## Оглавление


Стр.

**Введение** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

**Глава 1. Теоретический базис** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

**Глава 2. Методы моделирования ондуляторного излучения от пучка с конечным эмиттансом** . . . . . . . . . . . . 4

2.1 О статистических свойствах синхротронного излучения . . 4

2.2 Численное моделирование ондуляторного излучения . . . . 5

2.2.1 Влияние размера электронного пучка на расходимость излучения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

2.2.2 Различие расходимости излучения для случая продольно полностью когерентного и некогерентного пучка . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

2.2.3 Влияние энергетического разброса электронного пучка на расходимость излучения . . . . . . . . . . . . 11

2.3 Метод ограничения пространственных гармоник огибающими: SERVAL . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

2.3.1 Алгоритм получения поля . . . . . . . . . . . . . . . . 12

2.3.2 Выбор подходящих огибающих . . . . . . . . . . . . 14

2.4 Сравнение метода Монте-Карло, SRW и SERVAL . . . . . . 16

2.4.1 Дифракция на апертуре . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

2.4.2 Фокусировка . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

**Глава 3. Корреляционный анализ модовой структуры** . . . . 17

**Список литературы** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19

# Введение

Представленная работа посвящена разработке методов моделирования процесса генерации синхротронного излучения (СИ) от электронного пучка с конечным эмиттансом и прохождения этого излучения через оптическую систему. Развитие магнитных схем циклических ускорителей дало возможность снизить эмиттанс электронного пучка и приблизить источники СИ к дифракционному пределу для широкого диапазона длин волн, вплоть до жёсткого рентгена. Под дифракционным пределом мы понимаем, что эмиттанс электронного пучка $\epsilon_{x,y}$ много больше или, по крайней мерее, сравним с "эмиттансом"излучения – $\lambda/4\pi$, то есть $\epsilon_{x,y} \ll \lambda/4\pi$. Такое излучение характеризуется заметной степенью поперечной когерентностью. Случай с частичной когерентностью представляет наибольший интерес, так как именно он реализуется в большинстве практических случаях. В работе предложен оригинальный метод генерации частично когерентного синхротронного излучения и рассмотрены практические примеры распространения частично когерентного волнового фронта через оптическую систему источников СИ.

[...]

# Глава 1. Теоретический базис

Распространение функции взаимной когерентности излучения через свободное пространство от некогерентных источников излучения описывается теоремой Ван Циттера - Цирнике. [написать положение теоремы и её практические следствия, описать при каких предположениях выполняется теорема]

[дать введение и основные заключения из работы Джанлуки, рассказать про ондуляторный источник излучения]

[сделать обзор литературы по тому какие подходы в основном реализуются сейчас: Гаусс-Шелл модель, указать на несоответствие того, что ондуляторное излучение имеет форму синк-функции]

# Глава 2. Методы моделирования ондуляторного излучения от пучка с конечным эмиттансом

[интро]

## 2.1 О статистических свойствах синхротронного излучения

Электромагнитное излучение от электронного пучка с конечным эмиттансом может быть представлено как сумма полей от каждого индивидуального электрона. Каждый $k$ электрон в пучке имеет свою координату – $\vec{\eta}_k$, угол – $\vec{l}_k$, отсчитываемый от проектной траектории, а также продольную координату или, другими словами, время прибытия $t_k$ относительно некоторого времени $t_0$, вклад которого в $r\omega$-пространстве будет умножением поля на фазовый фактор $\exp{(i\omega t_k)}$. Указанные величины подчиняются некоторым распределениям плотности вероятности, для накопительных колец в модельных случаях это распределение Гаусса. В данном случае не рассматривается разброс электронов по энергии, он будет включён в рассмотрение позже. Объём фазового пространства, которые составляют эти шесть переменных, и есть эмиттанс электронного пучка. Результирующее поле от $N_e$ электронов можно записать следующим образом:

$$\bar{E}_b(z, \vec{r}, \omega) = \sum_{k=1}^{N_e} \bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) \exp{(i\omega t_k)}, \tag{2.1}$$

Для электронов в накопительных кольцах случайные величины $\vec{\eta}_k$ и $\vec{l}_k$ не зависят от времени прибытия $t_k$. Модуля поля $\bar{E} = |\bar{E}_k| \exp{i\phi_k}$ имеет независящей от $k$ одинаковое распределение со средним $\left\langle|\bar{E}_k|\right\rangle$ и конечным вторым моментом $\left\langle|\bar{E}_k|^2\right\rangle$. [Всё это здорово, но должно откуда-то следовать. По всей видимости, эти предположения следуют из наличия дробового шума в электронном пучке (затухание и квантовая раскачка бетатронных колебаний). Нужна объяснительная команда.].

