

## Излучение релятивистской электрона в синусоидальном магнитном поле

В этой части мы дадим вывод излучения релятивистского электрона в  $r\omega$ -пространстве, движущегося в синусоидальном магнитном поле. Единственно приближение, которым мы будем пользоваться, — прааксиальное приближение. Вывод интересен тем, что даёт наглядное представление о спектре частицы, угловом распределении интенсивности в зависимости от резонансной частоты. В заключении главы, будет приведён вывод распределения электромагнитного поля(в ближней зоне???) через потенциалы Лиенара-Вихерта, будет получен результат, который даст представление о методах используемых в численных симуляциях, на примере кода SRW. В наших рассуждениях мы следовали (Салдин Гелони)

### Уравнение движения электрона в ондуляторе

Выведем спектр излучения из ондулятора. Вывод начнём с уравнения движение релятивистского электрона в магнитном поле.

$$\vec{F} = e[\vec{v} \times \vec{B}], \quad (1.1)$$

где  $e$  — заряд электрона, а  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  скорость частицы и магнитное поле соответственно. Уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{\gamma m_e}[\vec{v} \times \vec{B}], \quad (1.2)$$

где  $\gamma$  — лоренц фактор, появившийся из релятивистского импульса. Направим ось  $z$  вдоль направления релятивистского движения электрона и введём магнитное поле в ондуляторе  $B_0 \cos(k_w z)$ , направленное вдоль оси  $y$ , где  $k_w$  связана с периодом ондулятора следующим образом  $k_w = 2\pi/\lambda_w$ .

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{eB_0}{\gamma m_e} \frac{dz}{dt} \cos(k_w z) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{eB_0}{\gamma m_e} \frac{dx}{dt} \cos(k_w z) \end{cases} \quad (1.3)$$

один раз интегрируя первой уравнение из системы с заменой  $dz = \beta c dt$ ,

где  $\beta = \|\vec{v}\|/c$ , можно получить:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{eB_0}{\gamma m_e k_w} \sin(k_w z) \quad (1.4)$$

Введём коэффициент ондуляторности —  $K = \frac{eB_0 \lambda}{2\pi m_e k_w}$ , который показывает угол отклонения электрона от оси  $z$ (?????).

Подставляя получившийся результат 1.4 во второе уравнение системы 1.3 и интегрируя с пределами интегрирования от 0 до некоторого  $z_0$ , получим систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{Kc}{\gamma} \sin(k_w z) \\ \frac{dz}{dt} = \beta c - \frac{K^2 c}{2\gamma^2 \beta} \sin^2(k_w z) \end{cases} \quad (1.5)$$

Проинтегрировав оба уравнения(в каких пределах?), получим (Wiedemann),

$$\begin{cases} x = \frac{Kc}{\gamma k_w \beta} \cos(k_w \bar{\beta} ct) \\ z = \bar{\beta} ct + \frac{K^2}{8\beta^2 \gamma^2 k_w} \sin(2k_w \bar{\beta} ct), \end{cases} \quad (1.6)$$

где было введено обозначение  $\bar{\beta}$ , которое определяется как  $\bar{\beta}c = \beta c(1 - \frac{K^2}{4\beta^2 \gamma^2})$ . Из 1.5 видно, что продольная скорость испытывает осцилляции с удвоенной частотой...

### Решение волнового уравнения в прааксиальном приближении

Вывод спектра излучения будем проводить в  $r\omega$ -пространстве. Начнём с уравнений Максвелла в вакууме:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ [\nabla \times \vec{E}] = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt} \\ [\nabla \times \vec{B}] = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.7)$$

Из уравнений тривиально можно получить неоднородное волновое уравнение (какая калибровка?):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + c^2 \nabla^2 \vec{E} = 4\pi c^2 \nabla \rho + 4\pi \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (1.8)$$

Это же уравнение перепишем в  $r\omega$ -пространстве, определив преобразование Фурье следующим образом:

$$\vec{\tilde{E}}(r, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{E}(r, t) \exp[-i\omega t] \quad (1.9)$$

$$\vec{E}(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{\tilde{E}}(r, t) \exp[i\omega t]$$

Применив к уравнению 1.8, получим:

$$\omega^2 \vec{\tilde{E}} + c^2 \nabla^2 \vec{\tilde{E}} = 4\pi c^2 \nabla \tilde{\rho} - 4i\pi\omega \vec{\tilde{j}} \quad (1.10)$$

Перепишем это уравнение в приближении медленно меняющейся амплитуды в сравнение с частотой осцилляций, что есть  $\vec{\tilde{E}} = \vec{\tilde{E}} \exp[i\omega z/c]$ , в приближении  $\frac{\partial |E|}{\partial z} \ll \frac{\omega}{c} |E|$ . Где временная зависимость разложена до нулевого порядка малости, исходя из уравнения 1.6. Получим:

$$c^2 \left( \nabla^2 \vec{\tilde{E}} - \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial \vec{\tilde{E}}}{\partial z} \right) \exp[i\omega z/c] = 4\pi c^2 \nabla \tilde{\rho} - 4i\pi\omega \vec{\tilde{j}} \quad (1.11)$$

Для электрона движущегося в вакууме ток и плотность заряда выражается через дельта-функцию Дирака:

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= -e\delta(\vec{r} - \vec{r}(t)) = -\frac{e}{v_z(z)}\delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}_\perp(z))\delta\left(\frac{s(z)}{v} - t\right) \\ \vec{j}(r, t) &= \vec{v}\rho(r, t) \end{aligned} \quad (1.12)$$

В  $r\omega$ -пространстве:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(r, \omega) &= -\frac{e}{v_z(z)} \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp(z)) \exp\left[\frac{i\omega s(z)}{v}\right] \\ \vec{j}(r, \omega) &= \vec{v} \tilde{\rho}(r, \omega)\end{aligned}\quad (1.13)$$

