深蓝学院
shenlanxueyuan.com

状态估计第二讲线性系统中的状态估计作业讲评

主讲人 王东晓

题目1

3.6.1　考虑离散时间系统：

$$
\begin{aligned}
x_k &= x_{k-1} + v_k + w_k, &\quad w \sim \mathcal{N}(0, Q) \\
y_k &= x_k + n_k, &\quad n_k \sim \mathcal{N}(0, R)
\end{aligned}
$$

这可以表达一辆沿 x 轴前进或后退的汽车。初始状态 $\check{x}_0$ 未知。请建立批量最小二乘的状态估计方程：

$$
\left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{H}\right)\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{z}
$$

即，推导 $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{z}$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 的详细形式。令最大时间步数为 $K = 5$，并假设所有噪声相互无关。该问题存在唯一的解吗？

解题过程(基于MAP)

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\max_{\boldsymbol{x}} p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{v}, \boldsymbol{y})$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\max_{\boldsymbol{x}} p\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{v}, \boldsymbol{y}\right) = \arg\max_{\boldsymbol{x}} \frac{p\left(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}\right) p\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{v}\right)}{p\left(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{v}\right)} = \arg\max_{\boldsymbol{x}} p\left(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}\right) p\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{v}\right)$$

$$p\left(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}\right) = \prod_{k=0}^{K} p\left(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k\right) \qquad p\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{v}\right) = \prod_{k=1}^{K} p\left(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{v}_k\right)$$

$$p\left(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{v}_k\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \boldsymbol{Q}_k}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{v}_k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_k^{-1} (\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{v}_k)\right)$$

$$p\left(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^M \det \boldsymbol{R}_k}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_k^{-1} (\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k)\right)$$

解题过程

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$$\ln\left(p\left(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}\right)p\left(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{v}\right)\right)=\sum_{k=1}^{K}\ln p\left(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1},\boldsymbol{v}_k\right)+\sum_{k=0}^{K}\ln p\left(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k\right)$$

$$\ln p\left(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1},\boldsymbol{v}_k\right)=-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{x}_{k-1}-\boldsymbol{v}_k\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_k^{-1}\left(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{x}_{k-1}-\boldsymbol{v}_k\right)-\underbrace{\frac{1}{2}\ln\left(\left(2\pi\right)^N\det\left(\boldsymbol{Q}_k\right)\right)}_{\text{与 }\boldsymbol{x}\text{ 无关}}$$

$$\ln p\left(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k\right)=-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_k^{-1}\left(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k\right)-\underbrace{\frac{1}{2}\ln\left(\left(2\pi\right)^M\det\boldsymbol{R}_k\right)}_{\text{与 }\boldsymbol{x}\text{ 无关}}$$

$$J_{v,k}\left(\boldsymbol{x}\right)=-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{x}_{k-1}-\boldsymbol{v}_k\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_k^{-1}\left(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{x}_{k-1}-\boldsymbol{v}_k\right)$$

$$J_{y,k}\left(\boldsymbol{x}\right)=-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_k^{-1}\left(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k\right)$$

$$J(\boldsymbol{x})=\sum_{k=0}^{K}\left(J_{v,k}\left(\boldsymbol{x}\right)+J_{y,k}(\boldsymbol{x})\right)\Rightarrow\hat{\boldsymbol{x}}=\arg\min_{\boldsymbol{x}}J(\boldsymbol{x})$$

解题过程(提升形式)

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_K \\ \hline \boldsymbol{y}_0 \\ \boldsymbol{y}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_K \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_K \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{H} = \left[\begin{array}{cccc} -\boldsymbol{A}_0 & \mathbf{1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\boldsymbol{A}_{K-1} & \mathbf{1} \\ \hline \boldsymbol{C}_0 & & & \\ & \boldsymbol{C}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{C}_K \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{W} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boldsymbol{Q}_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boldsymbol{Q}_K & & & \\ \hline & & & \boldsymbol{R}_0 & & \\ & & & & \boldsymbol{R}_1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boldsymbol{R}_K \end{array}\right]$$

$$J(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})$$

$$\left.\frac{\partial J(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\right|_{\hat{\boldsymbol{x}}} = -\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{H}\right)\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{z}$$

解题过程(具体形式K=5)

$$z=\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ y_0\\ y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5 \end{bmatrix},\quad \hat{x}=\begin{bmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad W=\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

$$O=\begin{bmatrix} C\\ CA\\ CA^2\\ CA^3\\ CA^4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{R(O)=1=N}$$

$Q_k>0$，$R_k>0$

所以该问题存在唯一解

题目2

3.6.2　使用第一问的系统，令 $Q=R=1$，证明：

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

此时 Cholesky 因子 $\boldsymbol{L}$ 是什么，才能满足 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{H}$?

