Analiza 1

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

4. oktober 2024

Kazalo

1 Dve topološki lemi

Preden začnemo, navedimo dve uporabni »topološki« lemi.

Lema 1.1: Vloženi intervali

Naj bo $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje intervalov, za katerega velja

$$I_{n+1} \subseteq I_n \quad \text{ter} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{len}(I_n) = 0,$$

potem obstaja edinstvena točka $\lambda \in \mathbb{R}$, da je

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lambda \in I_n.$$

Lema 1.2: Kompaktnost zaprtega intervala

Vsako pokritje zaprtega intervala ima končno podpokritje.

Oris dokaza. Supremum množice točk, ki jih lahko dosežemo z končno unijo okolic. □

2 Limite

2.1 Zaporedja

Trditev 2.1: Supremum

Naj bo A poljubna številska množica. Potem je s *supremum* A, če je:

- s je zgornja meja A
- $\forall \epsilon > 0$ velja, da $s - \epsilon$ ni zgornja meja A

Definicija 2.2: Limes superior

s je $\limsup_{n\to\infty} a_n$, če:

- $a_n < s$ velja za neskončno $n \in \mathbb{N}$
- $a_n > s$ za kvečjemu končno $n \in \mathbb{N}$

Nasvet

Standardni načini dokazovanja konvergence zaporedja so:

- **Definicija**: $\exists A \in \mathbb{R}.\forall \epsilon > 0.\exists \dots$
- **Cauchyjeva lastnost**: $\forall \epsilon > 0.\exists N \in \mathbb{N}.\ \forall m, n > N : |a_m - a_n| < \epsilon$
- **Monotona konvergenca** : Vsako omejeno monotono zaporedje je konvergentno.
- **Izrek o Sendviču**: $a_n \leq b_n \leq c_n$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \implies \lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

Konvergentna zaporedja lahko členoma seštevamo ter množimo ter ohranjamo limite, delimo pa lahko le v primeru neničelne limite.

2.1.1 »Orodja«

Izrek 2.3: AG za zaporedja

Če je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih[1] števil, ki konvergira k X, potem naslednji zaporedji konvergirata k X:

$$\{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ter} \quad \left\{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Oris dokaza. By telescoping, za vsak ε obstaja k, da je $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n} x_i - X\right| < \varepsilon$ za vse $n > k$,

[1] Pogoj pozitivnosti ni potreben za konvergenco zaporedja aritmetičnih sredin.

hkrati za nek n velja $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k-1} x_i\right| < \varepsilon$, zaključimo z trikotniško neenakostjo. $\square$

Izrek 2.4

Naj bo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih števil. Potem za $L \in [0, \infty]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$$

Obratna implikacija zgornjega izreka ne velja, kar dokaže zaporedje

$$x_n = \begin{cases} 2; & \text{če je } n \text{ sod} \\ 1; & \text{če je } n \text{ lih} \end{cases}$$

Izrek 2.5

Če za zaporedji realnih števil velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, potem velja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{(a_n-1)b_n}$$

Izrek 2.6: Stirlingova formula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1$$

Izrek 2.7: Stolz–Cesàro

Naj bo $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, ter $\{b_n\}$ padajoče (od nekega indeksa naprej).[2]
Če obstaja prva izmed naslednjih limit, potem obstaja druga ter sledi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

[2] Analogna trditev velja tudi v primeru $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ter $\{b_n\}$ naraščajoče od nekega indeksa dalje. V tem primeru ni potrebno niti, da je $\{a_n\}$ konvergentna.

2.2 Vrste

Nasvet

Standardni načini dokazovanja konvergence številske vrste so:

- **Po definiciji**: Številska vrsta konvergira $\iff$ konvergira zaporedje delnih vsot.
- **Cauchy**: Številska vrsta konvergira $\iff$ zaporedje delnih vsot je Cauchy.
- **Primerjalni kriterij**: Če $0 \leq a_n \leq b_n$, potem:
  - † $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ konvergira $\implies$ $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
  - † $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ divergira $\implies$ $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ divergira.
- **Potreben pogoj za konvergenco vrst**:
  Če $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Za pogoste vrste lahko parametriziramo konvergenco:

Trditev 2.8

Naslednji vrsti konvergirata za $q > 1$ ter divergirata za $q \leq 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{ter} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}.$$

Nasvet

Malo manj standardni postopki za evalvacijo številskih vrst:

- Interpretiraj vrsto kot Riemmanovo vsoto.