Подставим фурье-образы плотности тока и заряда в уравнение 1.11, (где производная по градиентному члену? добавить это)

$$\nabla^2 \tilde{E} - \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} = \frac{4\pi e}{v_z(z)} \exp\left[i\omega\left(\frac{s(z)}{v} - \frac{z}{c}\right)\right] \left(\frac{i\omega}{c^2} \vec{v}(z) - \nabla\right) \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp(z)) \quad (1.14)$$

Получившиеся уравнение является точным. Теперь мы можешь применить параксиальное приближении.

$$\nabla_\perp^2 \tilde{E}_\perp - \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial \tilde{E}_\perp}{\partial z} = \frac{4\pi e}{v_z(z)} \exp\left[i\omega\left(\frac{s(z)}{v} - \frac{z}{c}\right)\right] \left(\frac{i\omega}{c^2} \vec{v}_\perp(z) - \nabla_\perp\right) \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp(z)) \quad (1.15)$$

Вторая производная по  $z$ , появляющаяся из оператора Лапласа полагается много меньшим по сравнению с первой производной по  $z$  в уравнении 1.15 исходя из предположения медленно меняющейся амплитуды.

Перед нами неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных, которое решается с помощью функции Грина. Для дифференциального оператора  $\partial_t - k\nabla_{2D}^2$  функция Грина есть:  $\frac{1}{4\pi kt} \exp[-\rho^2/4kt]$ . В частности для уравнения 1.15

$$G(z_0 - z'; \vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}) = -\frac{1}{4\pi(z_0 - z')} \exp\left[i\omega \frac{|\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}|^2}{2c(z_0 - z')}\right] \quad (1.16)$$

Получим решение для функции распределения поля:

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = & -\frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dz' d\vec{r}' \frac{1}{z_0 - z'} \left( \frac{i\omega}{c^2} \vec{v}_{\perp}(z') - \nabla'_{\perp} \right) \delta(\vec{r}'_{\perp} - \vec{r}'_{\perp}(z')) \times \\ & \exp \left[ i\omega \left( \frac{|\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}(z')|^2}{2c(z_0 - z')} + \frac{s(z')}{v} - \frac{z'}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

Проинтегрировав по  $d\vec{r}'$  получим общее решение уравнения 1.14 :

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = & -\frac{i\omega e}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{z_0 - z'} \left( \frac{\vec{v}_{\perp}(z')}{c} - \frac{\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}(z')}{(z_0 - z')} \right) \times \\ & \exp \left[ i\omega \left( \frac{|\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}(z')|^2}{2c(z_0 - z')} + \frac{s(z')}{v} - \frac{z'}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.18)$$

Что есть распределение электромагнитного поля в точке наблюдения  $\vec{r}_0$ .

### Излучение планарного ондулятора

В этой секции мы рассмотрим излучение планарного ондулятора используя наши предыдущие результаты 1.19 и 1.6. Сперва проанализируем получившиеся распределение поля 1.19: в случае ондулятора, член  $(z_0 - z')^{-1}$  можно разложить около точки  $z'$ , так как размер ондулятора много меньше чем расстояние, с которого мы наблюдаем излучение:  $\lambda_w N \ll z_0$ , где  $N$  число периодов ондулятора.

Воспользовавшись решениями 1.5 и 1.6 и помня  $\vec{r}_{\perp 0}/z_0 = \vec{\theta}$  преобразуем уравнение 1.19 к виду:

$$\vec{\tilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{i\omega e}{c^2 z_0} \exp \left[ i \frac{\omega \theta^2 z_0}{2c} \right] \int_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp[i\Phi_T] \left( \frac{K}{\gamma} \sin(k_w z) \vec{e}_x + \vec{\theta} \right) \quad (1.19)$$

Здесь мы отбросили члены первого и большего порядка малости по  $1/z_0$ . Где за  $\Phi_T$  мы обозначили:

$$\Phi_T = \left( \frac{\omega}{2c\gamma^2} + \frac{\omega \vec{\theta}^2}{2c} \right) z' - \frac{K^2}{8\gamma^2 k_w c} \omega \sin(2k_w z') - \frac{K\theta_x}{\gamma} \frac{\omega}{k_w c} \cos(k_w z'), \quad (1.20)$$

где  $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + K^2/2}}$ .

Пределы интегрирования ограничили по длиной ондулятора от  $-\lambda_w N/2$  до  $\lambda_w N/2$ , считая вклад в излучение от ондулятора доминирующим надо остальными вкладами от соответствующих участков траектории. На это шаге уже можно заметить, что излучение на оси будет линейно поляризовано, это есть вклад члена с током, вклад же плотности заряда или градиентный член, даёт вариацию поляризации, при наблюдении под некоторым углом  $\theta$  к оси.

Если переписать 1.19 в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = & \frac{i\omega e}{c^2 z_0} \exp\left[i\frac{\omega\theta^2 z_0}{2c}\right] \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} J_m\left(-\frac{K^2 \omega}{8\gamma^2 k_w c}\right) J_n\left(-\frac{K\theta_x \omega}{\gamma k_w c}\right) \times \\ & \exp\left[\frac{i\pi n}{2}\right] \int_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp[i(2m+n)k_w z'] \left(\frac{K}{2i\gamma} (\exp[2ik_w z'] - 1) \vec{e}_x + \vec{\theta} \exp[ik_w z']\right) \times \\ & \exp\left[i\left(k_w \frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega\theta^2}{2c}\right) z'\right], \end{aligned} \quad (1.21)$$

Где мы ввели  $\omega = \omega_r + \Delta\omega$ ,  $\omega_r = 2c\tilde{\gamma}^2 k_w$  и использовали формулу Якоби — Ангера:

$$\begin{aligned} \exp[iz \cos(\theta)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) \exp[in\theta] \\ \exp[iz \sin(\theta)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \exp[in\theta] \end{aligned} \quad (1.22)$$

