Trabajo Práctico N°6: NÚMEROS COMPLEJOS

1. Resolver:
   a) $\frac{(2-2i).(3+5i)}{2+2i}$
   b) $\frac{2+i^{25}}{3+i^{19}}$
   c) $\frac{(1+3i)(1+2i)}{1-2i} + (1+2i)^2$
   d) $3.(2-i^{24}) - (\frac{-4+i}{3-2i})$

2. Encontrar el valor de a y b, para que se verifiquen las siguientes igualdades:
   a) $(2+ai)+(b+5i) = -1+9i$
   b) $a-5i = \frac{16+bi}{3+2i}$

3. Dados $z_1 = 2-3i$, $z_2 = -1+i$, $z_3 = 3$, $z_4 = \sqrt{2}i$
   a) Graficarlos.
   b) ¿Cuál es imaginario puro? ¿Cuál es real? Justificar.
   c) Hallar el conjugado de z_1, z_2, z_3 y z_4
   d) Encontrar: $z_1 + z_2$, $\frac{z_2}{-i}$ y $(z_1 - 3z_2).z_3 : z_4$

4. Hallar los $z \in \mathbb{C}$ que verifiquen las siguientes ecuaciones:
   a) $(2+3i)z - (1+2i) = 2+3i$
   b) $\overline{z}(4-i) + 8 = \overline{z}(3+2i) + 3i$
   c) $(z-1+4i)\cdot(z-2i) = 0$
   d) $z^2\left(\overline{4+i}\right) - 3z = 0$

5. Expresar a los siguientes complejos en forma polar o trigonométrica:
   a) $z = 3+3\sqrt{3}i$
   b) $w = -3+3i$
   c) $v = -1-\sqrt{3}i$
   d) $u = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
   e) $s = -6i$
   f) $t = -9$
   g) $r = 7i$
   h) $l = 5$

6. Dados los siguientes complejos:

$$z_1 = \sqrt{3}\left(cos\frac{5}{3}\pi + isen\frac{5}{3}\pi\right) \qquad z_2 = 6cis(\frac{2}{3}\pi) \qquad z_3 = 2cis\ (270°)$$

   a) Resolver en forma polar: $z_1 \cdot z_2$, $z_1 \cdot z_3$, $\frac{z_3}{z_2}$, $\frac{z_1}{z_2}$
   b) Expresar los resultados hallados en el inciso a) en forma binómica.

7. Calcular y dejar expresado el resultado en forma binómica.
   a) $(1-i)^{47}$
   b) $\left(-\sqrt{3}-i\right)^{100}$
   c) $\frac{\left(-\sqrt{3}-i\right)^{100}}{(-2i)^{30}}$
   d) $(1-i)^{47}.\left(\sqrt{2}cis(60°)\right)^{45}$

8. Resolver los siguientes problemas.
   a) La suma de dos números complejos es $5+i$. La parte real de uno de ellos es 4 y el cociente entre este complejo y el otro es un número real. Hallar ambos números complejos.
   b) Hallar un número complejo z que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:
      - La suma de z y de su conjugado es 10, y
      - La suma de los módulos de z y de su conjugado es 26.
   c) El producto de dos complejos es -8 y dividiendo el cubo de uno de ellos por el otro se obtiene como resultado el número 2. Hallar dos números complejos que verifiquen lo pedido indicando módulo y argumento de cada uno de ellos. Escribir los números complejos encontrados en forma binómica.

9. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderos o falsas, justificar:
   a) Si un complejo z es un real entonces su argumento es nulo.
   b) Si un complejo tiene como argumento a $\frac{3}{2}\pi$ es imaginario puro.
   c) Si un complejo z tiene módulo 5 está en el primer cuadrante.
   d) Si dos complejos tienen argumentos complementarios el producto de ambos es imaginario puro.

10. Dados los conjuntos $A=\{z\in\mathbb{C}:(x-2+3i)(x-2i)=0\}$ y $B=\left\{z\in\mathbb{C}:\frac{1}{x-2+3i}=\frac{1}{x-2i}\right\}$,
    Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar cada respuesta.
    a) A es un conjunto unitario
    b) $3-11i\in B$
    c) $A\cap B=\emptyset$
    d) $\exists a\in\mathbb{R}/(a-i)^2\in A$

11. Sean $z=2cis\left(\frac{5}{3}\pi\right)$, $w=4cis(\alpha)$ y $u=\rho\, cis\left(\frac{5}{6}\pi\right)$, donde $0\leq\alpha<2\pi$ y $\rho>0$. Analizar, justificando las respuestas, la veracidad de las siguientes afirmaciones:
    a) La forma binómica de z es $\sqrt{3}-i$
    b) Existen $\alpha,\ \rho$ tales que $\frac{u}{z}w=3$
    c) No hay valores de α para que $\frac{z}{w}$ sea real negativo.
    d) $z^{27}.i^{222}$ es imaginario puro

EJERCICIOS ADICIONALES

1. Encontrar los valores de a y b, para que los cuáles se verifique la siguiente ecuación:

$$a - i = \frac{2 + bi}{1 + 2i}$$

2. Resolver:

a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}$

b) $(3 + i)(-2 - 3i)$

c) $(-1 + 2i)^3$

d) $3 + i^5 - i^{14} + 6i^{43} - 2 + i^{12} - 1$

3. Dados los números complejos $z_1 = 2cis\ (60°)$, $z_2 = -2i$, $z_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ resolver:

a) $\frac{(z_3)^6}{(z_2)^7}$ b) $(z_1)^4 . z_3$

4. Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderos o falsas, justificar las respuestas:

a) Sean los conjuntos $C = \left\{x \in \mathbb{C}: \frac{x+2+15i}{x-i} = -4 + 4i\right\}$ y $D = \{x \in \mathbb{C}: (-1 - 2i). x = 2 - 9i\}$

i) $-4 + 4i \in D$

ii) $C = D$

b) Sean $z = 2cis\left(\frac{5}{3}\pi\right)$, $w = 4cis(\alpha)$ y $u = \rho\ cis\left(\frac{5}{6}\pi\right)$, y $A = \{n \in \mathbb{N}\ (z)^n\ es\ real\ positivo\}$, donde $0 \leq \alpha < 2\pi$ y $\rho > 0$

i) Existe w que no está en el segundo cuadrante para que $z. w$ sea real

ii) $A \neq \emptyset$

iii) No existe ρ tal que $\frac{z}{u} = u$