Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Matematika – 2. stopnja

Domen Močnik

HAMILTONOV PRINCIP V MEHANIKI KONTINUUMA ZA MATERIALE S SINGULARNIMI PLOSKVAMI

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Igor Dobovšek

Ljubljana, 2015

Podpisani Domen Močnik izjavljam:

- da sem magistrsko delo z naslovom *Hamiltonov princip v mehaniki kontinuuma za materiale s singularnimi ploskvami* izdelal samostojno pod mentorstvom prof. dr. Igorja Dobovška in
- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, XX.XX.2015 Podpis: ....

Zahvala

zahvala goes here

Ljubljana, mesec 2015 Domen Močnik

Kazalo

Program dela

programdelag goes here

prof. dr. Igor Dobovšek

Hamiltonov princip v mehaniki kontinuuma za materiale s singularnimi ploskvami

Povzetek

tekst povzetka v slovenscini

Hamilton's principle in continuum mechanics for materials with singular surfaces

Abstract

tekst povzetka v anglescini

Math. Subj. Class. (2010): 51M10
Ključne besede: mehanika kontinuuma, ...
Keywords: continuum mechanics

Poglavje 1

Matematični opis materialnega telesa

1.1 Evklidski prostor

V klasični mehaniki opisujemo dogodke v *Newtonovem prostor-času*, kar je produkt trirazsežnega Evklidskega prostora ter prostora realnih števil $\mathbb{R}$. Evklidski prostor nam služi za opis položaja in geometrije objektov, prostor $\mathbb{R}$ pa predstavlja časovno os.

Definicija 1.1. Množica točk $\mathcal{E}$ je *Evklidski točkovni prostor* in trirazsežni Evklidski vektorski prostor V je *translacijski prostor* za $\mathcal{E}$, če poljubnemu paru točk $p, q \in \mathcal{E}$ pripada vektor iz V, ki ga zapišemo kot $q - p$, tako da velja:

1. Za vsak $p \in \mathcal{E}$ je $p - p = \mathbf{0}$, ničelni vektor.
2. Za vsak $p \in \mathcal{E}$ in vsak $\boldsymbol{v} \in V$ obstaja natanko ena točka $q \in \mathcal{E}$, da je $\boldsymbol{v} = q - p$. Pišemo: $q = p + \boldsymbol{v}$.
3. Za vse $p, q, r \in \mathcal{E}$ velja $(q - p) + (r - q) = (r - p)$.

Razdalja med točkama $p, q \in \mathcal{E}$ je definirana kot $d(p, q) = \|q - p\|$, kjer $\|.\|$ označuje normo na vektorskem prostoru V, porojeno iz standardnega skalarnega produkta. $(\mathcal{E}, d)$ je metrični prostor.

V prostoru $\mathcal{E}$ si izberimo točko, jo označimo z o in jo imenujmo *izhodišče*. V skladu z aksiomi iz definicije pripada vsaki točki $p \in \mathcal{E}$ glede na izhodišče o *krajevni vektor* $\boldsymbol{r}(p) = p - o \in V$. Naj bo $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ neka ortonormirana baza prostora V, ki je desnosučna, t. j. $(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{e}_3 = 1$. Krajevni vektor $\boldsymbol{r}(p)$ ima enoličen razvoj po bazi $\boldsymbol{r}(p) = y_k \boldsymbol{e}_k$. Bijektivna zvezna preslikava

$$\kappa\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^3, \qquad p \mapsto (y_1, y_2, y_3),$$

ki točki iz $\mathcal{E}$ priredi trojico koeficientov razvoja njenega krajevnega vektorja po bazi $\{\boldsymbol{e}_k\}$, je *kartezijev koordinatni sistem.* Ta je odvisen od izbire izhodišča in ortonormirane baze.

Včasih si želimo prostor $\mathcal{E}$ opremiti s kakšnim drugim koordinatnim sistemom.

Definicija 1.2. Naj bosta $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ in $U \subseteq \mathbb{R}^3$ odprti množici. Bijektivno preslikavo $\psi \colon \mathcal{D} \to U$ z lastnostjo, da sta preslikavi $\psi \circ \kappa$ in njen inverz $\kappa^{-1} \circ \psi^{-1}$ gladki (na svojih domenah), imenujemo *koordinatni sistem* za $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$.

Inverz od ψ bomo označili s $\varphi = \psi^{-1}$. Koordinatni sistem lahko podamo kot koordinatno transformacijo kartezijevih koordinat y_k s funkcijami

$$x_k = \psi_k(y_1, y_2, y_3) \;\Leftrightarrow\; y_k = \varphi_k(x_1, x_2, x_3), \quad k = 1, 2, 3.$$

Imamo torej bijektivno korespondenco med naslednjimi objekti:

- točka $p \in \mathcal{E}$,
- krajevni vektor $\boldsymbol{r}(p) = y_k \boldsymbol{e}_k \in V$,
- koordinate $\psi(p) = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x_k = \psi_k(y_1, y_2, y_3)$.

Zato bomo točke iz prostora $\mathcal{E}$ v bodoče identificirali z njihovimi krajevnimi vektorji ali pa z njihovimi koordinatami.

1.2 Tenzorska polja

V tem razdelku bomo navedli nekaj bistvenih pojmov in rezultatov iz tenzorske analize. Predpostavlja se, da bralec že pozna osnove tenzorske analize. Razdelek služi bolj vpeljavi oznak, ki jih bomo uporabljali v nadaljevanju.