До сих пор мы пользовались только двумя приближениями, — медленно меняющейся амплитудой и параксиальным приближением, теперь можем воспользоваться следующим параметром — количеством периодов ондулятора, —  $N$ . Для этого обратим внимание на первой слагаемое в фазовом множителе под интегралом, и заметим, что если  $k_w \frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega\theta^2}{2c} \ll k_w$ , то фаза меняется медленно на одном периоде и эта фаза не занулит интеграл. Отметим, что

для резонанса условия должны выполняться по отдельности, т.е.  $\frac{\Delta\omega}{\omega_r} \ll 1$  и  $\frac{\omega\theta^2}{2c} \ll 1$ , последнее даёт углы наблюдения вблизи резонанса:  $\theta^2 \ll \frac{1}{\tilde{\gamma}^2}$ . Теперь

необходимо обратить внимание на аргументы функций Бесселя, а именно:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{K^2 \omega}{8\gamma^2 k_w c} \\ v &= -\frac{K\theta_x \omega}{\gamma k_w c} = -\frac{K\theta_x}{\gamma} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_r}\right) 2\tilde{\gamma}^2 \lesssim \frac{2K\theta_x \tilde{\gamma}}{\sqrt{1 + K^2/2}} \lesssim \theta_x \tilde{\gamma} \ll 1 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Зная, что  $J_\alpha(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^{2\beta+\alpha}$ , видим, что вклад нулевого порядка по  $\theta_x \tilde{\gamma}$ , т.е.  $J_\alpha(x) \sim 1$  даёт только функция Бесселя с индексом  $n = 0$ . Здесь мы пока не учитываем градиентный член пропорциональный  $\vec{\theta}$ , таким образом из оставшихся фазовых множителей можно выписать условия на индекс  $m$ . Они определяются нулями в аргументах соответствующих фаз или  $m = -1$  и  $m = 0$ , оба оставшихся члена пропорциональны  $\frac{K}{\gamma}$ .

Теперь вернёмся к градиентному члену, вклад от которого занулиться при усреднении по длине ондулятора при  $n = 0$ , этот вклад даст ненулевой вклад при  $n = 1 - 2m$ , т.о. в ход пойдут следующие члены разложения  $J_m(v)$ . Однако, помня интересующий нас диапазон углов, члены разложения будут порядка  $\theta_x v^m$ , очевидно, что их вклады пренебрежимо малы по сравнению с вкладами токового члена  $\vec{e}_x$ . Учитывая выше сказанные приближения, перепишем 1.21

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{E}}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) &= \frac{\omega e}{2c^2 z_0} \frac{K}{\gamma} \exp\left[i \frac{\omega \theta^2 z_0}{2c}\right] \left(J_1(v) - J_0(v)\right) \vec{e}_x \times \\ &\int_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp\left[i \left(k_w \frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega \vec{\theta}^2}{2c}\right) z'\right], \end{aligned} \quad (1.24)$$

Интеграл легко берётся:

$$\vec{\tilde{E}}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e L K}{c^2 z_0 \gamma} \exp\left[i \frac{\omega \theta^2 z_0}{2c}\right] \text{sinc}\left[\left(k_w \frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega \vec{\theta}^2}{2c}\right) L/2\right] \vec{e}_x, \quad (1.25)$$

где введено обозначение:  $A_{JJ} = J_1(v) - J_0(v)$ .

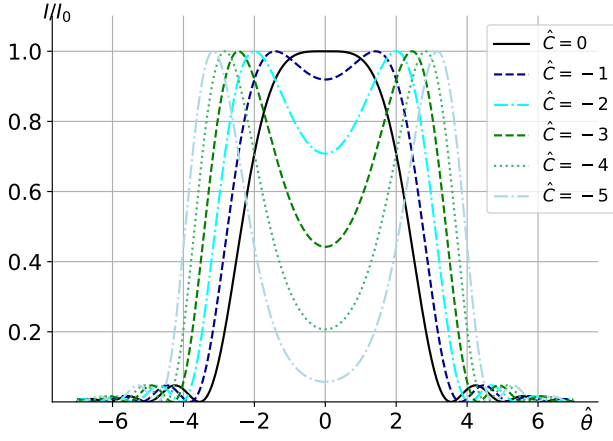


Рис. 1

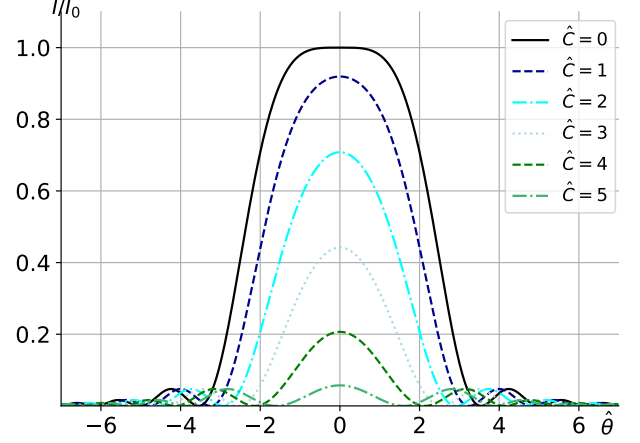


Рис. 2

В следующем параграфе мы займёмся выводом влияния конечного эмиттанта на распределение излучения, чтобы облегчить выкладки мы введём нормализованные единицы.

$$\begin{aligned}\hat{E}_{\perp} &= \frac{c^2 z_0 \gamma \tilde{E}_{\perp}}{e \omega K L A_{JJ}} \\ \hat{\theta} &= \theta \sqrt{\frac{\omega L}{c}} \\ \hat{z} &= \frac{z}{L},\end{aligned}\tag{1.26}$$

