Излучение релятивистской частицы

Уравнение движения

Выведем спектр излучения из ондулятора. Вывод начнём с уравнения движение релятивистского электрона в магнитном поле.

$$\vec{F} = e[\vec{v} \times \vec{B}], \tag{1.1}$$

где e — заряд электрона, а $\vec{v}$ и $\vec{B}$ скорость частицы и магнитное поле соответственно. Уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{\gamma m_e}[\vec{v} \times \vec{B}], \tag{1.2}$$

где γ — лоренц фактор, появившийся из релятивистского импульса. Направим ось z вдоль направления релятивистского движения электрона и введём магнитное поле в ондуляторе $B_0 \cos(k_w z)$, направленное вдоль оси y, где k_w связана с периодом ондулятора следующим образом $k_w = 2\pi/\lambda_w$.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{eB_0}{\gamma m_e}\dfrac{dz}{dt}\cos(k_w z) \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{eB_0}{\gamma m_e}\dfrac{dx}{dt}\cos(k_w z) \end{cases} \tag{1.3}$$

один раз интегрируя первой уравнение из системы с заменой $dz = \beta c dt$, где $\beta = \|\vec{v}\|/c$, можно получить:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{eB_0}{\gamma m_e k_w}\sin(k_w z) \tag{1.4}$$

Введём известный коэффициент ондуляторности — $K = \dfrac{eB_0\lambda}{2\pi m_e k_w}$, который показывает угол отклонения электрона от оси z(?????).

Подставляя получившийся результат 1.4 во второе уравнение системы и интегрируя с пределами интегрирования от 0 до некоторого z_0, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{Kc}{\gamma}\sin(k_w z) \\ \dfrac{dz}{dt} = \beta c - \dfrac{K^2 c}{2\gamma^2\beta}\sin^2(k_w z) \end{cases} \tag{1.5}$$

Проинтегрировав оба уравнения(в каких пределах?), получим,

$$\begin{cases} x = -\dfrac{Kc}{\gamma k_w \beta}\cos(k_w z) \\ z = \overline{\beta} ct + \dfrac{K^2}{8\beta^2\gamma^2 k_w}\sin(2k_w z), \end{cases} \tag{1.6}$$

где был введено обозначение $\overline{\beta}$, которое определяется как $\overline{\beta}c = \beta c(1 - \dfrac{K^2}{8\beta^2\gamma^2 k_w})$

Спектр излучения

Вывод спектра излучения будем проводить в $r\omega$-пространстве. Начнём с уравнений Максвелла в вакууме:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ [\nabla \times \vec{E}] = -\dfrac{1}{c}\dfrac{d\vec{B}}{dt} \\ [\nabla \times \vec{B}] = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{d\vec{D}}{dt} \end{cases} \tag{1.7}$$

Из уравнений тривиально можно получить неоднородное волновое уравнение(какая калибровка?):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + c^2\nabla^2\vec{E} = 4\pi c^2 \nabla\rho + 4\pi\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \tag{1.8}$$

Это же уравнение перепишем в $r\omega$-пространстве, определив преобразование Фурье следующим образом:

$$\vec{\tilde{E}}(r,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\vec{E}(r,t)\exp[-i\omega t]$$

$$\vec{E}(r,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\vec{\tilde{E}}(r,t)\exp[i\omega t] \tag{1.9}$$

Применив к уравнению 1.8, получим:

$$\omega^2\vec{\tilde{E}} + c^2\nabla^2\vec{\tilde{E}} = 4\pi c^2\nabla\widetilde{\rho} - 4i\pi\vec{\tilde{j}} \tag{1.10}$$

Для одного электрона движущегося в вакууме ток и плотность заряда выражается через дельта-функцию Дирака: $\rho(r,t) = -e\delta(\vec{r} - \vec{r'(t)}) = -\frac{e}{v_z(z)}\delta(\vec{r_\perp} - \vec{r'_\perp(t)})\delta(\frac{s(x)}{v} - t)$ и $j(r,t) = \vec{v}\rho(r,t)$. В $r\omega$-пространстве $\widetilde{\rho}(r,\omega) = -\frac{e}{v_z(z)}\delta(\vec{r_\perp} - \vec{r'_\perp(t)})\exp\left[\frac{iws(z)}{v}\right]$ и, соответственно, $\widetilde{\vec{j}}(r,\omega) = \vec{v}\widetilde{\rho}(r,\omega)$. Продолжение следует...

Фурье оптика

В этой главе мы предложим наглядный подход к решению задачи о распространение волнового фронта в пустом пространстве, его прохождении через систему линз и другие оптические элементы. Приведённые результаты напрямую могут быть использованы в программном коде. Распределение поля в начальный момент времени будем считать гауссовским, однако, как будет показано, развитый подход может быть использован для произвольного распределения поля. В наших выкладкам мы следуем подходу (Салдин; Гудман)

Распространение света в пустом пространстве

Наши рассуждения мы начнём с волнового уравнения в пустом пространстве ($\vec{j} = 0, \rho = 0$).

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + c^2\nabla^2\vec{E} = 0 \tag{2.1}$$

В $r\omega$-пространстве уравнение приобретает знакомый вид уравнения Гельмгольца, где $k_0 = \omega/c$.

$$k_0^2 \vec{\tilde{E}} + \nabla^2 \vec{\tilde{E}} = 0 \tag{2.2}$$

Совершив фурье-преобразование в k-пространство по координатам x, y, которое определим схожим образом с 1.9:

$$\begin{gathered}
\vec{\tilde{\tilde{E}}}(\vec{k}, \omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dxdy \vec{E}(\vec{r}, t) \exp[ik_x x + ik_x x] \\
\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \vec{\tilde{\tilde{E}}}(\vec{k}, t) \exp[-ik_x x - ik_x x],
\end{gathered} \tag{2.3}$$

получим:

$$k_0^2 \Big(1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2} \Big) \vec{\tilde{\tilde{E}}} + \frac{\mathrm{d}^2 \vec{\tilde{\tilde{E}}}}{\mathrm{d}z^2} = 0 \tag{2.4}$$

Теперь можно напрямую можно получить решение этого обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\vec{\tilde{\tilde{E}}}(\omega, k_x, k_y, z) = \vec{\tilde{\tilde{E}}}(\omega, k_x, k_y, 0) \exp\left[ik_0 z \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}} \right] \tag{2.5}$$

Введём функцию отклика среды:

$$H(k_x, k_y, z) = \frac{\vec{\tilde{\tilde{E}}}(\omega, k_x, k_y, z)}{\vec{\tilde{\tilde{E}}}(\omega, k_x, k_y, 0)} = \exp\left[ik_0 z \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}} \right] \tag{2.6}$$

Видно, чтобы получить распределение электромагнитного поля на некотором расстоянии z, необходимо совершить обратное преобразование Фурье в xy-пространство. Таким образом решение волнового уравнения сводиться к двум относительно простым операциям: первое, — перевод начального распределения в $k_x k_y$-пространство, далее домножение получившегося распределения на функцию отклика среды, в нашем случае пустое пространство, и последний шаг, — обратное преобразование Фурье.

Действие тонкой линзы на волновой фронт

Тонкая линза