Результирующее поле $\bar{E}_b$ является суммой вкладов от каждого электрона в пучке и по своей структуре в правой части уравнения 2.1 записан некоторый фазор. Следуя предпосылкам центральной предельной теоремы (ЦПТ), можно показать, что $\bar{E}_b$ комплексная Гауссова переменная. Другими словами, амплитуда поля в каждой точке $\vec{r}$ подчиняется гауссовому распределению. Однако, предпосылки ЦПТ выполняются для двух практически значимых предельных случаев: случай длинного $\omega\sigma_T \gg 1$ и короткого электронного пучка $\omega\sigma_T \gg 1$, где $\sigma_T$ – длительность электронного пучка [а что не так с $\omega\sigma_T \sim 1$?]. В случае длинного электронного пучка величина $\omega t_k$ равномерно распределена в пределах от 0 до $2\pi$ и излучение продольно некогерентно, для короткого пучка фазовый множитель $\exp(i\omega t_k)$ может быть взят равным единице и излучения является продольно когерентным.

## 2.2 Численное моделирование ондуляторного излучения

Формула 2.1 используется напрямую при моделирования ондуляторного излучения, как продольно когерентного так и некогерентного. Общий вид поля ондуляторного излучения от одного электрона с некоторыми углом $\vec{\eta}_k$ и координатой $\vec{l}_k$ может быть записан как [1] [спросить Джанлуку про эту формулу]:

$$\bar{E}_\perp(z_0, \omega, \vec{\eta}_k, \vec{l}_k, \vec{\theta}\,) = -\frac{\omega e A_{JJ} L_s}{2c^2 z_0}\frac{K}{\gamma}\exp\left[i\frac{\omega z_0}{2c}\left|\vec{\theta} - \vec{l}/z_0\right|^2\right] \times \operatorname{sinc}\left[\left(k_w\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{\omega|\vec{\theta} - (\vec{l}/z_0) - \vec{\eta}|^2}{2c}\right)\frac{L_s}{2}\right], \quad (2.2)$$

где $\vec{\theta} = \vec{r}/z_0$ [пояснить все новые параметры]. Формула 2.2 даёт распределение амплитуды поля в дальней зоне ($z_0 \gg L_w$[и что-то ещё]). Чтобы получить более точно выражение это поле должно быть отпропагировано назад в центр ондулятора с помощью пропагатора свободного пространства. Распределение поля в мнимом источнике излучения: [Откуда взялась информация, которой не было. Нужна пояснительная команда.]

$$\widetilde{E}_{\perp}(0,\vec{\eta},\vec{l},\vec{r}_{\perp}) = i\frac{eA_{JJ}\omega}{2c^2}\frac{K}{\gamma}\exp\left[i\frac{\omega}{c}(\vec{r}_{\perp}-\vec{l})\right] \times \left[\pi - 2\mathrm{Si}\left(\frac{i\omega|\vec{r}_{\perp}-\vec{l}|^2}{L_w c}\right)\right], \tag{2.3}$$

после этого поле можно распространять на любую дистанцию вдоль оптической оси $z_0$. Снова применяя пропагатор свободно пространства, получаем:

$$\bar{E}_{\perp}(z_0,\omega,\vec{\eta}_k,\vec{l}_k,\vec{r}) = \frac{eA_{JJ}\omega}{2c^2}\frac{K}{\gamma}\exp\left[i\frac{\omega}{2z_0c}(|\vec{r}_{\perp}-\vec{l}|^2 - |\vec{r}_{\perp}-\vec{l}-z_0\vec{\eta}|^2)\right] \times \left\{\mathrm{Ei}\left[\frac{i\omega(\vec{r}_{\perp}-\vec{l}-z_0\vec{\eta})^2}{2z_0c - L_wc}\right] - \mathrm{Ei}\left[\frac{i\omega(\vec{r}_{\perp}-\vec{l}-z_0\vec{\eta})^2}{2z_0c + L_wc}\right]\right\}. \tag{2.4}$$

Рассчитанное таким образом поле может быть рассчитано для любого значения $z_0$, такое поле называют поле в приближении ближней зоны, так как эта формула применим для значение $z_0 \sim L_w$. Обе формулы 2.2 и 2.4 имеют практическую ценность при моделировании, однако при использовании выражения 2.4 время на моделирование значительно увеличивается, так как необходимо дважды численно взять интеграл $\mathrm{Ei}(\cdot)$.