а также,

$$\hat{C} = CL = 2\pi N \frac{\Delta\omega}{\omega_r}\tag{1.27}$$

Теперь уравнения 1.25 и 1.28 могут быть переписаны в нормализованных единицах.

$$\hat{E}_{\perp} = e^{i\Phi} \int_{-1/2}^{1/2} dz' \exp \left[ i \left( \hat{C} + \frac{\hat{\theta}^2}{2} \right) z' \right],\tag{1.28}$$

$$\hat{E}_{\perp} = e^{i\Phi} \text{sinc} \left( \frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{\theta}^2}{4} \right),\tag{1.29}$$

На рис. 1 и рис. 2 изображены угловые распределения излучения. Из них можно понять, что если сдвигка по спектру идёт в область меньших частот, то условие резонанса удовлетворяется на других углах и проинтегрированные



по даст некоторую интенсивность. Если же сдвигаться по спектру в область более высоких частот, что условие резонанса на углах не будет выполняться и интенсивность быстро упадёт. На рис. 3 представлен проинтегрированный по углам  $\hat{\theta}$  спектр.

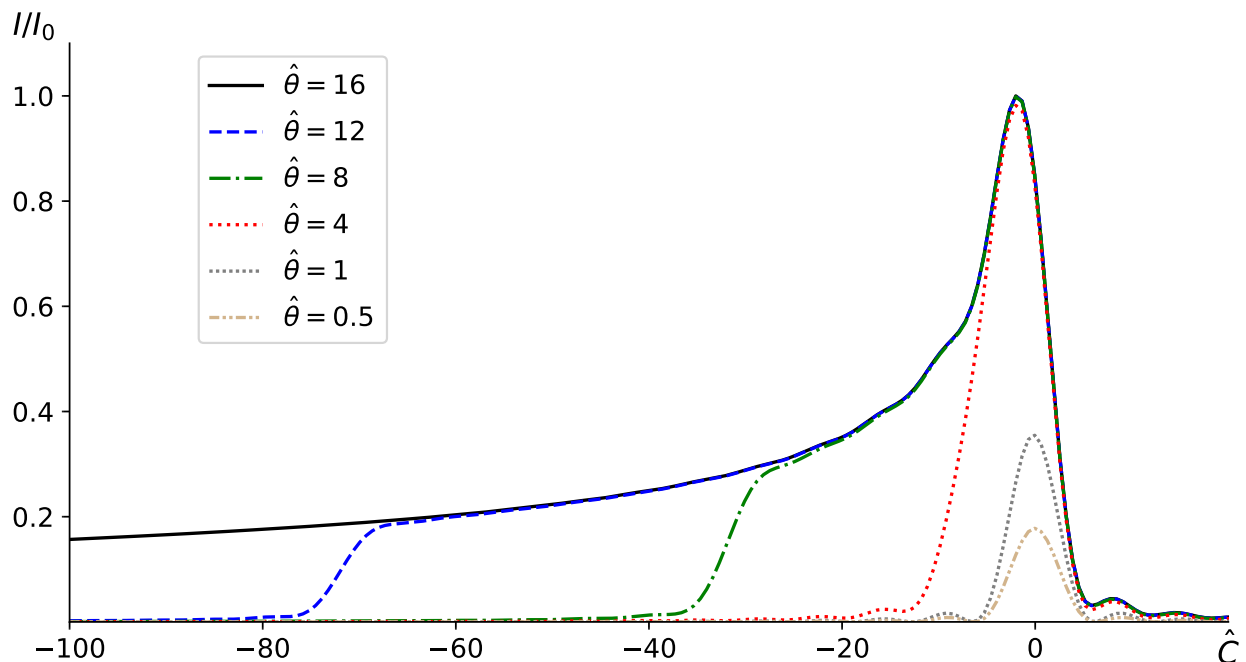


Рис. 3

### Излучение клинообразного ондулятора

В этой секции мы рассмотрим излучение из ондулятора специальной конструкции, который может дать широкий спектр. Идея в том, что разбить ондулятор на несколько секций с различным  $K$  в каждой из них. Такая расстановка в первом приближении должна дать набор резонансов, которые должны сложиться в один сплошной спектр. Более детальное рассмотрение покажет, что в зависимости от корреляции фазы электрона между этими сегментами, могут проявляться интерференционные эффекты, которые в значительной степени будут изменять форму спектра. В нашем рассмотрении мы покажем влияние указанных вкладов для случая скачкообразного изменения поля, а также для классического случая клинообразного, т.н. зарубежной литературе tapered undulator.

Свои выкладки начнём с модифицированного интеграла 1.28,

$$\vec{\tilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e A_{JJ} K}{2c^2 z_0 \gamma} \int_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp[iCz'] \vec{e}_x, \quad (1.30)$$

Здесь, для краткости выкладок, излучения мы сморим на оси, т.е.  $\theta = 0$ . В случае секционного ондулятора коэффициент ондуляторности меняется вдоль ондулятора, поэтому  $K = K_0 + n\Delta K$ , а также  $C = C_0 + n\Delta C$ , где  $n$  — это номер секции.  $\Delta C$  введено следующим образом, помня  $\omega_r = 2c\tilde{\gamma}^2 k_w$ :

$$C = k_w \frac{\Delta\omega}{\omega_r} = \frac{\Delta\omega_r}{2c\gamma} \left( 1 + \frac{(K_0 + n\Delta K)^2}{2} \right) \approx \frac{\Delta\omega_r}{2c\gamma} \left( 1 + \frac{K_0^2}{2} \left( 1 + \frac{n\Delta K}{K_0} \right) \right) = C_0 + \Delta C \quad (1.31)$$

