

## Излучение релятивистской электрона в синусоидальном магнитном поле

В этой части мы дадим вывод излучения релятивистского электрона в  $r\omega$ -пространстве, движущегося в синусоидальном магнитном поле. Единственно приближение, которым мы будем пользоваться, — прааксиальное приближение. Вывод интересен тем, что даёт наглядное представление о спектре частицы, угловом распределении интенсивности в зависимости от резонансной частоты. В заключении главы, будет приведён вывод распределения электромагнитного поля(в ближней зоне???) через потенциалы Лиенара-Вихерта, будет получен результат, который даст представление о методах используемых в численных симуляциях, на примере кода SRW. В наших рассуждениях мы следовали (Салдин Гелони)

### Уравнение движения электрона в ондуляторе

Выведем спектр излучения из ондулятора. Вывод начнём с уравнения движение релятивистского электрона в магнитном поле.

$$\vec{F} = e[\vec{v} \times \vec{B}], \quad (1.1)$$

где  $e$  — заряд электрона, а  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  скорость частицы и магнитное поле соответственно. Уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{\gamma m_e}[\vec{v} \times \vec{B}], \quad (1.2)$$

где  $\gamma$  — лоренц фактор, появившийся из релятивистского импульса. Направим ось  $z$  вдоль направления релятивистского движения электрона и введём магнитное поле в ондуляторе  $B_0 \cos(k_w z)$ , направленное вдоль оси  $y$ , где  $k_w$  связана с периодом ондулятора следующим образом  $k_w = 2\pi/\lambda_w$ .

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{eB_0}{\gamma m_e} \frac{dz}{dt} \cos(k_w z) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{eB_0}{\gamma m_e} \frac{dx}{dt} \cos(k_w z) \end{cases} \quad (1.3)$$

один раз интегрируя первой уравнение из системы с заменой  $dz = \beta c dt$ ,

где  $\beta = \|\vec{v}\|/c$ , можно получить:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{eB_0}{\gamma m_e k_w} \sin(k_w z) \quad (1.4)$$

Введём коэффициент ондуляторности —  $K = \frac{eB_0 \lambda}{2\pi m_e k_w}$ , который показывает угол отклонения электрона от оси  $z$ (?????).

Подставляя получившийся результат 1.4 во второе уравнение системы 1.3 и интегрируя с пределами интегрирования от 0 до некоторого  $z_0$ , получим систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{Kc}{\gamma} \sin(k_w z) \\ \frac{dz}{dt} = \beta c - \frac{K^2 c}{2\gamma^2 \beta} \sin^2(k_w z) \end{cases} \quad (1.5)$$

Проинтегрировав оба уравнения(в каких пределах?), получим (Wiedemann),

$$\begin{cases} x = \frac{Kc}{\gamma k_w \beta} \cos(k_w \bar{\beta} ct) \\ z = \bar{\beta} ct + \frac{K^2}{8\beta^2 \gamma^2 k_w} \sin(2k_w \bar{\beta} ct), \end{cases} \quad (1.6)$$

где было введено обозначение  $\bar{\beta}$ , которое определяется как  $\bar{\beta}c = \beta c(1 - \frac{K^2}{4\beta^2 \gamma^2})$ . Из 1.5 видно, что продольная скорость испытывает осцилляции с удвоенной частотой...

### Решение волнового уравнения в прааксиальном приближении

Вывод спектра излучения будем проводить в  $r\omega$ -пространстве. Начнём с уравнений Максвелла в вакууме:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ [\nabla \times \vec{E}] = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt} \\ [\nabla \times \vec{B}] = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{D}}{dt} \end{cases} \quad (1.7)$$

Из уравнений тривиально можно получить неоднородное волновое уравнение (какая калибровка?):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + c^2 \nabla^2 \vec{E} = 4\pi c^2 \nabla \rho + 4\pi \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (1.8)$$

Это же уравнение перепишем в  $r\omega$ -пространстве, определив преобразование Фурье следующим образом:

$$\vec{\tilde{E}}(r, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{E}(r, t) \exp[-i\omega t] \quad (1.9)$$

$$\vec{E}(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{\tilde{E}}(r, t) \exp[i\omega t]$$

Применив к уравнению 1.8, получим:

$$\omega^2 \vec{\tilde{E}} + c^2 \nabla^2 \vec{\tilde{E}} = 4\pi c^2 \nabla \tilde{\rho} - 4i\pi\omega \vec{\tilde{j}} \quad (1.10)$$

