

Семинарни по ДАА

Траян Господинов

13 октомври 2022 г.

Съдържание

1	Асимптотични нотации	2
1.1	Теория	2
1.2	Задачи	5
2	Анализ на коректността на алгоритми	11
2.1	Итеративни алгоритми	11
2.2	Рекурсивни алгоритми	12
2.3	Блок схеми	14
2.4	Често срещани грешки	15
2.4.1	Бъркане на позицията на инварианта при do-while цикъл	15
2.4.2	Некоректна терминация	16
2.5	Задачи	19
3	Анализ на сложността на алгоритми	23
3.1	Итеративни алгоритми	23
3.1.1	Интегрален критерий	23
3.1.1.1	Добре разпределени функции	24
3.1.1.2	Приложения	26
3.1.2	Задачи	28
3.2	Рекурсивни алгоритми	31
3.2.1	Характеристично уравнение	31
3.2.2	Развиване	32
3.2.2.1	Засилване на индуктивната хипотеза	37
3.2.3	Полагане	40
3.2.4	Мастър теорема	41
3.2.4.1	Разширение на Мастер теоремата	43
3.2.5	Задачи	44

Глава 1

Асимптотични нотации

1.1 Теория

Започваме с припомняне на две дефиниции от математическия анализ.

Дефиниция 1.1: Асимптотично неотрицателна функция

Ще казваме, че $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ е асимптотично неотрицателна, ако $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0$ е изпълнено $f(n) \geq 0$

Дефиниция 1.2: Асимптотично положителна функция

Ще казваме, че $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ е асимптотично положителна, ако $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0$ е изпълнено $f(n) > 0$

В настоящия курс ще се интересуваме от горните два типа функции, тъй като тези функции ще са със семантика на *брой стъпки до приключване изпълнението на дадена програма*, което очевидно няма как да ни върне отрицателен резултат. Също така ще се интересуваме да сравняваме асимптотично неотрицателни/положителни функции. За целта въвеждаме следните пет класа от функции спрямо дадена функция.

Дефиниция 1.3: Основни класове от функции, спрямо асимптотиката

Нека g е асимптотично неотрицателна функция. Петте основни класа спрямо асимптотиката на g са следните:

- $O(g) = \{f - \text{неотр.} \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 \text{ е изпълнено } 0 \leq f(n) \leq c.g(n)\}$
- $o(g) = \{f - \text{неотр.} \mid \forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 \text{ е изпълнено } 0 \leq f(n) < c.g(n)\}$
- $\Omega(g) = \{f - \text{неотр.} \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 \text{ е изпълнено } 0 \leq c.g(n) \leq f(n)\}$
- $\omega(g) = \{f - \text{неотр.} \mid \forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 \text{ е изпълнено } 0 < c.g(n) \leq f(n)\}$
- $\theta(g) = \{f - \text{неотр.} \mid \exists c_1 > 0 \exists c_2 > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 \text{ е изпълнено } 0 \leq c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)\}$

Забележка. Поради исторически причини е прието да се пише $f = O(g)$ вместо $f \in O(g)$. Аналогично и за другите четири класа.

Пример 1.1. $O(n^2) = \{n^2, 100n^2, \frac{n^2}{5}, n, 10^6n, 1, 5n^2 - 1000n - 1000, \dots\}$.

Нека разгледаме при какви стойности на c и n_0 работи дефиницията за $g(n) = n^2$ и $f(n)$ съответно:

- $f(n) = n^2$

Директно се вижда, че $c = 1$ и $n_0 = 0$ ни вършат работа:

$$\forall n \geq \underbrace{0}_{n_0} \text{ е изпълнено } 0 \leq \underbrace{n^2}_{f(n)} \leq \underbrace{1}_c * \underbrace{n^2}_{g(n)}$$

- $f(n) = 100n^2$

Отново лесно се прецени, че $c = 100$ и $n_0 = 0$ ни вършат работа:

$$\forall n \geq \underbrace{0}_{n_0} \text{ е изпълнено } 0 \leq \underbrace{100n^2}_{f(n)} \leq \underbrace{100}_c * \underbrace{n^2}_{g(n)}$$

- $f(n) = \frac{n^2}{5}$

Отново $c = 1$ и $n_0 = 0$ ни вършат работа (разбира се и $c = \frac{1}{5}$ $n_0 = 0$ също):

$$\forall n \geq \underbrace{0}_{n_0} \text{ е изпълнено } 0 \leq \underbrace{\frac{n^2}{5}}_{f(n)} \leq \underbrace{1}_c * \underbrace{n^2}_{g(n)}$$

- $f(n) = 5n^2 - 1000n - 1000$

Макар и сташно на първи поглед, отново лесно се прецени, че $c = 10^7$ и $n_0 = 0$ ни вършат работа (разбира се това не е минимален избор на c и n_0 .. интересува ни само да намерим кои да е):

$$\forall n \geq \underbrace{0}_{n_0} \text{ е изпълнено } 0 \leq \underbrace{5n^2 - 1000n - 1000}_{f(n)} \leq \underbrace{10^7}_c * \underbrace{n^2}_{g(n)}$$

Упражнете се с другите четири класа.

Нотация 1.1: Основни релации над асимптотично неотрицателни функции

Въвеждаме следните пет релации за удобство:

- $f \preceq g \stackrel{\text{def}}{\iff} f = O(g)$
- $f \prec g \stackrel{\text{def}}{\iff} f = o(g)$
- $f \succeq g \stackrel{\text{def}}{\iff} f = \Omega(g)$
- $f \succ g \stackrel{\text{def}}{\iff} f = \omega(g)$
- $f \asymp g \stackrel{\text{def}}{\iff} f = \theta(g)$ (асимптотично равенство с точност до константа)

Нотация 1.2: Асимптотично равенство

$$f \sim g \stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

Основни свойства: Асимптотични релации

Нека f и g са асимптотично положителни (ще делим на g и затова полож.). Тогава:

$$1. f \sigma g \wedge g \sigma h \rightarrow f \sigma h, \sigma \in \{\preceq, \prec, \succ, \succcurlyeq, \asymp\}$$

$$2. f \sigma f, \sigma \in \{\preceq, \succ, \asymp\}$$

$$3. f \preceq g \wedge g \preceq f \rightarrow f \asymp g$$

$$4. f \asymp g \leftrightarrow g \asymp f$$

$$5. f \preceq g \leftrightarrow g \succcurlyeq f \text{ (аналогично } f \prec g \leftrightarrow g \succ f)$$

$$6. f + g \asymp \max(f, g)$$

$$\text{Док: } \frac{f(n)+g(n)}{2} \leq \max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n)$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \leftrightarrow f \prec g (f = o(g))$$

Док: От деф. на лимит имаме: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : -\varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon$. Сега умножаваме двете страни по $g(n)$ и получаваме $-g(n) * \varepsilon < 0 < f(n) < g(n) * \varepsilon$, откъдето имаме $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq g(n) * \varepsilon$, което е точно дефиницията на $o(g)$. Обратната посока е аналогична.

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0 \rightarrow f \asymp g (f = \theta(g))$$

Док: От деф. на лимит имаме: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : c - \varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < c + \varepsilon$. Сега умножаваме двете страни по $g(n)$ и получаваме $g(n) * (c - \varepsilon) < f(n) < g(n) * (c + \varepsilon)$. Тъй като $c > 0$, то е ясно че има $\varepsilon > 0 : c - \varepsilon > 0$. Тоест получихме следното: $\exists \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : 0 < \underbrace{g(n) * (c - \varepsilon)}_{c_1} < f(n) < \underbrace{g(n) * (c + \varepsilon)}_{c_2}$, което е точно дефиницията на $\theta(g)$.

Обратната посока **не** е вярна.

9. Нека g не е ограничена отгоре и нека $a > 1$. Тогава:

$$(a) f \prec g \rightarrow a^{f(n)} \prec a^{g(n)} \text{ (нестрогия аналог не е верен)}$$

$$(b) \log_a f(n) \prec \log_a g(n) \rightarrow f(n) \prec g(n) \text{ (нестрогия аналог не е верен)}$$

$$10. \forall a > 1 \forall t > 0 \forall \varepsilon > 0 (\log_a^t(n) \prec n^\varepsilon)$$

Факт 1.1: Апроксимация на Стирлинг

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right)$$

Следствие 1.1: Асимптотична апроксимация на Стирлинг

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Приложение.

$$\bullet \log(n!) \asymp n \log(n) \text{ (докажете за упражнение)}$$

$$\bullet \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{2^{2n} n^{2n}}{\sqrt{\pi n} n^{2n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Факт 1.2: Логаритми и техните свойства

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \forall b \in \mathbb{R}^+ : a^x = b \leftrightarrow x = \log_a(b)$$

$$1. a^{\log_a(b)} = b$$

$$2. \log_{a^n}(b^m) = \frac{m}{n} \log_a(b)$$

$$3. (a) \log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$$

$$(б) \log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$4. \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$(a) \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$$

$$(б) \log_b(a) * \log_a(x) = \log_b(x)$$

$$5. a^{\log_b(x)} = x^{\log_b(a)}$$

1.2 Задачи

Задача 1.1. Нека $p(x) = a_0x^k + \dots + a_k$ е асимптотично положителен полином (т.е. $a_0 > 0$). Да се докаже, че $p(n) \asymp n^k$.

Решение.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0n^k + \dots + a_k}{n^k} = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0n^k}{n^k}}_{a_0} + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1n^{k-1}}{n^k}}_0 + \dots + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k}{n^k}}_0 = a_0 > 0.$$

От основно свойство 8 следва, че $p(n) \asymp n^k$.

Задача 1.2. Нека $k \in \mathbb{N}^+$. Да се докаже, че $\binom{n}{k} \asymp n^k$.

Решение.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k k!} = \frac{1}{k!} > 0.$$
 От основно свойство 8 следва, че $\binom{n}{k} \asymp n^k$.

Задача 1.3. Да се докаже, че $(n+1)^n \asymp n^n$.

Решение.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 0.$$
 От основно свойство 8 следва, че $(n+1)^n \asymp n^n$.

Задача 1.4. Нека $f(n) = \begin{cases} 1 & , [n] \equiv 0(2) \\ n^2 & , [n] \equiv 1(2) \end{cases}$ и $g(n) = n$. Да се докаже, че те са асимптотично несравними.

Решение. За упражнение...

Задача 1.5. Вярна ли е следната импликация: $f = O(g) \rightarrow (f = o(g) \vee f = \theta(g))$?

Решение. Не е вярна! Проверете за упражнение със следния контрапример:

$$f(n) = \begin{cases} n & , [n] \equiv 0(2) \\ 1/n & , [n] \equiv 1(2) \end{cases} \text{ и } g(n) = n.$$

Задача 1.6. Да се сортират по асимптотика следните функции:

$$\begin{array}{llll} f_1(n) = n^3 & f_2(n) = \sqrt{n} & f_3(n) = \log(n) & f_4(n) = \log^2(n) \\ f_5(n) = \log^{(2)}(n) & f_6(n) = n! & f_7(n) = a^n & f_8(n) = a \\ f_9(n) = n^n & f_{10}(n) = n^{-2} & f_{11}(n) = n^2 & f_{12}(n) = n^{\log(n)} \end{array}$$

Решение.

$$n^n \succ n! \succ a^n \succ n^{\log(n)} \succ n^3 \succ n^2 \succ \sqrt{n} \succ \log^2(n) \succ \log(n) \succ \log^{(2)}(n) \succ a \succ n^{-2}$$

Ще опишем подробно решенията:

1. $n^n \succ n!$

От анализа знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $n! \prec n^n$.

2. $n! \succ a^n$

Ще приложим основно свойство 9... т.е. логаритмуваме двете страни и получаваме

$$\log(n!) \text{ ? } \log(a^n)$$

$$n \log(n) \text{ ? } n \log(a)$$

Знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log(a)}{n \log(n)} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $n \log(a) \prec n \log(n)$.

Оттук и от основно свойство 9 следва, че $a^n \prec n!$.

3. $a^n \succ n^{\log(n)}$

Ще приложим основно свойство 9... т.е. логаритмуваме двете страни и получаваме

$$\log(a^n) \text{ ? } \log(n^{\log(n)})$$

$$n \log(a) \text{ ? } \log(n) \log(n)$$

От основно свойство 10 имаме $\log(n) \log(n) \prec n \log(a)$. Оттук и от основно свойство 9 следва, че $n^{\log(n)} \prec a^n$.

4. $n^{\log(n)} \succ n^3$

Ще приложим основно свойство 9... т.е. логаритмуваме двете страни и получаваме

$$\log(n^{\log(n)}) \text{ ? } \log(n^3)$$

$$\log^2(n) \text{ ? } 3 \log(n)$$

Знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \log(n)}{\log^2(n)} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $3 \log(n) \prec \log^2(n)$.

Оттук и от основно свойство 9 следва, че $n^3 \prec n^{\log(n)}$.

5. $n^3 \succ n^2$

Знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $n^2 \prec n^3$.

6. $n^2 \succ \sqrt{n}$

Знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $\sqrt{n} \prec n^2$.

7. $\sqrt{n} \succ \log^2(n)$

От основно свойство 9 директно следва, че $\log^2(n) \prec \sqrt{n}$.

8. $\log^2(n) \succ \log(n)$

Знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{\log^2(n)} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $\log(n) \prec \log^2(n)$.

9. $\log(n) \succ \log(\log(n))$

Полагаме $m = \log(n)$ и получаваме

$$m \succ \log(m)$$

От основно свойство 10 следва, че $\log(m) \prec m$. Сега като върнем полагането получаваме $\log(\log(n)) \prec \log(n)$.