Секций, для условности, мы возьмём пять, и для удобства нумерацию будем вести  $-2, -1, \dots, 2$ . Поэтому интеграл переписывается в виде:

$$\vec{\tilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e A_{JJ}}{2c^2 \gamma z_0} \sum_{n=-2}^2 (K_0 + n\Delta K) \int_{(2n+1)L_s/2}^{(2n-1)L_s/2} dz' \exp[i(C_0 + n\Delta C)z'] \vec{e}_x, \quad (1.32)$$

Взяв интеграл, получим:

$$\vec{\tilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e A_{JJ}}{2c^2 \gamma z_0} \sum_{n=-2}^2 (K_0 + n\Delta K) \text{sinc}(\hat{C}/2) e^{in(C_0 + n\Delta C)L} \vec{e}_x, \quad (1.33)$$

Возведя в квадрат получим интенсивность:

$$\begin{aligned} \tilde{I} = & \left( \frac{\omega e A_{JJ}}{2c^2 \gamma z_0} \right)^2 \left[ \sum_{n=-2}^2 (K_0 + n\Delta K)^2 \text{sinc}^2(\hat{C}_0 + n\Delta\hat{C}/2) + \right. \\ & \left. \sum_{\substack{n,m=-2 \\ n \neq m}}^2 K_0^2 \left( 1 + n \frac{\Delta K}{K_0} + m \frac{\Delta K}{K_0} \right) \text{sinc}^2(\hat{C}/2) e^{i(n-m)\hat{C}_0 + (n^2 - m^2)\Delta\hat{C}} \right], \end{aligned} \quad (1.34)$$

Данное выражение можно проинтерпретировать следующим образом: первая сумма есть сумма сдвинутых по соответствующим резонансам  $\text{sinc}^2$  функций, вторая сумма отображает интерференцию между различными секциями он-

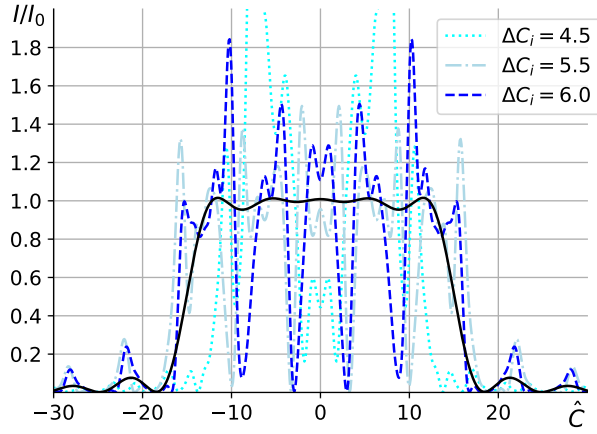


Рис. 4

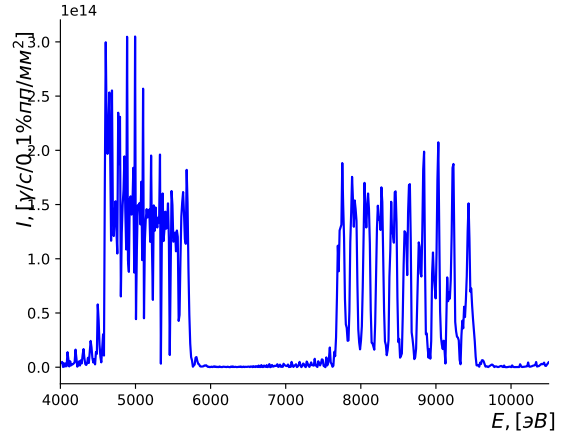


Рис. 5

дулятора, и как кажется автору нежелательна. Данная комбинация приводит к хаотичным колебаниям в спектре, как показано на рис. 4 пунктирными линиями, черной линией отмечена сумма  $\text{sinc}^2$  функций без учёта интерференционных слагаемых. На рис. 5 показан характерный спектр секционного ондулятора посчитанного при помощи симуляционного кода SRW. Сравнение формы синей пунктирной линии на рис. 4 и кривой на рис. 5 показывает, что были сделаны правильные предположения в нашей аналитической модели, происходит интерференция между различными частями ондулятора. Один из возможных путей, чтобы избавиться от интерференционных слагаемых в спектре ондуляторного излучения, добавить произвольную фазу между секциями ондулятора. Дело в том, что данные вычисления проводились для ондульного электрона, если мы хотим получить спектр, который получится в точке наблюдения, то можно понять, что спектры на рис. 4 синими линиями необходимо усреднить по числу электронов в пучке, усреднение по большому числу электронов даст спектр, который будет являть простой суммой  $\text{sinc}^2$  до каких либо дополнительных фаз, результат усреднения, приведёт к чёрной линии на рис. 4. Теперь здесь надо визуально показать процесс усреднения и заключить, что именно такой спектр будет наблюдаться на источнике.

### Учёт конечности эмиттанса

В этом параграфе мы покажем влияние эмиттанса пучка на спектр излучения и угловое распределение. Для начала перепишем уравнение 1.37 с учётом отклонения частиц от заданной траектории, —  $h_x$  и  $h_y$  и с некоторым дополнительным углом  $\eta_x$  и  $\eta_y$ . Сразу можно понять, что в уравнение 1.37 можно

сделать замену  $\theta_{x,y} \rightarrow \theta_{x,y} - \eta_{x,y} - \frac{l_{x,y}}{z_0}$  и переписать углы в нормализованных единицах аналогично с 1.26, с точностью до фазы:

$$\hat{E}_\perp \sim \text{sinc} \left[ \frac{\hat{C}}{2} + \frac{1}{4} \left( \hat{\theta}_x - \hat{\eta}_x - \frac{l_x}{z_0} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \hat{\theta}_y - \hat{\eta}_y - \frac{l_y}{z_0} \right)^2 \right], \quad (1.35)$$

При этом можно положить  $\frac{l_{x,y}}{z_0} \ll 1$ , что выполняется с очень высокой точностью.