Перепишем это уравнение в приближении медленно меняющейся амплитуды в сравнение с частотой осцилляций, что есть  $\vec{\tilde{E}} = \vec{\tilde{E}} \exp[i\omega z/c]$ , в приближении  $\frac{\partial |E|}{\partial z} \ll \frac{\omega}{c} |E|$ . Где временная зависимость разложена до нулевого порядка малости, исходя из уравнения 1.6. Получим:

$$c^2 \left( \nabla^2 \vec{\tilde{E}} - \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial \vec{\tilde{E}}}{\partial z} \right) \exp[i\omega z/c] = 4\pi c^2 \nabla \tilde{\rho} - 4i\pi\omega \vec{\tilde{j}} \quad (1.11)$$

Для электрона движущегося в вакууме ток и плотность заряда выражается через дельта-функцию Дирака:

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= -e\delta(\vec{r} - \vec{r}(t)) = -\frac{e}{v_z(z)} \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}_\perp(z)) \delta\left(\frac{s(z)}{v} - t\right) \\ \vec{j}(r, t) &= \vec{v}\rho(r, t) \end{aligned} \quad (1.12)$$

В  $r\omega$ -пространстве:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(r, \omega) &= -\frac{e}{v_z(z)} \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp(z)) \exp\left[\frac{i\omega s(z)}{v}\right] \\ \tilde{j}(r, \omega) &= \vec{v} \tilde{\rho}(r, \omega)\end{aligned}\quad (1.13)$$

Подставим фурье-образы плотности тока и заряда в уравнение 1.11, (где производная по градиентному члену?)

$$\nabla^2 \vec{\tilde{E}} - \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial \vec{\tilde{E}}}{\partial z} = \frac{4\pi e}{v_z(z)} \exp\left[i\omega\left(\frac{s(z)}{v} - \frac{z}{c}\right)\right] \left(\frac{i\omega}{c^2} \vec{v}(z) - \nabla\right) \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp(z)) \quad (1.14)$$

Получившиеся уравнение является точным. Теперь мы можешь применить ультрарелятивистское приближение  $\gamma \gg 1$ .

$$\begin{aligned}\nabla_\perp^2 \vec{\tilde{E}}_\perp - \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial \vec{\tilde{E}}_\perp}{\partial z} &= \frac{4\pi e}{v_z(z)} \exp\left[i\omega\left(\frac{s(z)}{v} - \frac{z}{c}\right)\right] \times \\ &\left(\frac{i\omega}{c^2} \vec{v}_\perp(z) - \nabla_\perp\right) \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp(z))\end{aligned}\quad (1.15)$$

Вторая производная по  $z$ , появляющаяся из оператора Лапласа полагается много меньшим по сравнению с первой производной по  $z$  в уравнении 1.15 исходя из предположения медленно меняющейся амплитуды.

Перед нами неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных, которое решается с помощью функции Грина. Для дифференциального оператора  $\partial_t - k\nabla_{2D}^2$  функция Грина есть:  $\frac{1}{4\pi kt} \exp[-\rho^2/4kt]$ . В частности для уравнения 1.15

$$G(z_0 - z'; \vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_\perp) = -\frac{1}{4\pi(z_0 - z')} \exp\left[i\omega \frac{|\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_\perp|^2}{2c(z_0 - z')}\right] \quad (1.16)$$

Получим решение для функции распределения поля:

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = & -\frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dz' d\vec{r}' \frac{1}{z_0 - z'} \left( \frac{i\omega}{c^2} \vec{v}_{\perp}(z') - \nabla'_{\perp} \right) \delta(\vec{r}'_{\perp} - \vec{r}'_{\perp}(z')) \times \\ & \exp \left[ i\omega \left( \frac{|\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}(z')|^2}{2c(z_0 - z')} + \frac{s(z')}{v} - \frac{z'}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

Проинтегрировав по  $d\vec{r}'$  получим общее решение уравнения 1.14 :

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = & -\frac{i\omega e}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{z_0 - z'} \left( \frac{\vec{v}_{\perp}(z')}{c} - \frac{\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}(z')}{(z_0 - z')} \right) \times \\ & \exp \left[ i\omega \left( \frac{|\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r}'_{\perp}(z')|^2}{2c(z_0 - z')} + \frac{s(z')}{v} - \frac{z'}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.18)$$

Что есть распределение электромагнитного поля в точке наблюдения  $\vec{r}_0$ .