10. $\log(\log(n)) \succ a$

Знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\log^{(2)}(n)} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $a \prec \log^{(2)}(n)$.

11. $a \succ n^{-2}$

Знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-2}}{a} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $n^{-2} \prec a$.

Задача 1.7. Да се сортират по асимптотика следните функции:

$f_1(n) = (\sqrt{2})^{\log(n)}$	$f_2(n) = n^3$	$f_3(n) = n!$	$f_4(n) = (\log(n))!$
$f_5(n) = e^{-2\ln(n)}$	$f_6(n) = \log^2(n)$	$f_7(n) = \log(n!)$	$f_8(n) = 2^{2^n}$
$f_9(n) = n^{\frac{1}{\log(n)}}$	$f_{10}(n) = \log^{(2)}(n)$	$f_{11}(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n$	$f_{12}(n) = n2^n$
$f_{13}(n) = 4^{\log(n)}$	$f_{14}(n) = (n+1)!$	$f_{15}(n) = \sqrt{\log(n)}$	$f_{16}(n) = 2^{\sqrt{2\log(n)}}$
$f_{17}(n) = n^{\log(\log(n))}$	$f_{18}(n) = \log(n)$	$f_{19}(n) = 2^{\log(n)}$	$f_{20}(n) = (\log(n))^{\log(n)}$

Решение.

$$e^{-2\ln(n)} \prec n^{\frac{1}{\log(n)}} \prec \log^{(2)}(n) \prec \sqrt{\log(n)} \prec \log(n) \prec \log^2(n) \prec 2^{\sqrt{2\log(n)}} \prec (\sqrt{2})^{\log(n)} \prec 2^{\log(n)} \prec \log(n!) \prec 4^{\log(n)} \prec n^3 \prec (\log(n))! \prec (\log(n))^{\log(n)} \prec n^{\log(\log(n))} \prec \left(\frac{3}{2}\right)^n \prec n2^n \prec n! \prec (n+1)! \prec 2^{2^n}$$

Ще опишем подробно решенията:

1. $e^{-2\ln(n)} \prec n^{\frac{1}{\log(n)}}$

Ще преобразуваме функциите използвайки основните свойства на логаритмите:

$$(e^{\ln(n)})^{-2} ? n^{\log_n(2)}$$

$$(n^{\ln(e)})^{-2} ? 2^{\log_n(n)}$$

$$n^{-2} ? 2$$

Сега знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-2}}{2} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $n^{-2} \prec 2$.

2. $n^{\frac{1}{\log(n)}} \prec \log^{(2)}(n)$

Вече показахме, че $n^{\frac{1}{\log(n)}} = 2$. Сега знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\log^{(2)}(n)} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $2 \prec \log^{(2)}(n)$.

3. $\log^{(2)}(n) \prec \sqrt{\log(n)}$

Полагаме $m = \log(n)$ и получаваме

$$\log(m) ? \sqrt{m}$$

От основно свойство 10 следва, че $\log(m) \prec m$. Сега като върнем полагането получаваме $\log^{(2)}(n) \prec \sqrt{\log(n)}$.

4. $\sqrt{\log(n)} \prec \log(n)$

Директно прилагаме основно свойство 7.

5. $\log(n) \prec \log^2(n)$

Директно прилагаме основно свойство 7.

6. $(\log(n))^2 \prec 2\sqrt{2\log(n)}$

Ще приложим основно свойство 9... т.е. логаритмуваме двете страни и получаваме

$$\log((\log(n))^2) ? \log(2\sqrt{2\log(n)})$$

$$2\log(\log(n)) ? \sqrt{2\log(n)}\log(2)$$

Полагаме $m = \log(n)$ и получаваме

$$2\log(m) ? \sqrt{2m}$$

От основно свойство 10 имаме $2\log(m) \prec \sqrt{2m}$. Сега като върнем полагането имаме $2\log(\log(n)) \prec \sqrt{2\log(n)}$. Оттук и от основно свойство 9 следва, че $(\log(n))^2 \prec 2\sqrt{2\log(n)}$.

7. $2\sqrt{2\log(n)} \prec (\sqrt{2})^{\log(n)}$

Ще приложим основно свойство 9... т.е. логаритмуваме двете страни и получаваме

$$\log(2\sqrt{2\log(n)}) ? \log(\sqrt{n})$$

$$\sqrt{2\log(n)} \stackrel{?}{\sim} \frac{1}{2}\log(n)$$

Знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\log(n)}}{\frac{1}{2}\log(n)} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $\sqrt{2\log(n)} \prec \frac{1}{2}\log(n)$.

Оттук и от основно свойство 9 следва, че $2^{\sqrt{2\log(n)}} \prec (\sqrt{2})^{\log(n)}$.

8. $(\sqrt{2})^{\log(n)} \prec 2^{\log(n)}$

Ще преобразуваме функциите използвайки основните свойства на логаритмите:

$$n^{\log(\sqrt{2})} \stackrel{?}{\sim} n^{\log(2)}$$

$$\sqrt{n} \stackrel{?}{\sim} n$$

Сега знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $\sqrt{n} \prec n$.

9. $2^{\log(n)} \prec \log(n!)$

Вече показахме, че $2^{\log(n)} = n$ и $\log(n!) \asymp n\log(n)$. Сега знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n\log(n)} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $n \prec n\log(n)$.

10. $\log(n!) \prec 4^{\log(n)}$

Ще преобразуваме $4^{\log(n)}$ използвайки основните свойства на логаритмите:

$$\log(n!) \stackrel{?}{\sim} n^{\log(4)}$$

$$n\log(n) \stackrel{?}{\sim} n^2$$

Тогава от основно свойство 10 следва, че $n\log(n) \prec n^2$.

11. $4^{\log(n)} \prec n^3$

Вече показахме, че $4^{\log(n)} = n^2$. Сега знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $n^2 \prec n^3$.

12. $n^3 \prec (\log(n))!$

Ще преобразуваме $(\log(n))!$ използвайки [апроксимацията на Стирлинг](#):

$$(\log(n))! \sim \sqrt{2\pi\log(n)} \left(\frac{\log(n)}{e} \right)^{\log(n)}$$

Ще приложим основно свойство 9... т.е. логаритмуваме двете страни и получаваме

$$\log(n^3) \stackrel{?}{\sim} \log \left(\sqrt{2\pi\log(n)} \left(\frac{\log(n)}{e} \right)^{\log(n)} \right)$$

$$3\log(n) \stackrel{?}{\sim} \underbrace{\log(\sqrt{2\pi\log(n)})}_{\prec \log(\log(n))} + \log(n) \log(\log(n)) - \log(n) \log(e)$$

$$\log(n) \stackrel{?}{\sim} \log(n) \log(\log(n))$$

Знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{\log(n) \log(\log(n))} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $\log(n) \prec \log(n) \log(\log(n))$. Оттук и от основно свойство 9 следва, че $n^3 \prec (\log(n))!$.

13. $(\log(n))! \prec (\log(n))^{\log(n)}$

Полагаме $m = \log(n)$ и получаваме

$$m! \prec m^m$$

От анализа знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m!}{m^m} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $m! \prec m^m$.

Сега като върнем полагането получаваме $(\log(n))! \prec (\log(n))^{\log(n)}$.

14. $(\log(n))^{\log(n)} \asymp n^{\log(\log(n))}$

Директно прилагаме основно свойство 5 на логаритмите.

15. $n^{\log(\log(n))} \prec \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Ще приложим основно свойство 9... т.е. логаритмуваме двете страни и получаваме

$$\log(n) \log(\log(n)) \prec n$$

От основно свойство 10 следва, че $\log(n) \log(\log(n)) \prec \log^2(n) \prec n$. Оттук и от основно свойство 9 следва, че $n^{\log(\log(n))} \prec \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

16. $\left(\frac{3}{2}\right)^n \prec n2^n$

Директно прилагаме основно свойство 7. $\left(\frac{3}{2}\right)^n \prec 2^n \prec n2^n$

17. $n2^n \prec n!$

Ще приложим основно свойство 9... т.е. логаритмуваме двете страни и получаваме

$$\log(n2^n) \prec \log(n!)$$

$$\log(n) + n \log(2) \prec n \log(n)$$

Знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \log(n)} = 0$. Тогава от основно свойство 7 следва, че $n \prec \log(n)$. Оттук и от основно свойство 9 следва, че $n2^n \prec n!$.

18. $n! \prec (n+1)!$

Директно прилагаме основно свойство 7

19. $(n+1)! \prec 2^{2^n}$

Ще приложим основно свойство 9... т.е. логаритмуваме двете страни и получаваме

$$(n+1) \log(n+1) \prec 2^n$$

Логаритмуваме още веднъж

$$\log(n+1) \log(\log(n+1)) \prec n$$

От основно свойство 10 следва, че $\log(n) \log(\log(n)) \prec \log^2(n) \prec n$. Оттук и от основно свойство 9 следва, че $\log(n) \log(\log(n)) \prec 2^n$. И отново от основно свойство 9 следва, че $(n+1)! \prec 2^{2^n}$.

Глава 2

Анализ на коректността на алгоритми

2.1 Итеративни алгоритми

Коректност на итеративни алгоритми ще доказваме чрез *инвариант*. Това е пособие, което много наподобява доказателство чрез индукция. Аналогично на индукцията имаме *база*. Индуктивната хипотеза и индуктивната стъпка тук са обединени в една фаза - *поддръжка*. Имаме нова фаза наречена *терминация*.

Забележка 2.1

Важно е да отбележим, че инварианта е пособие за доказателство за коректност на итеративен цикъл, а **не** за цял алгоритъм!

Задача 2.1. Даден е следния алгоритъм (зададен чрез *псевдокод*):

```
1. Alg1(n) : // n ∈ ℕ0
2.   s ← 1;
3.   for i ← 1 to n
4.     | s ← s * 2;
5.   return s;
```

Какво връща той? Да се докаже формално.

Решение. Ще докажем, че $Alg1(n) = 2^n$.

Инвариант

При всяко k -то достигане на ред 3 имаме, че $s = 2^{k-1}$ (k броим от 1)

База. При $k = 1$ -во достигане на ред 3 имаме, че $s \stackrel{\text{ред 3}}{=} 1 = 2^0 = 2^{k-1}$.

Поддръжка. Нека е вярно за някое k -то непоследно достигане на ред 3, т.е. имаме $s = 2^{k-1}$. Сега се изпълнява тялото на цикъла, т.е. $s_{\text{new}} \stackrel{\text{ред 4}}{=} s_{\text{old}} * 2 \stackrel{\text{ИП}}{=} 2^{k-1} * 2 = 2^k = 2^{(k+1)-1}$. След изпълнение на тялото на цикъла отново се връщаме на ред 3 като вече го достигаме за $(k + 1)$ -ви път (може да е последно достигане) и имаме $s = 2^{(k+1)-1}$.

Терминация. При $k = (n + 1)$ -то достигане на ред 3 тялото на цикъла няма да се изпълни. От инварианта имаме, че $s = 2^{(n+1)-1} = 2^n$. Директно връщаме $s = 2^n$ на ред 5.

Задача 2.2. Даден е следния алгоритъм:

```

1. Alg2(A[1..n]) : // n ∈ ℕ+, A ∈ ℝn
2.   s ← 0;
3.   for i ← 1 to n
4.     | s ← s + A[i];
5.   return s;
```

Какво връща той? Да се докаже формално.

Решение. Ще докажем, че $\text{Alg2}(A[1..n]) = \sum_{i=1}^n A[i]$.

Инвариант

При всяко k -то достигане на ред 3 имаме:

- $i = k$ (в рамките на курса ще го считаме за тривиално при *стандартни* for-цикли и няма да го доказваме)
- $s = \sum_{i=1}^{k-1} A[i]$

База. При $k = 1$ -во достигане на ред 3 имаме, че $s \stackrel{\text{ред 2}}{=} 0 = \sum_{i=1}^0 A[i] = \sum_{i=1}^{k-1} A[i]$.

Поддръжка. Нека е вярно за някое непоследно достигане на ред 3, т.е. имаме $s = \sum_{i=1}^{k-1} A[i]$.

Сега се изпълнява тялото на цикъла $s_{\text{new}} \stackrel{\text{ред 4}}{=} s_{\text{old}} + A[i] = s_{\text{old}} + A[k] \stackrel{\text{ип}}{=} \sum_{i=1}^{k-1} A[i] + A[k] = \sum_{i=1}^k A[i]$.

Терминация. При $k = (n + 1)$ -то достигане на ред 3 тялото на цикъла няма да се изпълни. От инварианта имаме, че $s = \sum_{i=1}^n A[i]$. Директно връщаме s на ред 5.

2.2 Рекурсивни алгоритми

За разлика от итеративните алгоритми, коректност на рекурсивни алгоритми ще доказваме чрез добре познатата ни *пълна математическа индукция* състояща се от три фази - *база*, *индуктивна хипотеза* и *индуктивна стъпка*.

Забележка 2.2

Индукцията е пособие за доказателство за коректност на цял алгоритъм!

Забележка 2.3: Рекурсивен алгоритъм, съдържащ итеративен цикъл

За да докажем рекурсивен алгоритъм, съдържащ итеративен (един или повече) цикъл, то трябва да направим доказателство за коректност на всеки итеративен цикъл (използвайки *инвариант*) след което да използваме *пълна математическа индукция* за доказателство за коректност на целия алгоритъм.

Задача 2.3. Даден е следния алгоритъм:

```

1. Alg3(a, n) : // a ∈ ℝ, n ∈ ℕ0
2.   if n = 0 then
3.     | return 1;
4.   if n ≡ 0 (mod 2) then
5.     | return Alg3(a * a, n/2);
6.   return a * Alg3(a, n - 1);

```

Какво връща той? Да се докаже формално.

