机器人学中的状态估计

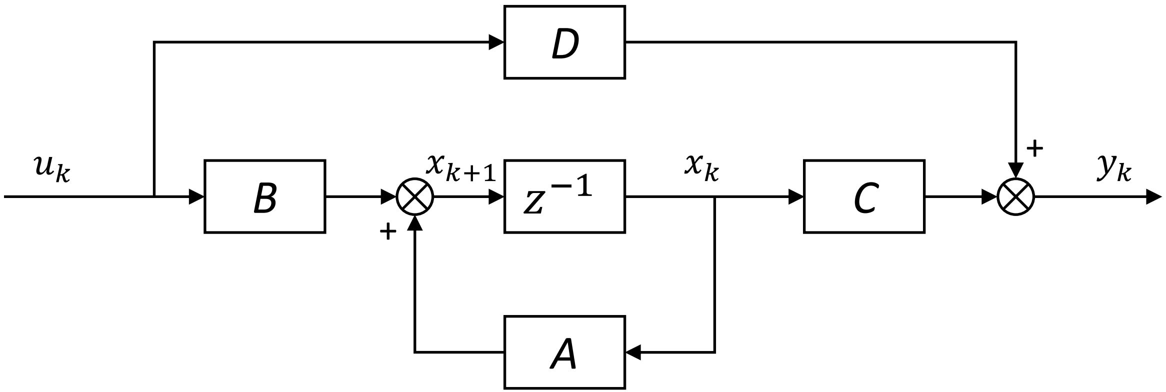
第四次作业讲评

主讲人 顾津铭

预备知识

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_{k-1} + \bar{\boldsymbol{u}}_{k-1}) + \boldsymbol{\omega}_{k-1} \\ \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_k + \bar{\boldsymbol{y}}_k + \boldsymbol{n}_k \end{cases}$$

离散系统状态方程描述了 $(k-1)T$ 时刻的状态、输入量与 kT 时刻的状态量之间的因果关系；离散系统输出/观测方程描述了 kT 时刻输出量与 kT 时刻的状态、输入量之间的转换关系。



习题1

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

考虑离散时间系统，

$$
\begin{aligned}
x_k &= x_{k-1} + v_{k-1} + \bar{v}_{k-1} \\
d_k &= x_k
\end{aligned}
$$

其中 $\bar{v}_{k-1}$ 是未知的输入偏差。请写出增广状态系统并确定该系统是否能观。

作业概况： 完成情况很好；

证明思路： 本题的状态空间表达式中，引入了未知的输入偏差，按照5.1.2节介绍的方法求解即可。

已知：

状态量：x_k、x_{k-1}；

输入量：v_{k-1}（带有输入偏差$\bar{v}_{k-1}$）；

观测量：d_k（不带测量偏差）

系统的状态方程和观测方程为

$$x_k = x_{k-1} + v_{k-1} + \bar{v}_{k-1}$$
$$d_k = x_k$$

所以

$$A = B = C = 1$$

假设偏差的模型为$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + s_{k-1}$，则系统的增广方程为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_k \\ \bar{\boldsymbol{u}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k-1} \\ \bar{\boldsymbol{u}}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_{k-1} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{k-1} \\ \boldsymbol{s}_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ \bar{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ \bar{v}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ s_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}_k = [\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{0}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_k \\ \bar{\boldsymbol{u}}_k \end{bmatrix} + \boldsymbol{n}_k$$

$$d_k = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{v}_k \end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}' = [1 \quad 0]$$

$$\boldsymbol{O}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}' \\ \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(\boldsymbol{O}') = 2 = N + U$$

该增广状态系统能观。

习题2

考虑离散时间系统，

$$
\begin{aligned}
x_k &= x_{k-1} + v_{k-1} \\
v_k &= v_{k-1} + a_{k-1} \\
d_{1,k} &= x_k \\
d_{2,k} &= x_k + \bar{d}_k
\end{aligned}
$$

其中 $\bar{d}_k$ 是未知的输入偏差（只存在于其中一个测量方程中）。请写出增广状态系统并确定该系统是否能观。

作业概况： 完成情况很好；

证明思路： 本题的状态空间表达式中，引入了未知的测量偏差，按照5.1.3节介绍的方法求解即可。

状态量：x_k、x_{k-1}、v_k、v_{k-1}；

输入量：a_{k-1}（不带输入偏差）；

观测量：$d_{1,k}$、$d_{2,k}$（带有测量偏差$\bar{d}_k$）

由此可得，系统的状态方程和观测方程为

$$\begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ v_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a_{k-1}$$

$$\begin{bmatrix} d_{1,k} \\ d_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{d}_k \end{bmatrix}$$

所以

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

假设偏差的模型为$\bar{d}_k = \bar{d}_{k-1} + s_{k-1}$，则系统的增广方程为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_k \\ \bar{\boldsymbol{y}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k-1} \\ \bar{\boldsymbol{y}}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_{k-1} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{k-1} \\ \boldsymbol{s}_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ v_k \\ \bar{d}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ \bar{v}_{k-1} \\ \bar{d}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} a_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_{1,k} \\ d_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \\ \bar{d}_k \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{O}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}' \\ \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}' \\ \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(\boldsymbol{O}') = 3 = N + U$$

该增广状态系统能观。

习题3

假设每个点为内点的概率为 $\omega = 0.1$，如果想选择一个内点子集（$n = 3$）的概率为 $p = 0.999$，需要多少次 RANSAC 迭代?

作业概况：完成情况很好;

证明思路：直接使用5.3.1节的迭代次数求解公式即可。

已知 $\omega = 0.1$， $p = 0.999$， 所以

$$k = \frac{\ln(1-p)}{\ln\left(1-\omega^{n}\right)} = \frac{\ln(1-0.999)}{\ln\left(1-0.1^{3}\right)} = 6904.3 \xrightarrow{\text{向上取整}} 6905$$

需要 6905 次 RANSAC 迭代。

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听！

Thanks for Listening