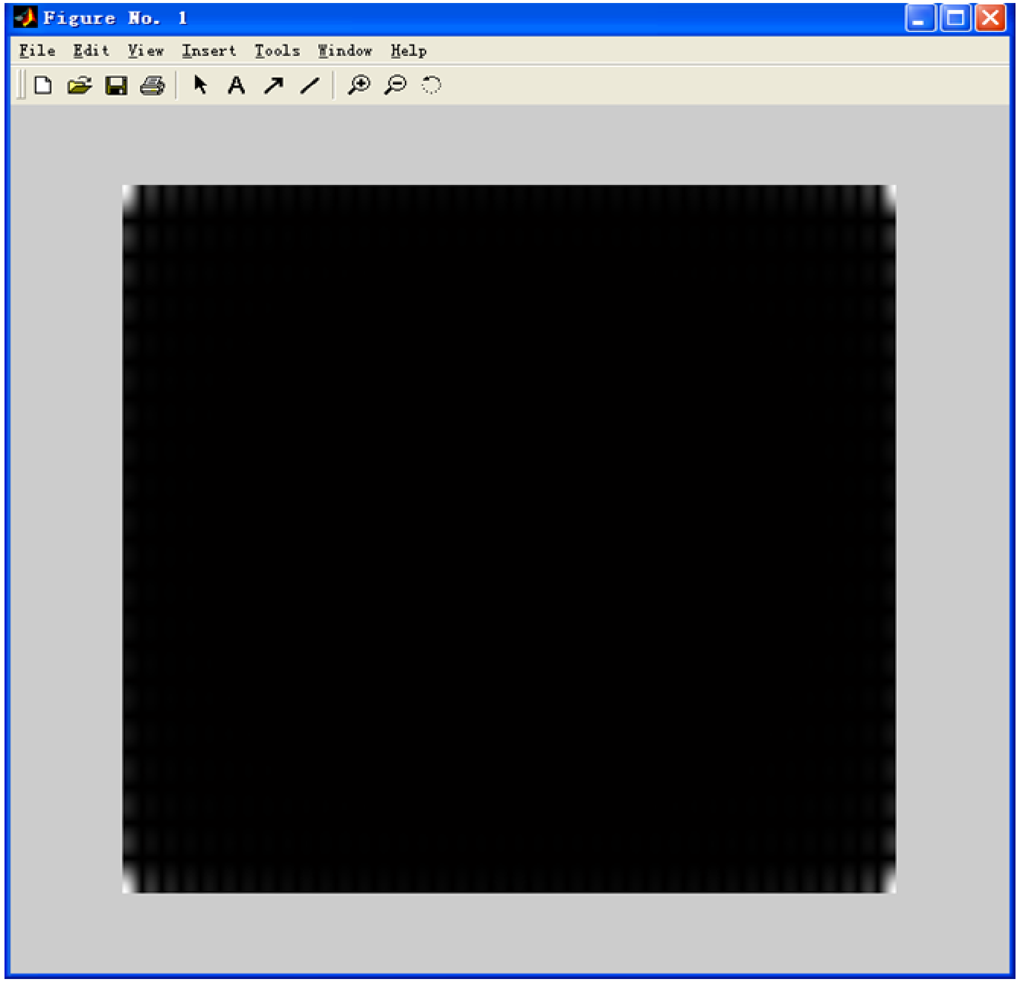
Matlab中的二维离散傅里叶变换

f=imread(‘Fig0403(a)(image).tif’);

F=fft2(f);

S=abs(F);

imshow(S,[])



