Algebra 1

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

7. avgust 2024

Kazalo

1 Raznovrstno **3**

2 Determinante **4**

3 Struktura Endomorfizmov **5**
3.1 Korenski podprostori 6

4 Jordanova forma **7**

1 Raznovrstno

Nasvet

- **Matrika** A **je ničelna** $\iff \forall v \in V : Av = 0$
- **Inverzne matrike komutirajo**
- **Polinoma v isti matriki komutirata** $A \in \mathcal{O}^{n\times n}$ ter $p, q \in \mathcal{O}[X]$

$$p(A) \cdot q(A) = q(A) \cdot p(A)$$

Oris dokaza. □

Izrek 1.1: Vandermonde

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & x_3^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i \neq j} (x_i - x_j)$$

Oris dokaza. Determinanta je polinom v n spremenljivkah, ter, če je $x_i = x_j$, potem je determinanta ničelna. Po faktorskem izreku sledi, da je $\det V = c \prod_{i\neq j}(x_i - x_j)$. □

2 Determinante

Izrek 2.1

- Lastni vektorji paroma različnih lastnih vrednosti so linearno neodvisni.
- $$\det(AB) = \det(A)\det(B) \quad \text{ter} \quad \det(A^T) = \det(A)$$
- Naj bo A_{ij} minor, ki ga dobimo z delecijo i-te vrstice ter j-tega stolpca.

$$\widetilde{A} = [\widetilde{a_{ij}}]_{i,j=1}^n = [(-1)^{i+j}\det(A_{ij})]_{i,j=1}^n$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\widetilde{a_{ij}} = a_{1j}\widetilde{a_{1j}} + a_{2j}\widetilde{a_{2j}} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a_{nj}}$$

$$A\widetilde{A}^T = \det(A)I$$

Oris dokaza. Dokaz razvoja po j-tem stolpcu sledi tako, da zaporedoma izračunamo determinante matrik

$$[A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, e_n] \quad \text{ter} \quad [A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(j-1)}, e_j, A^{(j+1)}, \dots, A^{(n)}]$$

ter na koncu

$$[A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(j-1)}, a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \cdots + a_{nj}e_n, A^{(j+1)}, \dots, A^{(n)}],$$

kjer izračun druge z antisimetričnostjo prevedemo na izračun prve, ter izračun tretje preko antisimetričnosti prevedemo na izračun druge.

Konstrukcijo inverza dokažemo tako, da opazimo da je skalarni produkt vrstic in stolpcev, ki pristanejo na diagonali enak $\det(A)$ po prejšnji točki, skalarni produkt vrstic in stolpcev, ki pa ne končajo na diagonali pa ničelen, saj je enak determinanti matrike $[A^{(1)}, \dots, A^{(k-1)}, A^{(j)}, A^{(k+1)}, \dots, A^{(n)}]$. □

Izrek 2.2: Cramer

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n\times n}$ ter $b \in \mathcal{O}^n$. Če je $\det(A) \neq 0$ je rešitev sistema $Ax = b$ enolična ter enaka $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, kjer je

$$x_j = \frac{\det\left[A^{(1)}, \dots, A^{(j-1)}, b, A^{(j+1)}, \dots, A^{(n)}\right]}{\det(A)}$$

3 Struktura Endomorfizmov

Definicija 3.1

- $\Delta_A(X) = \det(A - XI)$
- $\sigma(A) = \mathrm{spec}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists v \neq 0 \in V.\ Av = \lambda v\}$
- **Algebraična večkratnost** lastne vrednosti λ je večkratnost ničle λ v $\Delta_A(X)$, **geometrična večkratnost** pa $\dim(\ker(A - \lambda I))$

Izrek 3.2: Cayley-Hamilton

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n\times n}$ ter karakteristični polinom $\Delta_A(X)$. Potem je $\Delta_A(A) = 0$.

Oris dokaza.

$$(A - \lambda I)\widetilde{(A - \lambda I}^T) = \det(A - \lambda I)I = \Delta_A(\lambda)I,$$

upoštevamo, da so vnosi prirejenke polinomi stopnje kvečjemu $n-1$, nato interpretiramo kot enakost matrik, sledi da so istoležni vnosi enaki ter dobimo telescoping. □

Izrek 3.3

$$\lambda \text{ ničla } \Delta_A(X) \implies \lambda \text{ ničla } m_A(X).$$

Oris dokaza. λ je lastna vrednost, $\exists v \neq 0$, da je $Av = \lambda v$. Delimo $m_A(X)$ z $X - \lambda$ ter dobimo

$$m_A(X) = q(X)(X - \lambda) + m_A(\lambda),$$
$$0 = m_A(A) = q(A)(A - \lambda I) + m_A(\lambda)I$$
$$0 = q(A)(A - \lambda I)v + m_A(\lambda)v = m_A(\lambda)v$$

□

Izrek 3.4

Naj bo $m_{\mathcal{A}}(X)$ minimalni polinom invertibilnega endomorfizma $\mathcal{A}$. Potem je $m_{\mathcal{A}^{-1}}(X)$ večkratnik recipročnega polinoma $\mathcal{A}$. Sepravi,

$$m_{\mathcal{A}}(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \implies m_{\mathcal{A}^{-1}}(X) = \frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{k} a_{k-i}X^i = \frac{1}{a_o} m_{\mathcal{A}}\left(\frac{1}{X}\right).$$

3.1 Korenski podprostori

Dekompozicija na direktno vsoto invariantnih korenskih podprostorov poda bločno diagonalizacijo.

