深蓝学院

shenlanxueyuan.com

状态估计第五讲作业讲评

主讲人 王东晓

题目1

6.6.1　证明对任意两个 3×1 向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，都有 $\boldsymbol{u}^{\wedge}\boldsymbol{v} \equiv -\boldsymbol{v}^{\wedge}\boldsymbol{u}$。

解题过程

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

方法一： u^v = u×v = -v×u = - v^u

方法二： 设:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}\hat{}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_3 v_2 + u_2 v_3 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ -u_2 v_1 + u_1 v_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}\hat{}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_2 v_3 + v_2 u_3 \\ v_3 u_1 - v_1 u_3 \\ -v_2 u_1 + v_1 u_2 \end{bmatrix}$$

因为:

$$-u_3 v_2 + u_2 v_3 = -(-v_3 u_2 + v_2 u_3)$$
$$u_3 v_1 - u_1 v_3 = -(v_3 u_1 - v_1 u_3)$$
$$-u_2 v_1 + u_1 v_2 = -v_2 u_1 + v_1 u_2$$

所以:

$$\mathbf{u}\hat{}\mathbf{v} \equiv -\mathbf{v}\hat{}\mathbf{u}$$

题目2

6.6.2 请用下式证明 $\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$：

$$\boldsymbol{C} = \cos\theta\mathbf{1} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}$$

解题过程（方法一）

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}^{-1} &= \boldsymbol{C}(\theta)^{-1} = \boldsymbol{C}(-\theta) \\
&= \cos(-\theta)\mathbf{1} + (1-\cos(-\theta))\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \sin(-\theta)\boldsymbol{a}^{\wedge} \\
&= \cos\theta 1 + (1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} - \sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} &= (\cos\theta\mathbf{1} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge})^{\mathrm{T}} \\
&= \cos\theta\mathbf{1}^{\mathrm{T}} + (1-\cos\theta)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} + \sin\theta(\boldsymbol{a}^{\wedge})^{\mathrm{T}} \\
&= \cos\theta\mathbf{1} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \sin\theta(-\boldsymbol{a}^{\wedge}) \\
&= \cos\theta\mathbf{1} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} - \sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$$

解题过程（方法二）

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \cos\theta\mathbf{I} + (1-\cos\theta)\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}} - \sin\theta\mathbf{a}^{\wedge}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = {} & \cos^2\theta\mathbf{I} + \cos\theta(1-\cos\theta)\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}} - \cos\theta\sin\theta\mathbf{a}^{\wedge} \\ & +\cos\theta(1-\cos\theta)\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}} + (1-\cos\theta)^2\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}} - (1-\cos\theta)\sin\theta\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}^{\wedge} \\ & +\cos\theta\sin\theta\mathbf{a}^{\wedge} + (1-\cos\theta)\sin\theta\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}} - \sin^2\theta\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge}\end{aligned} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} & \mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge} = \mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{I} \\ & \mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}^{\wedge} = \mathbf{0}\end{aligned}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{-1}$$

题目3

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

6.6.3 证明对任意 3×1 向量 $\boldsymbol{v}$ 和旋转矩阵 $\boldsymbol{C}$，都有 $(\boldsymbol{C}\boldsymbol{v})^\wedge \equiv \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}^\wedge\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$

解题过程（方法一）

$$(Cv)^\wedge \equiv Cv^\wedge C^T$$

右乘C

$$Cv^\wedge \equiv (Cv)^\wedge C$$

等式两边同乘任意向量u

$$Cv^\wedge u \equiv (Cv)^\wedge Cu$$

反对称写成x乘

$$C(v \times u) \equiv (Cv) \times (Cu)$$

向量×乘的旋转不变性

解题过程（方法二）

令$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$$Cv = \begin{bmatrix} c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3 \\ c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3 \\ c_{31}v_1 + c_{32}v_2 + c_{33}v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cv_1 \\ Cv_2 \\ Cv_3 \end{bmatrix} \Rightarrow (\boldsymbol{Cv})^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -Cv_3 & Cv_2 \\ Cv_3 & 0 & -Cv_1 \\ -Cv_2 & Cv_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Cv}^\wedge\boldsymbol{C}^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -[c_{31}v_1 + c_{32}v_2 + c_{33}v_3] & c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3 \\ c_{31}v_1 + c_{32}v_2 + c_{33}v_3 & 0 & -[c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3] \\ -[c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3] & c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3 & 0 \end{bmatrix}$$

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听

Thanks for Listening!