2.2.1 »Orodja«

Pri dokazovanju konvergence številskih vrst se lahko poslužimo tudi naslednjih »orodij«:

Izrek 2.9: Cauchyjev kriterij za konvergenco vrste

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta z pozitivnimi členi. Sestavimo zaporedje: $c_i = \sqrt[i]{a_i}$[3].

- Če obstaja $q < 1$, da velja $c_i \leq q < 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira
- Če velja $c_i \geq 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Če $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ konvergira k $L < 1$ (oz. $L > 1$), potem vrsta konvergira (divergira).

Dokaz. Primerjamo z geometrijsko vrsto. □

[3] Analogna trditev velja za zaporedje $d_i = \frac{a_{i+1}}{a_i}$

Izrek 2.10: Raabejev kriterij za konvergenco vrste

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta z pozitivnimi členi. Sestavimo zaporedje: $r_i = i \cdot \left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right)$.

- Če obstaja $q > 1$, da je $r_i \geq q > 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira
- Če velja $r_i \leq 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Če obstaja $r = \lim_{i\to\infty} r_i$, potem za $r > 1$ (oz. $r < 1$) vrsta konvergira (divergira).

Dokaz. Izrek dokažemo za prvi dve točki, v limitnem primeru je analogen.

Denimo $r_i \geq q > 1$. Sledi: $\forall i \in \mathbb{N} : i \cdot (a_i - a_{i+1}) \geq q \cdot a_{i+1}$. Seštejmo n takih neenakosti:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i(a_i - a_{i+1}) &\geq q \sum_{i=2}^{n+1} a_i \\
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - n \cdot a_{n+1} &\geq q \sum_{i=2}^{n+1} a_i \\
\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) + q \cdot a_1 - (n+1) \cdot a_{n+1} &\geq q \sum_{i=1}^{n+1} a_i \\
1 + \frac{q \cdot a_1}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} - \frac{(n+1)a_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} &\geq q \\
1 + \frac{q \cdot a_1}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} &\geq q
\end{aligned}$$

Če je $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$ se leva stran neenakosti približa 1 poljubno blizu, kar je v protislovju z $q > 1$. Drugo točka sledi, saj je tedaj izraz na levi v 4. vrstici neenakosti manjši od 1, kar implicira $\frac{q \cdot a_1}{n+1} \leq a_{n+1}$, kar dokaže divergentnost po primerjalnem kriteriju. □

Trditev 2.11: Cauchyjev kondenzacijski test

Naj bo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ strogo padajoče zaporedje nenegativnih realnih števil. Potem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergira.}$$

2.3 Vrste z negativnimi členi

Definicija 2.12

Vrsta je *absolutno konvergentna*, če konvergira vrsta z absolutno vrednostjo členov ter *pogojno konvergentna*, če konvergira, a ne absolutno.

Izrek 2.13: Leibnizev kriterij

Naj bo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče zaporedje z limito 0. Potem konvergira vrsta

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i a_i.$$

2.3.1 Preureditve vrst

Vsaka preureditev absolutno konvergentne vrste je absolutno konvergentna k isti limiti kot začetna vrsta. Za pogojno konvergentne vrste velja sledeče:

Izrek 2.14: Riemmanov preureditveni izrek

Če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergentna, potem za vsak $A \in \overline{\mathbb{R}}$[4] obstaja bijekcija $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, da je:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = A$$

Oris dokaza. Definiramo p_k ter n_k zaporedoma kot vsoto pozitivnih ter nasprotnih vrednosti negativnih členov do k-tega indeksa.

