Излучение релятивистской электрона в синусоидальном магнитном поле

В этой части мы дадим вывод излучения релятивистского электрона в $r\omega$-пространстве, движущегося в синусоидальном магнитном поле. Единственно приближение, которым мы будем пользоваться, — прааксиальное приближение. Вывод интересен тем, что даёт наглядное представление о спектре частицы, угловом распределении интенсивности в зависимости от резонансной частоты. В заключении главы, будет приведён вывод распределения электромагнитного поля(в ближней зоне???) через потенциалы Лиенара-Вихерта, будет получен результат, который даст представление о методах используемых в численных симуляциях, на примере кода SRW. В наших рассуждениях мы следовали (Салдин Гелони)

Уравнение движения электрона в ондуляторе

Выведем спектр излучения из ондулятора. Вывод начнём с уравнения движение релятивистского электрона в магнитном поле.

$$\vec{F} = e[\vec{v} \times \vec{B}], \tag{1.1}$$

где e — заряд электрона, а $\vec{v}$ и $\vec{B}$ скорость частицы и магнитное поле соответственно. Уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{\gamma m_e}[\vec{v} \times \vec{B}], \tag{1.2}$$

где γ — лоренц фактор, появившийся из релятивистского импульса. Направим ось z вдоль направления релятивистского движения электрона и введём магнитное поле в ондуляторе $B_0 \cos(k_w z)$, направленное вдоль оси y, где k_w связана с периодом ондулятора следующим образом $k_w = 2\pi/\lambda_w$.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{eB_0}{\gamma m_e}\dfrac{dz}{dt}\cos(k_w z) \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{eB_0}{\gamma m_e}\dfrac{dx}{dt}\cos(k_w z) \end{cases} \tag{1.3}$$

один раз интегрируя первой уравнение из системы с заменой $dz = \beta c dt$, где $\beta = \|\vec{v}\|/c$, можно получить:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{eB_0}{\gamma m_e k_w}\sin(k_w z) \tag{1.4}$$

Введём коэффициент ондуляторности — $K = \dfrac{eB_0\lambda}{2\pi m_e k_w}$, который показывает угол отклонения электрона от оси z(?????).

Подставляя получившийся результат 1.4 во второе уравнение системы 1.3 и интегрируя с пределами интегрирования от 0 до некоторого z_0, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{Kc}{\gamma}\sin(k_w z) \\ \dfrac{dz}{dt} = \beta c - \dfrac{K^2 c}{2\gamma^2\beta}\sin^2(k_w z) \end{cases} \tag{1.5}$$

Проинтегрировав оба уравнения(в каких пределах?), получим (Wiedemann),

$$\begin{cases} x = \dfrac{Kc}{\gamma k_w \beta}\cos\big(k_w\overline{\beta}ct\big) \\ z = \overline{\beta}ct + \dfrac{K^2}{8\beta^2\gamma^2 k_w}\sin\big(2k_w\overline{\beta}ct\big), \end{cases} \tag{1.6}$$

где был введено обозначение $\overline{\beta}$, которое определяется как $\overline{\beta}c = \beta c(1 - \dfrac{K^2}{4\beta^2\gamma^2})$ Из 1.5 видно, что продольная скорость испытывает о осцилляции с удвоенной частотой...

Решение волнового уравнения в прааксиальном приближении

Вывод спектра излучения будем проводить в $r\omega$-пространстве. Начнём с уравнений Максвелла в вакууме:

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla\cdot\vec{E} = 0 \\ [\nabla\times\vec{E}] = -\dfrac{1}{c}\dfrac{d\vec{B}}{dt} \\ [\nabla\times\vec{B}] = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.7}$$

Из уравнений тривиально можно получить неоднородное волновое уравнение(какая калибровка?):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + c^2\nabla^2\vec{E} = 4\pi c^2\nabla\rho + 4\pi\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} \tag{1.8}$$

Это же уравнение перепишем в $r\omega$-пространстве, определив преобразование Фурье следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tilde{\vec{E}}(r,\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\vec{E}(r,t)\exp[-i\omega t] \\
\vec{E}(r,\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\tilde{\vec{E}}(r,t)\exp[i\omega t]
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Применив к уравнению 1.8, получим:

$$\omega^2\tilde{\vec{E}} + c^2\nabla^2\tilde{\vec{E}} = 4\pi c^2\nabla\widetilde{\rho} - 4i\pi\omega\tilde{\vec{j}} \tag{1.10}$$