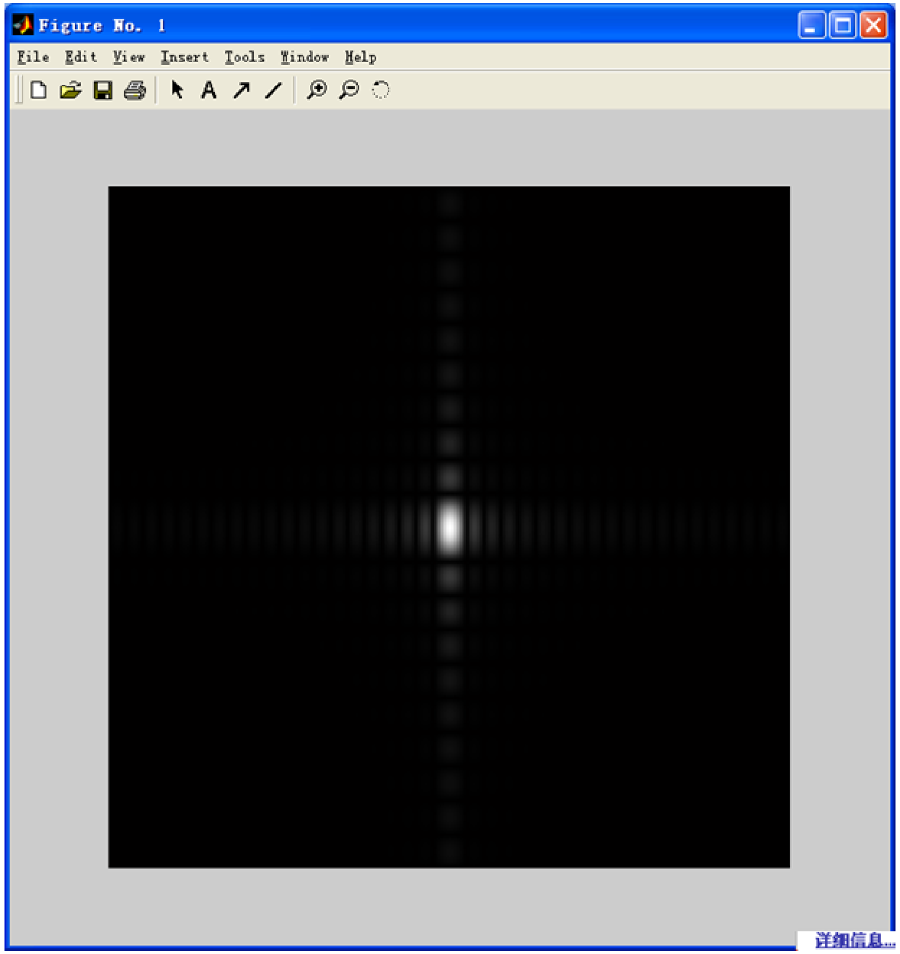
Matlab中的二维离散傅里叶变换

```
Fc=fftshift(F);
imshow(abs(Fc),[])
```