Funkciji $f \colon \mathcal{D} \subseteq \mathcal{E} \to W$, kjer je W neki normirani vektorski prostor, rečemo *tenzorsko polje.* V posebnem primeru, ko je $W = \mathbb{R}$, rečemo funkciji f *skalarno*, v primeru $W = V$ pa *vektorsko polje.* Tenzorsko polje lahko definiramo tudi na domeni

- $\boldsymbol{r}(\mathcal{D}) \subseteq V \quad$ kot $\quad f_{\boldsymbol{r}} \colon \boldsymbol{r}(x) \mapsto f(x) \quad$ oziroma
- $\psi(\mathcal{D}) \subseteq \mathbb{R}^3 \quad$ kot $\quad f_\psi \colon \psi(x) \mapsto f(x)$.

Navadno bomo funkciji $f_{\boldsymbol{r}}$ in f_ψ označili enako, kot f, če bo njihova domena razvidna iz konteksta.

1.2.1 Zapis v naravni bazi

Tenzorje, ki so elementi nekega vektorskega prostora W, lahko predstavimo v komponentni obliki glede na neko bazo prostora W. Posebno pomemben je dualni par baz za prostor V, ki ga v točki

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftharpoons}} x \in \mathcal{E} \rightleftharpoons \boldsymbol{r}(x) = y_i \boldsymbol{e}_i \in V$$

definira koordinatni sistem[1] ψ:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_k(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k}\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_j(x_1, x_2, x_3)\, \boldsymbol{e}_j \\ \boldsymbol{g}^k(x) &= \operatorname{grad}\psi_k(y_1, y_2, y_3) = \frac{\partial}{\partial y_j}\psi_k(y_1, y_2, y_3)\, \boldsymbol{e}_j. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{g}_k$ imenujemo *tangentni*, $\boldsymbol{g}^k$ pa *gradientni vektorji*.

Trditev 1.3. *Množici* $\{\boldsymbol{g}^k(x)\}$ *in* $\{\boldsymbol{g}_j(x)\}$ *tvorita bazo za* V. *Bazi sta si dualni, t. j.* $\boldsymbol{g}^i(x) \cdot \boldsymbol{g}_j(x) = \delta^i{}_j$.

Dokaz trditve je preprost, najde pa se ga lahko npr. v [4, str. 273]. Bazi iz trditve 1.3 imenujemo *naravni bazi* v točki $x \in \mathcal{E}$ glede na koordinatni sistem ψ. Definirajmo še *metrične koeficiente*:

$$g^{ij}(x) = \boldsymbol{g}^i(x) \cdot \boldsymbol{g}^j(x) \quad \text{in} \quad g_{ij}(x) = \boldsymbol{g}_i(x) \cdot \boldsymbol{g}_j(x).$$

Vektorsko polje običajno zapišemo v komponentni obliki glede na naravno bazo kot

$$\boldsymbol{u} = u^j \boldsymbol{g}_j = u_k \boldsymbol{g}^k.$$

Tenzorsko polje z vrednostmi iz prostora $\mathcal{L}(V)$ pa običajno zapišemo v komponentni obliki glede na eno od baz prostora $\mathcal{L}(V)$, ki je izpeljana iz naravnih baz za V, kot

$$S = S_i{}^j\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j = S^i{}_j\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j = S^{ij}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j = S_{ij}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j.$$

1.2.2 Odvajanje

Definicija 1.4. Naj bo $f : \mathcal{D}^{\text{odp}} \subseteq \mathcal{E} \to W$ tenzorsko polje. Funkcija f je *odvedljiva* ali *diferenciabilna* v točki $x \in \mathcal{D}$, če obstaja taka linearna preslikava $\mathrm{D}f(x) : V \to W$, da za vsak $\boldsymbol{h} \in V$ velja

$$f(x + \boldsymbol{h}) = f(x) + \mathrm{D}f(x)[\boldsymbol{h}] + o(\boldsymbol{h}),$$

[1] Za oznake glej stran 2.

kjer je $o(\boldsymbol{h}) \in W$ količina, za katero je

$$\lim_{\|h\|_V \to 0} \frac{\|o(\boldsymbol{h})\|_W}{\|\boldsymbol{h}\|_V} = 0.$$

Če taka $\mathrm{D}f(x)$ obstaja, ji rečemo *krepki* oz. *Fréchetov odvod* funkcije f v točki x. Včasih ga označimo tudi z $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x)$.

Krepki odvod je tudi tenzorsko polje, definirano povsod, kjer obstaja, vrednosti pa ima v prostoru $\mathcal{L}(V, W)$.

Krepke odvode računamo s pomočjo *šibkega* oziroma *smernega* (včasih tudi *Gâteauxovega*) *odvoda*:

$$\delta f(x)[\boldsymbol{h}] = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\Big(f(x + s\boldsymbol{h}) - f(x)\Big) = \frac{d}{ds} f(x + s\boldsymbol{h})\Big|_{s=0}.$$

Znano je, da če obstaja krepki odvod, potem obstaja tudi šibki odvod in sta enaka: $\mathrm{D}f(x)[\boldsymbol{h}] = \delta f(x)[\boldsymbol{h}]$ za vsak $\boldsymbol{h} \in V$. Za tovrstne odvode veljajo enaki izreki, kot veljajo za preslikave med normiranimi prostori, ki jih poznamo iz matematične analize: izrek o posrednem odvajanju, izrek o odvajanju produkta[2], izrek o totalnem odvodu itd.