Velja $s_k = p_k - n_k$ ter da $p_k + n_k$ divergira, sledi, da divergirata

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i \quad \text{ter} \quad \sum_{i=1}^{\infty} n_i.$$

Sedaj konstruiramo zaporedje $\{m_1, m_2, \dots\}$, kjer je m_1 najmanjše naravno število, da je $\sum_{i=1}^{m_1} p_i > A$, m_2 najmanjše, da je $\sum_{i=1}^{m_1} p_i - \sum_{i=1}^{m_2} n_i < A$ ter analogno naprej. Bijekcija se ponuja sama, prav tako je limita očitna. $\square$

[4] $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

3 Zveznost

Definicija 3.1: Karakterizacije zveznosti

- **Definicija:** $\forall \varepsilon > 0.\, \exists \delta > 0 \ldots$
- **Zaporedja**: f zvezna v $a \iff \forall \{a_n\} \to A : \{f(a_n)\} \to f(A)$
- **Limite**: f je zvezna v $a \iff f$ ima limito v a, ter je limita enaka $f(a)$

Pogosto je najlažje pokazati *zveznost* z uporabo $\varepsilon - \delta$ delfinicije, *nezveznost* pa z konstruiranjem zaporedja, katerega slike ne konvergirajo k sliki limite.

Nasvet : Uporaba zveznosti

- f zvezna na kompaktu $\implies f$ enakomerno zvezna, kar pomeni: $\forall \varepsilon > 0.\, \exists \delta > 0.\, x, x' \in D_f$.
$$|x' - x| < \delta \implies |f(x') - f(x)| < \varepsilon$$
- Zvezna funkcija na kompaktu je omejena ter doseže vse vrednosti slike.

Oris dokaza. Dokažemo le drugo točko, prva je hitra posledica kompaktnosti zaprtega intervala. Omejenost sledi, ker obstaja zaporedje s slikami proti neskončno, to zaporedje je omejenno, kar pomeni da ima konvergentno podzaporedje, doseganje vrednosti med minimumom in maksimumom sledi po obravnavi $s = \sup\{x \in D_f | f(x) \leq c\}$ ter $f(s)$. Za minimum ter maksimum uvedemo pomožno funkcijo $g(x) = \frac{1}{f(x) - M}$, kjer je $M = \sup\{f(y) | y \in D_f\}$, ki je zvezna na D_f, posledično omejena, kar vodi v protislovje. □

Nasvet : Dokazovanje zveznosti

- Zveznost je lokalna lastnost $\implies$ lahko se omejimo na poljubno majhno okolico.
- f ima **omejen odvod** v okolici $a \implies f$ je enakomerno zvezna v a.

Nasvet

Lokalne lastnosti, kot so definiranost, zveznost, odvedljivost ter posplošena integrabilnost zaradi pola pogosto lažje dokažemo na zaprtem intervalu. Če je slednji poljubno velik pa pravzaprav sledi, da je funkcija zvezna/odvedljiva na poltraku, kar hitro vidimo po protislovju. Klasični primer je naslednja implikacija:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ je } f \text{ zvezna na } (a + \varepsilon, b) \implies f \text{ zvezna na } (a, b)$$

Primer 3.2: Odvedljiva funkcija z nezveznim odvodom

$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}); & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$. Odvod v ničli je 0, v $x \neq 0$ pa $2x \sin(\frac{1}{x}) + \cos(\frac{1}{x})$.

3.1 Limite funkcij

Trditev 3.3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{ter} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$$

Trditev 3.4

f ima limito pri $a \iff f$ je Cauchy pri a: $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, x' \in D_f$:

$$|x - a| < \delta \wedge |x' - a| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Izrek 3.5: L'Hospitalovo pravilo

Naj sta f, g odvedljivi na (a, b)[5] ter $\forall x \in (a, b) : g(x) \neq 0 \wedge g'(x) \neq 0$. Naj bo $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x\downarrow a} g(x) = 0$. Če obstaja prva izmed naslednjih limit sledi:

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Analogen izrek velja ko je $\lim_{x\downarrow a} g(x) = \pm\infty$, tedaj ne zahtevamo obstoja limite f v a.

