Analiza 1

Trebsch

9. julij 2024

Kazalo

1 Dve topološki lemi

Preden začnemo, navedimo dve uporabni »topološki« lemi.

Lema 1.1: Vloženi intervali

Naj bo $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje intervalov, za katerega velja

$$I_{n+1} \subseteq I_n \quad \text{ter} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{len}(I_n) = 0,$$

potem obstaja edinstvena točka $\lambda \in \mathbb{R}$, da je

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lambda \in I_n.$$

Lema 1.2: Kompaktnost zaprtega intervala

Vsako pokritje zaprtega intervala ima končno podpokritje.

Oris dokaza. Supremum množice točk, ki jih lahko dosežemo z končno unijo okolic. □

2 Limite

2.1 Zaporedja

Izrek 2.1: Supremum

Naj bo A poljubna številska množica. Potem je s *supremum* A, če je:

- s je zgornja meja A
- $\forall \epsilon > 0$ velja, da $s - \epsilon$ ni zgornja meja A

Definicija 2.2: Limes superior

s je $\limsup_{n\to\infty} a_n$, če:

- $a_n < s$ velja za neskončno $n \in \mathbb{N}$
- $a_n > s$ za kvečjemu končno $n \in \mathbb{N}$

Nasvet

Standardni načini dokazovanja konvergence zaporedja so:

- **Definicija**: $\exists A \in \mathbb{R}. \forall \epsilon > 0. \exists \ldots$
- **Cauchyjeva last**: $\forall \epsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}.\ \forall m, n > N : |a_m - a_n| < \epsilon$
- **Monotone convergence**: Vsako omejeno monotono zaporedje je konvergentno.
- **Izrek o Sendviču**: $a_n \leq b_n \leq c_n$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \implies \lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

Konvergentna zaporedja lahko členoma seštevamo ter množimo ter ohranjamo limite, delimo pa lahko le v primeru neničelne limite.

2.1.1 »Orodja«

Izrek 2.3: AG za zaporedja

Če je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih[1] števil, ki konvergira k X, potem naslednji zaporedji konvergirata k X:

$$\left\{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ter} \quad \left\{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Oris dokaza. By telescoping, za vsak ε obstaja k, da je $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n} x_i - X\right| < \varepsilon$ za vse $n > k$, hkrati za nek n $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k-1} x_i\right| < \varepsilon$, zaključimo z trikotniško neenakostjo. □

[1] Pogoj pozitivnosti ni potreben za konvergenco zaporedja aritmetičnih sredin.

Izrek 2.4

Naj bo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih števil. Potem za $L \in [0, \infty]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$$

Obratna implikacija zgornjega izreka ne velja, kar dokaže zaporedje $x_n = n^{-n}$.

Izrek 2.5

Če za zaporedji realnih števil velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, potem velja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{(a_n-1)b_n}$$

Izrek 2.6: Stirlingova formula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1$$

Izrek 2.7: Stolz–Cesàro

Naj bo $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, ter $\{b_n\}$ padajoče (od nekega indeksa naprej).[2] Če obstaja prva izmed naslednjih limit sledi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

[2] Analogna trditev velja tudi v primeru $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ter $\{b_n\}$ naraščajoče od nekega indeksa dalje. V tem primeru ni potrebno niti, da je $\{a_n\}$ konvergentna.

2.2 Vrste

Nasvet

Standardni načini dokazovanja konvergence številske vrste so:

- **Po definiciji**: Številska vrsta konvergira $\iff$ konvergira zaporedje delnih vsot.
- **Cauchy**: Številska vrsta konvergira $\iff$ zaporedje delnih vsot je Cauchy.
- **Primerjalni kriterij**: Če $0 \leq a_n \leq b_n$, potem:
  - † $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ konvergira $\implies$ $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
  - † $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ divergira $\implies$ $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ divergira.
- **Potreben pogoj za konvergenco vrst**:
  Če $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Za pogoste vrste lahko parametriziramo konvergenco:

Izrek 2.8

Naslednji vrsti konvergirata za $q > 1$ ter divergirata za $q \leq 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{ter} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}.$$

Nasvet

Malo manj standardni postopki za evalvacijo številskih vrst:

- Interpretiraj vrsto kot Riemmanovo vsoto.