相当于把低频信息移到屏幕中央，方便观察，主要原因还是图象是从[0,0]点开始的

使用fftshift的最终结果与在计算变换之前输入图像乘以 $(-1)^{x+y}$ 相同。

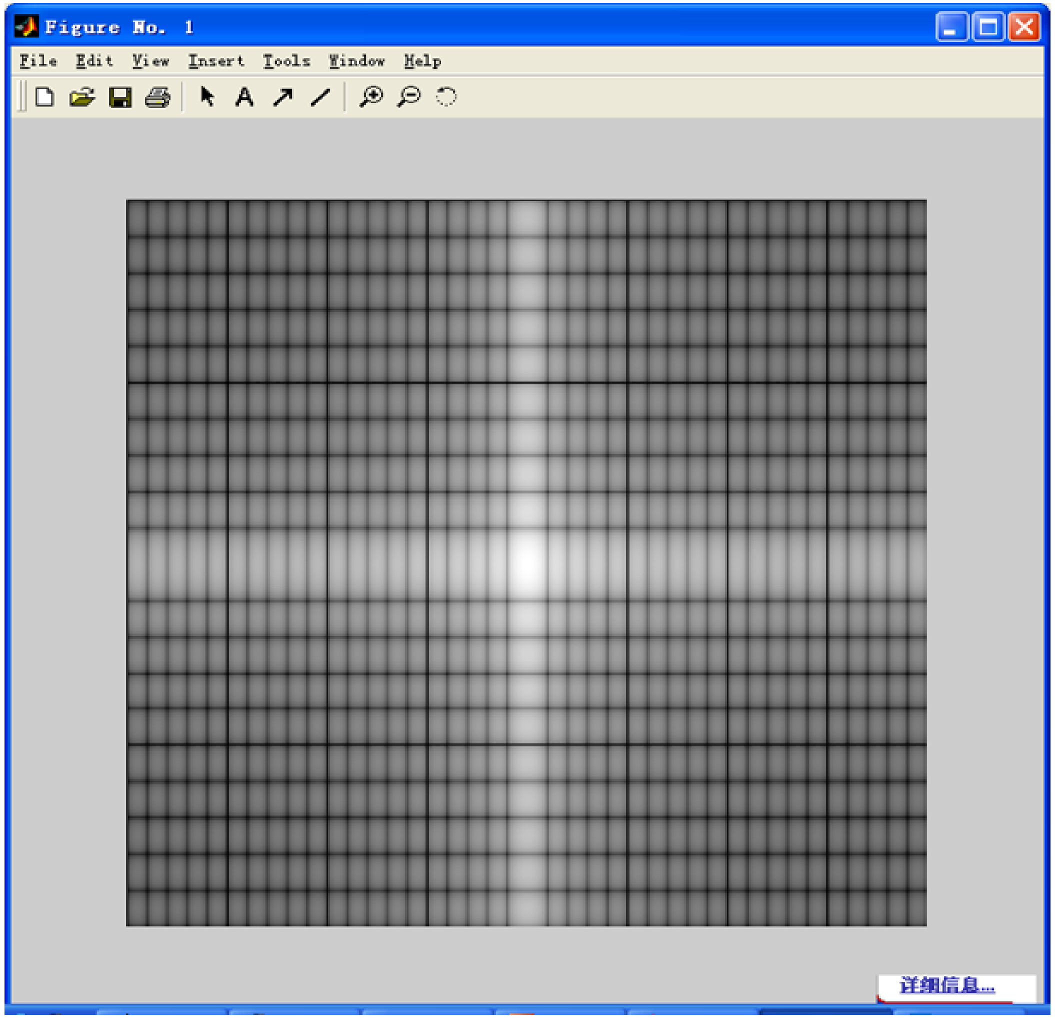
但请注意，这两个过程不可互换。



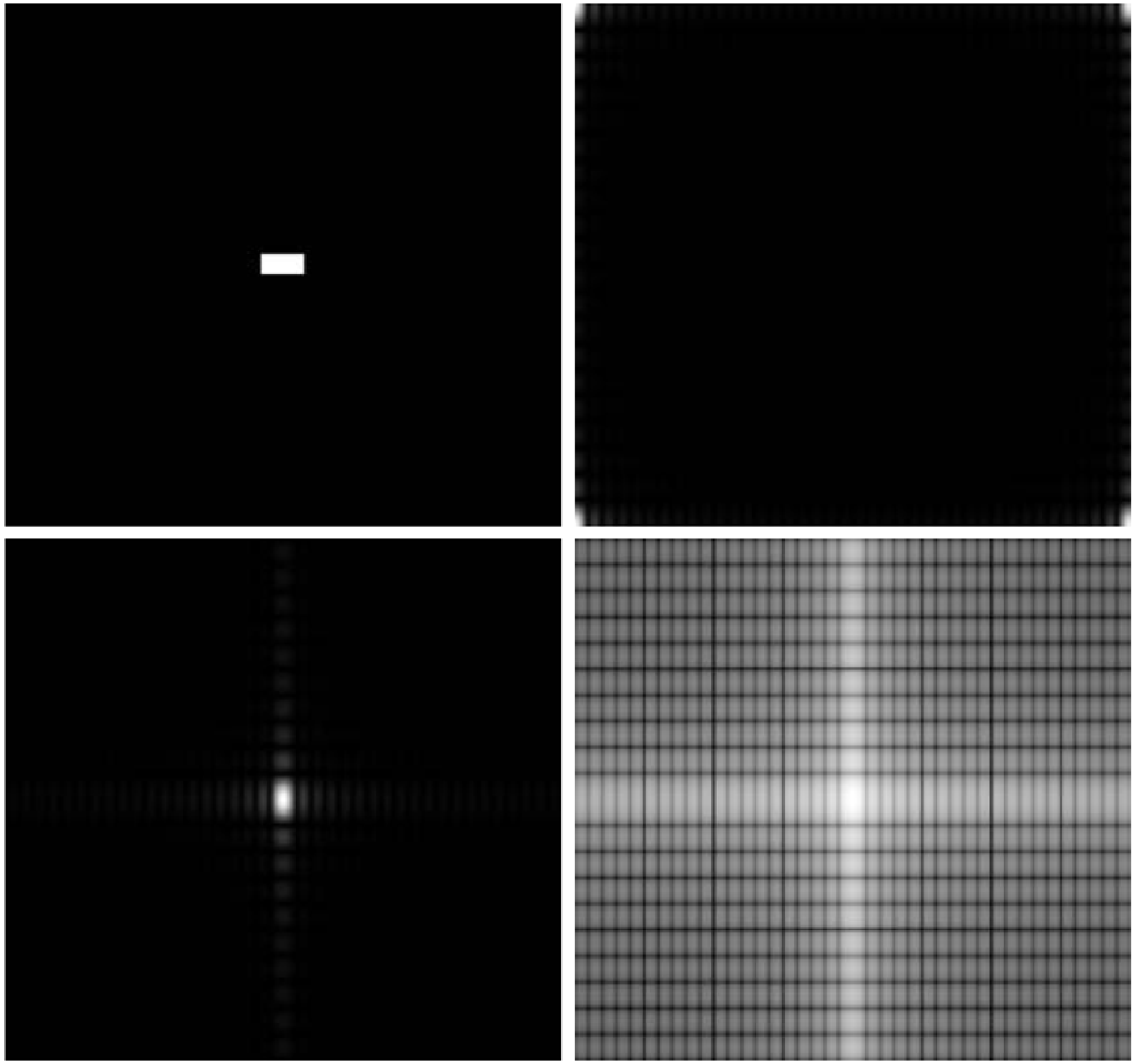
Matlab中的二维离散傅里叶变换

```
S2=log(1+abs(Fc));
imshow(S2,[])
```