Перепишем это уравнение в приближении медленно меняющейся амплитуды в сравнение с частотой осцилляций, что есть $\tilde{\vec{E}} = \overline{\vec{E}}\exp[i\omega z/c]$, в приближении $\dfrac{\partial|E|}{\partial z} \ll \dfrac{\omega}{c}|E|$. Где временная зависимость разложена до нулевого порядка малости, исходя из уравнения 1.6. Получим:

$$c^2\left(\nabla^2\bar{\vec{E}} - \frac{2i\omega}{c}\frac{\partial\bar{\vec{E}}}{\partial z}\right)\exp[i\omega z/c] = 4\pi c^2\nabla\widetilde{\rho} - 4i\pi\omega\tilde{\vec{j}} \tag{1.11}$$

Для электрона движущегося в вакууме ток и плотность заряда выражается через дельта-функцию Дирака:

$$\begin{aligned}
&\rho(r,t) = -e\delta(\vec{r} - \vec{r'}(t)) = -\frac{e}{v_z(z)}\delta(\vec{r}_\perp - \vec{r'}_\perp(z))\delta(\frac{s(z)}{v} - t) \\
&\vec{j}(r,t) = \vec{v}\rho(r,t)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

В $r\omega$-пространстве:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\rho}(r,\omega) &= -\frac{e}{v_z(z)}\delta(\vec{r}_\perp - \vec{r'}_\perp(z))\exp\left[\frac{iws(z)}{v}\right] \\
\widetilde{\vec{j}}(r,\omega) &= \vec{v}\widetilde{\rho}(r,\omega)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Подставим фурье-образы плотности тока и заряда в уравнение 1.11, (где производная по градиентному члену? добавить это)

$$\nabla^2\tilde{\vec{E}} - \frac{2i\omega}{c}\frac{\partial\tilde{\vec{E}}}{\partial z} = \frac{4\pi e}{v_z(z)}\exp\left[iw\left(\frac{s(z)}{v} - \frac{z}{c}\right)\right]\left(\frac{i\omega}{c^2}\vec{v}(z) - \nabla\right)\delta(\vec{r}_\perp - \vec{r'}_\perp(z)) \tag{1.14}$$

Получившиеся уравнение является точным. Теперь мы можешь применить параксиальное приближении.

$$\nabla^2_\perp\tilde{\vec{E}}_\perp - \frac{2i\omega}{c}\frac{\partial\tilde{\vec{E}}_\perp}{\partial z} = \frac{4\pi e}{v_z(z)}\exp\left[iw\left(\frac{s(z)}{v} - \frac{z}{c}\right)\right]\left(\frac{i\omega}{c^2}\vec{v}_\perp(z) - \nabla_\perp\right)\delta(\vec{r}_\perp - \vec{r'}_\perp(z)) \tag{1.15}$$

Вторая производная по z, появляющаяся из оператора Лапласа полагается много меньшим по сравнению с первой производной по z в уравнении 1.15 исходя из предположения медленно меняющейся амплитуды.

Перед нами неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных, которое решается с помощью функции Грина. Для дифференциального оператора $\partial_t - k\nabla^2_{2D}$ функция Грина есть: $\dfrac{1}{4\pi kt}\exp\left[-\rho^2/4kt\right]$. В частности для уравнения 1.15

$$G(z_0 - z'; \vec{r}_{\perp 0} - \vec{r'}_\perp) = -\frac{1}{4\pi(z_0 - z')}\exp\left[i\omega\frac{|\vec{r}_{\perp 0} - \vec{r'}_\perp|^2}{2c(z_0 - z')}\right] \tag{1.16}$$

Получим решение для функции распределения поля:

$$\vec{\tilde{E}}_\perp(z_0,\vec{r}_{\perp 0},\omega) = -\frac{e}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz' d\vec{r'}\frac{1}{z_0-z'}\left(\frac{i\omega}{c^2}\vec{v}_\perp(z') - \nabla'_\perp\right)\delta(\vec{r'}_\perp - \vec{r'}_\perp(z'))\times$$
$$\exp\left[iw\left(\frac{|\vec{r}_{\perp 0}-\vec{r'}_\perp|^2}{2c(z_0-z')}+\frac{s(z')}{v}-\frac{z'}{c}\right)\right] \tag{1.17}$$