Materialno telo $\mathscr{B}$ je določeno z izbrano množico točk $B \subseteq \mathcal{E}$. Tej določitvi rečemo *referenčna konfiguracija* materialnega telesa $\mathscr{B}$ in služi zgolj označbi telesa; ni nujno, da se telo dejansko kadarkoli nahaja v tem položaju. *Konfiguracija* materialnega telesa $\mathscr{B}$ je vsaka bijektivna gladka preslikava $\chi : B \to \chi(B) \subseteq \mathcal{E}$, katere inverz $\chi^{-1} : \chi(B) \to B$ je tudi gladga preslikava.

[2]Izrek o odvajanju produkta velja za katerikoli produkt, ki je bilinearna preslikava. Med njimi so npr. skalarni in vektorski produkt vektorjev, produkt tenzorja s skalarjem, tenzorski produkt, delovanje tenzorja na vektorju itd.

Poglavje 2

Matematični opis materialnega telesa

2.1 Materialno telo

V tem razdelku bomo podali abstraktno definicijo materialnega telesa. Ker bomo kasneje potrebovali variacijski račun, moramo materialno telo definirati kot trirazsežno gladko mnogoterost, da bomo na voljo dobili vsa sredstva iz matematične analize. V klasični mehaniki se materialno telo umesti v Evklidski prostor. Ta povezava bo opisana v razdelku 2.2.

Definicija 2.1. *Materialno telo* $\mathcal{B}$ je abstraktna množica točk $\mathscr{P}$, za katero obstaja množica $\mathscr{K}$ bijektivnih preslikav χ

$$\begin{aligned} \chi \colon \mathcal{B} &\to \chi[\mathcal{B}] \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \mathscr{P} &\mapsto \chi(\mathscr{P}) = (x^1, x^2, x^3) \;\Leftrightarrow\; \mathscr{P} = \chi^{-1}(x^1, x^2, x^3), \end{aligned}$$

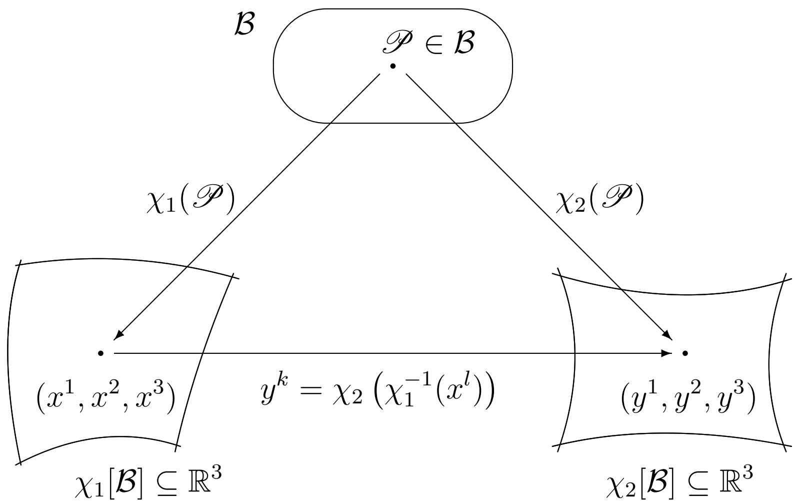
imenovanih *konfiguracije*, tako da je za poljubni konfiguraciji

$$\begin{aligned} \chi_1 \colon \mathcal{B} &\to \chi_1[\mathcal{B}] \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \mathscr{P} &\mapsto \chi_1(\mathscr{P}) = (x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \quad \text{in} \quad \begin{aligned} \chi_2 \colon \mathcal{B} &\to \chi_2[\mathcal{B}] \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \mathscr{P} &\mapsto \chi_2(\mathscr{P}) = (y^1, y^2, y^3) \end{aligned}$$

kompozitum

$$\begin{aligned} \chi_2 \circ \chi_1^{-1} \colon \qquad \chi_1[\mathcal{B}] &\to \chi_2[\mathcal{B}] \\ (x^1, x^2, x^3) &\mapsto (y^1, y^2, y^3) = \chi_2\left(\chi_1^{-1}(x^1, x^2, x^3)\right) \end{aligned}$$

gladka preslikava. Točke $\mathscr{P} \in \mathcal{B}$ imenujemo tudi *delci* ali pa *materialne točke*.



Slika 2.1: Konfiguracije

Vsaka konfiguracija je parametrizacija materialnega telesa: vsaki materialni točki enolično priredi trojico realnih števil – *koordinate*.

Definicija 2.2. *Sklicna konfiguracija* je poljubno izbrana, a fiksna konfiguracija $\mathrm{R} \in \mathscr{K}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\colon \mathcal{B} &\to \mathrm{R}[\mathcal{B}] \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \mathscr{P} &\mapsto \mathrm{R}(\mathscr{P}) = (X^1, X^2, X^3) \;\Leftrightarrow\; \mathscr{P} = \mathrm{R}^{-1}(X^1, X^2, X^3). \end{aligned}$$

Definicija 2.3. *Gibanje* materialnega telesa v časovnem intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ je enoparametrična družina konfiguracij $\{\chi_t\,;\ t \in I\} \subset \mathscr{K}$,

$$\begin{aligned} \chi_t\colon \mathcal{B} &\to \chi_t[\mathcal{B}] \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \mathscr{P} &\mapsto \chi_t(\mathscr{P}) = \left(x^1(t), x^2(t), x^3(t)\right) \;\Leftrightarrow\; \mathscr{P} = {\chi_t}^{-1}(x^1, x^2, x^3), \end{aligned}$$

z lastnostjo, da je za vsak $\mathscr{P} \in \mathcal{B}$ preslikava $t \mapsto \chi_t(\mathscr{P})$ gladka na celotnem intervalu I. Konfiguracijo χ_t iz take družine imenujemo *trenutna konfiguracija* pri času t.