После расчёта суммарного поля с $N_e$ электронами получившиеся монохроматическое поле по своей сути есть одна статистическая реализация поля. [переформулировать следующее предложение] Физически это значит следующее, если экспериментатор измерит распределение интенсивности поля на детекторе от пролёта одного электронного пучка, используя монохроматор с разрешением, которое позволит разрешить одну продольную моду излучения, то на детекторе будет распределение эквивалентное по своим статистическим свойствам распределению, представленному на Рис..

После усреднения по $N_b$ реализациям (с идеальным монохроматором[1]), наблюдаемая интенсивность даётся выражением:

$$I_\omega = \left\langle \left| \sum_{k=1}^{N_e} \bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) \exp\left(i\omega t_k\right) \right|^2 \right\rangle, \tag{2.5}$$

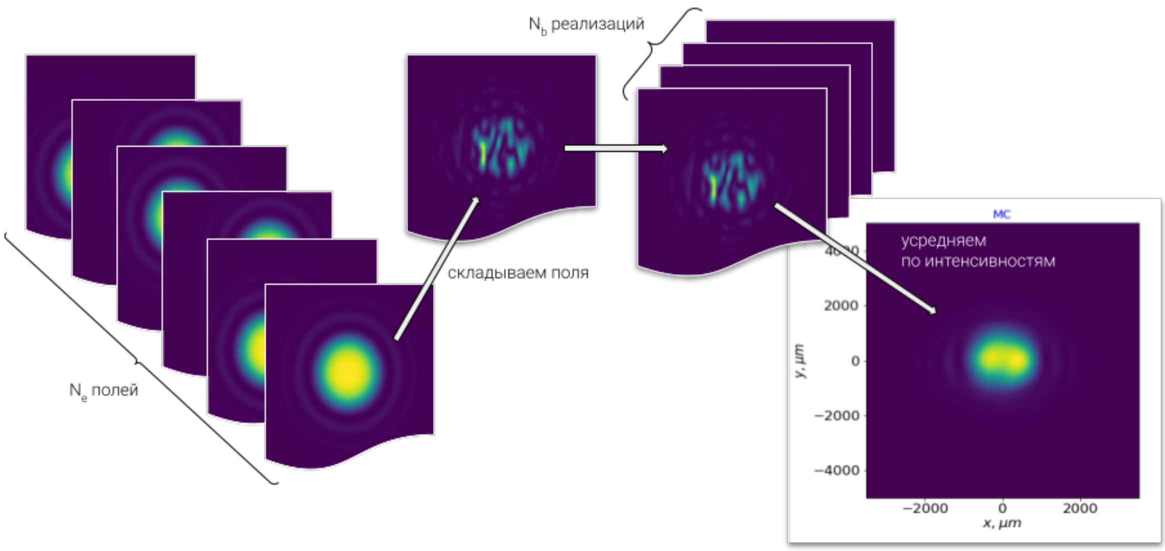


Рисунок 2.1 — Схема работы метода сложения амплитуд [перерисовать, изменить подпись]

результирующая интенсивность будет сходиться к некоторой огибающей. В грубом приближении огибающая является свёрткой распределения расходимости излучения и распределения расходимости электронного пучка. Данный подход является наиболее прямым подходом к задаче моделирования частично когерентного излучения, однако время расчёта в таком случае может быть оценено как время затрачиваемое на расчёт одной одного поля $N_e$ раз по формуле 2.2 или 2.4, в последней, как уже упоминалось, необходимо дважды численно взять интеграл $\mathrm{Ei}(\cdot)$ и потом усреднить по $N_b$ реализациям поля $\bar{E}_b$. Итого, если за $\tau_{calc}$ взять время расчёта одного поля, то расчёт одного результирующего поля в сумме займёт $T_{calc} = \tau_{calc} \cdot N_e \cdot N_b$.

Однако в случае полностью некогерентного излучения время расчёта можно сократить за счёт фазового фактора $\exp\left(i\omega t_k\right)$, который эф-

[1]другими словами, монохроматором разрешается одна поперечная мода

фективно приводит к тому, что отдельный электрон в электронном пучке коррелирует только с самим собой [2]. Таким образом формула 2.5 упрощается до

$$I_\omega = \sum_{k=1}^{N_e} \left| \bar{E}(\vec{\eta}_k, \vec{l}_k, z, \vec{r}, \omega) \right|^2, \tag{2.6}$$

