Выведем спектр излучения из ондулятора. Вывод начнём с уравнения движение релятивистского электрона в магнитном поле.

$$\vec{F} = e \cdot [\vec{v} \times \vec{B}], \tag{1}$$

где e — заряд электрона, а $\vec{v}$ и $\vec{B}$ скорость частицы и магнитное поле соответственно. Уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{\gamma m_e} \cdot [\vec{v} \times \vec{B}], \tag{2}$$

где γ — лоренц фактор, появившийся из релятивистского импульса. Направим ось z вдоль направления релятивистского движения электрона и введём магнитное поле в ондуляторе $B_0 \cos(k_w z)$, направленное вдоль оси y, где k_w связана с периодом ондулятора следующим образом $k_w = \frac{2\pi}{\lambda_w}$.

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{eB_0}{\gamma m_e}\frac{dz}{dt}\cos(k_w z) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{eB_0}{\gamma m_e}\frac{dx}{dt}\cos(k_w z) \end{cases} \tag{3}$$

один раз интегрируя первой уравнение из системы с заменой $dz = \beta c dt$, где $\beta = \frac{\|\vec{v}\|}{c}$, можно получить:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{eB_0}{\gamma m_e k_w}\sin(k_w z) \tag{4}$$

Введём известный коэффициент ондуляторности — $K = \frac{eB_0\lambda}{2\pi m_e k_w}$, который показывает угол отклонения электрона от оси z.

Подставляя получившийся результат 4 во второе уравнение системы и интегрируя с пределами интегрирования от 0 до некоторого z_0, получим систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{Kc}{\gamma}\sin(k_w z) \\ \frac{dz}{dt} = \beta c - \frac{K^2 c}{2\gamma^2\beta}\sin^2(k_w z) \end{cases} \tag{5}$$

Проинтегрировав оба уравнения(в каких пределах?), получим,

$$\begin{cases} x = -\frac{Kc}{\gamma k_w \beta}\cos(k_w z) \\ z = \overline{\beta} ct + \frac{K^2}{8\beta^2\gamma^2 k_w}\sin(2k_w z), \end{cases} \tag{6}$$

где был введено обозначение $\overline{\beta}$, которое определяется как $\overline{\beta}c = \beta c(1 - \frac{K^2}{8\beta^2\gamma^2 k_w})$