解题过程

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$$H^TW^-H = \begin{bmatrix} Q^- + R^- & -Q^- & 0 & 0 & 0 \\ -Q^- & 2Q^- + R^- & -Q^- & 0 & 0 \\ 0 & -Q^- & 2Q^- + R^- & -Q^- & 0 \\ 0 & 0 & -Q^- & 2Q^- + R^- & -Q^- \\ 0 & 0 & 0 & -Q^- & Q^- + R^- \end{bmatrix}$$

$$\Big\downarrow \; Q=1, R=1$$

$$H^TW^-H = \begin{bmatrix} 1+1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2*1+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2*1+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2*1+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

解题过程

$$L = \begin{bmatrix} L_0 & & & & \\ L_{10} & L_1 & & & \\ & L_{21} & L_2 & & \\ & & L_{32} & L_3 & \\ & & & L_{43} & L_4 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$LL^T = \begin{bmatrix} L_0^2 & L_0 L_{10} & & & \\ L_{10} L_0 & L_{10}^2 + L_1^2 & L_1 L_{21} & & \\ & L_{21} L_1 & L_{21}^2 + L_2^2 & L_2 L_{32} & \\ & & L_{32} L_2 & L_{32}^2 + L_3^2 & L_3 L_{43} \\ & & & L_{43} L_3 & L_{43}^2 + L_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

解题过程

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$$
\begin{aligned}
L_0^2 &= 2 & L_0 L_{10} &= -1 \\
L_{10}^2 + L_1^2 &= 3 & L_1 L_{21} &= -1 \\
L_{21}^2 + L_2^2 &= 3 & L_2 L_{32} &= -1 \\
L_{32}^2 + L_3^2 &= 3 & L_3 L_{43} &= -1 \\
& & L_{43}^2 + L_4^2 &= 2
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
L = \begin{bmatrix}
\sqrt{2} & & & & \\
-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{10}}{2} & & & \\
 & -\frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{\sqrt{65}}{5} & & \\
 & & -\frac{\sqrt{65}}{13} & \frac{\sqrt{442}}{13} & \\
 & & & -\frac{\sqrt{442}}{34} & \frac{\sqrt{1870}}{34}
\end{bmatrix}
$$

解题过程(k=5)

$$L=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & & & & & \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{10}}{2} & & & & \\ & -\frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{\sqrt{65}}{5} & & & \\ & & -\frac{\sqrt{65}}{13} & \frac{\sqrt{442}}{13} & & \\ & & & -\frac{\sqrt{442}}{34} & \frac{\sqrt{3026}}{34} & \\ & & & & -\frac{\sqrt{3026}}{89} & \frac{12\sqrt{89}}{89}\end{bmatrix}$$

题目3

3.6.6 证明:

$$
\begin{bmatrix}
\mathbf{1} & & & & & \\
\boldsymbol{A} & \mathbf{1} & & & & \\
\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{A} & \mathbf{1} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
\boldsymbol{A}^{K-1} & \boldsymbol{A}^{K-2} & \boldsymbol{A}^{K-3} & \cdots & \mathbf{1} & \\
\boldsymbol{A}^{K} & \boldsymbol{A}^{K-1} & \boldsymbol{A}^{K-2} & \cdots & \boldsymbol{A} & \mathbf{1}
\end{bmatrix}^{-1}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{1} & & & & & \\
-\boldsymbol{A} & \mathbf{1} & & & & \\
 & -\boldsymbol{A} & \mathbf{1} & & & \\
 & & -\boldsymbol{A} & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \mathbf{1} & \\
 & & & & -\boldsymbol{A} & \mathbf{1}
\end{bmatrix}
$$

解题过程

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ A & 1 & & & & \\ A^2 & A & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ A^{K-1} & A^{k-2} & A^{K-3} & \cdots & 1 & \\ A^K & A^{K-1} & A^{K-2} & \cdots & A & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -A & 1 & & & & \\ & -A & 1 & & & \\ & & -A & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & -A & 1 \end{bmatrix} = I$$

$AA^{-1}=I$

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听

Thanks for Listening!