Решение. Ще докажем, че $Alg3(a, n) = \begin{cases} a^n & , a \neq 0 \wedge n \neq 0 \\ 1 & , a = 0 \vee n = 0 \end{cases}$ чрез пълна математическа индукция по n .

База. ($n = 0$)

Разглеждаме два случая:

сл.1 ($a = 0$) - $Alg3(a, 0) \stackrel{2-3}{\text{ред}} \equiv 1$.

сл.2 ($a \neq 0$) - $Alg3(a, 0) \stackrel{2-3}{\text{ред}} \equiv 1$.

Индуктивна хипотеза. Нека $\forall m \leq n$ е изпълнено, че $Alg3(a, m) = \begin{cases} a^m & , a \neq 0 \wedge m \neq 0 \\ 1 & , a = 0 \vee m = 0 \end{cases}$

Индуктивна стъпка. Ще докажем за $n + 1 > 0$. Отново разглеждаме два случая:

сл.1 ($(n + 1) \equiv 0 \pmod{2}$)

Тъй като $n + 1 > 0$, то не влизаме в тялото на if на ред 2-3. Знаем, че $n + 1 > 0$ и $(n + 1) \equiv 0 \pmod{2}$, значи имаме $n + 1 \geq 2$. Откъдето заключаваме, че $\frac{n+1}{2} > 0$. Влизаме в тялото на if на ред 4-5, като директно връщаме $Alg3(a * a, \underbrace{\frac{n+1}{2}}_{>0}) \stackrel{\text{ИХ}}{=} (a * a)^{\frac{n+1}{2}} = a^{n+1}$.

сл.2 ($(n + 1) \equiv 1 \pmod{2}$)

Тъй като $n + 1 > 0$, то не влизаме в тялото на if на ред 2-3. От друга страна не влизаме в тялото на if на ред 4-5 заради $(n + 1) \equiv 1 \pmod{2}$. Тоест достигаем ред 6, където директно връщаме $a * Alg3(a, (n + 1) - 1) = a * Alg3(a, n) \stackrel{\text{ИХ}}{=} a * \begin{cases} a^n & , a \neq 0 \wedge n \neq 0 \\ 1 & , a = 0 \vee n = 0 \end{cases} = a^{n+1}$ (отново е важно, че $n + 1 > 0$.. т.е. не е нужно да разглеждаме два случая).

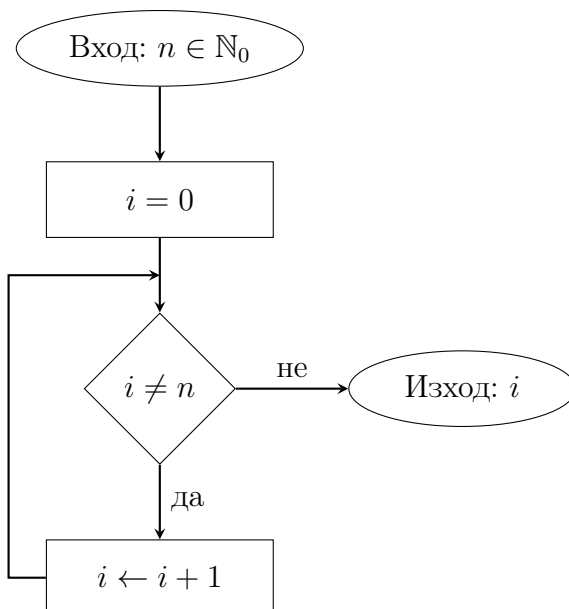
2.3 Блок схеми

В [Забележка 2.1](#) споменахме, че *инвариант* ни служи за доказване само на итеративни цикли, а не на цели алгоритми, а в [Забележка 2.2](#) казахме, че използваме *индукция* за доказване на коректността на цели алгоритми. Това поражда въпроса: "С какво пособие доказваме итеративни алгоритми?". Отговора: чрез *блок схеми*.

Забележка 2.4

Разглежданите итеративни алгоритми в настоящия курс са достатъчно прости, т.е. целия алгоритъм всъщност е само един (най-много два) цикъл(а). За тези алгоритми е напълно приемливо да се използва *инвариант* за доказателство за коректност на целия алгоритъм, но когато алгоритъмът не е просто един цикъл, то тогава се налага да доказваме коректност чрез *блок схеми*. Поради тази причина в рамките на текущия курс не се изискват познания за *блок схеми*.

Задача 2.4. Даден е следния алгоритъм (зададен чрез *блок схема*):



Какво връща той? Да се докаже формално.

Решение. Ще докажем, че алгоритъмът връща n .

Дефинираме три предиката (по един за всяка *не правоъгълна кутийка*):

- $I(n) \stackrel{\text{def}}{\iff} n \in \mathbb{N}_0$
- $L(n, i) \stackrel{\text{def}}{\iff} (n \in \mathbb{N}_0 \wedge i \in \mathbb{N}_0)$
- $O(n, i) \stackrel{\text{def}}{\iff} i = n$

Ще докажем следните три импликации (връзките между *не правоъгълните кутийки*):

- $(I(n) \wedge i = 0) \rightarrow L(n, i)$
- $(L(n, i) \wedge i \neq n) \rightarrow L(n, i + 1)$
- $(L(n, i) \wedge \neg(i \neq n)) \rightarrow O(n, i)$

Ето и пълното доказателство на горните три импликации:

- $(I(n) \wedge i = 0) \rightarrow L(n, i)$
Нека са изпълнени $\underbrace{n \in \mathbb{N}_0}_{I(n)}$ и $i = 0$. Чудим се дали е изпълнено $\underbrace{n \in \mathbb{N}_0 \text{ и } i \in \mathbb{N}_0}_{L(n, i)}$.
Очевидно е изпълнено.
- $(L(n, i) \wedge i \neq n) \rightarrow L(n, i + 1)$
Нека са изпълнени $\underbrace{n \in \mathbb{N}_0 \text{ и } i \in \mathbb{N}_0}_{L(n, i)}$ и $i \neq n$. Чудим се дали е изпълнено $\underbrace{n \in \mathbb{N}_0 \text{ и } (i + 1) \in \mathbb{N}_0}_{L(n, i)}$.
Очевидно е изпълнено.
- $(L(n, i) \wedge \neg(i \neq n)) \rightarrow O(n, i)$
Нека са изпълнени $\underbrace{n \in \mathbb{N}_0 \text{ и } i \in \mathbb{N}_0}_{L(n, i)}$ и $\underbrace{\neg(i \neq n)}_{\text{т.е. } i=n}$. Чудим се дали е изпълнено $\underbrace{i = n}_{O(n, i)}$.
Очевидно е изпълнено.

Тоест доказахме, че достигайки *кутийката за изход* е изпълнен предиката $\underbrace{i = n}_{O(n, i)}$. Тоест връщания резултат наистина е n .

2.4 Често срещани грешки

2.4.1 Бъркане на позицията на инварианта при do-while цикъл

Без да се замисли човек е лесно да се направи тази грешка от невнимание. Да разгледаме следния псевдокод за илюстрация:

```

1. Alg4(n) : // n ∈ ℕ₀
2.   i ← 0;
3.   do
4.     | i ← i + 1;
5.   while i < n;
6.   return n;
```

Инвариант: ГРЕШЕН

При всяко k -то достигане на ред 3...

Инвариант: КОРЕКТЕН

При всяко k -то достигане на ред 5...

Съобразете защо!

2.4.2 Некоректна терминация

За разлика от предходната грешка, тази е значително по-трудна за съобразяване. Да разгледаме следния алгоритъм:

```

1. Alg5(n) : // n ∈ ℕ₀
2.   i ← 0;
3.   while i < n do
4.     i ← i + 1;
5.   return n;
```

Ясно е, че $\text{Alg5}(n) = n$. Проблем настъпва, когато се опитаме да съставим инвариант. Първоначалната ни идея би била да направим следния инвариант:

Инвариант: НЕПЪЛЕН

При всяко k -то достигане на ред 3 имаме, че $i = k - 1$

Този инвариант е абсолютно верен. Нека го докажем.

База. При $k = 1$ -во достигане на ред 3 имаме, че $i = 0 = 1 - 1 = k - 1$.

Поддръжка. Нека е изпълнено за някое k -то непоследно достигане на ред 3. Тъй като е непоследно достигане, то тялото на цикъла се изпълнява и достигаме отново ред 3, като имаме $i_{\text{new}} \stackrel{\text{ред 4}}{=} i_{\text{old}} + 1 \stackrel{\text{ИХ}}{=} (k - 1) + 1 = k = (k + 1) - 1$.

Терминация. При $(n + 1)$ -вото достигане на ред 3 за първи път не влизаме в тялото на while-а. От инварианта знаем, че $i = (n + 1) - 1 = n$, което и връща директно след цикъла.

Забелязахте ли проблема?

Проблема е, че не знаем кое е де факто **последното** достигане на ред 3. При текущия алгоритъм е очевидно за съобразяване, но аналогичен проблем може да възникне при много по-сложни алгоритми. Инварианта е абсолютно коректно доказан (съобразете защо поддръжката е коректно доказана), но терминацията е грешна! Ето как би изглеждал правилен инвариант за алгоритъма:

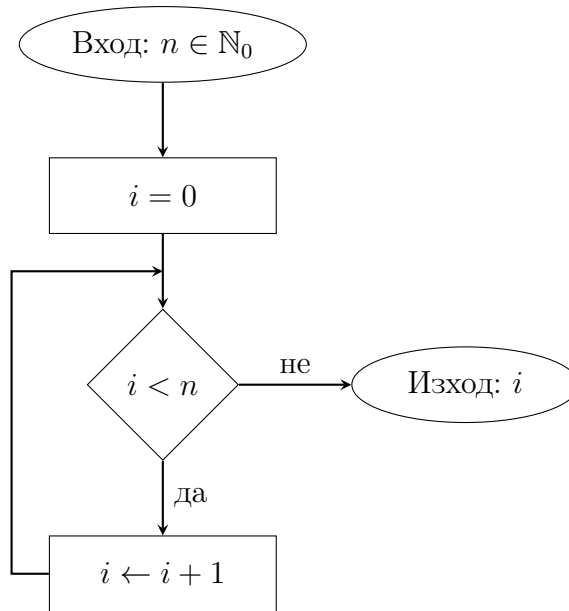
Инвариант

При всяко k -то достигане на ред 3 имаме:

- $i = k - 1$
- $i < n + 1$

Докажете, използвайки този инвариант.

Тъй като е трудно да се съобрази точно къде е проблема, нека да разгледаме същия проблем, но зададен чрез блок схема:



Нека да разгледаме грешната идея първо:

Дефинираме три предиката (по един за всяка *не правоъгълна кутийка*):

- $I(n) \stackrel{def}{\iff} n \in \mathbb{N}_0$
- $L(n, i) \stackrel{def}{\iff} (n \in \mathbb{N}_0 \wedge i \in \mathbb{N}_0)$
- $O(n, i) \stackrel{def}{\iff} i = n$

Ще докажем следните три импликации (връзките между *не правоъгълните кутийки*):

- $(I(n) \wedge i = 0) \rightarrow L(n, i)$
- $(L(n, i) \wedge i < n) \rightarrow L(n, i + 1)$
- $(L(n, i) \wedge \neg(i < n)) \rightarrow O(n, i)$

Ето и опит за пълно доказателство на горните три импликации:

- $(I(n) \wedge i = 0) \rightarrow L(n, i)$
 Нека са изпълнени $\underbrace{n \in \mathbb{N}_0}_{I(n)}$ и $i = 0$. Чудим се дали е изпълнено $\underbrace{n \in \mathbb{N}_0 \text{ и } i \in \mathbb{N}_0}_{L(n, i)}$.
 Очевидно е изпълнено.
- $(L(n, i) \wedge i < n) \rightarrow L(n, i + 1)$
 Нека са изпълнени $\underbrace{n \in \mathbb{N}_0 \text{ и } i \in \mathbb{N}_0}_{L(n, i)}$ и $i < n$. Чудим се дали е изпълнено $\underbrace{n \in \mathbb{N}_0 \text{ и } (i + 1) \in \mathbb{N}_0}_{L(n, i)}$.
 Очевидно е изпълнено.
- $(L(n, i) \wedge \neg(i < n)) \rightarrow O(n, i)$
 Нека са изпълнени $\underbrace{n \in \mathbb{N}_0 \text{ и } i \in \mathbb{N}_0}_{L(n, i)}$ и $\underbrace{\neg(i < n)}_{\text{т.е. } i \geq n}$. Чудим се дали е изпълнено $\underbrace{i = n}_{O(n, i)}$. Не знаем! Единствено имаме, че $i \geq n$ (и че е естествено число), но не знаем дали е n или $n + 1$ или дори може да е $n + 10000$.

Тоест не се получи, използвайки тези 3 предиката.. ще трябва да опитаме нещо по-силно.