2.2.1 »Orodja«

Pri dokazovanju konvergence številskih vrst se lahko poslužimo tudi naslednjih »orodij«:

Izrek 2.9: Cauchyjev kriterij za konvergenco vrste

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta z pozitivnimi členi. Sestavimo zaporedje: $c_i = \sqrt[n]{a_i}$[3].

- Če obstaja $q < 1$, da velja $c_i \leq q < 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira
- Če velja $d_i \geq 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Če $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ konvergira k $L < 1$ (oz. $L > 1$), potem vrsta konvergira (divergira).

Dokaz. Primerjamo z geometrijsko vrsto. □

[3] Analogna trditev velja za zaporedje $d_i = \frac{a_{i+1}}{a_i}$

Izrek 2.10: Raabov kriterij za konvergenco vrste

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta z pozitivnimi členi. Sestavimo zaporedje: $r_i = i \cdot \left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right)$.

- Če obstaja $q > 1$, da je $r_i \geq q > 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira
- Če velja $r_i \leq 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Če obstaja $r = \lim_{i\to\infty} r_i$, potem za $r > 1$ (oz. $r < 1$) vrsta konvergira (divergira).

Dokaz. Izrek dokažemo za prvi dve točki, v limitnem primeru je analogen.

Denimo $r_i \geq q > 1$. Sledi: $\forall i \in \mathbb{N} : (a_i - a_{i+1}) \geq q \cdot a_{i+1}$. Seštejmo n takih neenakosti:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i(a_i - a_{i+1}) &\geq q \sum_{i=2}^{n+1} a_i \\
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - n \cdot a_{n+1} &\geq q \sum_{i=2}^{n+1} a_i \\
\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) + a_1 - (n+1) \cdot a_{n+1} &\geq q \sum_{i=1}^{n+1} a_i \\
1 + \frac{a_1}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} - \frac{(n+1)a_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} &\geq q \\
1 + \frac{a_1}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} &\geq q
\end{aligned}$$

Če je $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$ se leva stran neenakosti približa 1 poljubno blizu, kar je v protislovju z $q > 1$. Drugo točka sledi, saj je tedaj izraz na levi v 4. vrstici neenakosti manjši od 1, kar implicira $\frac{a_1}{n+1} \leq a_{n+1}$, kar dokaže divergentnost po primerjalnem kriteriju. $\square$

Izrek 2.11: Cauchyjev kondenzacijski test

Naj bo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ strogo padajoče zaporedje nenegativnih realnih števil. Potem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergira.}$$

2.3 Vrste z negativnimi členi

Definicija 2.12

Vrsta je *absolutno konvergentna*, če konvergira vrsta z absolutno vrednostjo členov ter *pogojno konvergentna*, če konvergira, a ne absolutno.

Izrek 2.13: Leibnizev kriterij

Naj bo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče zaporedje z limito 0. Potem konvergira vrsta

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i a_i.$$

2.3.1 Preureditve vrst

Vsaka preureditev absolutno konvergentne vrste je absolutno konvergentna k isti limiti kot začetna vrsta.

Za pogojno konvergentne vrste velja sledeče:

Izrek 2.14: Riemmanov preureditveni izrek

Če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergentna, potem za vsak $A \in \overline{\mathbb{R}}$[4] obstaja bijekcija $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, da je:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = A$$

Oris dokaza. Definiramo p_k ter n_k zaporedoma kot vsoto pozitivnih ter nasprotnih vrednosti negativnih členov do k-tega indeksa.

Velja $s_k = p_k - n_k$ ter da $p_k + n_k$ divergira, sledi, da divergirata

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i \quad \text{ter} \quad \sum_{i=1}^{\infty} n_i.$$

Sedaj konstruiramo zaporedje $\{m_1, m_2, \ldots\}$, kjer je m_1 najmanjše naravno število, da je $\sum_{i=1}^{m_1} p_i > A$, m_2 najmanjše, da je $\sum_{i=1}^{m_1} p_i - \sum_{i=1}^{m_2} n_i < A$ ter analogno naprej.

Bijekcija se ponuja sama, prav tako je limita očitna. $\square$

[4] $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

3 Zveznost

Nasvet : Karakterizacije zveznosti

- **Definicija:** $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0 \ldots$
- **Zaporedja**: f zvezna v $a \iff \forall \{a_n\} \to A : \{f(a_n)\} \to f(A)$
- **Cauchyjev pogoj**: f zvezna v a ter ima tam limito $\iff$ f je Cauchy pri a: $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, x' \in D_f$:

$$|x - a| < \varepsilon \wedge |x' - a| < \varepsilon \implies |f(x) - f(x')| < \delta$$

Pogosto je najlažje pokazati *zveznost* z uporabo $\varepsilon - \delta$ delfinicije, *nezveznost* pa z konstruiranjem zaporedja, katerega slike ne konvergirajo k sliki limite.