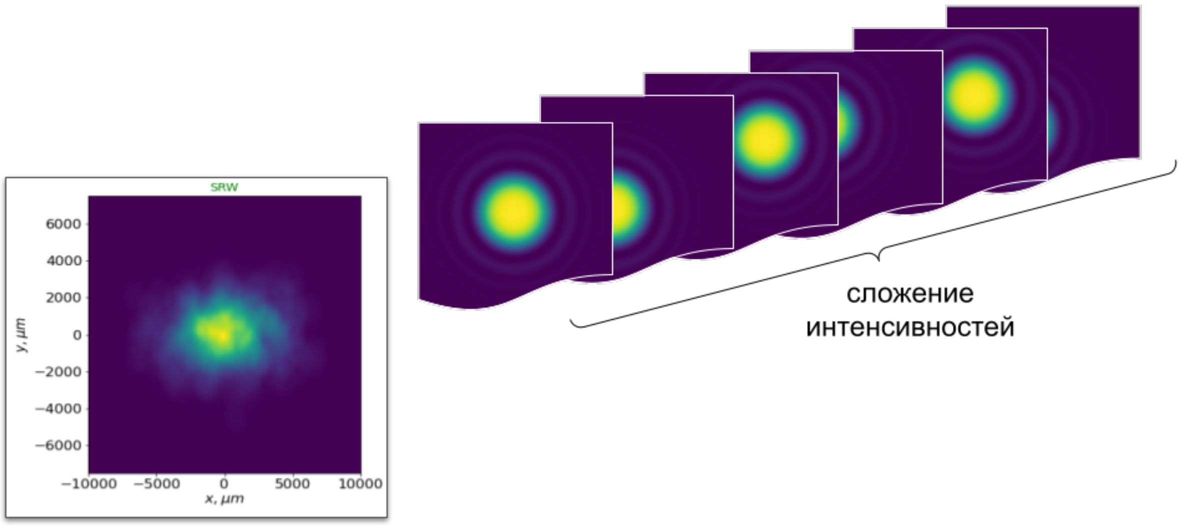


Рисунок 2.2 — Схема метода сложения интенсивностей [перерисовать, изменить подпись]

а время расчёта уменьшается до $T_{calc} = \tau_{calc} \cdot N_e$. Недостатком такого подхода можно считать потерю фазовой информации о излучение и, следовательно, невозможности расчёта поперечной автокрелляционной функции первого порядка [Можно ли через второй порядок найти первый? Нужна пояснительная команда]. Тем не менее, подход основанный на формуле 2.6 даёт мощный метод расчёта частично когерентного излучения. Именно этот подход реализован в широко распространённом коде SRW [cite].

### 2.2.1 Влияние размера электронного пучка на расходимость излучения

[где такой эффект можно неожиданно встретить?]

[когерентный случай]

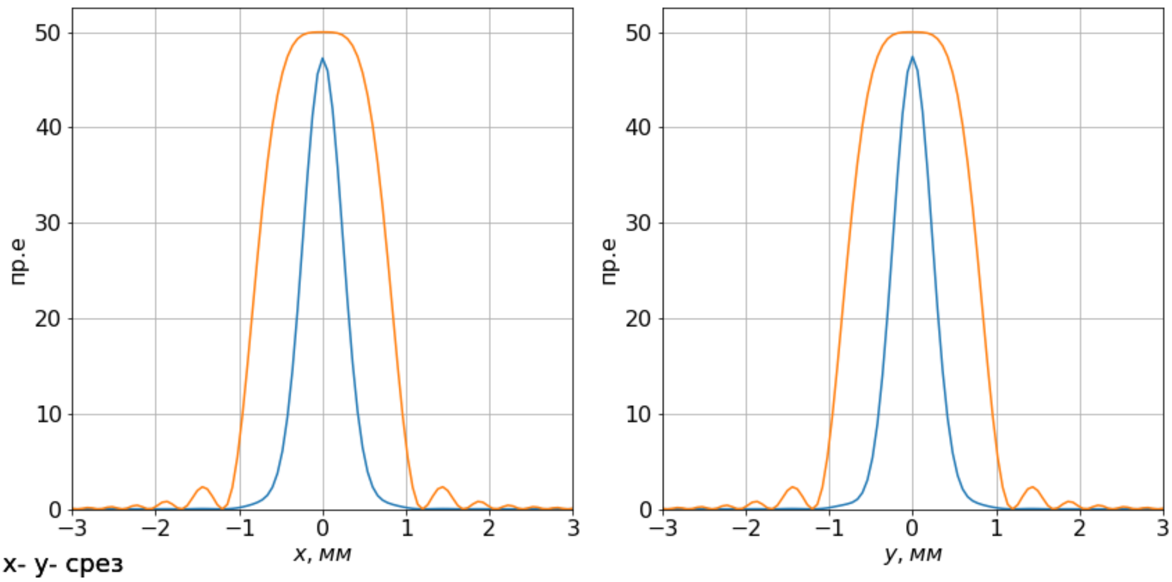


Рисунок 2.3 — Интенсивность комплексного гауссового шума

[некогерентный случай]