Дефинираме три предиката (по един за всяка *не правоъгълна кутийка*):

- $I(n) \stackrel{def}{\leftrightarrow} n \in \mathbb{N}_0$
- $L(n, i) \stackrel{def}{\leftrightarrow} (n \in \mathbb{N}_0 \wedge i \in \mathbb{N}_0 \wedge i \leq n)$
- $O(n, i) \stackrel{def}{\leftrightarrow} i = n$

Ще докажем следните три импликации (връзките между *не правоъгълните кутийки*):

- $(I(n) \wedge i = 0) \rightarrow L(n, i)$
- $(L(n, i) \wedge i < n) \rightarrow L(n, i + 1)$
- $(L(n, i) \wedge \neg(i < n)) \rightarrow O(n, i)$

Ето и пълното доказателство на горните три импликации:

- $(I(n) \wedge i = 0) \rightarrow L(n, i)$
 Нека са изпълнени $\underbrace{n \in \mathbb{N}_0}_{I(n)} \text{ и } i = 0$. Чудим се дали е изпълнено $\underbrace{n \in \mathbb{N}_0 \text{ и } i \in \mathbb{N}_0 \text{ и } i \leq n}_{L(n, i)}$.
 Тъй като $n \in \mathbb{N}_0$, то знаем, че $n \geq 0$, но $i = 0$, тоест имаме $n \geq i$.
- $(L(n, i) \wedge i < n) \rightarrow L(n, i + 1)$
 Нека са изпълнени $\underbrace{n \in \mathbb{N}_0 \text{ и } i \in \mathbb{N}_0 \text{ и } i \leq n}_{L(n, i)} \text{ и } i < n$. Чудим се дали е изпълнено следното
 $\underbrace{n \in \mathbb{N}_0 \text{ и } (i + 1) \in \mathbb{N}_0 \text{ и } (i + 1) \leq n}_{L(n, i+1)}$. Тъй като имаме, че $i < n$ (и $i \in \mathbb{N}_0$), то е еквивалентно с $(i + 1) \leq n$. Очевидно е, че $(i + 1) \in \mathbb{N}_0$.
- $(L(n, i) \wedge \neg(i < n)) \rightarrow O(n, i)$
 Нека са изпълнени $\underbrace{n \in \mathbb{N}_0 \text{ и } i \in \mathbb{N}_0 \text{ и } i \leq n}_{L(n, i)} \text{ и } \underbrace{\neg(i < n)}_{\text{т.е. } i \geq n}$. Чудим се дали е изпълнено $\underbrace{i = n}_{O(n, i)}$.
 Очевидно е, тъй като имаме $i \geq n$ и $i \leq n$, то е ясно, че $i = n$.

Доказахме, че алгоритъма връща n (при вход n).

2.5 Задачи

Задача 2.5. Даден е следния алгоритъм:

```

1.  $Kadane(A[1..n]) : // n \in \mathbb{N}^+, A \in \mathbb{Z}^n$ 
2.    $c \leftarrow A[1];$ 
3.    $m \leftarrow A[1];$ 
4.   for  $i \leftarrow 2$  to  $n$ 
5.     if  $A[i] + c > A[i]$  then
6.        $c \leftarrow c + A[i];$ 
7.     else
8.        $c \leftarrow A[i];$ 
9.     if  $c > m$  then
10.       $m \leftarrow c;$ 
11.  return  $m;$ 

```

Какво връща той? Да се докаже формално.

Решение. Ще докажем, че $Kadane(A[1..n])$ връща най-голяма сума на непразен подмасив (последователни елементи) на $A[1..n]$.

Инвариант

При всяко k -то достигане на ред 4 имаме:

- $i = k + 1$
- c е най-голяма сума на непразен подмасив на $A[1..k]$, завършващ в индекс k
- m е най-голяма сума на непразен подмасив на $A[1..k]$

База. При $k = 1$ -во достигане на ред 4 имаме:

- $i \stackrel{\text{ред 4}}{=} 2 = k + 1$
- c изпълнява инварианта
- m изпълнява инварианта

Поддръжка. Нека са изпълнени за някое k -то непоследно достигане на ред 4 следните:

- $i_{old} = k + 1$
- c_{old} е най-голяма сума на непразен подмасив на $A[1..k]$, завършващ в индекс k
- m_{old} е най-голяма сума на непразен подмасив на $A[1..k]$

Ще докажем за $(k + 1)$ -во достигане на ред 4:

- $i_{new} = i_{old} + 1 \stackrel{\text{ИХ}}{=} (k + 1) + 1$

- Ще използваме следния факт наготово: $c_{new} = \max\{c_{old} + A[i_{old}], A[i_{old}]\}$ (докажете). Допускаме, че c_{new} не е най-голяма сума на непразен подмасив на $A[1..k+1]$, завършваща в индекс $k+1$ и нека означим с t тази най-голяма сума. Тоест имаме, че $t > c_{new} = \max\{c_{old} + A[i_{old}], A[i_{old}]\} \geq c_{old} + A[i_{old}]$. Като прехвърлим $A[i_{old}]$ от другата страна получаваме $t - A[i_{old}] > c_{old}$. Допуснахме, че t е най-голяма сума на непразен подмасив на $A[1..k+1]$, завършващ в индекс $k+1$. Тогава $t - A[i_{old}] \stackrel{ИХ}{=} t - A[k+1]$ е сума на **(потенциално празен)** подмасив на $A[1..k]$, завършващ в индекс k . Разглеждаме два случая:

сл.1 (подмасива е празен)

Тогава имаме, че t е сума само на последния елемент, т.е. $t = A[k+1]$. Знаем, че $c_{new} = \max\{c_{old} + A[i_{old}], A[i_{old}]\}$. Нека разгледаме два подслучая:

сл.1.1 ($c_{old} > 0$)

Тогава имаме $c_{new} = \{c_{old} + A[i_{old}], A[i_{old}]\} = c_{old} + A[i_{old}] > A[i_{old}] \stackrel{ИХ}{=} A[k+1] = t$. Тоест излезе, че $c_{new} > t$ - противоречие (с това, че $t > c_{new}$).

сл.1.2 ($c_{old} \leq 0$)

Тогава имаме $c_{new} = \{c_{old} + A[i_{old}], A[i_{old}]\} = A[i_{old}] \stackrel{ИХ}{=} A[k+1] = t$. Тоест излезе, че $c_{new} = t$ - противоречие (с това, че $t > c_{new}$).

сл.2 (подмасива не е празен)

Тогава имаме, че $t - A[k+1]$ е сума на непразен подмасив на $A[1..k]$, завършваща в индекс k и знаем още, че $t - A[k+1] > c_{old}$. От друга страна от ИХ имаме, че c_{old} е максима сума на непразен подмасив на $A[1..k]$, завършваща в индекс k , т.е. $c_{old} \geq t - A[k+1] = t - A[i_{old}]$ - противоречие (с това, че $t - A[i_{old}] > c_{old}$).

Следователно c_{new} най-голяма сума на непразен подмасив на $A[1..k+1]$, завършващ в индекс $k+1$.

- Ще използваме следния факт наготово: $m_{new} = \max\{c_{new}, m_{old}\}$ (докажете). Опитваме се да докажем, че m_{new} е максимална сума на непразен подмасив на $A[1..k+1]$. Разглеждаме следните два случая:

сл.1 ($A[k+1]$ участва в някоя максимална сума на непразен подмасив на $A[1..k+1]$)

Тогава е ясно, че c_{new} е тази сума. За пълнота разглеждаме два подслучая:

сл.1.1 (има точно една максимална сума на непразен подмасив на $A[1..k+1]$)

Тогава ще влезем в тялото на if-а на ред 9-10 и ще имаме $m_{new} = c_{new}$.

сл.1.2 (има повече от една)

Тогава няма да влезем в тялото на същия if и ще имаме $m_{new} = m_{old}(= c_{new})$.

сл.2 ($A[k+1]$ не участва в никоя максимална сума на непразен подмасив на $A[1..k+1]$)

Тогава имаме $m_{new} = m_{old}$, но от ИХ за m_{old} директно имаме твърдението за m_{new} .

Следователно m_{new} е най-голяма сума на непразен подмасив на $A[1..k+1]$

Терминация. При $k = n$ за първия път не влизаме в тялото на for-а. Директно връщаме m , което от инварианта знаем, че е максимална сума на непразен подмасив на $A[1..n]$.

Задача 2.6. Дадена е кутия с 53 сини топки и 42 червени топки. В кутията няма други топки. Извън кутията имаме неограничен брой сини и червени топки. Даден е следния алгоритъм:

```

1. AlgBall() :
2.   while не остане една топка в кутията do
3.     извади две случайни топки;
4.     if двете топки са еднакъв цвят then
5.       | добави една червена;
6.     else
7.       | добави една синя;
```

Какъв е цвета на топката, която е останала самичка?

Решение. Ще докажем, че цвета на топката, която е останала е син.

Инвариант

При всяко k -то достигане на ред 2 имаме:

- броя топки в кутията е $\max\{95 - k + 1, 1\}$
- броя сини топки в кутията е нечетен

Докажете за упражнение инварианта и покажете как от него следва цвета на останалата самичка топка!

Задача 2.7. Даден е следния алгоритъм:

```

1. Pred(A[1..n]) : //  $n \in \mathbb{N}_0, A \in \mathbb{R}^n$ 
2.   for  $i \leftarrow 1$  to  $n - 1$ 
3.     | for  $j \leftarrow i + 1$  to  $n$ 
4.       | | if  $A[i] = A[j]$  then
5.         | |   return TRUE;
6.   return FALSE;
```

Какво връща той? Да се докаже формално.

Решение. Ще докажем, че $Pred(A[1..n])$ връща истина тогава и само тогава когато има повтарящи се елементи (и лъжа иначе) в $A[1..n]$. За целта ще ни трябват два инварианта - един за външния цикъл и един за вътрешния цикъл.

Инвариант: Вътрешен цикъл

При всяко k -то достигане на ред 3 имаме, че елементите $A[i + 1], \dots, A[i + k - 1]$ са различни от $A[i]$ и $i < j$

Инвариант: Външен цикъл

При всяко k -то достигане на ред 2 имаме, че елементите $A[1], \dots, A[k - 1]$ са уникални в $A[1..n]$

Доказателството на двата инварианта остава за упражнение. Сега остана да използваме инвариантите за да докажем коректността. Имаме две възможни места за изход от програмата - ред 5 и ред 6. Нека да ги разгледаме:

сл.1 (излизаме през ред 5)

От вътрешния инвариант, знаем че $i < j$. Също така знаем, че $A[i] = A[j]$ тъй като сме в тялото на if от ред 4-5. Тоест имаме два еднакви елемента в масива и връщаме истина, к.т.д.д. (Тук **измамахме!** Можете ли да откриете проблема и да го оправите?)

сл.2 (излизаме през ред 6)

От външния инвариант директно следва, че в масива всички елементи са уникални и връщаме лъжа, к.т.д.д.

Забележка. При ограничено време на контролно приоритизирайте доказателството на най-външния инвариант.

Забележка 2.5: Инварианта не е всичко

Понякога трябва бонус работа (след инварианта) за да се докаже коректност на алгоритъм! Примери за това са [Задача 2.6](#) и [Задача 2.7](#).

Глава 3

Анализ на сложността на алгоритми

3.1 Итеративни алгоритми

Изложените по-долу суми, може да се ползват без доказателство на контролни и домашни:

$$\sum_{i=1}^n 1 = n = \theta(n)$$

$$\sum_{i=1}^n \theta(1) = \theta(n)$$

$$\sum_{i=c}^n = n - c + 1 = \theta(n)$$

$$\sum_{i=c}^n \theta(1) = \theta(n)$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = \theta(n^2)$$

$$\sum_{i=1}^n \theta(i) = \theta(n^2)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \theta(n^3)$$

$$\sum_{i=1}^n \theta(i^2) = \theta(n^3)$$

$$\sum_{i=1}^n 1 = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor = \theta(n)$$

$$\sum_{i=i+k}^n \theta(1) = \theta(n)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \theta(\ln(n))$$

$$\sum_{i=1}^n \theta(\frac{1}{i}) = \theta(\ln(n))$$

Забележка. Употребата на тета-нотацията вляво на $=$ се нарича *анонимна функция*

3.1.1 Интегрален критерий

В настоящия курс ще разглеждаме само частен случай на интегралния критерий, който ще ни бъде достатъчен. Това е един от най-силните инструменти, с който ще разполагаме за да намираме асимптотика на дадена сума.

Теорема 3.1: Интегрален критерий (частен случай)

Нека f е **асимптотично положителна функция** и нека $n_0 \in \mathbb{N}_0$ е свидетел за това. Нека $\exists m > 0 \exists M > 0 \forall n > n_0 : mf(n) \leq \min_{x \in [n, n+1]} f(x) \leq \max_{x \in [n, n+1]} f(x) \leq Mf(n)$.

Тогава е изпълнено: $\sum_{i=n_0}^n f(i) \asymp \int_{n_0}^n f(x)dx$.

Забележка. Приложен интегрален критерий без посочени конкретни m, M и n_0 и/или без обосновка на трите неравенства, носи **нула** точки!

3.1.1.1 Добре разпределени функции

Една функция ще наричаме *добре разпределена* (локална дефиниция), ако отговаря на допълнителното условие в **Теорема 3.1** за съществуване на такива константи m и M . Нека да разгледаме малко примери да придобием интуиция кои функции са *добре разпределени*:

Пример 3.1. $f(x) = x^2$

Ще проверим, че условието

$$mn^2 \leq \min_{x \in [n, n+1]} f(x) \leq \max_{x \in [n, n+1]} f(x) \leq Mn^2 \quad (3.1)$$

е изпълнено за $m = 1, M = 4, \forall n \geq n_0 = 1$:

$$1n^2 \leq n^2 \leq (n+1)^2 \leq 4n^2$$

Първите две неравенства очевидно са верни. Остава да проверим:

$$(n+1)^2 \leq 4n^2$$

След като разкрием скобите получаваме:

$$n^2 + 2n + 1 \leq 4n^2$$

или още

$$3n^2 - 2n - 1 \geq 0$$

Сега намираме корените $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 1$ и виждаме, че $3n^2 - 2n - 1 \geq 0$ за $n \geq 1$, което искахме да докажем.