Gibanje običajno predstavimo s preslikavo

$$\begin{aligned} &\chi_{\mathrm{R}}\colon \mathrm{R}[\mathcal{B}] \times I \to \chi_t[\mathcal{B}] \subseteq \mathbb{R}^3 \\ &\chi_{\mathrm{R}}(X^1, X^2, X^3, t) = \chi_t\left(\mathrm{R}^{-1}(X^1, X^2, X^3)\right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

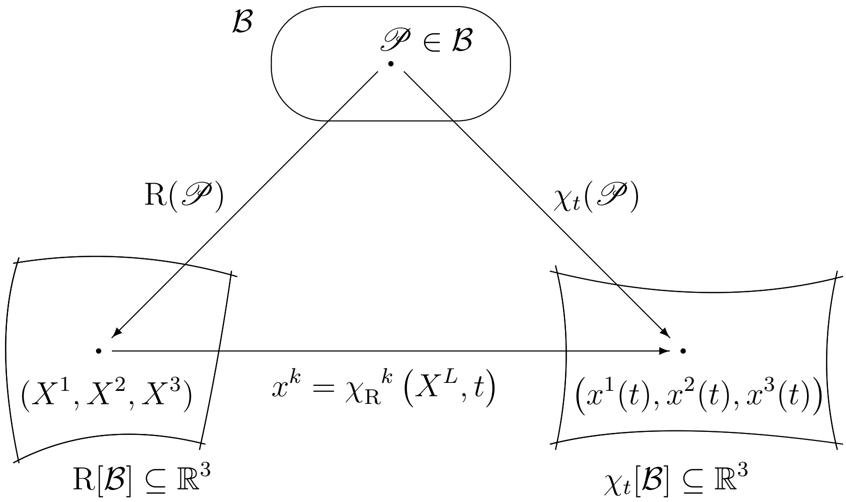
ki se jo da izraziti s tremi realnimi funkcijami štirih spremenljivk

$$x^k = {\chi_{\mathrm{R}}}^k(X^1, X^2, X^3, t) \quad \text{za } k = 1, 2, 3. \tag{2.2}$$

Pri opisu gibanja na tak način se znebimo abstraktnih točk $\mathscr{P}$, na voljo pa dobimo vsa sredstva iz analize.

Definicija 2.4. V predstavitvi (2.2) se številska trojica (X^1, X^2, X^3) imenuje *materialne*, trojica (x^1, x^2, x^3) pa *prostorske koordinate* materialne točke

$$\mathscr{P} = \mathrm{R}^{-1}(X^1, X^2, X^3) = {\chi_t}^{-1}(x^1, x^2, x^3).$$



Slika 2.2: Sklicna in trenutna konfiguracija, materialne in prostorske koordinate.

Opomba 2.5. Preslikava χ_R nima inverza, saj ni bijektivna. Če nanjo gledamo kot na časovno odvisno preslikavo iz $\mathrm{R}[\mathcal{B}]$ v $\chi_t[\mathcal{B}]$, ta potem ima časovno odvisni inverz, zato na smiselen način definiramo

$$\begin{aligned}
&{\chi_\mathrm{R}}^{-1} \colon \chi_t[\mathcal{B}] \times I \to \mathrm{R}[\mathcal{B}] \subseteq \mathbb{R}^3 \\
&{\chi_\mathrm{R}}^{-1}(x^1, x^2, x^3, t) = \mathrm{R}\left({\chi_t}^{-1}(x^1, x^2, x^3)\right).
\end{aligned}$$

Z enačbami (2.2) je podana časovno odvisna koordinatna transformacija, njena Jacobijeva matrika je

$$J = \begin{bmatrix}
\dfrac{\partial x^1}{\partial X^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial X^2} & \dfrac{\partial x^1}{\partial X^3} \\
\dfrac{\partial x^2}{\partial X^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial X^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial X^3} \\
\dfrac{\partial x^3}{\partial X^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial X^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial X^3}
\end{bmatrix}.$$

Ker so konfiguracije gladke bijektivne preslikave, je determinanta matrike J različna od 0.

2.2 Konfiguracije v Evklidskem prostoru

V klasični mehaniki konfiguracijam materialnega telesa pripisujemo enakovredne konfiguracije v Evklidskem prostoru. Na tak način opremimo materialno telo z Evklidsko geometrijo, kar nam omogoča merjenje razdalij, kotov ter ostalih izpeljanih fizikalnih količin, kot je npr. deformacija.

Definicija 2.6. *Evklidski prostor* dimenzije n je množica točk $\mathcal{E}$, za katero obstaja realen n-razsežen vektorski prostor V, imenovan *translacijski prostor*, tako da vsakemu paru točk x, y iz $\mathcal{E}$ enolično pripada vektor iz V, ki ga označimo z $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$, tako da veljajo naslednje lastnosti:

1. $\overrightarrow{\mathrm{XY}} = -\overrightarrow{\mathrm{YX}} \quad \forall\, x, y \in \mathcal{E}$,
2. $\overrightarrow{\mathrm{XY}} + \overrightarrow{\mathrm{YZ}} = \overrightarrow{\mathrm{XZ}} \quad \forall\, x, y, z \in \mathcal{E}$,
3. če je o poljubna, a fiksna točka iz $\mathcal{E}$, potem za vsako točko $x \in \mathcal{E}$ obstaja enolično določen vektor $\boldsymbol{v} \in V$, da je $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{OX}}$.