Nasvet : Uporaba zveznosti

- f zvezna na kompaktu $\implies$ f enakomerno zvezna, kar pomeni: $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. x, x' \in D_f$.

$$|x' - x| < \delta \implies |f(x') - f(x)| < \varepsilon$$

- Zvezna funkcija na kompaktu je omejena ter doseže vse vrednosti slike.

Oris dokaza. Dokažemo le drugo točko, prva je hitra posledica kompaktnosti zaprtega intervala. Omejenost sledi, ker obstaja zaporedje s slikami proti neskončno, to zaporedje je omejenno, kar pomeni da ima konvergentno podzaporedje, doseganje vrednosti med min. in max. sledi by considering $s = \sup\{x \in D_f | f(x) \leq c\}$ ter $f(s)$. Za minimum ter maksimum uvedemo pomožno funkcijo $f(x) = \frac{1}{f(x)-M}$, kjer je $M = \sup\{f(y) | y \in D_f\}$, ki je zvezna na D_f, posledično omejena, kar vodi v protislovje. $\square$

Nasvet : Dokazovanje zveznosti

- Zveznost je lokalna lastnost $\implies$ lahko se omejimo na poljubno majhno okolico.
- f ima **omejen odvod** v okolici a $\implies$ f je enakomerno zvezna v a.
- $\forall \varepsilon > 0$ je f zvezna na $(a + \varepsilon, b)$ $\implies$ f zvezna na (a, b)

3.1 Limite funkcij

Izrek 3.1: L'Hospitalovo pravilo

Naj sta f, g odvedljivi na (a,b)[2] ter $\forall x \in (a,b) : g(x) \neq 0 \wedge g'(x) \neq 0$. Naj bo $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x\downarrow a} g(x) = 0$. Če obstaja prva izmed naslednjih limit sledi:

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Analogen izrek velja ko je $\lim_{x\downarrow a} g(x) = \pm\infty$, tedaj ne zahtevamo obstoja limite f v a.

Izrek 3.2

Naj bo $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ter $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Potem:

$$\lim_{x\to a} (1 + f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)g(x)}$$

Oris dokaza. Sendvič z limito, ki definira e. $\square$

[2]Pozor, odvoda funkcij morata biti definirana na neki (enostranski) okolici a, definiranost odvodov samo v a ni zadosti.

4 Odvod

Definicija 4.1

Odvod je limita diferenčnega kvocienta, diferenciabilnost (ki je ekvivalentna odvedljivosti) uvedemo zgolj za dokaz formule odvoda kompozituma.

Naloga 4.2

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{ter} \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Lema 4.3

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{ter} \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Izrek 4.4: Lagrange

Naj bo f zvezna ter odvedljiva na $[a, b]$. Potem obstaja $\lambda \in [a, b]$, da je

$$f(b) - f(a) = f'(\lambda)(b - a)$$

Oris dokaza. $\varphi(x) = f(x) - f(a) + A(x - a)$ za tak A, da je $\varphi(b) = 0$. Funkcija je zvezna na kompaktu, posledično ima minimum ter maksimum. □

Izrek 4.5: Odvod ima lastnost vmesne vrednosti

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva ter $f'(a) < f'(b)$. Potem za vsak $c \in [f'(a), f'(b)]$ obstaja λ, da je $f'(\lambda) = c$.

Oris dokaza. Za $c \in \{f'(a), f'(b)\}$ očitno, za vmesne c vpeljemo zvezno funkcijo $\varphi(x) = f(x) - cx$, ki na kompaktu doseže minimum ter maksimum. □

4.1 Geometrija odvoda

Definicija 4.6

- f ima v c lokalni ekstrem, če v neki ε okolici c ni nobene točke, ki ima sliko večjo od $f(c)$.
- Odvedljiva funkcija ima v lokalnem ekstremu ničlo odvoda.
- Predznak prvega odvoda določi padajočost/naraščajočost.

5 Integral

5.1 Nedoločeni integral

Zaradi estetskih razlogov se bomo izognili pisanju $+C$ po vsakem nedoločenem integralu.