Разбира се, не е задължително да има единствени такива m, M, n_0 . Даже напротив - ако има едно решение, то има безкрай много решения. Да разгледаме друго решение. Ще се убедим, че е изпълнено за $m = \frac{1}{3}, M = 1.005, \forall n \geq n_0 = 41$:

$$\frac{1}{3}n^2 \leq n^2 \leq (n+1)^2 \leq 1.005n^2$$

Отново първите две неравенства очевидно са верни. Остава да проверим:

$$(n+1)^2 \leq 1.005n^2$$

или още

$$0.05n^2 - 2n - 1 \geq 0$$

Сега намираме корените $x_1 = 20 - 2\sqrt{105} \approx -0.4939, x_2 = 20 + 2\sqrt{105} \approx 40.4939$ и виждаме, че $0.05n^2 - 2n - 1 \geq 0$ за $n \geq n_0 = 41 > x_2 \approx 40.4939$.

В случая кое да е $m \in (0, 1]$ и кое да е $M \in (1, +\infty)$ ни вършат работа, като в зависимост от избора ни на M , трябва да изберем подходящо n_0 .

Пример 3.2. $f(x) = x^\alpha$

В зависимост от α ще проверим, че условието 3.1 е изпълнено за

сл.1 ($\alpha \geq 0$) $m = 1, M = 2^\alpha, n_0 = 1$

Тоест трябва да се убедим, че следните неравенства са вярни:

$$1n^\alpha \leq n^\alpha \leq (n+1)^\alpha \leq 2^\alpha n^\alpha$$

Отново първите две са очевидни. Остава да се убедим само в последното неравенство:

$$(n+1)^\alpha \leq (2n)^\alpha$$

Тъй като $n_0 > 0$ и работим с $n \geq n_0$, то $2n > 0$ и можем да разделим на него (т.е. не делим на нула и не се сменя посоката на неравенството):

$$\left(\frac{n+1}{2n}\right)^\alpha \leq 1$$

Лесно съобразяваме, че при $n \geq n_0 = 1$ и $\alpha \geq 0$ неравенството е изпълнено:

$$\underbrace{\left(\frac{n+1}{2n}\right)^\alpha}_{\leq 1} \leq 1$$

сл.2 ($\alpha < 0$) $m = 2^\alpha, M = 1, n_0 = 1$

Тоест трябва да се убедим, че следните неравенства са вярни:

$$2^\alpha n^\alpha \leq (n+1)^\alpha \leq n^\alpha \leq 1n^\alpha$$

Ще проверим първото неравенство, другите две са очевидни:

$$(2n)^\alpha \leq (n+1)^\alpha$$

Тъй като $n_0 > 0$ и работим с $n \geq n_0$, то $2n > 0$ и можем да разделим на него (т.е. не делим на нула и не се сменя посоката на неравенството):

$$\left(\frac{n+1}{2n}\right)^\alpha \geq 1$$

Лесно съобразяваме, че при $n \geq n_0 = 1$ и $\alpha < 0$ неравенството е изпълнено:

$$\underbrace{\left(\frac{n+1}{2n}\right)^\alpha}_{\leq 1} = \underbrace{\left(\frac{2n}{n+1}\right)^{|\alpha|}}_{\geq 1} \geq 1$$

Пример 3.3. $f(x) = \alpha^n, \alpha > 0$

В зависимост от α ще проверим, че условието 3.1 е изпълнено за

сл.1 ($\alpha \geq 1$) $m = 1, M = \alpha, n_0 = 1$

Тоест трябва да се убедим, че следните неравенства са вярни:

$$1\alpha^n \leq \alpha^n \leq \alpha^{n+1} \leq \alpha\alpha^n$$

Очевидно и трите неравенства са верни.

сл.2 ($0 < \alpha < 1$) $m = \alpha, M = 1, n_0 = 1$

Тоест трябва да се убедим, че следните неравенства са верни:

$$\alpha \alpha^n \leq \alpha^{n+1} \leq \alpha^n \leq 1 \alpha^n$$

Очевидно и трите неравенства са верни.

Пример 3.4. $f(x) = x^x$

Това е пример за функция, която **не** е добре разпределена. Убедете се защо!

Пример 3.5. $f(x) = x!$

Това е друг пример за функция, която **не** е добре разпределена. Убедете се защо!

3.1.1.2 Приложения

Приложение 3.1. $f(x) = x^\alpha$

Очевидно функцията е асимптотично положителна и в [Пример 3.2](#) доказахме, че тя е добре разпределена. Тогава може да приложим интегралния критерий и в зависимост какво n_0 сме избрали получаваме:

$$\sum_{i=n_0}^n i^\alpha \asymp \int_{n_0}^n x^\alpha dx = \begin{cases} \theta(n^{\alpha+1}) & , \alpha > -1 \\ \theta(\ln(n)) & , \alpha = -1 \\ \theta(1) & , \alpha < -1 \end{cases}$$

Приложение 3.2. $f(x) = \alpha^x, \alpha > 0$

Очевидно функцията е асимптотично положителна и в [Пример 3.3](#) доказахме, че тя е добре разпределена. Тогава може да приложим интегралния критерий и в зависимост какво n_0 сме избрали получаваме:

$$\sum_{i=n_0}^n \alpha^i \asymp \int_{n_0}^n \alpha^x dx$$

Сега разглеждаме 3 случая в зависимост от α :

сл.1 ($\alpha > 1$)

$$\int_{n_0}^n \alpha^x dx = \frac{\alpha^n - \alpha^{n_0}}{\ln(\alpha)} = \theta(\alpha^n)$$

сл.2 ($\alpha = 1$)

$$\int_{n_0}^n \alpha dx = \alpha(n - n_0) = \theta(n)$$

сл.3 ($0 < \alpha < 1$)

$$\int_{n_0}^n \alpha^x dx = \frac{\alpha^n - \alpha^{n_0}}{\ln(\alpha)} = \theta(1)$$

Тъй като числителя $\alpha^n - \alpha^{n_0}$ и знаменателя $\ln(\alpha)$ са строго по-малки от 0, то цялата дроб е строго положителна. Тогава $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n - \alpha^{n_0}}{\ln(\alpha)} = \frac{-\alpha^{n_0}}{\ln(\alpha)} > 0$ е просто константа, откъдето имаме асимптотика $\theta(1)$.

Тоест получихме:

$$\sum_{i=n_0}^n \alpha^i = \begin{cases} \theta(\alpha^n) & , \alpha > 1 \\ \theta(n) & , \alpha = 1 \\ \theta(1) & , 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Приложение 3.3. Каква е асимптотиката на:

$$(a) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

$$(б) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}}$$

$$(в) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$$

Решение. Това е частен случай на **Приложение 3.1**. Тоест имаме:

$$(a) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \theta(\ln(n))$$

$$(б) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} = \theta(\sqrt{n})$$

$$(в) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = \theta(1)$$

Приложение 3.4. Каква е асимптотиката на $\sum_{i=1}^n \ln(i)$?

Решение. Очевидно е, че функцията $f(x) = \ln(x)$ е асимптотично положителна. Остана да покажем, че тя е добре разпределена. Тоест трябва да намерим такива $m, M > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$, че да е вярно неравенство **3.1**. Ще покажем, че $m = 1, M = 2, n_0 = 2$ са свидетели:

$$1\ln(n) \leq \ln(n) \leq \ln(n+1) \leq 2\ln(n)$$

Очевидно първите две неравенства са изпълнени. Остава да проверим третото:

$$\ln(n+1) \leq 2\ln(n) = \ln(n^2)$$

Нека се убедим първо, че следното неравенство е изпълнено за $n \geq n_0 = 2$:

$$n+1 \leq n^2$$

или още

$$n^2 - n - 1 \geq 0$$

Сега намираме корените $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618, x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ и виждаме, че $n^2 - n - 1 \geq 0$ за $n \geq n_0 = 2 > x_2 \approx 1.618$. Знаем, че логаритмуването на асимптотично положителни и неограничени отгоре функции запазва посоката на неравенството, откъдето получаваме:

$$\ln(n+1) \leq \ln(n^2) = 2\ln(n)$$

Сега вече може да приложим интегралния критерий, откъдето получаваме:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n \ln(i) &\asymp \int_2^n \ln(x) dx = \ln(x)x \Big|_2^n - \int_2^n x d(\ln(x)) = n\ln(n) - 2\ln(2) - \int_2^n \frac{x}{x} dx = \\ &= n\ln(n) - 2\ln(2) - x \Big|_2^n = n\ln(n) - n + 2 - 2\ln(2) = \theta(n.\ln(n)) \end{aligned}$$

Забележете, че в оригиналната задача, сумата започваше от 1, а интегралния критерий ни даде асимптотика от 2 нагоре. Това обаче не е проблем, тъй като сме изпуснали $n_0 - 1$ на брой крайни събираеми (което е константа). Тоест имаме:

$$\sum_{i=1}^n \ln(i) = \text{const} + \sum_{i=2}^n \ln(i) = \text{const} + \theta(n.\ln(n)) = \theta(n.\ln(n))$$

В случая даже изпуснатото събираемо е $\ln(1) = 0$, но в общия случай това не е така.

Приложение 3.5. Каква е асимптотиката на $\sum_{i=1}^n \frac{\ln(i)}{i}$?

Решение. За упражнение докажете (използвайки интегралния критерий), че:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\ln(i)}{i} \asymp \theta(\ln^2(n))$$

3.1.2 Задачи

Основната идея е да заместим всяка атомарна операция с константа (или за по-лесно единица - не се отразява на асимптотиката), а циклите с математическа сума. Нека разгледаме няколко примерни задачи:

Задача 3.1. Даден е следния алгоритъм:

```

1. Func(n) : // n ∈ ℕ+
2.   print 'a';
3.   for i ← 1 to n
4.     | print 'b';
5.   fastprint 'c';
6.   print 'd';
```

Каква е сложността му по време (спрямо големината на входа n)?

Решение. Сложността му по време е $c_{\text{print}} + \sum_{i=1}^n (c_{\text{print}} + c_{\text{checkend}} + c_{\text{increment}}) + c_{\text{fastprint}} + c_{\text{print}} = 2c_{\text{print}} + n(c_{\text{print}} + c_{\text{checkend}} + c_{\text{increment}}) + c_{\text{fastprint}} = \theta(n)$.

Забележка. За чистота се разбираме да пишем 1 вместо c_{name} за всички атомарни операции.

Задача 3.2. Даден е следния алгоритъм:

```

1. Func(n) : // n ∈ ℕ+
2.   |   for i ← 1 to n
3.   |   |   for j ← 1 to n
4.   |   |   |   print 'a';

```

Каква е сложността му по време (спрямо големината на входа n)?

Решение. Сложността му по време е $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n n = n \sum_{i=1}^n 1 = n \cdot n = \theta(n^2)$.

Задача 3.3. Даден е следния алгоритъм:

```

1. Func(n) : // n ∈ ℕ+
2.   |   for i ← 1 to n
3.   |   |   for j ← 1 to i
4.   |   |   |   print 'a';

```

Каква е сложността му по време (спрямо големината на входа n)?

Решение. Сложността му по време е $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 1 = \sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2} = \theta(n^2)$.

Задача 3.4. Даден е следния алгоритъм:

```

1. Func(n) : // n ∈ ℕ+
2.   |   for i ← 1 to n
3.   |   |   for j ← 1 to n with step i
4.   |   |   |   print 'a';

```

Каква е сложността му по време (спрямо големината на входа n)?

Решение. Сложността му по време е $\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j=j+i}}^n 1 = \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \asymp \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \asymp n \ln(n) = \theta(n \cdot \ln(n))$.

Задача 3.5. Даден е следния алгоритъм:

```

1. Func(n) : // n ∈ ℕ+
2.   for i ← 1 to n
3.     for j ← i to 2i
4.       if j < n then
5.         for k ← 1 to n with step i
6.           print 'a';
7.       print 'b';

```

Каква е сложността му по време (спрямо големината на входа *n*)?

Решение. Сложността му по време е:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^{2^i} 1}_{\text{print 'b'}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \sum_{j=i}^{2^i} \sum_{\substack{k=1 \\ k=k+i}}^n 1}_{\text{print 'a' (} i \leq \lfloor \log(n) \rfloor)} + \underbrace{\sum_{i=\lfloor \log(n) \rfloor + 1}^n \sum_{j=i}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k=k+i}}^n 1}_{\text{print 'a' (} i > \lfloor \log(n) \rfloor)} \quad (3.2)$$

Нека да разгледаме трите суми поотделно. Да започнем с първата:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^{2^i} 1 = \sum_{i=1}^n (2^i - i + 1) = \sum_{i=1}^n 2^i - \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \asymp 2^n - n^2 + n = \theta(2^n)$$

Сега да разгледаме втората (като премахнем закръглянето - не променя асимптотиката):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\log(n)} \sum_{j=i}^{2^i} \sum_{\substack{k=1 \\ k=k+i}}^n 1 &\asymp \sum_{i=1}^{\log(n)} \sum_{j=i}^{2^i} \frac{n}{i} = n \sum_{i=1}^{\log(n)} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=i}^{2^i} 1 \right) = n \sum_{i=1}^{\log(n)} \left(\frac{1}{i} (2^i - i + 1) \right) = \\ &= n \left(\sum_{i=1}^{\log(n)} \frac{2^i}{i} - \sum_{i=1}^{\log(n)} \frac{i}{i} + \sum_{i=1}^{\log(n)} \frac{1}{i} \right) \leq n \left(\sum_{i=1}^{\log(n)} 2^i - \sum_{i=1}^{\log(n)} 1 + \sum_{i=1}^{\log(n)} \frac{1}{i} \right) \asymp \\ &\asymp n \left(2^{\log(n)} - \log(n) + \ln(\log(n)) \right) \asymp n \left(n - \log(n) + \log^{(2)}(n) \right) \asymp n^2 \end{aligned}$$

В крайна сметка за втората сума получихме:

$$\sum_{i=1}^{\log(n)} \sum_{j=i}^{2^i} \sum_{\substack{k=1 \\ k=k+i}}^n 1 = O(n^2)$$

Обърнете внимание, че е $O(n^2)$, а не $\theta(n^2)$ - това е заради употребата на \leq . Разбира се може в действителност да е $\theta(n^2)$, но $O(n^2)$ ни е достатъчно (след малко ще видим защо) да определим сложността по време на 3.2. Остана да разгледаме третата сума (отново махаме закръглянето и константата +1 - не променят асимптотиката):

$$\begin{aligned} \sum_{i=\log(n)}^n \sum_{j=i}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k=k+i}}^n 1 &\asymp \sum_{i=\log(n)}^n \sum_{j=i}^n \frac{n}{i} = n \sum_{i=\log(n)}^n \frac{1}{i} \sum_{j=i}^n 1 = n \sum_{i=\log(n)}^n \left(\frac{1}{i} (n - i + 1) \right) = \\ &= n \left(n \sum_{i=\log(n)}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=\log(n)}^n \frac{\log(n)}{i} + \sum_{i=\log(n)}^n \frac{1}{i} \right) = \dots = \theta(n^2 \log(n)) \end{aligned}$$

Тоест сложността по време на функцията е $\theta(2^n) + O(n^2) + \theta(n^2 \log(n)) = \theta(2^n)$.