В наших рассуждениях мы будем использовать один предельный случай: электронный пучок не симметричен его вертикальный размер много меньше размера по радиальному направлению. Распределение частиц будем считать гауссовым:

$$h_{x,y}(\eta_{x,y}) = \frac{N_e}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x',y'}} \exp \left[ -\frac{\eta_{x,y}^2}{2\sigma_{x',y'}^2} \right] \quad (1.36)$$

Для удобства перепишем это распределение в нормализованных единицах, помня  $\sigma_{x',y'} = \epsilon_{x',y'}/\beta_{x',y'}$ , где  $\epsilon_{x',y'}$  — вертикальный и горизонтальный эмиттансы,  $\beta_{0x',y'}$  — минимум бета-функции, обычно минимум бета-функции выбирают в середине ондулятора. Нормализованные единицы для  $\hat{\beta}_0 = \beta_0$  и  $\hat{\epsilon} = (\omega/c)\epsilon$

$$h(\hat{\eta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\epsilon}/\hat{\beta}}} \exp \left[ -\frac{\hat{\eta}^2 \hat{\beta}_0}{2\hat{\epsilon}^2} \right] \quad (1.37)$$

Как уже упоминалось мы будем рассматривать предельный случай  $\epsilon_{y'}/\beta_{y'} \ll 1$ , в то время как  $\hat{\beta}_{0x,y} \sim 1$ , поэтому просто  $\epsilon_{y'} \ll 1$ . Теперь можно записать интенсивность поля следующий образом:

$$\hat{I} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\epsilon}/\hat{\beta}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\eta}_x \text{sinc}^2(\zeta) \exp \left[ -\frac{\hat{\eta}_x^2 \hat{\beta}_{0x}}{2\hat{\epsilon}_x} \right], \quad (1.38)$$

Где мы ввели  $\zeta = \frac{\hat{C}}{2} + \frac{1}{4}(\hat{\theta}_x - \hat{\eta}_x)^2 + \frac{1}{4}\hat{\theta}_y^2$ . Здесь мы учли, что распределение по  $y$  действует как дельта-функция. Предыдущее уравнение упрощается дальше в пределе  $\hat{\epsilon}_x \hat{\beta}_x \gg 1$ , опять же помня, что и  $\hat{\beta}_x \sim 1$ , получается  $\hat{\epsilon}_x \gg 1$ . Ширина  $\text{sinc}^2(\zeta)$  много больше ширины гауссовского распределения, ширина

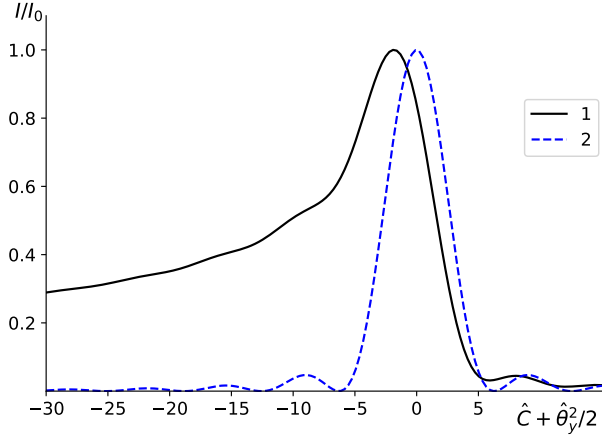


Рис. 6

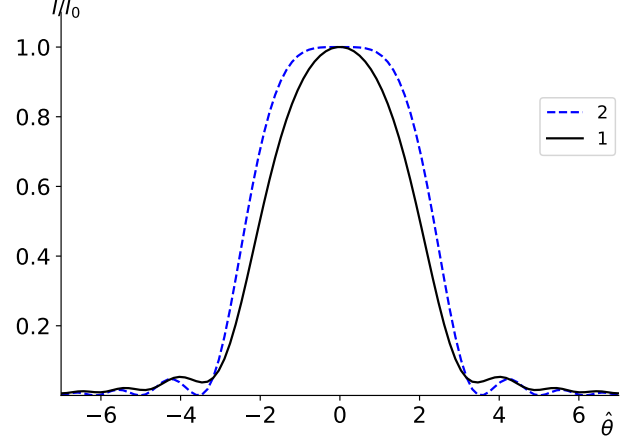


Рис. 7

которого  $\hat{\epsilon}_x$ , поэтому интеграл будет набираться в пике кардинального синуса и экспоненту можно вынести с аргументом:  $\hat{\eta}_x = \hat{\theta}_x$ :

$$\hat{I} = \frac{\exp\left[-\hat{\theta}_x^2 \hat{\beta}_{0x}/2\hat{\epsilon}_x\right]}{\sqrt{2\pi\hat{\epsilon}/\hat{\beta}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\eta}_x \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\hat{C}}{2} + \frac{1}{4}(\hat{\theta}_x - \hat{\eta}_x)^2 + \frac{1}{4}\hat{\theta}_y^2\right) \quad (1.39)$$

Этот интеграл можно взять численно. На 6 представлены: линия 1.: спектр излучения пучка с  $\hat{\epsilon}_x \rightarrow \infty$   $\hat{\epsilon}_x \rightarrow 0$ , линия 2.: спектр одиночного электрона как функция  $\hat{C} + \hat{\theta}_y^2/2$  при  $\hat{\theta}_x = 0$ , на рис. 7 тоже для распределения интенсивности по углам.