Naloga 5.1: Standardni

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(x) \qquad \int \frac{dx}{\sin(x)^2} = -\mathrm{ctg}(x) \qquad \int \frac{dx}{\cos(x)^2} = \tan(x)$$

Naloga 5.2: Koreni

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

Pri naslednjih dveh integralih privzamemo $a > 0$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|$$

Sedaj ne zahtevamo več $a > 0$.

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \log(\sqrt{a^2 + x^2} + x)\right)$$
$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arctan(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$$

Naloga 5.3: Obratne vrednosti kvadratov

$$\int \frac{dx}{a^2x^2 + b^2} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{ax}{b}\right)$$

$$\int \frac{dx}{b^2 - a^2x^2} = \frac{1}{2ab} \cdot \left(\log\left(\frac{ax}{b} + 1\right) - \log\left(1 - \frac{ax}{b}\right)\right)$$

Naloga 5.4: Integriranje racionalnih funkcij

Imenovalec racionalne funkcije razcepimo na produkt potenc linearnih in kvadratnih členov, potem pričnemo razcep na parcialne ulomke na naslednji način:
Vsak faktor $\frac{1}{(x-a)^k}$ v imenovalcu za ustrezne konstante $A_1, \ldots, A_k$ prispeva:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{(x-a)^i}$$

Vsak faktor $\frac{1}{(x^2+bx+c)^l}$ v imenovalcu za konstante $B_1, \ldots, B_l$ ter $C_1, \ldots, C_l$ prispeva:

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{B_i x + C_i}{(x^2+bx+c)^i}$$

Za integriranje parcialnih ulomkov uporabimo naslednje enakosti:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A \ln|x-a| \text{ ter } \int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \frac{-A}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} \text{ za } n > 1$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{B}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right| + \frac{2C-Bb}{\sqrt{-D}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-D}}\right)$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^2}\,dx = \frac{(2C-Bb)x+(bC-2Bc)}{(-D)(x^2+bx+c)} + \frac{2(2C-Bb)}{(-D)\sqrt{-D}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-D}}\right)$$

kjer je $D = b^2 - 4c < 0$, saj privzamemo, da so kvadratni faktorji nerazcepni nad $\mathbb{R}$.

Naloga 5.5: Trigonometrične funkcije

V splošnem lahko vsak integral vsebujoč racionalne kombinacije trigonometričnih funkcij prevedemo na integral racionalnih funkcij upoštevajoč naslednje identitete:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \implies \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2t}{1+t^2}dt$$

Če funkciji sin ter cos nastopata v integralu kot potenci, večji od 1, lahko integral poenostavimo z uporabo enakosti dvojnih kotov.

Pri integralih oblike $\int \sin(x)^p \cos(x)^q \,dx$ uporabimo naslednji recept:

- q je lih $\implies$ substitucija $t = \cos(x)$
- p je lih $\implies$ substitucija $t = \sin(x)$
- p in q sta soda $\implies$ nižanje stopnje z uporabo formul o dvojnih kotih

Naloga 5.6: Posebne vrste racionalnih funkcij

- Integral oblike

$$\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}})\, dx \text{ prevedemo na } \int R(\phi(t), t^m)\, dt\,,$$

  kjer je $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}} = \phi^{-1}(x)$ ter je $\phi(t) = x = \frac{-dt^n+b}{ct^n-a}$

- Za sledeči integral uporabimo nastavek:

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = \tilde{p}(x) + \int \frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dt\,,$$

  kjer je C konstanta, $\tilde{p}$ pa polinom stopnje ena manj kot p

- Integrale oblike

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$$

  poenostavimo z uvedbo nove spremenljivke u:

  † Če je $a > 0$: $\sqrt{a}(u-x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$

  † Če je $a < 0$ ter x_1 ničla kvadratne funkcije: $\sqrt{-a}(x-x_1)u = \sqrt{ax^2+bx+c}$

- Integrale oblike:

$$\int \frac{dx}{(x+\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

  poenostavimo z uvedbo nove spremenljivke $t = \frac{1}{x+\alpha}$

5.2 Določeni integral

Definicija 5.7

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *Riemmanovo integrabilna*, če obstaja I, da: $\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0$, da za vse delitve intervala $[a, b]$, drobnejše od δ, ter vse usklajene izbire testnih točk velja:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\delta_i - I \right| < \epsilon$$