Točki o iz tretjega aksioma rečemo *izhodišče*, vektorju $\boldsymbol{v}$ pa *krajevni vektor* točke x glede na izhodišče o. Odslej bomo oznako $\mathcal{E}$ uporabljali za trirazsežen Evklidski prostor, V pa za njegov translacijski prostor, ki je dodatno opremljen s standardnim skalarnim produktom, kar nam bo omogočalo računanje geometrijskih količin.

Definicija 2.7. Množico $V_x = \{\overrightarrow{\mathrm{XY}} \mid y \in \mathcal{E}\}$ imenujemo *tangentni prostor* Evklidskega prostora $\mathcal{E}$ v točki $x \in \mathcal{E}$.

V_x je vektorski prostor, ki je kopija prostora V. Če sta V_x in V_y tangentna prostora, je V_y translacija prostora V_x za vektor $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$. Vektorje iz različnih tangentnih prostorov lahko med sabo seštevamo, kot da bi bili iz istega vektorskega prostora.

Definicija 2.8. Naj bosta $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ in $U \subseteq \mathbb{R}^3$ odprti množici. Bijektivno gladko preslikavo $\Psi\colon \mathcal{D} \to U$, katere inverz $\Psi^{-1}\colon U \to \mathcal{D}$ je tudi gladka preslikava, imenujemo *koordinatni sistem* za $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$.

V prostoru $\mathcal{E}$ si izberemo izhodišče o, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ pa naj bo ortonormirana baza prostora $V_o \cong V$. Poljubni točki x iz $\mathcal{E}$ pripada glede na izhodišče o krajevni vektor $\boldsymbol{u}_x$ z enoličnim razvojem po bazi, $\boldsymbol{u}_x = y_k \boldsymbol{e}_k$. Preslikava $x \mapsto (y_1, y_2, y_3)$, ki točki x priredi trojico koeficientov razvoja njenega krajevnega vektorja po bazi $\{\boldsymbol{e}_k\}$, je očitno koordinatni sistem, ki ga imenujemo *Kartezijev koordinatni sistem.* Povezavo med konfiguracijo χ in njej enakovredno konfiguracijo v Evklidskem prostoru podaja koordinatni sistem

$\psi\colon \mathcal{D}^{\mathrm{odp}} \subseteq \mathcal{E} \to U \subseteq \mathbb{R}^3$, ki je podan s koordinatno transformacijo Kartezijevih koordinat,

$$x^k = \psi^k(y_1, y_2, y_3) \;\Leftrightarrow\; y_k = \varphi_k(x^1, x^2, x^3), \quad k = 1, 2, 3.$$

Inverz od ψ bomo označili s $\varphi = \psi^{-1}$. Če je torej $\chi \in \mathscr{K}$ konfiguracija, je njena pripadajoča konfiguracija v Evklidskem prostoru definirana kot

$$\begin{aligned} \varphi \circ \chi\colon \mathcal{B} &\to \varphi\big[\chi[\mathcal{B}]\big] = \mathscr{B} \subseteq \mathcal{E} \\ \mathscr{P} &\mapsto \varphi\big(\chi(\mathscr{P})\big). \end{aligned}$$

Opomba 2.9. Običajno je, da se za konfiguracijo $\varphi \circ \chi$ z zlorabo notacije uporabi kar oznako χ. V takem primeru moramo biti pozorni, ko naletimo na oznako za χ, ali gre za preslikavo $\chi\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}^3$ ali za $\chi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{E}$.

SLIKA $\mathcal{B}$ levo, $\mathscr{B}$ desno, $\chi[\mathcal{B}]$ spodaj, kartezijev KS zgoraj, puščice vmes.

Gibanje v Evklidskem prostoru lahko tako predstavimo s preslikavo, ki jo, prav tako z zlorabo notacije, označimo enako, kot v (2.1), in je

$$\begin{aligned} \chi_{\mathrm{R}}\colon \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \times I &\to \mathscr{B}_t \\ (X, t) &\mapsto x = \varphi\big(\chi_{\mathrm{R}}(\psi(X), t)\big), \end{aligned} \tag{2.3}$$

kjer je

$$\mathscr{B}_{\mathrm{R}} = \varphi\big[\mathrm{R}[\mathcal{B}]\big] \subseteq \mathcal{E} \quad \text{in} \quad \mathscr{B}_t = \varphi\big[\chi_t[\mathcal{B}]\big] \subseteq \mathcal{E}.$$

Podobno, kot v opombi 2.5, tudi tukaj na smiselen način definiramo

$$\begin{aligned} {\chi_{\mathrm{R}}}^{-1}\colon \mathscr{B}_t \times I &\to \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \\ (x, t) &\mapsto X = \varphi\big({\chi_{\mathrm{R}}}^{-1}(\psi(x), t)\big). \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.3 Tenzorska polja

Funkciji $f\colon \mathcal{D} \times I \to W$, kjer je $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ časovni interval, W pa nek normiran vektorski prostor, rečemo *tenzorsko polje*. V posebnem primeru, ko je $W = \mathbb{R}$, rečemo f *skalarno*, v primeru $W = V$ pa *vektorsko polje*. Tenzorsko polje f lahko preko koordinatnega sistema definiramo tudi na podmnožici $\psi[\mathcal{D}]$ v $\mathbb{R}^3$, in sicer

$$\tilde{f}\colon \psi[\mathcal{D}] \times I \to W, \quad \tilde{f}\colon (x^1, x^2, x^3, t) \mapsto f\big(\varphi(x^1, x^2, x^3), t\big).$$

Zopet je običajno, da se $\tilde{f}$ označi kar z f.