## Фурье оптика

В этой главе мы предложим наглядный подход к решению задачи о распространении волнового фронта в пустом пространстве, его прохождении через систему линзу. Приведённые результаты напрямую могут быть использованы в программном коде. Распределение поля в начальный момент времени будем считать гауссовским, однако, как будет видно из изложения, подход может быть использован для произвольного распределения поля. В наших выкладках мы в полной мере следуем подходу (Салдин, Serkez), более детальное описание можно найти в (Гудман)

## Распространение света в пустом пространстве

Наши рассуждения мы начнём с волнового уравнения в пустом пространстве ( $\vec{j} = 0, \rho = 0$ ).

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (2.1)$$

В  $r\omega$ -пространстве уравнение приобретает знакомый вид уравнения Гельмгольца, где  $k_0 = \omega/c$ .

$$k_0^2 \vec{\tilde{E}} + \nabla^2 \vec{\tilde{E}} = 0 \quad (2.2)$$

Совершив фурье-преобразование в  $k$ -пространство по координатам  $x, y$ , которое определим схожим образом с 1.9:

$$\vec{\tilde{E}}(\vec{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \vec{E}(\vec{r}, t) \exp[ik_x x + ik_y y] \quad (2.3)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \vec{\tilde{E}}(\vec{k}, \omega) \exp[-ik_x x - ik_y y],$$

получим:

$$k_0^2 \left(1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}\right) \vec{\tilde{E}} + \frac{d^2 \vec{\tilde{E}}}{dz^2} = 0 \quad (2.4)$$

Теперь можно напрямую можно получить решение этого обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\vec{\tilde{E}}(\omega, k_x, k_y, z) = \vec{\tilde{E}}(\omega, k_x, k_y, 0) \exp \left[ ik_0 z \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}} \right] \quad (2.5)$$

Введём функцию отклика среды:

$$H(k_x, k_y, z) = \frac{\vec{\tilde{E}}(\omega, k_x, k_y, z)}{\vec{\tilde{E}}(\omega, k_x, k_y, 0)} = \exp \left[ ik_0 z \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}} \right] \quad (2.6)$$

$$H(k_x, k_y, z) \cong \exp[k_0 z] \exp \left[ -\frac{iz}{2k_0} (k_x^2 + k_y^2) \right]$$

Видно, чтобы получить распределение электромагнитного поля на некотором расстоянии  $z$ , необходимо совершить обратное преобразование Фурье в  $xy$ -пространство. Таким образом решение волнового уравнения сводится к трём относительно простым операциям: первое, — перевод начального распределения в  $k_x k_y$ -пространство, далее домножение получившегося распре-

деления на функцию отклика среды, в нашем случае пустое пространство, и последний шаг, — обратное преобразование Фурье.

### Действие тонкой линзы на волновой фронт

В этом параграфе мы построим элементарную оптическую систему, состоящую из пустого промежутка, -  $d_1$ , тонкой линзы с оптической силой, -  $1/f$  и ещё одного пустого промежутка до плоскости изображения. Действие тонкой линзы мы представим как прибавление к фазе волны следующего выражения:

$$T_f(x, y) = \exp \left[ -\frac{ik_0}{2f}(x^2 + y^2) \right] \quad (2.7)$$

Для предметности обсуждения определим Гауссов пучок:

$$\overline{E}(x, y, 0) = A \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right] \quad (2.8)$$

После Фурье преобразования в  $k_x k_y$ -пространстве мы получим:

$$\hat{E}(k_x, k_y, 0) = A\pi w_0^2 \exp \left[ -\frac{w_0^2}{4}(k_x^2 + k_y^2) \right] \quad (2.9)$$

После домножения этого распределения поля в  $k_x k_y$ -пространстве на функцию отклика пустого промежутка, получим

$$\begin{aligned} \hat{E}(k_x, k_y, z) &= \hat{E}(k_x, k_y, z) H(k_x, k_y, z) \\ &= A\pi w_0^2 \exp \left[ -\frac{w_0^2}{4}(k_x^2 + k_y^2) \right] \exp[k_0 z] \exp \left[ -\frac{iz}{2k_0}(k_x^2 + k_y^2) \right] \\ &= A\pi w_0^2 \exp[k_0 z] \exp \left[ -\frac{iq}{2k_0}(k_x^2 + k_y^2) \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

здесь мы ввели  $q = z - iz_R$ , где  $z_R = \frac{k_0 w_0^2}{2}$ . После перехода обратно в  $xy$ -

пространство, получим:

$$\bar{E}(x, y, z) = \frac{iAk_0w_0^2}{2q} \exp[k_0z] \exp\left[-i\frac{k_0}{2q}(x^2 + y^2)\right], \quad (2.11)$$

Теперь можно воспользоваться выражением для тонкой линзы и получить:

$$\begin{aligned} \bar{E}_l(x, y, z) &= T_f(x, y) \bar{E}(x, y, z) = \\ &= \frac{iAk_0w_0^2}{2q} \exp[k_0z] \exp\left[-i\frac{k_0}{2q}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{ik_0}{2f}(x^2 + y^2)\right] \\ &= \frac{iAk_0w_0^2}{2q} \exp[k_0z] \exp\left[-i\frac{k_0}{2q_l}(x^2 + y^2)\right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\frac{1}{q_l} = \frac{1}{q} - \frac{1}{f}$ . Теперь можно подвести итог: после распространения волнового фронта на расстояние  $d_1$  параметр  $q$  преобразуется:

$$q(d_1) = q(0) + d_1, \quad (2.13)$$

далее на него действует линза:

$$\frac{1}{q_l} = \frac{1}{q(0) + d_1} - \frac{1}{f}, \quad (2.14)$$

и ещё один пустой промежуток, до места, где волновой фронт опять будет плоским:

$$q(d_1 + d_2) = q_l + d_2, \quad (2.15)$$

Условие того, что волновой фронт плоский мы сформулируем так, что  $q(d_1 + d_2) = -i\frac{k_0w_2^2}{2}$ , что легко проверятся подстановкой в 2.10. Получим уравнение:

$$-i\frac{k_0w_2^2}{2} = q_l + d_2, \quad (2.16)$$



где, приравниванием мнимых частей получим:

$$w_2^2 = \frac{f^2 w_1^2}{(f - d_1)^2 + (k_0 w_1^2 / 2)^2} \quad (2.17)$$

то же для реальных частей:

$$d_2 = f + f^2 \frac{(d_1 - f)}{(d_1 - f)^2 + (k_0 w_1^2 / 2)^2} \quad (2.18)$$

Из последнего уравнения видно, что если положить перетяжку гауссового пучка раной нулю, то выражение переходит в обычное соотношение геометрической оптики.