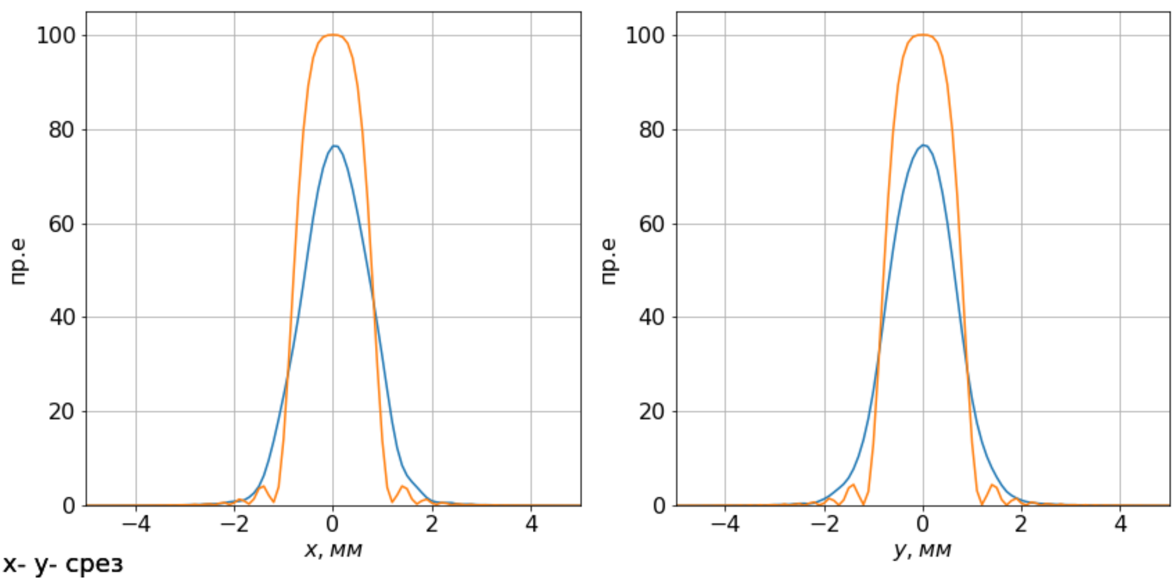


Рисунок 2.4 — Интенсивность комплексного гауссового шума

### 2.2.2 Различие расходимости излучения для случая продольно полностью когерентного и некогерентного пучка

В зависимости от длительности электронного пучка результирующее поле $\bar{E}_b$ будет вести себя по-разному. В случае короткого электронного пучка: $\omega\sigma_T \ll 1$, где $\sigma_T$ – длительность электронного сгустка, излучение будет продольно когерентным, в иностранной литературе этот эффект называется Coherent Synchrotron Radiation (CSR). Методы моделирования такого излучения рассмотрены в работах [cite]. Приближение короткого электронного пучка справедливо для низких энергий [каких?]. Случай длинного электронного пучка, а именно $\omega\sigma_T \gg 1$ соответствует случаю продольно некогерентного излучения, а для уравнения 2.1 это означает, что показатель экспоненты $\omega\sigma_T$ равномерно распределён в интервале от 0 до $2\pi$.

[отличие на $\sqrt{2}$]

[где такой эффект можно неожиданно встретить?]