对于变换可以压缩图像的对比度动态范围，从而使其更便于观察



Matlab中的二维离散傅里叶变换



a b
c d

FIGURE 4.3
(a) A simple image.
(b) Fourier spectrum.
(c) Centered spectrum.
(d) Spectrum visually enhanced by a log transformation.

Matlab中的二维离散傅里叶变换

- 我们可以利用图像工具箱中的函数ifft2来计算一幅图像的傅里叶反变换，它的基本的语法

f=ifft2(F)

- 在实践中ifft2的输出通常具有由舍入误差引起的非常小的虚部。因此，提取结果的实部是一种好方法。

f=real(ifft2(F))

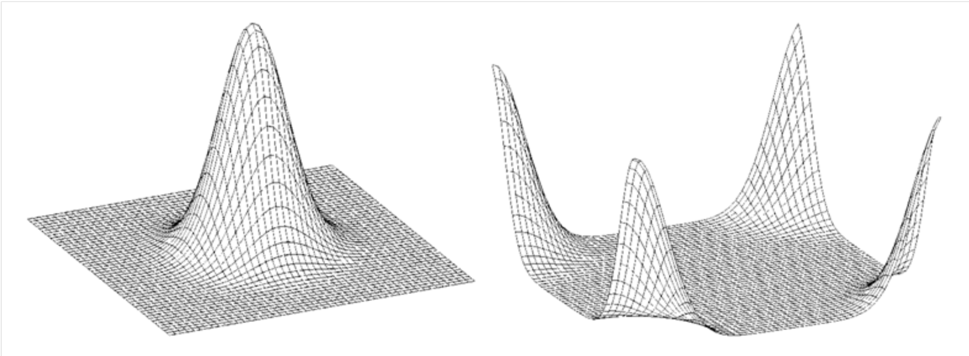
频域滤波

- 空间域和频域中线性滤波的基础是卷积定理，它可以写成

$$f(x,y) * h(x,y) \Longleftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$

- 频域滤波的基本想法就是选择一个特定的滤波器传递函数来修改输入图像的傅立叶变换 $F(u,v)$ 。

- 例如，图4. 4中的低通滤波器



a b

FIGURE 4.4 Transfer functions of (a) a centered lowpass filter, and (b) the format used for DFT filtering. Note that these are frequency domain filters.