Проинтегрировав по $d\vec{r'}$ получим общее решение уравнения 1.14 :

$$\vec{\tilde{E}}_\perp(z_0,\vec{r}_{\perp 0},\omega) = -\frac{i\omega e}{c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz'\frac{1}{z_0-z'}\left(\frac{\vec{v}_\perp(z')}{c} - \frac{\vec{r}_{\perp 0}-\vec{r'}_\perp(z')}{(z_0-z')}\right)\times$$
$$\exp\left[iw\left(\frac{|\vec{r}_{\perp 0}-\vec{r'}_\perp(z')|^2}{2c(z_0-z')}+\frac{s(z')}{v}-\frac{z'}{c}\right)\right] \tag{1.18}$$

Что есть распределение электромагнитного поля в точке наблюдения $\vec{r}_0$.

Излучение планарного ондулятора

В этой секции мы рассмотрим излучение планарного ондулятора использую наши предыдущие результаты 1.19 и 1.6. Сперва проанализируем получившиеся распределение поля 1.19: в случае ондулятора, член $(z_0 - z')^{-1}$ можно разложить около точки z', так как размер ондулятора много меньше чем расстояние, с которого мы наблюдаем излучение: $\lambda_w N \ll z_0$, где N число периодов ондулятора.

Воспользовавшись решениями 1.5 и 1.6 и помня $\vec{r}_{\perp 0}/z_0 = \vec{\theta}$ преобразуем уравнение 1.19 к виду:

$$\vec{\tilde{E}}_\perp(z_0,\vec{r}_{\perp 0},\omega) = \frac{i\omega e}{c^2 z_0}\exp\left[i\frac{\omega\theta^2 z_0}{2c}\right]\int\limits_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp[i\Phi_T]\left(\frac{K}{\gamma}\sin(k_w z)\vec{e_x} + \vec{\theta}\right) \tag{1.19}$$

Здесь мы отбросили члены первого и большего порядка малости по $1/z_0$. Где за Φ_T мы обозначили:

$$\Phi_T = \left(\frac{\omega}{2c\widetilde{\gamma}^2}+\frac{\omega\vec{\theta}^2}{2c}\right)z' - \frac{K^2}{8\gamma^2}\frac{\omega}{k_w c}\sin(2k_w z') - \frac{K\theta_x}{\gamma}\frac{\omega}{k_w c}\cos(k_w z'), \tag{1.20}$$

где $\widetilde{\gamma} = \dfrac{\gamma}{\sqrt{1 + K^2/2}}$.

Пределы интегрирования ограничили по длиной ондулятора от $-\lambda_w N/2$ до $\lambda_w N/2$, считая вклад в излучение от ондулятора доминирующим надо остальными вкладами от соответствующих участков траектории. На это шаге уже можно заметить, что излучение на оси будет линейно поляризованно, это есть вклад члена с током, вклад же плотности заряда или градиентный член, даёт вариацию поляризации, при наблюдении под некоторым углом θ к оси.

Если переписать 1.19 в следующе виде:

$$\vec{\widetilde{E}}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{i\omega e}{c^2 z_0} \exp\left[i\frac{\omega\theta^2 z_0}{2c}\right] \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} J_m\bigg(-\frac{K^2}{8\gamma^2}\frac{\omega}{k_w c}\bigg) J_n\bigg(-\frac{K\theta_x}{\gamma}\frac{\omega}{k_w c}\bigg) \times$$
$$\exp\left[\frac{i\pi n}{2}\right] \int_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp[i(2m+n)k_w z'] \bigg(\frac{K}{2i\gamma}\big(\exp[2ik_w z'] - 1\big)\vec{e_x} + \vec{\theta}\exp[ik_w z']\bigg) \times$$
$$\exp\left[i\bigg(k_w\frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega\vec{\theta}^2}{2c}\bigg)z'\right], \tag{1.21}$$

Где мы ввели $\omega = \omega_r + \Delta\omega$, $\omega_r = 2c\widetilde{\gamma}^2 k_w$ и использовали формулу Якоби — Ангера:

$$\begin{aligned} \exp[iz\cos(\theta)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) \exp[in\theta] \\ \exp[iz\sin(\theta)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \exp[in\theta] \end{aligned} \tag{1.22}$$