Omejena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *Darbouxovo integrabilna*, če sta supremum spodnjih Darbouxovih vsot ter infimum zgornjih Darbouxovih vsot enaka:

$$\sup\{s(D) = \sum_{i=1}^{n} \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot \delta_i\} =$$
$$= \inf\{S(D) = \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot \delta_i\},$$

kjer supremum ter infimum vzamemo po vseh delitvah intervala $[a, b]$, ter je delitev

$$D = [a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b]$$

Izrek 5.8: Lastnosti Darbouxovo ter Riemmanovo integrabilnih funkcij

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna $\implies$ f na $[a, b]$ omejena.
- Zvezne funkcije na kompaktu ter monotone funkcije na kompaktu so integrabilne.
- g zvezna ter f integrabilna, obe na kompaktu $\implies$ $g \circ f$ je integrabilna.
- $$f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$
  $$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Izrek 5.9: Osnovna izreka

f integrabilna na $[a, b]$. Potem je funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

zvezna na $[a, b]$ ter vsaka točka zveznosti f da točko odvedljivosti F.
Če ima f primitivno funkcijo povsod na $[a, b]$ velja:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

5.3 Posplošeni integral

Definicija 5.10

$f : (a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na $(t, b]$ za vsak $t \in (a, b)$. Potem je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \downarrow a} \int_t^b f(x)\,dx$$

Izrek 5.11: Integralski kriterij

Naj bo $f : [1, \infty] \to \mathbb{R}$ **monotono padajoča ter nenegativna**. Potem:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konvergira} \iff \sum_{i=1}^\infty f(i)\,dx \text{ konvergira}$$

Oris dokaza. Trivialen sendvič z Riemmanovo vsoto. □

Izrek 5.12

Naj bo $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabilna na vsakem intervalu $[a, t)$. Potem

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \;\text{ obstaja} \implies \int_a^b f(x)\,dx \;\text{ obstaja}$$

Oris dokaza. $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ ter $G(x) = \int_a^x g(x)\,dx$ sta zvezni na $[a, b)$ ter obstaja $\lim_{x \uparrow b} G(x)$. Uporabimo Cauchyjev pogoj za obstoj limite ter trikotniško neenakost za integrale. □

Izrek 5.13

Naj bo f integrabilna na $[a, b]$.

- $$s < 1 \implies \int_a^b \frac{f(x)}{(x-a)^s}\,dx \text{ obstaja}$$
- Če $s \geq 1$ ter obstja $m \in \mathbb{R}^+$, da je izpolnjen en izmed pogojev:
  - † $\forall x \in [a, b] : f(x) \geq m$
  - † $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq -m$

  $$\implies \int_a^b \frac{f(x)}{(x-a)^s}\,dx = \infty$$

Oris dokaza. Zamenjamo $|f(x)|$ z m ter uporabimo integralski kriterij. □

Izrek 5.14: Integrabilnost v $\pm\infty$

Naj bo f integrabilna na vsakem intervalu $[a, b]$, $b > a$. Potem:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ obstaja} \iff \forall \varepsilon > 0.\ \exists B \in \mathbb{R} :\ \forall\, b, b' > B : \left|\int_{b'}^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

Oris dokaza. Preidemo na primitivno funkcijo ter uporabimo Cauchyjev pogoj za limite v neskončnosti. □

Izrek 5.15

Naj bo $g : [a, \infty] \to \mathbb{R}$ zvezna za $a > 0$.

- $$g \text{ omejena } D_g \wedge p > 1 \implies \int_a^{infty} \frac{g(x)}{x^p}\,dx \text{ konvergira}$$
- Če $p \leq 1$ ter obstaja $m \in \mathbb{R}^+$, da je izpolnjen eden izmed pogojev:
  † $\forall x \in [a, b] : g(x) \geq m$
  † $\forall x \in [a, b] : g(x) \leq -m$

$$\implies \int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p}\,dx = \infty$$

5.4 Geometrija integrala

Ne da se mi.

6 Funkcijska zaporedja in vrste

Definicija 6.1

Podobno podpoglavjema o zapordjih in vrstah realnih števil, le da uporabljamo metriko:

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$$

Konvergenci glede na to metriko pravimo enakomerna konvergenca.

Izrek 6.2: Lastnosti enakomerne konvergence

- **Metrični prostor funkcij z metriko d_∞ je poln.**
- Če zvezne funkcije $\{f_n\}$ konvergirajo enakomerno k $f \implies f$ zvezna.