频域滤波

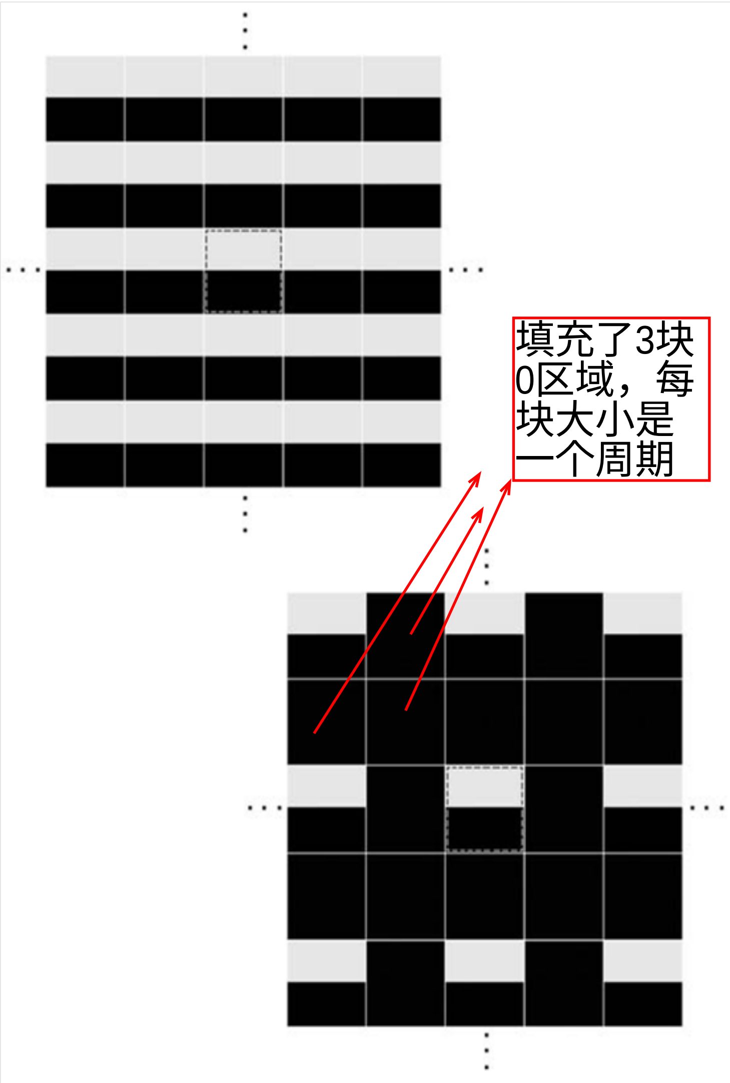
卷积的结果比原信号要长，两边都有扩展，周期信号不同周期的卷积会在边界处产生叠加，因此考虑将每个周期都向外延拓补零，从而给每个周期的卷积结果留出空间

- 基于卷积定理，我们知道为了在空间域中获得相应的滤波图像，我们只需简单地计算乘积输入图像与滤波器乘积 $H(u,v)F(u,v)$ 的逆傅里叶变换。
- 如果周期相对于函数的非零部分的长度非常接近，则周期函数的卷积可能带来相邻周期内的非零部分信号的干扰。这种干扰称为混叠误差，它可以用零填充这种技术手段来消除。
- 例如，我们采用图4. 4中的低通滤波器对图4. 5(a)中的图像进行频域内的滤波

a b c

FIGURE 4.5 (a) A simple image of size 256 × 256. (b) Image lowpass-filtered in the frequency domain without padding. (c) Image lowpass-filtered in the frequency domain with padding. Compare the light portion of the vertical edges in (b) and (c).

频域滤波



a b
FIGURE 4.6 (a) Implied, infinite periodic sequence of the image in Fig. 4.5(a). The dashed region represents the data processed by `fft2`. (b) The same periodic sequence after padding with 0s. The thin white lines in both images are shown for convenience in viewing; they are not part of the data.

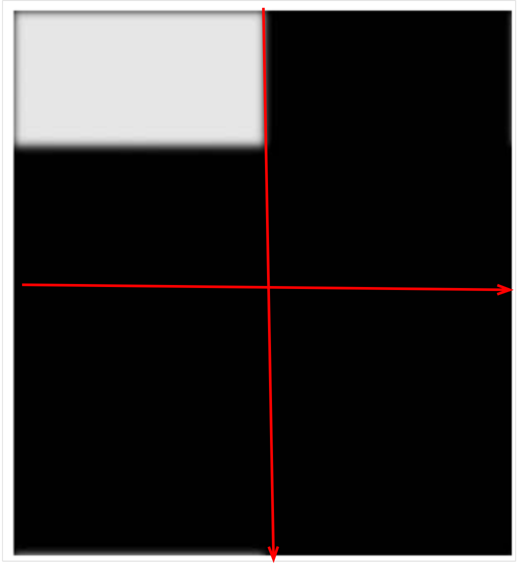


FIGURE 4.7 Full padded image resulting from `ifft2` after filtering. This image is of size 512 × 512 pixels.