2.3.1 Zapis v naravni bazi

Tenzorje, ki so elementi nekega vektorskega prostora W, lahko predstavimo v komponentni obliki glede na neko bazo prostora W. Posebno pomemben je dualni par baz, ki ga v točki

$$(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftharpoons}} x \in \mathcal{E} \rightleftharpoons \boldsymbol{x} = y_i \boldsymbol{e}_i \in V_o$$

definira koordinatni sistem[1]:

$$\boldsymbol{g}_k(x) = \frac{\partial}{\partial x^k}\varphi(x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial}{\partial x^k}\varphi_j(x^1, x^2, x^3)\, \boldsymbol{e}_j$$
$$\boldsymbol{g}^k(x) = \operatorname{grad} \psi^k(y_1, y_2, y_3) = \frac{\partial}{\partial y_j}\psi^k(y_1, y_2, y_3)\, \boldsymbol{e}_j.$$

$\boldsymbol{g}_k$ imenujemo *tangentni*, $\boldsymbol{g}^k$ pa *gradientni vektorji.*

Trditev 2.10. *Množici* $\{\boldsymbol{g}^k(x)\}$ *in* $\{\boldsymbol{g}_j(x)\}$ *tvorita bazo tangentnega prostora* V_x. *Bazi sta si dualni, tj.* $\boldsymbol{g}^i(x) \cdot \boldsymbol{g}_j(x) = \delta^i{}_j$.

Trditev je splošno znana iz tenzorske analize, zato dokaza tukaj ne bomo navajali; bralec ga lahko najde npr. v [4, str. 273]. Bazi iz trditve 2.10 imenujemo *naravni bazi* v točki $x \in \mathcal{E}$ glede na koordinatni sistem ψ. Definirajmo še *metrične koeficiente*:

$$g^{ij}(x) = \boldsymbol{g}^i(x) \cdot \boldsymbol{g}^j(x) \quad \text{in} \quad g_{ij}(x) = \boldsymbol{g}_i(x) \cdot \boldsymbol{g}_j(x).$$

Tenzorska polja običajno zapisujemo v komponentni obliki glede na naravno bazo. Če je $\boldsymbol{u}$ vektorsko polje z vrednostmi v V, S pa tenzorsko polje z vrednostmi v $V \otimes V$, potem ju v točki $x \in \mathcal{E}$ pri nekem danem času v naravni bazi zapišemo kot

$$\boldsymbol{u} = u_j\, \boldsymbol{g}^j = u^k\, \boldsymbol{g}_k,$$
$$S = S_i{}^j\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_j = S^i{}_j\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j = S^{ij}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j = S_{ij}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j.$$

Predpostavljamo, da bralec pozna pravila za višanje in nižanje indeksov s pomočjo metričnih koeficientov ter pravila za transformacijo komponent tenzorjev pri prehodu iz ene baze v drugo.

[1] Za oznake glej stran 9.

2.3.2 Odvajanje

Posvetimo se sedaj odvajanju tenzorskih polj. Pri matematični analizi se spoznamo z odvodi med normiranimi prostori, običajno v poglavju o variacijskem računu. Če je $F : D^{\mathrm{odp}} \subseteq W_1 \to W_2$ preslikava med normiranima prostoroma W_1 in W_2, potem je njen odvod DF element prostora $W_2 \otimes W_1$ (tenzorski produkt vektorskih prostorov). Za dosledno definicijo odvoda tenzorske funkcije na Evklidskem prostoru, ki sam po sebi še ni vektorski prostor, potrebujemo naslednji dogovor.

1. Če je $x \in \mathcal{E}$ in $\boldsymbol{v} \in V$, potem je $x + \boldsymbol{v} = y \in \mathcal{E}$, tako da je $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{XY}}$.
2. Za $x, y \in \mathcal{E}$ je njuna razlika $y - x = \overrightarrow{\mathrm{XY}} \in V$.

Evklidska metrika d na $\mathcal{E}$ je tako

$$d(x, y) = \|y - x\| = \|\overrightarrow{\mathrm{XY}}\|.$$

Definicija 2.11. Naj bo $f : \mathcal{D} \times I \to W$ tenzorsko polje, kjer je $\mathcal{D}$ odprta podmnožica v metričnem prostoru $(\mathcal{E}, d)$. f je *odvedljiva* ali *diferenciabilna* v točki $x \in \mathcal{E}$, če obstaja taka linearna preslikava $A : V \to W$, da za vsak $\boldsymbol{h} \in V$ velja

$$f(x + \boldsymbol{h}, t) = f(x, t) + A[\boldsymbol{h}] + o(\boldsymbol{h}),$$

kjer je $o(\boldsymbol{h}) \in W$ količina, za katero je

$$\lim_{\|h\|_V \to 0} \frac{\|o(\boldsymbol{h})\|_W}{\|\boldsymbol{h}\|_V} = 0.$$

Če taka A obstaja, ji rečemo *gradient* oziroma *(krepki) odvod* funkcije f po spremenljivki x in ga označimo z $\operatorname{grad} f(x, t) = \nabla f(x, t)$.

