Algebra 1

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

5. avgust 2024

Kazalo

1 Raznovrstno

Nasvet

- **Matrika** A **je ničelna** $\iff \forall v \in V : \; Av = 0$
- **Inverzne matrike komutirajo**
- **Polinoma v isti matriki komutirata** $A \in \mathcal{O}^{n\times n}$ ter $p, q \in \mathcal{O}[X]$

$$p(A) \cdot q(A) = q(A) \cdot p(A)$$

Oris dokaza. □

Izrek 1.1: Vandermonde

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & x_3^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i \neq j} (x_i - x_j)$$

Oris dokaza. Determinanta je polinom v n spremenljivkah, ter, če je $x_i = x_j$, potem je determinanta ničelna. Po faktorskem izreku sledi, da je $\det V = c\prod_{i\neq j}(x_i - x_j)$. □

2 Determinante

Izrek 2.1

- Lastni vektorji paroma različnih lastnih vrednosti so linearno neodvisni.
- $$\det(AB) = \det(A)\det(B) \quad \text{ter} \quad \det(A^T) = \det(a)$$
- Naj bo A_{ij} minor, ki ga dobimo z delecijo i-te vrstice ter j-tega stolpca.

$$\widetilde{A} = [\widetilde{a_{ij}}]_{i,j=1}^n = [(-1)^{i+j}\det(A_{ij})]_{i,j=1}^n$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\widetilde{a_{ij}} = a_{1j}\widetilde{a_{1j}} + a_{2j}\widetilde{a_{2j}} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a_{nj}}$$

$$A\widetilde{A}^T = \det(A)I$$

Oris dokaza. Dokaz razvoja po j-tem stolpcu sledi tako, da zaporedoma izračunamo determinante matrik

$$[A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, e_n] \quad \text{ter} \quad [A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(j-1)}, e_j, A^{(j+1)}, \ldots, A^{(n)}]$$

ter na koncu

$$[A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(j-1)}, a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \cdots + a_{nj}e_n, A^{(j+1)}, \ldots, A^{(n)}],$$

kjer izračun druge z antisimetričnostjo prevedemo na izračun prve, ter izračun tretje preko antisimetričnosti prevedemo na izračun druge.

Konstrukcijo inverza dokažemo tako, da opazimo da je skalarni produkt vrstic in stolpcev, ki pristanejo na diagonali enak $\det(A)$ po prejšnji točki, skalarni produkt vrstic in stolpcev, ki pa ne končajo na diagonali pa ničelen, saj je enak determinanti matrike $[A^{(1)}, \ldots, A^{(k-1)}, A^{(j)}, A^{(k+1)}, \ldots, A^{(n)}]$. □

Izrek 2.2: Cramer

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n\times n}$ ter $b \in \mathcal{O}^n$. Če je $\det(A) \neq 0$ je rešitev sistema $Ax = b$ enolična ter enaka $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, kjer je

$$x_j = \frac{\det\left[A^{(1)}, \ldots, A^{(j-1)}, b, A^{(j+1)}, \ldots, A^{(n)}\right]}{\det(A)}$$

3 Struktura Endomorfizmov

Definicija 3.1

- $\Delta_A(X) = \det(A - XI)$
- $\sigma(A) = \text{spec}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists v \neq 0 \in V.\, Av = \lambda v\}$
- **Algebraična večkratnost** lastne vrednosti λ je večkratnost ničle λ v $\Delta_A(X)$, **geometrična večkratnost** pa $\dim(\ker(A - \lambda I))$

Izrek 3.2: Cayley-Hamilton

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n\times n}$ ter karakteristični polinom $\Delta_A(X)$. Potem je $\Delta_A(A) = 0$.

Oris dokaza.

$$(A - \lambda I)(\widetilde{A - \lambda I}^T) = \det(A - \lambda I)I = \Delta_A(\lambda)I,$$

upoštevamo, da so vnosi prirejenke polinomi stopnje kvečjemu $n-1$, nato interpretiramo kot enakost matrik, sledi da so istoležni vnosi enaki ter dobimo telescoping. □

Izrek 3.3

$$\lambda \text{ ničla } \Delta_A(X) \implies \lambda \text{ ničla } m_A(X).$$

Oris dokaza. λ je lastna vrednost, $\exists v \neq 0$, da je $Av = \lambda v$. Delimo $m_A(X)$ z $X - \lambda$ ter dobimo

$$m_A(X) = q(X)(X - \lambda) + m_A(\lambda),$$
$$0 = m_A(A) = q(A)(A - \lambda I) + m_A(\lambda)I$$
$$0 = q(A)(A - \lambda I)v + m_A(\lambda)v = m_A(\lambda)v$$

□

3.1 Korenski podprostori

Dekompozicija na direktno vsoto korenskih podprostorov poda bločno diagonalizacijo.

Izrek 3.4

Korenski podprostor za lastno vrednost λ_j

$$W_j = \ker(\mathcal{A} - \lambda_j id_V)$$

je invarianten za endomorfizem $\mathcal{A}$. Če so $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ vse lastne vrednosti za $\mathcal{A}$ velja

$$V = \bigoplus_{j=1}^{r} W_j$$