### Излучение планарного ондулятора

В этой секции мы рассмотрим излучение планарного ондулятора используя наши предыдущие результаты 1.19 и 1.6. Сперва проанализируем получившиеся распределение поля 1.19: в случае ондулятора, член  $(z_0 - z')^{-1}$  можно разложить около точки  $z'$ , так как размер ондулятора много меньше чем расстояние, с которого мы наблюдаем излучение:  $\lambda_w N \ll z_0$ , где  $N$  число периодов ондулятора.

Воспользовавшись решениями 1.5 и 1.6 и помня  $\vec{r}_{\perp 0}/z_0 = \vec{\theta}$  преобразуем уравнение 1.19 к виду:

$$\vec{\tilde{E}}_{\perp}(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{i\omega e}{c^2 z_0} \exp \left[ i \frac{\omega \theta^2 z_0}{2c} \right] \int_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp[i\Phi_T] \left( \frac{K}{\gamma} \sin(k_w z) \vec{e}_x + \vec{\theta} \right) \quad (1.19)$$

Здесь мы отбросили члены первого и большего порядка малости по  $1/z_0$ . Где за  $\Phi_T$  мы обозначили:

$$\Phi_T = \left( \frac{\omega}{2c\gamma^2} + \frac{\omega \vec{\theta}^2}{2c} \right) z' - \frac{K^2}{8\gamma^2 k_w c} \omega \sin(2k_w z') - \frac{K\theta_x}{\gamma} \frac{\omega}{k_w c} \cos(k_w z'), \quad (1.20)$$

где  $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + K^2/2}}$ .

Пределы интегрирования ограничили по длиной ондулятора от  $-\lambda_w N/2$  до  $\lambda_w N/2$ , считая вклад в излучение от ондулятора доминирующим надо остальными вкладами от соответствующих участков траектории. На это шаге уже можно заметить, что излучение на оси будет линейно поляризовано, это есть вклад члена с током, вклад же плотности заряда или градиентный член, даёт вариацию поляризации, при наблюдении под некоторым углом  $\theta$  к оси.

Если переписать 1.19 в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = & \frac{i\omega e}{c^2 z_0} \exp\left[i\frac{\omega\theta^2 z_0}{2c}\right] \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} J_m\left(-\frac{K^2 \omega}{8\gamma^2 k_w c}\right) J_n\left(-\frac{K\theta_x \omega}{\gamma k_w c}\right) \times \\ & \exp\left[\frac{i\pi n}{2}\right] \int_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp[i(2m+n)k_w z'] \left(\frac{K}{2i\gamma} (\exp[2ik_w z'] - 1) \vec{e}_x + \vec{\theta} \exp[ik_w z']\right) \times \\ & \exp\left[i\left(k_w \frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega\theta^2}{2c}\right) z'\right], \end{aligned} \quad (1.21)$$

Где мы ввели  $\omega = \omega_r + \Delta\omega$ ,  $\omega_r = 2c\tilde{\gamma}^2 k_w$  и использовали формулу Якоби — Ангера:

$$\begin{aligned} \exp[iz \cos(\theta)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) \exp[in\theta] \\ \exp[iz \sin(\theta)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \exp[in\theta] \end{aligned} \quad (1.22)$$

До сих пор мы пользовались только двумя приближениями, — медленно меняющейся амплитудой и параксиальным приближением, теперь можем воспользоваться следующим параметром — количеством периодов ондулятора, —  $N$ . Для этого обратим внимание на первой слагаемое в фазовом множителе под интегралом, и заметим, что если  $k_w \frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega\theta^2}{2c} \ll k_w$ , то фаза меняется медленно на одном периоде и эта фаза не занулит интеграл. Отметим, что

для резонанса условия должны выполняться по отдельности, т.е.  $\frac{\Delta\omega}{\omega_r} \ll 1$  и  $\frac{\omega\theta^2}{2c} \ll 1$ , последнее даёт углы наблюдения вблизи резонанса:  $\theta^2 \ll \frac{1}{\tilde{\gamma}^2}$ . Теперь

необходимо обратить внимание на аргументы функций Бесселя, а именно:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{K^2 \omega}{8\gamma^2 k_w c} \\ v &= -\frac{K\theta_x \omega}{\gamma k_w c} = -\frac{K\theta_x}{\gamma} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_r}\right) 2\tilde{\gamma}^2 \lesssim \frac{2K\theta_x \tilde{\gamma}}{\sqrt{1 + K^2/2}} \lesssim \theta_x \tilde{\gamma} \ll 1 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Зная, что  $J_\alpha(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^{2\beta+\alpha}$ , видим, что вклад нулевого порядка по  $\theta_x \tilde{\gamma}$ , т.е.  $J_\alpha(x) \sim 1$  даёт только функция Бесселя с индексом  $n = 0$ . Здесь мы пока не учитываем градиентный член пропорциональный  $\vec{\theta}$ , таким образом из оставшихся фазовых множителей можно выписать условия на индекс  $m$ . Они определяются нулями в аргументах соответствующих фаз или  $m = -1$  и  $m = 0$ , оба оставшихся члена пропорциональны  $\frac{K}{\gamma}$ .