Izrek 6.3: Weierstraßov kriterij

$\{f_n\}$ funkcijsko zaporedje ter obstaja zaporedje pozitivnih števil $\{m_n\}$, da $f_n(x) \leq m_n$, za vse n ter vse $x \in I$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_i \text{ konvergira} \implies \sum_{i=1}^{\infty} f_n(x) \text{ konvergira enakomerno}$$

Oris dokaza. Konvergenca po točkah očitna, uporabimo Cauchyjev kriterij za enakomerno konvergenco. □

6.1 Integriranje in odvajanje funkcijskih zaporedij

Izrek 6.4: Lastnosti enakomerne konvergence

- Če zvezne funkcije $\{f_n\} \in C^0$ konvergirajo enakomerno proti f, potem je

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

- Zvezno odvedljive $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ ter $\{f_n(c)\}$ konvergira za nek $c \in [a,b]$. Če $\{f_n' \to g\}$ enakomerno, potem $\{f_n \to f\}$ enakomerno ter velja

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)'$$

Ker zgornji izreki veljajo za enakomerno konvergentna zaporedja, veljajo tudi za enakomerno konvergentne vrste.

6.2 Potenčne vrste

Izrek 6.5: Obstoj konvergenčnega radija

Za potenčno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ obstaja $R \in [0, \infty]$ z lastnostjo:

- za $x \in (c-R, c+R)$ je vrsta konvergentna, ter divergentna za $|x-c| > R$, v točkah $|x-c| = R$ pa bodisi konvergira, bodisi divergira
- Vrsta konvergira absolutno in enakomerno na $[c-r, c+r]$ za vsak $r < R$.

Oris dokaza. Prva točka sledi po supremumu, druga pa upoštevajoč, da če vrsta konvergira pri $x = x_0$, potem $\lim_{n\to\infty} |a_n x^n| = 0 \implies |a_n x^n < M|$ ter $|a_n x^n| < \left|a_n \left(\frac{r}{x_0}\right)^n\right| \leq M\left(\frac{r}{x_0}\right)^n$, zaključimo z Weierstraßom. □

Izrek 6.6: Cauchy-Hadamard

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ potenčna vrsta. Za konvergenčni polmer R velja:

- $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{a_n}$, če ta limita obstaja.
- $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, če ta limita obstaja.
- $$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Oris dokaza. Za prva dva očitno. Če je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$ hitro dobiš neničelnost limite členov. Če je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$, potem najdemo q, da je $|x| < \frac{1}{q} < \frac{1}{a}$, po definiciji lim sup za vse $n > N$ velja: $\sqrt[n]{a_n} < q$, ker je $|qx| < 1$ smo pokazali da vrsta konvergira. Če je $A > \frac{1}{|x|}$ obstaja neskončno n, da je $\sqrt[n]{a_n} > \frac{1}{|x|} \implies |a_n x^n| > 1$. □

Izrek 6.7: Zveznost, odvedljivost ter integrabilnost

Po izreku 6.5 vemo, da je vsosta potenčne vrste s konvergenčnim radijem $R > 0$ **zvezna** funkcija na $(c-R, c+R)$. O krajiščih pa govori *Abelov izrek:*

$$\text{Če } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)^n \text{ konvergira pri } x = \pm R, \text{ potem je vsota zvezna pri } x = \pm R.$$

Naj bo $R > 0$ konvergenčni polmer $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i x^i$. Potem imata vrsti, ki jih dobimo z členoma odvajanjem in integriranjem f prav tako konvergenčni polmer R ter za vse $x \in (-R, R)$ velja:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{in} \quad \int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Oris dokaza. Drugi del trivialen, R ostaja konvergenčni radij, ker je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ □

6.3 Taylorjeva vrsta

Lema 6.8

Če je P polinom stopnje n velja:

$$P(x+y) = P(x) + \frac{P'(x)}{1!}y + \frac{P''(x)}{2!}y^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x)}{n!}y^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(x)}{i!}y^i$$

Definicija 6.9: Taylorjev polinom

f je n-krat odvedljiva v okolici a. **n-ti Taylorjev polinom funkcije f pri a** je

$$T_{n,a}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Če je f neskončnokrat odvedljiva v okolici a lahko f priredimo **Taylorjevo vrsto**:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i = \lim_{n\to\infty} T_{n,a}(x),$$

če slednja obstaja.

Hitra posledica je, da če je f vsota konvergentne potenčne vrste, potem je f vsota prirejene Taylorjeve vrste.