В приведённой главе мы дали краткий путь того, как можно очень эффективно и относительно просто использовать Фурье оптику для написания симуляционных кодов при проектировании оптических систем. В качестве примера, для заинтересованных читателей на веб-странице (веб-страница) приведёт код простой оптической системы, который в полной мере используют результаты вышеприведённого параграфа. Код был написан автором данной рукописи рамках курса «Основы вычислительной физики», который читается на физическом факультете НГУ. Дальнейшие комментарии к коду можно найти в репозитории указанной по ссылке.

### **Краткий обзор дифракции на кристаллах**

В этой главе мы кратко дадим основные результаты кинетической и динамической теории дифракции. Основные кристаллы используемы на синхротронных источниках третьего и четвёртого поколений - это *Si* (кремний), *C* (алмаз) и реже *Ge* (германий), в виду своей кубической кристаллической решётки, эти кристаллы относительно просты для анализа. Для нас важны такие свойства кристаллов, как способность преобразовать относительно широкий спектр излучения ондулятора, в излучение с относительной монохроматичностью до  $\Delta E/E \sim 10^{-4}$ , а также поглощательные способности кристаллов, что в значительной степени снижает тепловые нагрузки на оптические элементы.

## Симметричное брэгговское отражение от идеально кристалла

Длины волн, которые отвечают резонансу при отражении падающего под углом  $\theta$  к плоскости кристалла излучения, даётся законом Брэгга:

$$m\lambda = 2d \sin \theta, \quad (3.1)$$

где  $d$  — расстояние между плоскостями от которых происходит отражение, а  $m$  — некоторое положительно целое число. Основным результатом, который мы будем использовать, это кривая Дарвина, которая определяет угловой акцептанс излучения. Динамическая и кинематическая теории дифракции дают конечную ширину  $\Delta\theta$ , которую кристалл может принять излучение, а также некоторый сдвиг, относительно предполагаемого брэгговского угла. На рис. 8 показаны характерные кривые отражения. По ним видно, что чем больше энергия падающего пучка излучения, тем уже кривая и ближе к даваемому законом брэгга углу. При расчёте кристаллов монохроматоров этот факт необходимо учитывать, так как излучение не попавшее в акцептанс кристалла будет поглощаться и выделять в нем тепло.

## Поглощательные способности кристаллов

Одним из полезных применений кристаллов в рентгеновском диапазоне есть их фильтрующая способность, отрезать низкие энергии, в особенности для алмазных кристаллов, которые, по мимо всего, имеют хорошую теплопроводность, что способствуют быстрому теплоотводу. На рис. 9 представлена кривая поглощения 100 мкм кристалла алмаза. Подобные кристаллы устанавливают перед первыми оптическими элементами, что в значительной степени снижает тепловые нагрузки, подавлением низших гармоник.

## Проектирование рентгенооптических трактов для Сибирского Кольцевого Источника Фонов

В данной главе мы рассмотрим схемы рентгенооптических трактов (здесь и далее, - бимлайнов), от источников высокого энергетических фотонов, - вставных устройств до деталей оптических компотен на билайне: фильтров, монохроматоров, рентгеновских зеркал. По большей части, будут обсуждаться станции первой очереди: 1-1 — «Микрофокус», 1-2 — «Структурная диагностика», 1-4 — «XAFS-спектроскопия и магнитный дихроизм».

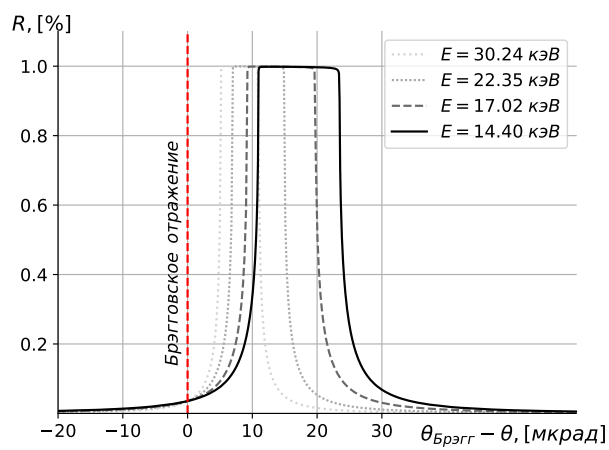


Рис. 8

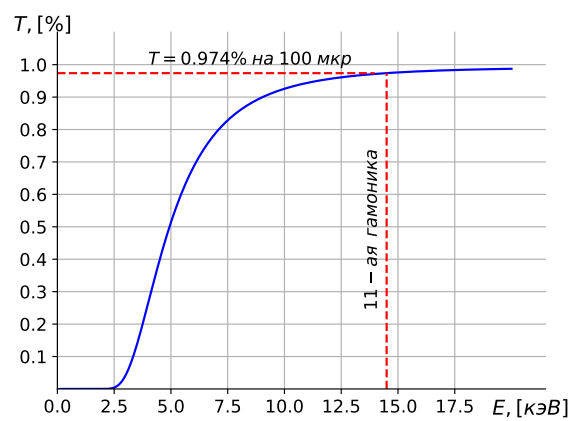


Рис. 9