变换之后在做反变换回来仍然是填充图像，别忘了做裁剪，从而得到原图像的滤波结果

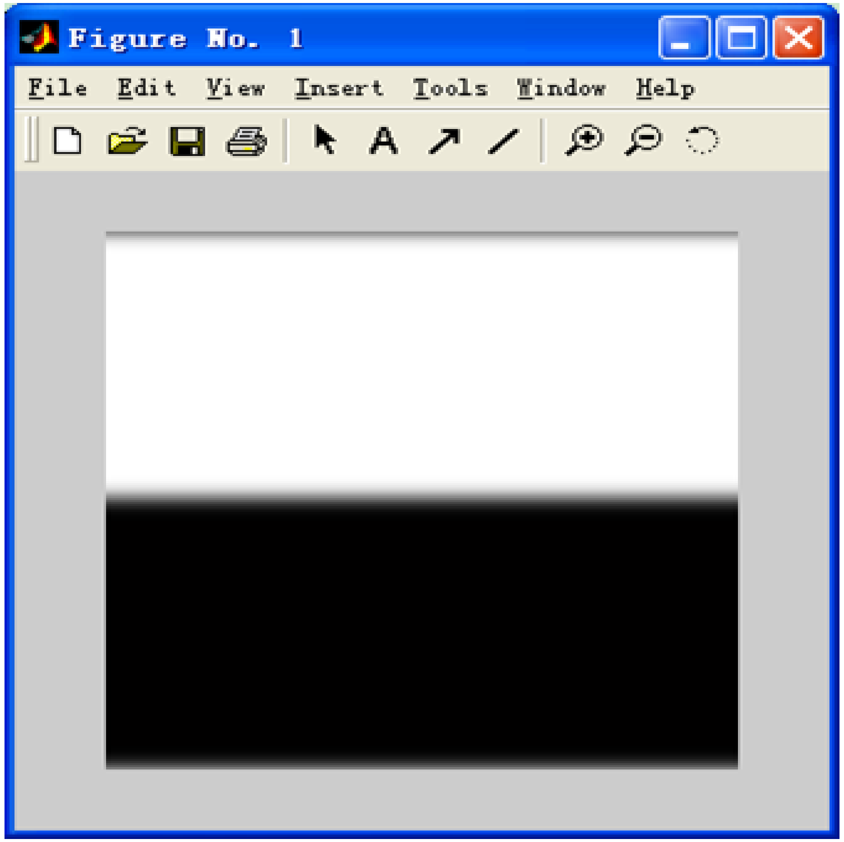
频域滤波

- 在频域中没有填充进行低通滤波获得的图像

```
f=imread('Fig0405(a)(square_original).tif');
[m n]=size(f)
F=fft2(f);
H=lpfilter('gaussian',m,n,10);
G=H.*F;
g=real(ifft2(G))
imshow(g,[])
```

σ

注意是点乘



离散傅立叶变换频域滤波的基本步骤

这里f是图像，但是最小填充实际上是滤波器的size，然后最好也是2的n次幂，因为此时fft的算法的效率最高

- 使用paddedsize函数获取填充参数: PQ=paddedsize(size(f));
- 使用填充获取傅里叶变换：
  F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));

为何H的size一定要与PQ相同？

- 使用本章其余部分讨论的任何方法生成大小为PQ（1）×PQ（2）的滤波函数*H*.
- 过滤器必须采用图4.4（b）所示的格式。如果它居中，如图4.4（a）所示，在使用滤波器之前让 H = fftshift(H)。
- 乘以滤波器的变换：G = H.* F;
- 获得G的傅立叶反变换的实部 g = real(ifft2(G))
- 将滤波处理后图像按输入图像的尺寸剪裁出左上角矩形作为输出图像： g = g(1:size(f,1),1:size(f,2));