3.2 Рекурсивни алгоритми

Сложността на рекурсивни алгоритми ще определяме посредством рекурентни уравнения. По тази причина рекурентните уравнения, които ще разглеждаме ще са със строго намаляващ аргумент, всички събираеми отдясно на $=$ ще се срещат с положителен знак и всички основи на експоненти в нехомогенната част ще бъдат положителни. Също така да обърнем внимание, че за всяко фиксирано $n_0 \in \mathbb{N}_0$ е изпълнено: $\forall n \leq n_0 (T(n) = \theta(1))$, където $T(n)$ е рекурентно уравнение. Може да си мислим за това n_0 като базата на рекурсивния алгоритъм. За удобство ще нагласяме n_0 да е някое малко число - например 0, 1, 2 - в зависимост от конкретната задача. Съставянето на рекурентно уравнение за сложността на рекурсивен алгоритъм е тривиално в повечето случаи. Поради тази причина ще се съсредоточим върху методи за намиране на асимптотиката на рекурентни уравнения.

3.2.1 Характеристично уравнение

Започваме с метод, който ви е добре познат от ДСТР. За разлика от ДСТР, тук не ни интересува точното решение, а само асимптотиката.

Задача 3.6. Каква е асимптотиката на $T(n) = 4T(n-2) + n2^n + 4.3^n$?

Решение.

- (Хомогенна част)
 $x^2 = 4 \mapsto x_{1,2} = \pm 2 \mapsto \{2, -2\}_M$
- (Нехомогенна част)
 - $n2^n \mapsto \{2, 2\}_M$
 - $4.3^n \mapsto \{3\}_M$

Като обединим всички мултимножества получаваме: $\{-2, 2, 2, 2, 3\}_M$. Оттук получаваме, че $T(n) = c_1(-2)^n + c_22^n + c_3n2^n + c_4n^22^n + c_53^n = \theta(3^n)$.

Забележка. Забележете, че поради естеството на рекурентните уравнения (строго намаляващ аргумент, положителен знак отдясно на $=$ и положителна основа на експонентата в нехомогенната част), то ни е гарантирано, че най-голямото (по модул) число в крайното мултимножество ще е положително и при това ще се среща със строго положителна константа в явния запис на рекурентното уравнение. Поради тази причина в [Задача 3.6](#) сме сигурни, че $c_5 > 0$ (и че $\max\{|-2|, |2|, |2|, |2|, |3|\} = 3 \in \{-2, 2, 2, 2, 3\}$).

Задача 3.7. Каква е асимптотиката на $T(n) = 2T(n-1) + T(n-2)$?

Решение. Тук имаме само хомогенна част: $x^2 = 2x+1 \mapsto x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2} \mapsto \{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}_M$. Оттук получаваме $T(n) = c_1(1+\sqrt{2})^n + c_2(1-\sqrt{2})^n = \theta((1+\sqrt{2})^n)$.

Задача 3.8. Каква е асимптотиката на $T(n) = T(n-2) + T(n-4) + \dots + \underbrace{T(n\%2)}_{T(0) \text{ или } T(1)}$?

Решение. Това характеристично уравнение се решава със следния трик: $T(n) - T(n-2) = T(n-2) + T(n-4) + \dots + T(n\%2) - (T(n-4) + T(n-6) + \dots + T(n\%2)) = T(n-2)$. Тоест

$$\underbrace{T(n)}_{T(n)} - \underbrace{T(n-2)}_{T(n-2)} = T(n-2)$$

получихме, че $T(n) - T(n-2) = T(n-2)$ или още $T(n) = 2T(n-2)$. Решаваме характеристичното уравнение $x^2 = 2$ и получаваме $x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \mapsto \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}_M$. Оттук имаме $T(n) = c_1(\sqrt{2})^n + c_2(-\sqrt{2})^n = \theta((\sqrt{2})^n)$.

3.2.2 Развиване

Метода за намиране асимптотика на рекурентно уравнение чрез развиване е най-мощния, който ще разгледаме в текущия курс, но и най-хамалския. Изисква сравнително много писане и известна доза *умен съм бил сетил съм се* (зависи от задачата). Самия метод не е формален. Формализацията изисква доказателство чрез индукция, което е трудната част. Идеята е много проста - развиваме докажо не заподозреем сложността и след това доказваме формално.

Задача 3.9. Каква е асимптотиката на $T(n) = T(n-1) + n$?

Решение. Тази задача може да се реши чрез характеристично уравнение, но сега ще го докажем чрез развиване и индукция.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + n = T(n-2) + (n-1) + n = \\ &= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n = \dots = \\ &= T(0) + 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = T(0) + \theta(n^2) = \theta(n^2) \end{aligned}$$

Забележка

Дотук **НЕ** сме доказали нищо! Само сме заподозрели отговора! Проблема е в това, че употребата на "... " е изцяло неформална.. може да сме сбъркали нещо на ум!

Нека $n_{st} \in \mathbb{N}_0$ е достатъчно голямо¹.

- $T(n) = O(n^2)$

По **дефиниция** имаме $O(n^2) = \{f \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 \text{ е изпълнено } 0 \leq f(n) \leq c.n^2\}$. Тоест търсим константи $c > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$ такива, че $\forall n \geq n_0 (0 \leq T(n) \leq c.n^2)$. Както се разбрахме в началото на 3.2, сложността на рекурсивните алгоритмите, които ще разглеждаме в текущия курс, изпълняват условието $T(n) \geq 0$. Тоест търсим константи $c > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$ такива, че $\forall n \geq n_0 (T(n) \leq c.n^2)$.

Нека $b = \max\left\{\frac{T(1)}{1^2}, \frac{T(2)}{2^2}, \frac{T(3)}{3^2}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{(n_{st}-1)^2}, 1^2\right\}$. (виж **Забележка 3.1**)

Ще докажем с индукция по n , че за $c = b$ и някое n_0 (което ще установим по-надолу) е изпълнено $\forall n \geq n_0 (T(n) \leq c.n^2)$.

¹Надолу в доказателството ще въведем n_0 и ще изискваме $n_0 < n_{st}$.

²Надолу ще установим, защо добавяме тази единица.

База. Нека $k \in \{1, 2, \dots, n_{st} - 1\}$. Ще докажем, че $T(k) \leq b.k^2$.

От дефиницията на $b = \max\left\{\frac{T(1)}{1^2}, \frac{T(2)}{2^2}, \frac{T(3)}{3^2}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{(n_{st}-1)^2}, 1\right\}$ знаем, че $b \geq \frac{T(k)}{k^2}$ откъдето $b.k^2 \geq T(k)$ или още $T(k) \leq b.k^2$.

Индуктивна хипотеза. Нека допуснем, че е изпълнено $\forall m < n (T(m) \leq b.m^2)$.

Индуктивна стъпка. Ще докажем, че е изпълнено за n , тоест че $T(n) \leq b.n^2$.

$$\begin{aligned} T(n) &\stackrel{\text{def}}{=} T(n-1) + n \stackrel{\text{ИХ}}{\leq} b(n-1)^2 + n = bn^2 - 2bn + b + n \stackrel{?}{\leq} bn^2 \\ &\quad bn^2 - 2bn + b + n \stackrel{?}{\leq} bn^2 \\ &\quad n(1 - 2b) + b \stackrel{?}{\leq} 0 \end{aligned}$$

Може да забележим, че при $1 - 2b \leq -b$ горното неравенство ще е изпълнено за всяко $n \geq 1$. Оттук си избираме $n_0 = 1$.

Остана да видим кога е изпълнено $1 - 2b \leq -b$. Очевидно е изпълнено когато $b \geq 1$. Това сме си го подсигурили от дефиницията на $b = \max\{\dots, 1\} \Rightarrow b \geq 1$.

Тоест доказахме, че за $c = b \wedge n_0 = 1$ е изпълнено $\forall n \geq n_0 (0 \leq T(n) \leq c.n^2)$. Казано с други думи $T(n) = O(n^2)$.

- $T(n) = \Omega(n^2)$

По дефиниция имаме $\Omega(n^2) = \{f \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 \text{ е изпълнено } 0 \leq c.n^2 \leq f(n)\}$. Тоест търсим константи $c > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$ такива, че $\forall n \geq n_0 (c.n^2 \leq T(n))$.

Нека $b = \min\left\{\frac{T(1)}{1^2}, \frac{T(2)}{2^2}, \frac{T(3)}{3^2}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{(n_{st}-1)^2}, \frac{1}{2}\right\}$. (виж [Забележка 3.1](#))

Ще докажем с индукция по n , че за $c = b$ и някое n_0 (което ще установим по-надолу) е изпълнено $\forall n \geq n_0 (c.n^2 \leq T(n))$.

База. Нека $k \in \{1, 2, \dots, n_{st} - 1\}$. Ще докажем, че $b.k^2 \leq T(k)$.

От дефиницията на $b = \min\left\{\frac{T(1)}{1^2}, \frac{T(2)}{2^2}, \frac{T(3)}{3^2}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{(n_{st}-1)^2}, \frac{1}{2}\right\}$ знаем, че $b \leq \frac{T(k)}{k^2}$ откъдето $b.k^2 \leq T(k)$.

Индуктивна хипотеза. Нека допуснем, че е изпълнено $\forall m < n (b.m^2 \leq T(m))$.

Индуктивна стъпка. Ще докажем, че е изпълнено за n , тоест че $b.n^2 \leq T(n)$.

$$\begin{aligned} T(n) &\stackrel{\text{def}}{=} T(n-1) + n \stackrel{\text{ИХ}}{\geq} b(n-1)^2 + n = bn^2 - 2bn + b + n \stackrel{?}{\geq} bn^2 \\ &\quad n(1 - 2b) + b \stackrel{?}{\geq} 0 \end{aligned}$$

Може да забележим, че при $1 - 2b \geq 0$ горното неравенство ще е изпълнено за всяко $n \geq 0$. Оттук си избираме $n_0 = 1$ (ако изберем $n_0 = 0$ ще имаме $\frac{T(0)}{0}$).

Остана да видим кога е изпълнено $1 - 2b \geq 0$. Очевидно е изпълнено когато $b \leq \frac{1}{2}$. Това сме си го подсигурили от дефиницията на $b = \min\{\dots, \frac{1}{2}\} \Rightarrow b \leq \frac{1}{2}$.

Тоест доказахме, че за $c = b \wedge n_0 = 1$ е изпълнено $\forall n \geq n_0 (0 \leq c.n^2 \leq T(n))$. Казано с други думи $T(n) = \Omega(n^2)$.

Забележка 3.1: Константата c при доказване с индукция

Когато доказваме, че асимптотиката на рекурентно уравнение е $\varphi(n)$ чрез индукция, то константата винаги е от вида \max (за O) или \min (за Ω) на $\left\{ \frac{T(n_0)}{\varphi(n_0)}, \frac{T(n_0+1)}{\varphi(n_0+1)}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{\varphi(n_{st}-1)} \right\}$, като внимаваме за избора на n_0 - да не разделим на нула (примерно ако $\varphi(n) = \log(n)$, то тогава $\frac{T(1)}{\varphi(1)} = \frac{T(1)}{0}$). Потенциално може да трябва още един елемент към множеството. Нека разгледаме няколко примерни константи:

- $T(n) = O(n^2) \mapsto \max \left\{ \frac{T(1)}{1^2}, \frac{T(2)}{2^2}, \frac{T(3)}{3^2}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{(n_{st}-1)^2}, ? \right\}$
- $T(n) = \Omega(\log(n)) \mapsto \min \left\{ \frac{T(2)}{\log(2)}, \frac{T(3)}{\log(3)}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{\log(n_{st}-1)}, ? \right\}$
- $T(n) = O(2^n) \mapsto \max \left\{ \frac{T(0)}{2^0}, \frac{T(1)}{2^1}, \frac{T(2)}{2^2}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{2^{(n_{st}-1)}}, ? \right\}$
- $T(n) = \Omega(n^3 - 4n^2 + 3n) \mapsto \min \left\{ \frac{T(4)}{4^3 - 4 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4}, \frac{T(5)}{5^3 - 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{(n_{st}-1)^3 - 4(n_{st}-1)^2 + 3(n_{st}-1)}, ? \right\}$

Важно е да обърнем внимание, че при образуването на базата има разлика между $\Omega(n^3 - 4n^2 + 3n)$, $\Omega(n^3)$ и $\Omega(5n^3)$. Пример защо това е важно в O -посоката на **Задача 3.13**.