Imamo: $\nabla f \in W \otimes V$. Odvod, kadar obstaja, je en sam. Gradiente računamo s pomočjo *šibkega* oziroma *smernega odvoda*:

$$\delta f(x, t)[\boldsymbol{h}] = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\Big(f(x + s\boldsymbol{h}, t) - f(x, t)\Big) = \frac{d}{ds} f(x + s\boldsymbol{h}, t)\Big|_{s=0}.$$

Znano je, da če obstaja krepki odvod (včasih imenovan tudi *Fréchetov odvod*), potem obstaja tudi šibki odvod in sta enaka: $\nabla f(x, t)[\boldsymbol{h}] = \delta f(x, t)[\boldsymbol{h}]$ za vsak $\boldsymbol{h} \in V$. Za tovrstne odvode veljajo enaki izreki, kot veljajo za preslikave med normiranimi prostori, ki jih poznamo iz matematične analize: izrek o posrednem odvajanju, izrek o odvajanju produkta[2], izrek o totalnem odvodu itd.

[2] Izrek o odvajanju produkta velja za katerikoli produkt, ki je bilinearna preslikava. Med njimi so npr. skalarni in vektorski produkt vektorjev, produkt tenzorja s skalarjem, tenzorski produkt, delovanje tenzorja na vektorju itd.

Na podoben način definiramo tudi odvod tenzorske funkcije f po času. Tega označimo z $\partial f/\partial t$ in je element prostora $W \otimes \mathbb{R} \cong W$. Totalni odvod funkcije f vključuje tako gradient kot tudi odvod po času.

2.3.3 Gradient in divergenca

Oglejmo si gradiente nekaterih posebnih tenzorskih polj. Za začetek naj bo f skalarno polje. Potem je $\nabla f \in \mathbb{R} \otimes V \cong V$. Če je $\psi^k(x) = x^k$ k-ta koordinata točke $x \in \mathcal{E}$, potem s posrednim odvajanjem v točki x dobimo

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^k} \nabla \psi^k = \frac{\partial f}{\partial x^k} \boldsymbol{g}^k.$$

Vektorji iz naravne baze so (časovno neodvisna) vektorska polja, njihovi gradienti v točki x pripadajo prostoru $V \otimes V$, torej so tenzorji drugega reda in jih lahko zapišemo v komponentni obliki glede na naravno bazo:

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{g}_i(x) &= \Gamma_{i\ k}^{\ j}(x)\, \boldsymbol{g}_j(x) \otimes \boldsymbol{g}^k(x) \\ \nabla \boldsymbol{g}^i(x) &= \Gamma^i_{\ jk}(x)\, \boldsymbol{g}^j(x) \otimes \boldsymbol{g}^k(x). \end{aligned}$$

Koeficienti $\Gamma_{i\ k}^{\ j}$ in $\Gamma^i_{\ jk}$ se imenujejo *Christoffelovi simboli* in jih ne smemo zamenjati s koeficienti tenzorjev tretjega reda. Navedimo nekaj lastnosti Christoffelovih simbolov, katerih izpeljavo lahko najdemo v [4, str. 275–277] ali [3, str. 59]:

$$\Gamma_{j\ k}^{\ i} = -\Gamma^i_{\ jk}, \quad \Gamma^i_{\ jk} = \Gamma^i_{\ kj}, \quad \Gamma_{j\ k}^{\ i} = \Gamma_{k\ j}^{\ i},$$

$$\Gamma_{i\ k}^{\ j} = \frac{1}{2} g^{jl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right).$$

Naj bo sedaj $\boldsymbol{f}$ vektorsko polje. Njegov gradient v točki x je

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{f} &= \nabla(f^i\, \boldsymbol{g}_i) = \boldsymbol{g}_i \otimes \nabla f^i + f^i\, \nabla \boldsymbol{g}_i = \\ &= \boldsymbol{g}_i \otimes \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \boldsymbol{g}^k + f^i\, \Gamma_{i\ k}^{\ j}\, \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k = \\ &= \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^k} + f^i\, \Gamma_{i\ k}^{\ j} \right) \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k \end{aligned}$$

in je tenzor iz prostora $V \otimes V$. V komponentni obliki ga zapišemo kot

$$\nabla \boldsymbol{f} = f^j_{\ ,k}\, \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k, \quad f^j_{\ ,k} = \frac{\partial f^j}{\partial x^k} + f^i\, \Gamma_{i\ k}^{\ j}.$$

Vejica v izrazu $f^j_{\ ,k}$ označuje operacijo, imenovano *kovariantni odvod.*

Medtem ko gradient viša red tenzorskega polja, ga divergenca niža.