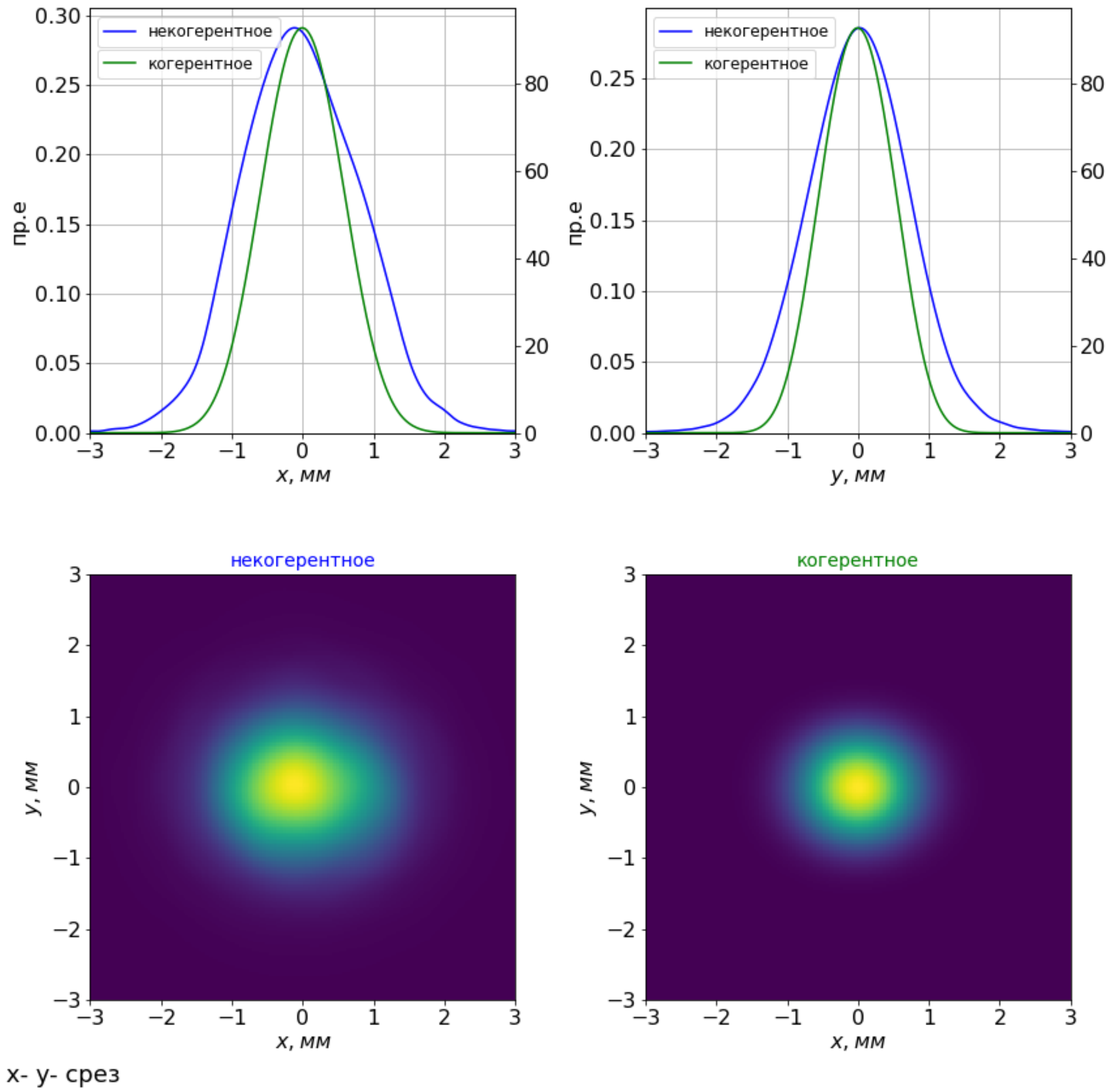


Рисунок 2.5 — Интенсивность комплексного гауссового шума

### 2.2.3 Влияние энергетического разброса электронного пучка на расходимость излучения

[Как-то влияет]

[картинки моделирования]

## 2.3 Метод ограничения пространственных гармоник огибающими: SERVAL

В работе предлагается эффективный метод для моделирования частично когерентного излучения, основанный на ограничении пространственного шума огибающими поля. Метод заключается в имитации дробового шума в электронном пучке комплексным Гауссовым шумом и последующим его ограничением пространственных мод этого шума эффективным размером и расходимостью электромагнитного поля в источнике. Эффетивный размер и расходимость поля оценивается как соответствующая свёртка распределения электронного пучка с распределением поля от электронного пучка с бесконечно малым поперечным эмиттансом в источнике излучения – центре ондулятора. Выбор позиции в центре ондулятор объясняется тем, что ондуляторное излучение имеет плоский волновой фронт именно в центре ондулятора, этим оно схоже лазерными Гауссовыми пучками.

### 2.3.1 Алгоритм получения поля

Для начала алгоритм будет представлен в общем виде, без уточнения чем определяются распределение размера и расходимости излучения и, в целом, без относительно характера источника излучение – в нашёл случае ондулятора.

1. Создание комлексного гауссового шума $Z = X + iY$ в $r\omega$-пространстве, где величины $X$ и $Y$ подчиняются нормальному распределению.