Задача 3.10. Каква е асимптотиката на $T(n) = T(n-1) + \frac{1}{n}$?

Решение. Нека да развием, докато не заподозреем асимптотиката.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + \frac{1}{n} = T(n-2) + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \\ &= T(n-3) + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \dots = \\ &= T(0) + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = T(0) + \theta(\ln(n)) = \theta(\log(n)) \end{aligned}$$

Нека $n_{st} \in \mathbb{N}_0$ е достатъчно голямо.

- $T(n) = O(\log(n))$

По **дефиниция** имаме $O(\log(n)) = \{f \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 (0 \leq f(n) \leq c \cdot \log(n))\}$. Тоест търсим $c > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$ такива, че $\forall n \geq n_0 (T(n) \leq c \cdot \log(n))$.

Нека $b = \max \left\{ \frac{T(2)}{\log(2)}, \frac{T(3)}{\log(3)}, \frac{T(4)}{\log(4)}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{\log(n_{st}-1)}, 1 \right\}$.

Ще докажем с индукция по n , че за $c = b$ и някое n_0 (което ще установим по-надолу) е изпълнено $\forall n \geq n_0 (T(n) \leq c \cdot \log(n))$.

База. Нека $k \in \{2, 3, \dots, n_{st}-1\}$. Ще докажем, че $T(k) \leq b \cdot \log(k)$.

От дефиницията на $b = \max \left\{ \frac{T(2)}{\log(2)}, \frac{T(3)}{\log(3)}, \frac{T(4)}{\log(4)}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{\log(n_{st}-1)}, 1 \right\}$ знаем, че $b \geq \frac{T(k)}{\log(k)}$ откъдето $b \cdot \log(k) \geq T(k)$ или още $T(k) \leq b \cdot \log(k)$.

Индуктивна хипотеза. Нека допуснем, че е изпълнено $\forall m < n (T(m) \leq b \cdot \log(m))$.

Индуктивна стъпка. Ще докажем, че е изпълнено за n , тоест че $T(n) \leq b \cdot \log(n)$.

$$\begin{aligned} T(n) &\stackrel{\text{def}}{=} T(n-1) + \frac{1}{n} \overset{\text{ИХ}}{\leq} b \cdot \log(n-1) + \frac{1}{n} \overset{?}{\leq} b \cdot \log(n) \\ &\quad b \cdot \log(n-1) + \frac{1}{n} \overset{?}{\leq} b \cdot \log(n) \end{aligned}$$

Тъй като $n \geq n_0 \in \mathbb{N}_0$, то може да умножим по n без да се обърне знака на неравенството.

$$\begin{aligned} b \cdot n \cdot \log(n-1) + 1 &\overset{?}{\leq} b \cdot n \cdot \log(n) \\ 1 &\overset{?}{\leq} b \cdot n \cdot \log(n) - b \cdot n \cdot \log(n-1) \\ 1 &\overset{?}{\leq} b \cdot n \cdot \log\left(\frac{n}{n-1}\right) \end{aligned}$$

Антилогаритмуваме двете страни (със основа 2)

$$2 \overset{?}{\leq} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{b \cdot n}$$

От дефиницията на $b = \max\{\dots, 1\} \Rightarrow b \geq 1$. Ясно е, че $\forall n \geq 1 \left(\frac{n}{n-1} \geq 1\right)$. Тоест имаме:

$$\begin{aligned} 2 &\overset{?}{\leq} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{b \cdot n} \\ 2 &\overset{?}{\leq} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \end{aligned}$$

От анализа знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = e$ и че функцията $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$ е строго растяща. Тогава директно проверяваме, че $n_0 = 2$ ни върши работа

$$\forall n \geq n_0 \left(2 \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{b \cdot n} \right)$$

или още

$$\forall n \geq n_0 \left(2 \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{b \cdot n} \right)$$

Тъй като логаритмуването е монотонно растяща функция, то можем да запазим неравенството след логаритмуване на двете страни

$$\forall n \geq n_0 \left(1 \leq b \cdot n \cdot \log\left(\frac{n}{n-1}\right) \right)$$

което трябваше да докажем.

- $T(n) = \Omega(\log(n))$

По [дефиниция](#) имаме $\Omega(\log(n)) = \{f \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 (0 \leq c \cdot \log(n)) \leq f(n)\}$. Тоест търсим $c > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$ такива, че $\forall n \geq n_0 (c \cdot \log(n) \leq T(n))$.

Нека $b = \min\left\{\frac{T(2)}{\log(2)}, \frac{T(3)}{\log(3)}, \frac{T(4)}{\log(4)}, \dots, \frac{T(n_{\text{st}}-1)}{\log(n_{\text{st}}-1)}, \frac{1}{2}\right\}$.

Ще докажем с индукция по n , че за $c = b$ и някое n_0 (което ще установим по-надолу) е изпълнено $\forall n \geq n_0 (c \cdot \log(n) \leq T(n))$.

База. Нека $k \in \{2, 3, \dots, n_{st} - 1\}$. Ще докажем, че $b.log(k) \leq T(k)$.

От дефиницията на $b = \min\left\{\frac{T(2)}{\log(2)}, \frac{T(3)}{\log(3)}, \frac{T(4)}{\log(4)}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{\log(n_{st}-1)}, \frac{1}{2}\right\}$ знаем, че $b \leq \frac{T(k)}{\log(k)}$ откъдето $b.log(k) \leq T(k)$.

Индуктивна хипотеза. Нека допуснем, че е изпълнено $\forall m < n (b.log(m) \leq T(m))$.

Индуктивна стъпка. Ще докажем, че е изпълнено за n , тоест че $b.log(n) \leq T(n)$.

$$T(n) \stackrel{\text{def}}{=} T(n-1) + \frac{1}{n} \stackrel{\text{ИХ}}{\geq} b.log(n-1) + \frac{1}{n} \stackrel{?}{\geq} b.log(n)$$

Аналогично на O -посоката стигаме до

$$2 \stackrel{?}{\geq} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{b.n}$$

От дефиницията на $b = \min\{\dots, \frac{1}{2}\} \Rightarrow b \leq \frac{1}{2}$. Ясно е, че $\forall n \geq 1 \left(\frac{n}{n-1} \geq 1\right)$. Тоест имаме:

$$2 \stackrel{?}{\geq} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n/2} \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{b.n}$$

Вдигаме на квадрат двете страни

$$4 \stackrel{?}{\geq} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right) \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

От анализа имаме

$$\begin{aligned} 4 \stackrel{?}{\geq} \left(\frac{n}{n-1}\right)e &\geq \left(\frac{n}{n-1}\right) \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \\ 4(n-1) &\stackrel{?}{\geq} ne \\ n(4-e) &\stackrel{?}{\geq} 4 \end{aligned}$$

Директно проверяваме, че $n_0 = 4$ ни върши работа

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0 (n(4-e) &\geq 4) \\ \forall n \geq n_0 \left(4 \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)e \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Тъй като коренуването е монотонно растяща функция, то можем да запазим неравенството след коренуване на двете страни

$$\forall n \geq n_0 \left(2 \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n/2} \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{b.n}\right)$$

Тъй като логаритмуването е монотонно растяща функция, то можем да запазим неравенството след логаритмуване на двете страни

$$\forall n \geq n_0 \left(1 \geq b.n.log\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$$

което трябваше да докажем.

Задача 3.11. Каква е асимптотиката на $T(n) = 2T(n-1) + \frac{1}{n}$?

Решение. Нека да развием, докато не заподозреем асимптотиката.

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 2T(n-1) + \frac{1}{n} = 4T(n-2) + \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n} = \\
 &= 8T(n-3) + \frac{4}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n} = \dots = \\
 &= 2^n T(0) + \frac{2^{n-1}}{1} + \frac{2^{n-2}}{2} + \dots + \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n} = \\
 &= 2^n \theta(1) + \underbrace{2^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i2^i}}_{O(2^n)} = \theta(2^n)
 \end{aligned}$$

Докажете го формално чрез индукция.

Задача 3.12. Каква е асимптотиката на $T(n) = \frac{n}{n+1}T(n-1) + 1$?

Решение. Нека да развием, докато не заподозреем асимптотиката.

$$\begin{aligned}
 T(n) &= \frac{n}{n+1}T(n-1) + 1 = \frac{n-1}{n+1}T(n-2) + \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+1} = \\
 &= \frac{n-2}{n+1}T(n-3) + \frac{n-1}{n+1} + \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+1} = \dots = \\
 &= \frac{1}{n+1}T(0) + \frac{2}{n+1} + \frac{3}{n+1} + \dots + \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+1} = \\
 &= \theta(n^{-1}) + \frac{1}{n+1} \underbrace{(2+3+\dots+(n+1))}_{\theta(n^2)} = \theta(n)
 \end{aligned}$$

Докажете го формално чрез индукция.

3.2.2.1 Засилване на индуктивната хипотеза

В някои ситуации доказването на индуктивната стъпка би било невъзможно без така нареченото *засилване на индуктивната хипотеза*. Какво представлява то се разбира най-добре с пример.

Задача 3.13. Каква е асимптотиката на $T(n) = 2T(n-1) + T(\log(n)) + n$?

Решение. Заподозряваме, че асимптотиката е $T(n) = \theta(2^n)$.

Нека $n_{st} \in \mathbb{N}_0$ е достатъчно голямо.

- $T(n) = O(2^n)$

По **дефиниция** имаме $O(2^n) = \{f \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 (0 \leq f(n) \leq c2^n)\}$. Тоест търсим константи $c > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$ такива, че $\forall n \geq n_0 (T(n) \leq c2^n)$.

Нека $b = \max \left\{ \frac{T(0)}{2^0}, \frac{T(1)}{2^1}, \frac{T(2)}{2^2}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{2^{n_{st}-1}} \right\}$.

Ще докажем с индукция по n , че за $c = b$ и някое n_0 (което ще установим по-надолу) е изпълнено $\forall n \geq n_0 (T(n) \leq c2^n)$.

База. Нека $k \in \{0, 1, \dots, n_{st} - 1\}$. Ще докажем, че $T(k) \leq b2^k$.

От дефиницията на $b = \max \left\{ \frac{T(0)}{2^0}, \frac{T(1)}{2^1}, \frac{T(2)}{2^2}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{2^{n_{st}-1}} \right\}$ знаем, че $b \geq \frac{T(k)}{2^k}$ откъдето $b2^k \geq T(k)$ или още $T(k) \leq b2^k$.

Индуктивна хипотеза. Нека допуснем, че е изпълнено $\forall m < n (T(m) \leq b2^m)$.

Индуктивна стъпка. Ще докажем, че е изпълнено за n , тоест че $T(n) \leq b2^n$.

$$\begin{aligned} T(n) &\stackrel{\text{def}}{=} 2T(n-1) + T(\log(n)) + n \stackrel{\text{ИХ}}{\leq} 2b2^{n-1} + b2^{\log(n)} + n = b2^n + bn + n \stackrel{?}{\leq} b2^n \\ &\quad b2^n + bn + n \stackrel{?}{\leq} b2^n \\ &\quad bn + n \stackrel{?}{\leq} 0 \end{aligned}$$

Очевидно не е изпълнено за кое да е $b > 0$ и $n > 0$. Не стана.. ще трябва да засилим индуктивната хипотеза.

- $T(n) = O(2^n - \alpha^n)$, $\alpha \in (1, 2)$

По **дефиниция** имаме $O(2^n - \alpha^n) = \{f \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 (0 \leq f(n) \leq c(2^n - \alpha^n))\}$. Тоест търсим константи $c > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$ такива, че $\forall n \geq n_0 (T(n) \leq c(2^n - \alpha^n))$.

Нека $b = \max \left\{ \frac{T(1)}{2^1 - \alpha^1}, \frac{T(2)}{2^2 - \alpha^2}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{2^{n_{st}-1} - \alpha^{n_{st}-1}}, 1 \right\}$. (при нула знаменателя е $2^0 - \alpha^0 = 0$)

Ще докажем с индукция по n , че за $c = b$ и някое n_0 (което ще установим по-надолу) е изпълнено $\forall n \geq n_0 (T(n) \leq c(2^n - \alpha^n))$.

База. Нека $k \in \{1, 2, \dots, n_{st} - 1\}$. Ще докажем, че $T(k) \leq b(2^k - \alpha^k)$.

От дефиницията на $b = \max \left\{ \frac{T(1)}{2^1 - \alpha^1}, \frac{T(2)}{2^2 - \alpha^2}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{2^{n_{st}-1} - \alpha^{n_{st}-1}}, 1 \right\}$ знаем, че $b \geq \frac{T(k)}{2^k - \alpha^k}$ откъдето $b(2^k - \alpha^k) \geq T(k)$ или още $T(k) \leq b(2^k - \alpha^k)$.

Индуктивна хипотеза. Нека допуснем, че е изпълнено $\forall m < n (T(m) \leq b(2^m - \alpha^m))$.