Trditev 3.6

Naj bo $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ter $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Potem:

$$\lim_{x\to a} (1 + f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)g(x)}$$

Oris dokaza. Izrek o sendviču z limito, ki definira e. □

[5] Pozor, odvoda funkcij morata biti definirana na neki (enostranski) okolici a, definiranost odvodov samo v a ni zadosti.

4 Odvod

Definicija 4.1

Odvod je limita diferenčnega kvocienta, diferenciabilnost (ki je ekvivalentna odvedljivosti) uvedemo zgolj za dokaz formule odvoda kompozituma.

Naloga 4.2

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{ter} \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Trditev 4.3

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{ter} \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Izrek 4.4: Lagrange

Naj bo f zvezna ter odvedljiva na $[a, b]$. Potem obstaja $\lambda \in [a, b]$, da je

$$f(b) - f(a) = f'(\lambda)(b - a)$$

Oris dokaza. $\varphi(x) = f(x) - f(a) - A(x - a)$ za tak A, da je $\varphi(b) = 0$. Funkcija je zvezna na kompaktu, posledično ima minimum ter maksimum. □

Izrek 4.5: Odvod ima lastnost vmesne vrednosti

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva ter $f'(a) < f'(b)$. Potem za vsak $c \in [f'(a), f'(b)]$ obstaja λ, da je $f'(\lambda) = c$.

Oris dokaza. Za $c \in \{f'(a), f'(b)\}$ očitno, za vmesne c vpeljemo zvezno funkcijo $\varphi(x) = f(x) - cx$, ki na kompaktu doseže minimum ter maksimum. □

4.1 Geometrija odvoda

Definicija 4.6

- f ima v c lokalni ekstrem, če v neki ε okolici c ni nobene točke, ki ima sliko večjo od $f(c)$.
- Odvedljiva funkcija ima v lokalnem ekstremu ničlo odvoda.
- Predznak prvega odvoda določi padajočost/naraščajočost.

5 Integral

5.1 Nedoločeni integral

Zaradi estetskih razlogov se bomo izognili pisanju $+C$ po vsakem nedoločenem integralu.

Naloga 5.1: Standardni

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(x) \qquad \int \frac{dx}{\sin(x)^2} = -\mathrm{ctg}(x) \qquad \int \frac{dx}{\cos(x)^2} = \tan(x)$$

Naloga 5.2: Koreni

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

Pri naslednjih dveh integralih privzamemo $a > 0$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|$$

Sedaj ne zahtevamo več $a > 0$.

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln(\sqrt{a^2 + x^2} + x)\right)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arctan(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}})\right)$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})\right)$$

Naloga 5.3: Obratne vrednosti kvadratov

$$\int \frac{dx}{a^2 x^2 + b^2} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{ax}{b}\right)$$

$$\int \frac{dx}{b^2 - a^2 x^2} = \frac{1}{2ab} \cdot \left(\log\left(\frac{ax}{b} + 1\right) - \log\left(1 - \frac{ax}{b}\right)\right)$$

Naloga 5.4: Integriranje racionalnih funkcij

Imenovalec racionalne funkcije razcepimo na produkt potenc linearnih in kvadratnih členov, potem pričnemo razcep na parcialne ulomke na naslednji način:
Vsak faktor $\frac{1}{(x-a)^k}$ v imenovalcu za ustrezne konstante $A_1, \ldots, A_k$ prispeva:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{(x-a)^i}$$

Vsak faktor $\frac{1}{(x^2+bx+c)^l}$ v imenovalcu za konstante $B_1, \ldots, B_l$ ter $C_1, \ldots, C_l$ prispeva:

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{B_i x + C_i}{(x^2+bx+c)^i}$$

Za integriranje parcialnih ulomkov uporabimo naslednje enakosti:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| \quad \text{ter} \quad \int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \frac{-A}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} \quad \text{za } n>1$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{B}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right| + \frac{2C-Bb}{\sqrt{-D}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-D}}\right)$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^2}\,dx = \frac{(2C-Bb)x+(bC-2Bc)}{(-D)(x^2+bx+c)} + \frac{2(2C-Bb)}{(-D)\sqrt{-D}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-D}}\right)$$

kjer je $D = b^2-4c<0$, saj privzamemo, da so kvadratni faktorji nerazcepni nad $\mathbb{R}$.