До сих пор мы пользовались только двумя приближениями, — медленно меняющейся амплитудой и параксиальным приближением, теперь можем воспользоваться следующим параметром — количеством периодов ондулятора, — N. Для этого обратим внимание на первой слагаемое в фазовом множителя под интегралом, и заметим, что если $k_w\dfrac{\Delta\omega}{\omega_r} + \dfrac{\omega\vec{\theta}^2}{2c} \ll k_w$, то фаза меняется медленно на одном периоде и эта фаза не занулит интеграл. Отметим, что для резонанса условия должны выполняться по отдельности, т.е. $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_r} \ll 1$ и $\dfrac{\omega\vec{\theta}^2}{2c} \ll 1$, последнее даёт углы наблюдения вблизи резонанса: $\theta^2 \ll \dfrac{1}{\widetilde{\gamma}^2}$. Теперь необходимо обратить внимание на аргументы функций Бесселя, а именно:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{K^2}{8\gamma^2}\frac{\omega}{k_w c} \\ v &= -\frac{K\theta_x}{\gamma}\frac{\omega}{k_w c} = -\frac{K\theta_x}{\gamma}\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_r}\right)2\widetilde{\gamma}^2 \lesssim \frac{2K\theta_x\widetilde{\gamma}}{\sqrt{1+K^2/2}} \lesssim \theta_x\widetilde{\gamma} \ll 1 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Зная, что $J_\alpha(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2\beta+\alpha}$, видим, что вклад нулевого порядка по $\theta_x\widetilde{\gamma}$, т.е. $J_\alpha(x) \sim 1$ даёт только функция Бесселя с индексом $n = 0$. Здесь мы пока не учитываем градиентный член пропорциональный $\vec{\theta}$, таким образом из оставшихся фазовых множителей можно выписать условия на индекс m. Они определяются нулями в аргументах соответствующих фаз или $m = -1$ и $m = 0$, оба оставшихся члена пропорциональны $\dfrac{K}{\gamma}$.

Теперь вернёмся к градиентному члену, вклад от которого занулиться при усреднении по длине ондулятора при $n = 0$, этот вклад даст ненулевой вклад при $n = 1 - 2m$, т.о. в ход пойдут следующие члены разложения $J_m(v)$. Однако, помня интересующий нас диапазон углов, члены разложения будут порядка $\theta_x v^m$, очевидно, что их вклады пренебрежимо малы по сравнению с вкладами токового члена $\vec{e}_x$. Учитывая выше сказанные приближения, перепишем 1.21

$$\begin{aligned} &\vec{\widetilde{E}}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e}{2c^2 z_0}\frac{K}{\gamma}\exp\left[i\frac{\omega\theta^2 z_0}{2c}\right]\Big(J_1(v) - J_0(v)\Big)\vec{e}_x \times \\ &\int\limits_{-\lambda_w N/2}^{\lambda_w N/2} dz' \exp\left[i\left(k_w\frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega\vec{\theta}^2}{2c}\right)z'\right], \end{aligned} \tag{1.24}$$

Интеграл легко берётся:

$$\vec{\widetilde{E}}_\perp(z_0, \vec{r}_{\perp 0}, \omega) = \frac{\omega e}{2c^2 z_0}\frac{K}{\gamma}\exp\left[i\frac{\omega\theta^2 z_0}{2c}\right]\mathrm{sinc}[\left(k_w\frac{\Delta\omega}{\omega_r} + \frac{\omega\vec{\theta}^2}{2c}\right)L/2]\vec{e}_x, \tag{1.25}$$