Индуктивна стъпка. Ще докажем, че е изпълнено за n , тоест че $T(n) \leq b(2^n - \alpha^n)$.

$$\begin{aligned} T(n) &\stackrel{\text{def}}{=} 2T(n-1) + T(\log(n)) + n \stackrel{\text{ИХ}}{\leq} 2b(2^{n-1} - \alpha^{n-1}) + b(2^{\log(n)} - \alpha^{\log(n)}) + n \stackrel{?}{\leq} b(2^n - \alpha^n) \\ &\quad 2b(2^{n-1} - \alpha^{n-1}) + b(2^{\log(n)} - \alpha^{\log(n)}) + n \stackrel{?}{\leq} b(2^n - \alpha^n) \\ &\quad b2^n - 2b\alpha^{n-1} + bn - bn^{\log(\alpha)} + n \stackrel{?}{\leq} b2^n - b\alpha^n \\ &\quad b(\alpha - 2)\alpha^{n-1} + bn - bn^{\log(\alpha)} + n \stackrel{?}{\leq} 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Тъй като $\alpha \in (1, 2)$, то $\log(\alpha) = \log_2(\alpha) \in (0, 1)$. Тогава имаме

$$\underbrace{b(\alpha - 2)\alpha^{n-1}}_{<0} + \underbrace{bn - bn^{\log(\alpha)}}_{\theta(n)} + n \stackrel{?}{\leq} 0$$

Ясно е, че асимптотиката се определя от α^{n-1} и че за кое да е $b > 0$ има подходящо n_0 . Ако искаме да посочим конкретно n_0 трябва да фиксираме α . Ще го направим за пълнота. Нека $\alpha = \sqrt{2} \in (1, 2)$ и заместим в неравенство (3.3)

$$b(\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2})^{n-1} + bn - b\sqrt{n} + n \stackrel{?}{\leq} 0$$

От дефиницията на $b = \max\{\dots, 1\} \Rightarrow b \geq 1$

$$b(\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2})^{n-1} + bn - b\sqrt{n} + n \leq b(\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2})^{n-1} + bn - b\sqrt{n} + bn \stackrel{?}{\leq} 0$$

Сега от това, че $b > 0$ можем да разделим двете страни на b

$$(\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2})^{n-1} + n - \sqrt{n} + n \stackrel{?}{\leq} 0$$

Ясно е, че $\forall n > 1$ ($n \geq \sqrt{n}$)

$$(\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2})^{n-1} + n - \sqrt{n} + n \leq (\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2})^{n-1} + n \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$(\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2})^{n-1} + n \stackrel{?}{\leq} 0$$

Вече е достатъчно просто да забележим, че $n_0 = 9$ ни върши работа

$$\forall n \geq n_0 \left((\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2})^{n-1} + n \leq 0 \right)$$

$$\forall n \geq n_0 \left(b(\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2})^{n-1} + bn - b\sqrt{n} + n \leq 0 \right)$$

което трябваше да докажем.

Тоест доказахме, че $T(n) = O(2^n - (\sqrt{2})^n)$, т.е. $T(n) = O(2^n)$.

- $T(n) = \Omega(2^n)$

По **дефиниция** имаме $\Omega(2^n) = \{f \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 (0 \leq c2^n \leq f(n))\}$. Тоест търсим константи $c > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$ такива, че $\forall n \geq n_0 (c2^n \leq T(n))$.

Нека $b = \max\left\{\frac{T(0)}{2^0}, \frac{T(1)}{2^1}, \frac{T(2)}{2^2}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{2^{n_{st}-1}}\right\}$.

Ще докажем с индукция по n , че за $c = b$ и някое n_0 (което ще установим по-надолу) е изпълнено $\forall n \geq n_0 (c2^n \leq T(n))$.

База. Нека $k \in \{0, 1, \dots, n_{st} - 1\}$. Ще докажем, че $b2^k \leq T(k)$.

От дефиницията на $b = \min\left\{\frac{T(0)}{2^0}, \frac{T(1)}{2^1}, \frac{T(2)}{2^2}, \dots, \frac{T(n_{st}-1)}{2^{n_{st}-1}}\right\}$ знаем, че $b \leq \frac{T(k)}{2^k}$ откъдето $b2^k \leq T(k)$.

Индуктивна хипотеза. Нека допуснем, че е изпълнено $\forall m < n (b2^m \leq T(m))$.

Индуктивна стъпка. Ще докажем, че е изпълнено за n , тоест че $T(n) \leq b2^n$.

$$\begin{aligned} T(n) &\stackrel{\text{def}}{=} 2T(n-1) + T(\log(n)) + n \stackrel{\text{ИХ}}{\geq} 2b2^{n-1} + b2^{\log(n)} + n = b2^n + bn + n \stackrel{?}{\geq} b2^n \\ &\quad b2^n + bn + n \stackrel{?}{\geq} b2^n \\ &\quad bn + n \stackrel{?}{\geq} 0 \end{aligned}$$

Очевидно е изпълнено за кое да е $b > 0$ и $n \geq 0$. Оттук си избираме $n_0 = 0$.

Забележка. Обърнете внимание, че този път не добавихме бонус стойност в множеството като образувахме $b..$ не е нужно винаги!

3.2.3 Полагане

Този метод използваме в комбинация с други методи. Първо полагаме и свеждаме задачата до по-лесна, след което прилагаме друг метод за да намерим асимптотиката.

Задача 3.14. Каква е асимптотиката на $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$?

Решение. Полагаме $n = 2^{2^m}$, т.е. $m = \log(\log(n))$. Нека $S(m) = T(2^{2^m}) = T(n)$. Тогава

$$S(m) = T(2^{2^m}) = 2T(2^{\frac{2^m}{2}}) + 1 = 2T(2^{2^{m-1}}) + 1 = 2S(m-1) + 1$$

$$S(m) = 2S(m-1) + 1$$

Сега използвайки някой от предните методи (а може и някой от бъдещите) доказваме, че $S(m) = \theta(2^m)$. Тоест $T(n) = S(m) = \theta(2^m) = \theta(2^{\log(\log(n))}) = \theta(\log(n))$.

Задача 3.15. Каква е асимптотиката на $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$?

Решение. Полагаме $n = 2^{2^m}$, т.е. $m = \log(\log(n))$. Нека $S(m) = T(2^{2^m}) = T(n)$. Тогава

$$S(m) = T(2^{2^m}) = T(2^{\frac{2^m}{2}}) + 1 = T(2^{2^{m-1}}) + 1 = S(m-1) + 1$$

$$S(m) = S(m-1) + 1$$

Сега използвайки някой от предните методи (а може и някой от бъдещите) доказваме, че $S(m) = \theta(m)$. Тоест $T(n) = S(m) = \theta(m) = \theta(\log(\log(n)))$.

Допълнение 3.1: Рекурсивно извикване с корен от аргумента

Нека разгледаме $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$. То извършва константна работа при всяко извикване и извиква $T(\sqrt{n})$. Тоест се интересуваме колко на брой коренувания ще направим преди n да стане 1. Нека вземем едно произволно число - да кажем

30000. Нека сега разгледаме какво се случва когато го коренуваме многократно: $30000 \mapsto 173 \mapsto 13 \mapsto 3 \mapsto 1$. Нека сега запишем числата в двоична бройна система: $111010100110000_{(2)} \mapsto 10101100_{(2)} \mapsto 1101_{(2)} \mapsto 11_{(2)} \mapsto 1_{(2)}$ и да разгледаме тяхната дължина: $15 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$. Може да забележим, че коренуването на дадено число де факто намалява двойно (закръглено нагоре) дължината му в двоична бройна система. Тоест правим $\log(\text{дължината на } n \text{ в двоична бройна система}) = \log(\log(n))$ брой стъпки.

3.2.4 Мастър теорема

Макар и силна, не трябва да се подлъгваме по гръмкото име на тази теорема - тя **не** може да намира асимптотиката на какви да е рекурентни уравнения! Въпреки това е много силно пособие, което ще използваме в текущия курс.

Теорема 3.2: Мастър теорема

Нека $a \geq 1, b > 1, f(n)$ - положителна и положим $k = \log_b(a)$. Тогава за рекурентното уравнение $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ имаме:

$$T(n) = \begin{cases} \theta(n^k) & , \exists \varepsilon > 0 (f(n) = O(n^{k-\varepsilon})) \\ \theta(n^k \log(n)) & , f(n) = \theta(n^k) \\ \theta(f(n)) & , \exists \varepsilon > 0 (f(n) = \Omega(n^{k-\varepsilon})) \wedge \underbrace{\exists c \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 (af(\frac{n}{b}) \leq cf(n))}_{\text{условие за регулярност}} \\ \text{не знаем} & , \text{иначе} \end{cases}$$

Задача 3.16. Каква е асимптотиката на $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$?

Решение. Ще използваме [мастър теоремата](#) (случай 1):

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ f(n) = n \\ k = \log_b(a) = \log_2(4) = 2 \end{cases}$$

Нека $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Тогава имаме $f(n) = n = O(n^{2-0,1}) = O(n^{1,9}) \xrightarrow{MT1} T(n) = \theta(n^2)$.

Задача 3.17. Каква е асимптотиката на $T(n) = 4T(\frac{n}{\sqrt{2}}) + n^3$?

Решение. Ще използваме [мастър теоремата](#) (случай 1):

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = \sqrt{2} \\ f(n) = n^3 \\ k = \log_b(a) = \log_{\sqrt{2}}(4) = 4 \end{cases}$$

Нека $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Тогава имаме $f(n) = n^3 = O(n^{4-0,1}) = O(n^{3,9}) \xrightarrow{MT1} T(n) = \theta(n^4)$.

Задача 3.18. Каква е асимптотиката на $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$?

Решение. Ще използваме [мастър теоремата](#) (случай 2):

$$\left| \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ f(n) = 1 \\ k = \log_b(a) = \log_2(1) = 0 \end{array} \right.$$

Имаме $f(n) = 1 = \theta(1) = \theta(n^0) = \theta(n^k) \xrightarrow{MT2} T(n) = \theta(n^k \log(n)) = \theta(\log(n))$.

Задача 3.19. Каква е асимптотиката на $T(n) = 2T(\frac{n}{8}) + n$?

Решение. Ще използваме [мастър теоремата](#) (случай 3):

$$\left| \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 8 \\ f(n) = n \\ k = \log_b(a) = \log_8(2) = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Нека $\varepsilon = \frac{1}{6}$. Тогава имаме $f(n) = n = \Omega(n^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}) = \Omega(\sqrt{n})$. Остана да проверим условието за регулярност: $\exists c \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 (af(\frac{n}{b}) \leq cf(n))$. Тоест търсим $c \in (0, 1)$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$:

$$\forall n \geq n_0 \left(2f\left(\frac{n}{8}\right) \leq cf(n) \right)$$

$$\forall n \geq n_0 \left(2\frac{n}{8} \leq cn \right)$$

Ясно е, че $c = \frac{1}{4}$ и $n_0 = 0$ ни вършат работа. Тоест от МТ 3 имаме, че $T(n) = \theta(f(n)) = \theta(n)$.

Задача 3.20. Каква е асимптотиката на $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2\sqrt{n}$?

Решение. Ще използваме [мастър теоремата](#) (случай 3):

$$\left| \begin{array}{l} a = 4 \\ b = 2 \\ f(n) = n^{\frac{5}{2}} \\ k = \log_b(a) = \log_2(4) = 2 \end{array} \right.$$

Нека $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Тогава имаме $f(n) = n^{2.5} = \Omega(n^{2+0.1}) = \Omega(n^{2.1})$. Остана да проверим условието за регулярност: $\exists c \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 (af(\frac{n}{b}) \leq cf(n))$. Тоест търсим $c \in (0, 1)$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$:

$$\forall n \geq n_0 \left(4f\left(\frac{n}{2}\right) \leq cf(n) \right)$$

$$\forall n \geq n_0 \left(4\frac{n^2\sqrt{n}}{4\sqrt{2}} \leq cn^2\sqrt{n} \right)$$

Ясно е, че $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $n_0 = 0$ ни вършат работа. Тоест от МТ 3 имаме, че $T(n) = \theta(n^2\sqrt{n})$.

3.2.4.1 Разширение на Мастър теоремата

Макар и да обхваща по-голям набор от функции, тази теорема все още е твърде ограничена. Въпреки това може да улесни решаването на някои задачи многократно.

Теорема 3.3: Мастър теорема (разширена)

Нека $a \geq 1, b > 1, f(n)$ - положителна и положим $k = \log_b(a)$. Тогава за рекурентното уравнение $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ имаме:

$$T(n) = \begin{cases} \theta(n^k) & , \exists \varepsilon > 0 (f(n) = O(n^{k-\varepsilon})) \\ \theta(n^k) & , f(n) = \theta(n^k \log^\alpha(n)) \wedge \alpha < -1 \\ \theta(n^k \log^{(2)}(n)) & , f(n) = \theta(n^k \log^\alpha(n)) \wedge \alpha = -1 \\ \theta(n^k \log^{\alpha+1}(n)) & , f(n) = \theta(n^k \log^\alpha(n)) \wedge \alpha > -1 \\ \theta(f(n)) & , \exists \varepsilon > 0 (f(n) = \Omega(n^{k-\varepsilon})) \wedge \underbrace{\exists c \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 (af(\frac{n}{b}) \leq cf(n))}_{\text{условие за регулярност}} \\ \text{не знаем} & , \text{иначе} \end{cases}$$

където $\alpha \in \mathbb{R}$.

Задача 3.21. Каква е асимптотиката на $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \frac{1}{\log(n)}$?

Решение. Ще използваме [разширената мастър теорема](#) (случай 3):

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ f(n) = \log^{-1}(n) \\ k = \log_b(a) = \log_2(1) = 0 \end{cases}$$

Имаме $f(n) = \log^{-1}(n) = \theta(n^0 \log^{-1}(n)) \xrightarrow{EMT^3} T(n) = \theta(\log(\log(n)))$.

Задача 3.22. Каква е асимптотиката на $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + 2\sqrt{n} \log^3(n)$?

Решение. Ще използваме [разширената мастър теорема](#) (случай 4):

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ f(n) = 2\sqrt{n} \log^3(n) \\ k = \log_b(a) = \log_4(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Имаме $f(n) = 2\sqrt{n} \log^3(n) = \theta(\sqrt{n} \log^3(n)) \xrightarrow{EMT^4} T(n) = \theta(\sqrt{n} \log^4(n))$.

3.2.5 Задачи