Definicija 2.12. *Divergenca vektorskega polja* $\boldsymbol{f}$ v točki $x \in \mathcal{E}$ je

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = f^k{}_{,k} = \frac{\partial f^k}{\partial x^k} + f^i \, \Gamma_{i\ k}^{\ k} \ \in \mathbb{R}.$$

2.4 Materialni in prostorski opis

Materialno telo spremljajo različne fizikalne količine, ki jih predstavimo s skalarji, vektorji ali pa tenzorji. Naj W označuje neki normirani prostor skalarjev, vektorjev ali pa tenzorjev, $I \subseteq \mathbb{R}$ pa naj bo časovni interval. Fizikalno količino iz prostora W, ki pripada materialni točki $\mathscr{P}$ ob času t, določa funkcija

$$\begin{aligned} f \colon \mathcal{B} \times I &\to W \\ (\mathscr{P}, t) &\mapsto w = f(\mathscr{P}, t). \end{aligned}$$

Z uporabo oznak in dogovorov iz razdelka 2.2 podajmo naslednjo definicijo.

Definicija 2.13. *Prostorski* ali *Eulerjev opis* je izražava fizikalne količine $w = f(\mathscr{P}, t)$ s tenzorskim poljem

$$\begin{aligned} &\bar{f} \colon \mathscr{B}_t \times I \to W \\ &\bar{f}(x, t) = f\left({\chi_t}^{-1}(x), t\right) = w. \end{aligned}$$

Materialni ali *Lagrangejev opis* je izražava fizikalne količine $w = f(\mathscr{P}, t)$ s tenzorskim poljem

$$\begin{aligned} &\hat{f} \colon \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \times I \to W \\ &\hat{f}(X, t) = f\left(\mathrm{R}^{-1}(X), t\right) = w. \end{aligned}$$

Opomba 2.14. Preko koordinatnega sistema ψ dobi tenzorsko polje $\bar{f}$ enakovredno izražavo $\bar{\bar{f}} : \chi_t[\mathcal{B}] \times I \to W$ v pripadajočih prostorskih koordinatah, tenzorsko polje $\hat{f}$ pa enakovredno izražavo $\hat{\hat{f}} : \mathrm{R}[\mathcal{B}] \times I \to W$ v materialnih koordinatah.

S pomočjo preslikav (2.3) in (2.4) dobimo prehod med prostorskim in materialnim opisom:

$$\hat{f}(X, t) = \bar{f}\left(\chi_{\mathrm{R}}(X, t), t\right), \tag{2.5a}$$

$$\bar{f}(x, t) = \hat{f}\left({\chi_{\mathrm{R}}}^{-1}(x, t), t\right). \tag{2.5b}$$

Definicija 2.15. Če je $w(t) = f(\mathscr{P}, t)$ časovno odvisna fizikalna količina, definirana za materialne točke, potem njen časovni odvod

$$\dot{w}(t) = \dot{f}(\mathscr{P}, t) = \frac{d}{dt} f(\mathscr{P}, t)$$

imenujemo *materialni odvod.*

V materialnem opisu določeni točki $X \in \mathcal{E}$ pripada ena in ista materialna točka ne glede na čas, zato je materialni odvod kar parcialni odvod po času,

$$\dot{w}(t) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(X, t). \tag{2.6}$$

Primer 2.16. *Hitrost* $\boldsymbol{v}$ delca $\mathscr{P}$ ob času t je vektorska količina, definirana kot materialni odvod pozicijske točke $X = \chi_{\mathrm{R}}(\mathscr{P}, t) \in \mathcal{E}$. Materialni opis hitrosti je tako

$$\hat{\boldsymbol{v}}(X, t) = \frac{\partial \chi_{\mathrm{R}}}{\partial t}(X, t). \tag{2.7}$$

Iz enačbe (2.5b) dobimo še prostorski opis hitrosti

$$\bar{\boldsymbol{v}}(x, t) = \hat{\boldsymbol{v}}\left(\chi_{\mathrm{R}}{}^{-1}(x, t), t\right). \tag{2.8}$$

V prostorskem opisu pa določeni točki $x \in \mathcal{E}$ pripadajo različne materialne točke, odvisno od časa. Zato materialni odvod, ki je totalni odvod po času, v prostorskem opisu dobimo s posrednim odvajanjem glede na spremenljivko $x = \chi_{\mathrm{R}}(X, t)$. Z upoštevanjem (2.7) in (2.8) dobimo

$$\dot{w}(t) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}(x, t) + \nabla \bar{f}(x, t)\, \bar{\boldsymbol{v}}(x, t). \tag{2.9}$$

Primer 2.17. Materialni odvod hitrosti imenujemo *pospešek* in ga označimo z $\boldsymbol{a}$. Iz enačb (2.6) in (2.9) dobimo materialni in prostorski opis pospeška:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{a}}(X, t) &= \frac{\partial \hat{\boldsymbol{v}}}{\partial t}(X, t) = \frac{\partial^2 \chi_{\mathrm{R}}}{\partial t^2}(X, t) \\ \bar{\boldsymbol{v}}(x, t) &= \frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial t}(x, t) + \nabla \bar{\boldsymbol{v}}(x, t)\, \bar{\boldsymbol{v}}(x, t). \end{aligned}$$

Literatura

[1] A. Bedford, *Hamilton's principle in continuum mechanics*, Research notes in mathematics **139**, Pitman, Boston, London, Melbourne, 1985.

[2] S. Dost in B. Tabarrok, *Application of Hamilton's principle to large deformation and flow problems*, J. appl. mech. **46** (1979), 285–289.

[3] P. Haupt, *Continuum mechanics and theory of materials*, Advanced text in physics, Springer, Berlin, 2000.

[4] I-Shih Liu, *Continuum mechanics*, Advanced text in physics, Springer, Berlin, 2002.

[5] P. Chadwick, *Continuum mechanics: Concise theory and problems*, George Allen & Unwin, London, 1976.