где введено обозначение: $A_{JJ} = J_1(v) - J_0(v)$

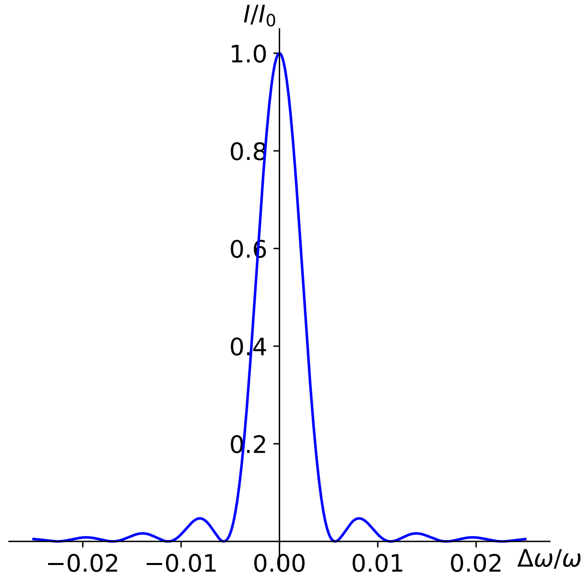

Рис. 1

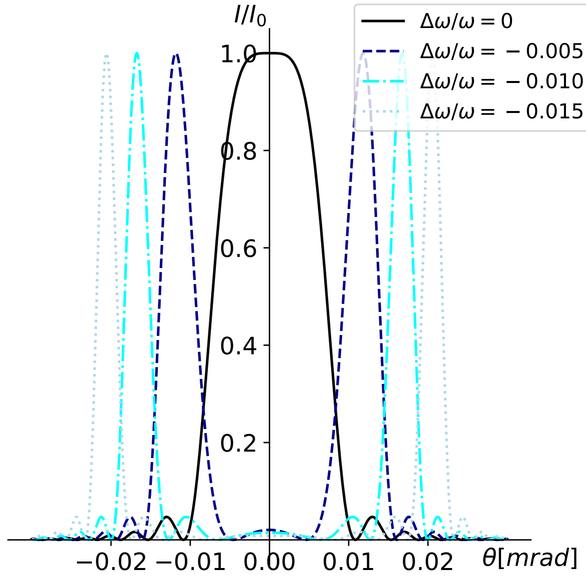

Рис. 2

Фурье оптика

В этой главе мы предложим наглядный подход к решению задачи о распространение волнового фронта в пустом пространстве, его прохождении через систему линз и другие оптические элементы. Приведённые результаты напрямую могут быть использованы в программном коде. Распределение поля в начальный момент времени будем считать гауссовским, однако, как будет показано, развитый подход может быть использован для произвольного распределения поля. В наших выкладкам мы следуем подходу (Гудман, Салдин, Serkez)

Распространение света в пустом пространстве

Наши рассуждения мы начнём с волнового уравнения в пустом пространстве ($\vec{j} = 0, \rho = 0$).

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0 \tag{2.1}$$

В $r\omega$-пространстве уравнение приобретает знакомый вид уравнения Гельмгольца, где $k_0 = \omega/c$.

$$k_0^2 \vec{\bar{E}} + \nabla^2 \vec{\bar{E}} = 0 \tag{2.2}$$

Совершив фурье-преобразование в k-пространство по координатам x, y, которое определим схожим образом с 1.9:

$$\vec{\hat{E}}(\vec{k},\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dxdy\vec{E}(\vec{r},t)\exp[ik_x x + ik_x x]$$

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \vec{\hat{E}}(\vec{k},t)\exp[-ik_x x - ik_x x], \tag{2.3}$$

получим:

$$k_0^2\Big(1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}\Big)\vec{\hat{E}} + \frac{\mathrm{d}^2\vec{\hat{E}}}{\mathrm{d}z^2} = 0 \tag{2.4}$$

Теперь можно напрямую можно получить решение этого обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\vec{\hat{E}}(\omega,k_x,k_y,z) = \vec{\hat{E}}(\omega,k_x,k_y,0)\exp\left[ik_0 z\sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}}\right] \tag{2.5}$$

Введём функцию отклика среды:

$$H(k_x,k_y,z) = \frac{\vec{\hat{E}}(\omega,k_x,k_y,z)}{\vec{\hat{E}}(\omega,k_x,k_y,0)} = \exp\left[ik_0 z\sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k_0^2} - \frac{k_y^2}{k_0^2}}\right] \tag{2.6}$$

Видно, чтобы получить распределение электромагнитного поля на некотором расстоянии z, необходимо совершить обратное преобразование Фурье в xy-пространство. Таким образом решение волнового уравнения сводиться к трём относительно простым операциям: первое, — перевод начального распределения в $k_x k_y$-пространство, далее домножение получившегося распределения на функцию отклика среды, в нашем случае пустое пространство, и последний шаг, — обратное преобразование Фурье.

Действие тонкой линзы на волновой фронт

Тонкая линза