离散傅立叶变换频域滤波的基本步骤图示

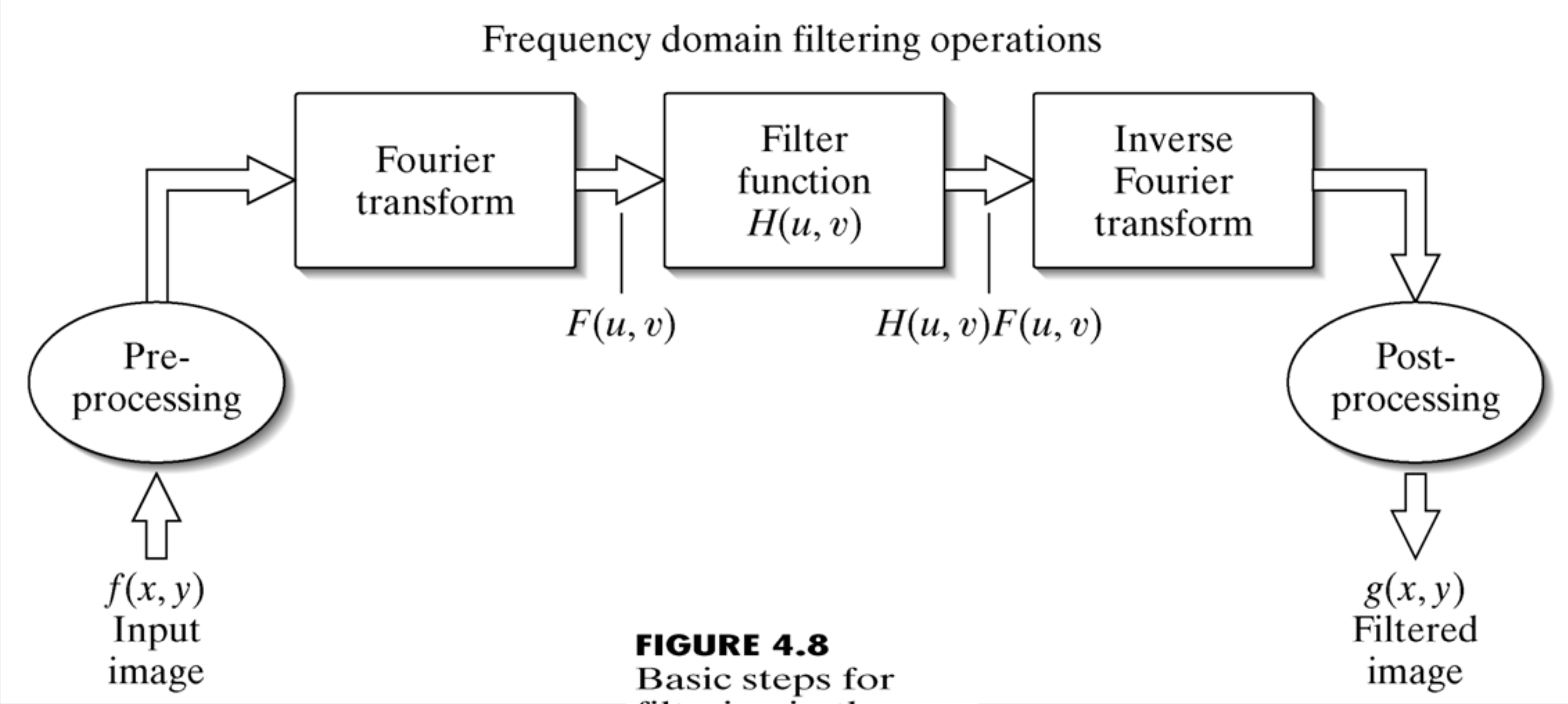


FIGURE 4.8 Basic steps for filtering in the frequency domain.

作业（1）

1. 请根据傅立叶变换的定义，证明傅立叶变换的空域平移性质、频域平移性质、对称性质、线性性质。

2. 请估算对于一幅的图像若根据如下的算式

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$for\ u=0,1,2,...,M-1,\ v=0,1,2,...,N-1$$

计算其傅立叶变换所涉及的乘法次数，但若根据傅立叶变换的可分离性质去计算重新估算所涉及的乘法次数，从而体会这种可分离的变换核给变换计算带来的效率。

作业（1）

3. 观察如下所示图像。右边的图像这样得到：(a)在原始图像左边乘以$(-1)^{x+y}$；(b）计算离散傅里叶变换(DFT)；（c）对变换取复共轭；（d）计算傅里叶反变换；(d）结果的实部再乘以$(-1)^{x+y}$ 。(用数学方法解释为什么会产生右图的效果。)