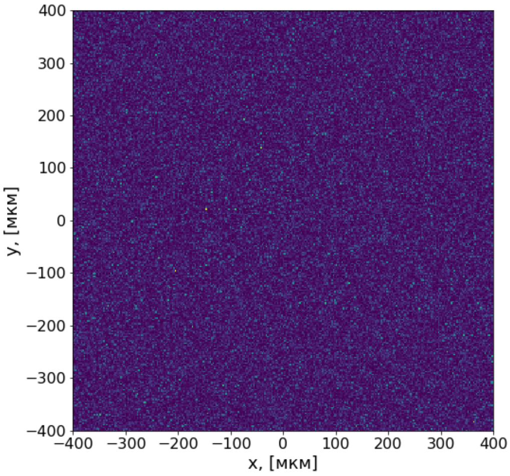


Рисунок 2.6 — Интенсивность комплексного гауссового шума

2. Ограничение шума эффективным размером электромагнитного излучения в [перетяжке].

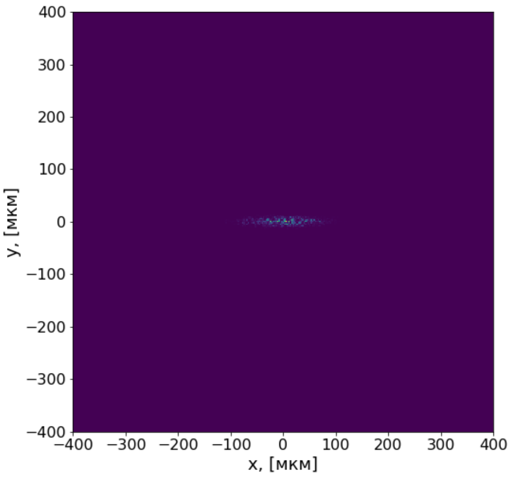


Рисунок 2.7 — Размер электромагнитного излучения в перетяжке наложенный на шум

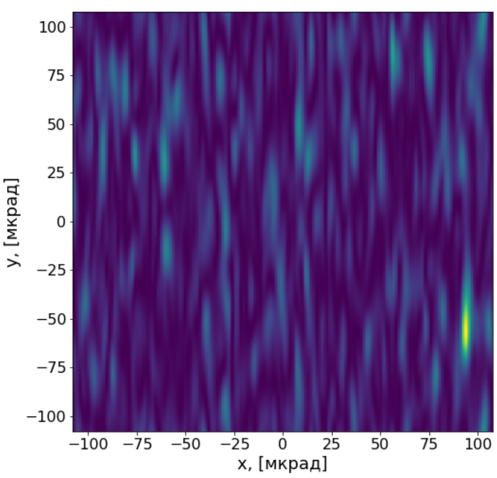


Рисунок 2.8 — Получившиеся моды в $k\omega$-пространстве от размера электронного пучка

3. Ограничение пространственных мод эффективной расходимостью излучения

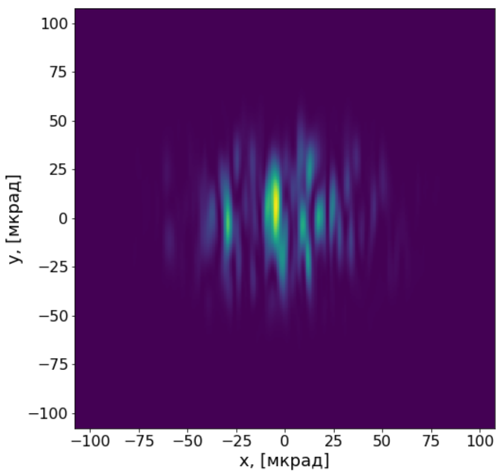


Рисунок 2.9 — Расходимость излучения

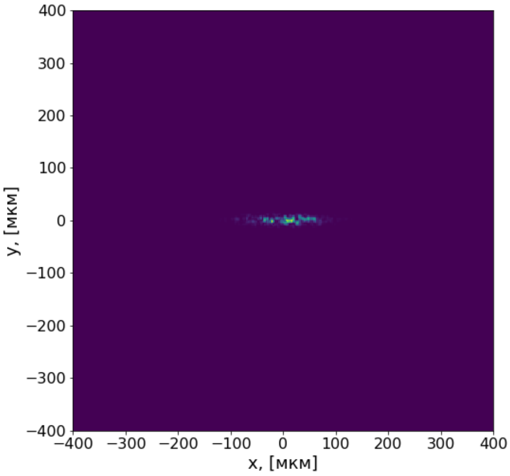


Рисунок 2.10 — Размер излучения в источнике

4. Распространение излучения через оптическую систему

### 2.3.2 Выбор подходящих огибающих

При выполнение второго шага выполняется операция умножения шума, на распределение размера излучения. Размер излучения в случае электронного пучка с бесконечно малым поперечным эмиттансом может быть получено, как обратная пропагация излучения в дальней зоне 2.2 обратно в центр ондулятора посредствам пропагатора в свободном пространстве. Выражение для распределения поля в центре ондулятора даётся выражением:

$$\widetilde{E}_{\perp}(0,\vec{\eta},\vec{l},\vec{r}_{\perp}) = i\frac{eA_{JJ}\omega}{2c^2}\frac{K}{\gamma}\exp\left[i\frac{\omega}{c}(\vec{r}_{\perp}-\vec{l})\right] \times \left[\pi - 2\mathrm{Si}\left(\frac{i\omega|\vec{r}_{\perp}-\vec{l}|^2}{L_w c}\right)\right] \tag{2.7}$$