Теперь вернёмся к градиентному члену, вклад от которого занулиться при усреднении по длине ондулятора при  $n = 0$ , этот вклад даст ненулевой вклад при  $n = 1 - 2m$ , т.о. в ход пойдут следующие члены разложения  $J_m(v)$ . Однако, помня интересующий нас диапазон углов, члены разложения будут порядка  $\theta_x v^m$ , очевидно, что их вклады пренебрежимо малы по сравнению с вкладами не градиентного члена  $\vec{e}_x$ . Учитывая выше сказанные приближения, перепишем 1.21

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) &= \frac{\omega e}{2c^2 z_0} \frac{K}{\gamma} \exp\left[i \frac{\omega \theta^2 z_0}{2c}\right] \left(J_1(v) - J_0(v)\right) \vec{e}_x \times \\ &\int_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp\left[i \left(k_w \frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega \vec{\theta}^2}{2c}\right) z'\right], \end{aligned} \quad (1.24)$$

Интеграл легко берётся:

$$\vec{E}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e}{2c^2 z_0} \frac{K}{\gamma} \exp\left[i \frac{\omega \theta^2 z_0}{2c}\right] \text{sinc}\left[i \left(k_w \frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega \vec{\theta}^2}{2c}\right) L/2\right] \vec{e}_x, \quad (1.25)$$

где введено обозначение:  $A_{JJ} = J_1(v) - J_0(v)$

## Фурье оптика

В этой главе мы предложим наглядный подход к решению задачи о распространении волнового фронта в пустом пространстве, его прохождении через систему линз и другие оптические элементы. Приведённые результаты напрямую могут быть использованы в программном коде. Распределение поля в начальный момент времени будем считать гауссовским, однако, как будет показано, развитый подход может быть использован для произвольного распределения поля. В наших выкладках мы следуем подходу (Гудман, Салдин, Serkez)

### Распространение света в пустом пространстве

Наши рассуждения мы начнём с волнового уравнения в пустом пространстве ( $\vec{j} = 0, \rho = 0$ ).

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (2.1)$$

В  $r\omega$ -пространстве уравнение приобретает знакомый вид уравнения Гельмгольца, где  $k_0 = \omega/c$ .

$$k_0^2 \vec{\tilde{E}} + \nabla^2 \vec{\tilde{E}} = 0 \quad (2.2)$$

Совершив фурье-преобразование в  $k$ -пространство по координатам  $x, y$ , которое определим схожим образом с 1.9:

$$\vec{\tilde{E}}(\vec{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \vec{E}(\vec{r}, t) \exp[ik_x x + ik_y y] \quad (2.3)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \vec{\tilde{E}}(\vec{k}, \omega) \exp[-ik_x x - ik_y y],$$

получим:

$$k_0^2 \left(1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}\right) \vec{\tilde{E}} + \frac{d^2 \vec{\tilde{E}}}{dz^2} = 0 \quad (2.4)$$

Теперь можно напрямую получить решение этого обыкновенного



дифференциального уравнения:

$$\vec{\hat{E}}(\omega, k_x, k_y, z) = \vec{\hat{E}}(\omega, k_x, k_y, 0) \exp \left[ ik_0 z \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}} \right] \quad (2.5)$$

Введём функцию отклика среды:

$$H(k_x, k_y, z) = \frac{\vec{\hat{E}}(\omega, k_x, k_y, z)}{\vec{\hat{E}}(\omega, k_x, k_y, 0)} = \exp \left[ ik_0 z \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}} \right] \quad (2.6)$$

Видно, чтобы получить распределение электромагнитного поля на некотором расстоянии  $z$ , необходимо совершить обратное преобразование Фурье в  $x$ - $y$ -пространство. Таким образом решение волнового уравнения сводиться к трём относительно простым операциям: первое, — перевод начального распределения в  $k_x k_y$ -пространство, далее домножение получившегося распределения на функцию отклика среды, в нашем случае пустое пространство, и последний шаг, — обратное преобразование Фурье.

## Действие тонкой линзы на волновой фронт

Тонкая линза