Izrek 3.5

Korenski podprostor za lastno vrednost λ_j

$$W_j = \ker((\mathcal{A} - \lambda_j id_V)^{m_j})$$

je invarianten za endomorfizem $\mathcal{A}$. Če so $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ vse lastne vrednosti za $\mathcal{A}$ velja

$$V = \bigoplus_{j=1}^{r} W_j$$

Oris dokaza. Definiramo

$$p_i(X) = \frac{m_{\mathcal{A}}(X)}{(X - \lambda_i)^{m_i}}$$

ter uporabimo "Bezoutovo lemo", da dobimo:

$$p_1(\mathcal{A})q_1(\mathcal{A}) + p_2(\mathcal{A})q_2(\mathcal{A}) + \cdots + p_r(\mathcal{A})q_r(\mathcal{A}) = id_V.$$

Obstoj razcepa vektorja $x \in V$ poda konstrukcija $x_j = p_j(\mathcal{A})q_j(\mathcal{A})x$, hitro preverimo tudi $x_j \in W_j$. Enoličnost dobimo, saj bi v nasprotnem primeru obstajali $z_i \in W_i$, da je $\sum_{i=1}^{r} z_i = 0$ □

Izrek 3.6

Minimalni ter karakteristični polinom zožitve $\mathcal{A}$ na W_j sta, kot pričakovano,

$$m_{\mathcal{A}|_{W_j}}(X) = (X - \lambda_j)^{m_j} \quad \text{ter} \quad \Delta_{\mathcal{A}|_{W_j}}(X) = (X - \lambda_j)^{n_j}$$

Oris dokaza. Po definiciji je minimalni polinom $\mathcal{A}|_{W_j}$ oblike $(X - \lambda_j)^s_j$, ker ničle minimalnega ter karakterističnega sovpadata hitro dobimo, da je karakteristični polinom zožitve predpisane oblike. Da enako velja za minimalnega velja, ker bi drugače polinom $(X - \lambda_1)^{s_1} \ldots (X - \lambda_r)^{s_r}$ bil večkratnik $m_{\mathcal{A}}(X)$, po dekompoziciji, hkrati pa (prav tako po dekompoziciji) velja $m_j \geq s_j$ □

Izrek 3.7

Matrika je diagonalizabilna $\iff$ vse ničle minimalnega polinoma so enostavne.

Oris dokaza. Diagonalizabilnost $\implies$ enostavne ničle, ker lahko preverimo, da je

$$(\mathcal{A} - \lambda_1 id_V) \ldots (\mathcal{A} - \lambda_r id_V) = 0,$$

po dekompoziciji. V obratno smer pa z zožitvami. □

4 Jordanova forma

Izrek 4.1

Analiziramo nilpotentni endomorfizem $\mathcal{N}$ reda r. Definiramo $V_j = \ker(N^j)$

- Za $j \geq n$ je $V_j = V$
- $x \in V_j \iff \mathcal{N}x \in V_{j-1}$.
- $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots V_n = V$
- $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots V_n = V$

Oris dokaza. 4. točka sledi, saj obstaja direktni komplement $\ker(N^{j-1})$ znotraj V_j □

Lema 4.2

Če so $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r\}$ linearno neodvisni elementi V_j, ter je $\text{Lin}(\mathcal{B}) \cup V_{j-1} = \{0\}$ so $\mathcal{N}v_1, \dots, \mathcal{N}v_r$ linearno neodvisni elementi V_{j-1}, ter velja $\mathcal{N}(\mathcal{B}) \cup V_{j-2} = \{0\}$

Zgornja lema omogoča, da dekompoziramo V na direktno vsoto vektorskih podprostorov, v katerih se zaporedoma nahajajo le vektorji, ki jih uniči neka specifična potenca $\mathcal{N}$. Slike teh vektorjev se pomikajo dol po verigi, kar da končno urejenost Jordanove baze.

Lema 4.3: Jordanova kanonična forma

Za lastno vrednost λ_j v Jordanovi kanonični formi matrike A velja:

- Lastna vrednost se na diagonali pojavi tolikokrat, kot je njena algebraična večkratnost
- Velikost največje celice je $m_j \times m_j$, kjer je m_j večkratnost ničle λ_j v $m_{\mathcal{A}}$
- Število celic za λ_j je enako številu linearno neodvisnih lastnih vektorjev.