Для того, чтобы получить распределение амплитуды (интенсивности) излучение в случае электронного пучка с конечным эмиттансом следует произвести свёртку распределение размера электронного пучка $f(\vec{r})$ с распределением излучения амплитуды (интенсивности) от пучка с бесконечно малым эмиттансом.

$$\bar{A}_b(0,\vec{r}) = \big(\widetilde{A}_\perp(0,0,0,\vec{r}_\perp) * f(\vec{r}_\perp)\big), \tag{2.8}$$

тоже для шага 3. для расходимости.

$$\hat{\bar{A}}_b(0,\vec{\theta},\omega) = \big(\hat{\widetilde{A}}_\perp(0,0,0,\vec{\theta}_\perp) * \hat{f}(\vec{\theta}_\perp)\big), \tag{2.9}$$

именно $\bar{A}_b(0,\vec{r})$ и $\hat{\bar{A}}_b(0,\vec{\theta},\omega)$ используются при ограничении пространственных гармоник огибающими. Однако, точный вид огибающих пока не затрагивался, а именно следует ли использовать в качестве свёртываемых функций амплитудные распределения, распределения интенсивности или же третий вариант квадратный корень из квадратов амплитуд.

$$\text{I.}\quad \bar{A}_b(0,\vec{r}) = \big(\widetilde{E}_\perp(0,0,0,\vec{r}_\perp) * f(\vec{r}_\perp)\big)$$
$$\hat{\bar{A}}_b(0,\vec{\theta}) = \big(\hat{\widetilde{E}}_\perp(0,0,0,\vec{\theta}_\perp) * \hat{f}(\vec{\theta}_\perp)\big)$$

$$\text{II.}\quad \bar{A}_b(0,\vec{r}) = \sqrt{\big(\widetilde{E}^2_\perp(0,0,0,\vec{r}_\perp) * f^2(\vec{r}_\perp)\big)}$$
$$\hat{\bar{A}}_b(0,\vec{\theta}) = \sqrt{\big(\hat{\widetilde{E}}^2_\perp(0,0,0,\vec{\theta}_\perp) * \hat{f}^2(\vec{\theta}_\perp)\big)}$$

$$\text{III.}\quad \bar{A}_b(0,\vec{r}) = \big(\big|\widetilde{E}_\perp(0,0,0,\vec{r}_\perp)\big| * f(\vec{r}_\perp)\big)$$
$$\hat{\bar{A}}_b(0,\vec{\theta}) = \big(\big|\hat{\widetilde{E}}_\perp(0,0,0,\vec{\theta}_\perp)\big| * \hat{f}(\vec{\theta}_\perp)\big)$$

Чтобы выбрать для каждого из случаев наиболее подходящую огибающую проще всего проверить поведение поля в обычной фокусирующей системе, каким образом поле выглядит в дальней зоне и после фокусировки в фокальной плоскости. Сравнив поля, рассчитываемые методом SERVAL с наиболее реалистичным методом, основанным на подходе Монте-Карло будет сделан вывод о применимости огибающих I., II. и III.

[картинки различных распределений в случае почти когерентного источника в одном направлении и некогерентного источника в другом]

## 2.4 Сравнение метода Монте-Карло, SRW и SERVAL

### 2.4.1 Дифракция на апертуре

### 2.4.2 Фокусировка

## Глава 3. Корреляционный анализ модовой структуры

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

## Список литературы


1. Fourier treatment of near-field synchrotron radiation theory / G. Geloni [et al.] // Optics Communications. — 2007. — Aug. 1. — Vol. 276, no. 1. — P. 167–179. — DOI: 10.1016/j.optcom.2007.03.051. — URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401807003367 (visited on 02/26/2021).
2. Transverse coherence properties of X-ray beams in third-generation synchrotron radiation sources / G. Geloni [et al.] // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 2008. — Apr. 11. — Vol. 588, no. 3. — P. 463–493. — DOI: 10.1016/j.nima.2008.01.089. — URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900208001605 (visited on 02/22/2021).