Zanima nas obnašanje $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Izrek 6.10: Taylorjev izrek

Naj bo f odvedljiva $(n+1)$-krat na odprtem intervalu I, ki vsebuje a. Za vsaj $x \in I$ obstaja c med a in x, da velja:

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Oris dokaza. Za $0 \leq k \leq n$ velja $R_{n,a}^{(k)}(a) = 0$. Fiksiramo x ter izberemo $s \in \mathbb{R}$, da je $R_{n,a}(x) = s(x-a)^{n+1}$. Uvedemo $G(y) = R_{n,a}(y) - s(y-a)^{n+1}$, velja $G(x) = 0$ ter $\forall 0 \leq k \leq n : G^{(k)}(a) = 0$. Rezultat sledi po n-kratni uporabi Rollovega izreka, upoštevajoč definiciji G ter $R_{n,a}$. $\square$

Moč Taylorjevega izreka leži v tem, da lahko pogosto omejimo vrednosti, ki jih koeficient $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ zavzame med a in x, kar nam omogoča vspostaviti uporabne neenakosti.

Naloga 6.11

Opazujmo

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x}};\ x > 0 \\ 0;\ x \leq 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}};\ x > 0 \\ 0;\ x \leq 0 \end{cases}$$

Ker je $\lim_{\delta\to 0}\delta^{-1}e^{\frac{1}{\delta}} = 0$ je očitno $f \in C^\infty$ ter $f^{(n)}(0) = 0\ \forall n$. Prirejena Taylorjeva vrsta f v 0 je potlej enaka ničelni in konvergira povsod, njena vsota pa ni f. Zato uvedemo naslednji razred funkcij.

Definicija 6.12: Analitične funkcije

$f : I \to \mathbb{R}$ je **realno analitična** na intervalu I (označimo $f \in C^\omega(I)$), če $\forall a \in I. \exists r_a > 0.\ (a - r_a, a + r_a) \subseteq I$ in je f na $(a - r_a, a + r_a)$ vsota konvergentne potenčne vrste:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k,\ x \in (a - r_a, a + r_a)$$

Izrek 6.13: Splošni Taylorjev izrek

Naj bo I odprt interval vsebujoč a in $f \in \mathbb{C}^{(n+1)}(I)$. Za vsak $x \in I$ in $p \in \mathbb{N}$ obstaja c med x in a, da za $f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$ velja:

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)(c)}}{p \cdot n!}(x-a)^p(x-c)^{n-p+1}$$

V posebnih primerih velja:

- $p = n + 1$:
$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)(c)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$
- $p = 1$:
$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)(c)}}{n!}(x-a)(x-c)^n$$

Oris dokaza. Fiksiramo $x \in I$ ter izberemo poljubne $b \in I$ ter $p \in \mathbb{N}$. Definiramo $\varphi(x) = T_{n,x}(b) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^p R_{n,a}(b)$, velja $\varphi(x) \in C^1(I)$. Ker je $f(a) = f(b)$ rezultat sledi po Rollejevem izreku, saj je:

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x) + (b-x)f''(x) - (b-x)f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)$$
$$+ (-p)\left(\frac{(b-x)^{p-1}}{(b-a)^p}\right)R_{n,a}(b)$$
$$\implies R_{n,a}(b) = \frac{(b-x)^{n-p+1}(b-a)^p}{p \cdot n!}f^{(n+1)}(c)$$

$\square$

Naloga 6.14: Taylorjeve vrste osnovnih funkcij

- $f(x) = e^x$ s konvergenčnim radijem ∞:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $f(x) = \sin(x)$ s konvergenčnim radijem ∞:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $f(x) = \cos(x)$ s konvergenčnim radijem ∞:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $f(x) = \ln(1+x)$ s konvergenčnim radijem 1:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

- $f(x) = (1+x)^\alpha$ za $\alpha \in \mathbb{R}$, kjer je $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad x \in (-1,1)$$

- logaritem v okolici $a \in \mathbb{R}^+$, ki konvergira za $\left|\frac{x-a}{a}\right| < 1 \implies 0 < x < 2a$:

$$\begin{aligned}\log(x) = \log(a + x - a) = \log(a) + \log\left(1 + \frac{x-a}{a}\right) &= \\ = \log(a) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \left(\frac{x-a}{a}\right)^k \qquad & x \in (0, 2a)\end{aligned}$$

7 Metrični prostori