Naloga 5.5: Trigonometrične funkcije

V splošnem lahko vsak integral vsebujoč racionalne kombinacije trigonometričnih funkcij prevedemo na integral racionalnih funkcij upoštevajoč naslednje identitete:

$$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right) \implies \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Če funkciji sin ter cos nastopata v integralu kot potenci, večji od 1, lahko integral poenostavimo z uporabo enakosti dvojnih kotov.

Pri integralih oblike $\int \sin(x)^p\cos(x)^q\,dx$ uporabimo naslednji recept:

- q je lih $\implies$ substitucija $t=\cos(x)$
- p je lih $\implies$ substitucija $t=\sin(x)$
- p in q sta soda $\implies$ nižanje stopnje z uporabo formul o dvojnih kotih

Naloga 5.6: Posebne vrste racionalnih funkcij

- Integral oblike

$$\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}})\, dx \text{ prevedemo na } \int R(\phi(t), t^m)\, dt\,,$$

kjer je $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}} = \phi^{-1}(x)$ ter je $\phi(t) = x = \frac{-dt^n+b}{ct^n-a}$

- Za sledeči integral uporabimo nastavek:

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = \widetilde{p}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dt\,,$$

kjer je C konstanta, $\tilde{p}$ pa polinom stopnje ena manj kot p

- Integrale oblike

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$$

poenostavimo z uvedbo nove spremenljivke u:

† Če je $a > 0$: $\sqrt{a}(u-x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$

† Če je $a < 0$ ter x_1 ničla kvadratne funkcije: $\sqrt{-a}(x-x_1)u = \sqrt{ax^2+bx+c}$

- Integrale oblike:

$$\int \frac{dx}{(x+\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

poenostavimo z uvedbo nove spremenljivke $t = \frac{1}{x+\alpha}$

5.2 Določeni integral

Definicija 5.7

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *Riemmanovo integrabilna*, če obstaja I, da: $\forall \epsilon > 0.\ \exists \delta > 0$, da za vse delitve intervala $[a, b]$, drobnejše od δ, ter vse usklajene izbire testnih točk velja:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\delta_i - I \right| < \epsilon$$

Omejena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *Darbouxovo integrabilna*, če sta supremum spodnjih Darbouxovih vsot ter infimum zgornjih Darbouxovih vsot enaka:

$$\sup\{s(D) = \sum_{i=1}^{n} \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot \delta_i\} =$$
$$= \inf\{S(D) = \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot \delta_i\},$$

kjer supremum ter infimum vzamemo po vseh delitvah intervala $[a, b]$, ter je delitev

$$D = [a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b]$$

Trditev 5.8: Lastnosti Darbouxovo ter Riemmanovo integrabilnih funkcij

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna $\implies$ f na $[a, b]$ omejena.
- Zvezne funkcije na kompaktu ter monotone funkcije na kompaktu so integrabilne.
- g zvezna ter f integrabilna, obe na kompaktu $\implies$ $g \circ f$ je integrabilna.
- $$f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$
  $$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Izrek 5.9: Osnovna izreka

Naj bo f integrabilna na $[a, b]$. Potem je funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

zvezna na $[a, b]$ ter vsaka točka zveznosti f da točko odvedljivosti F.
Če ima f primitivno funkcijo povsod na $[a, b]$ velja:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Izrek 5.10: Stroga neenakost med integralom ter integrandom

Če za integrabilni funkciji f in g velja $\forall x \in [a,b] : f(x) > g(x)$, potem velja

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx.$$

Izrek 5.11: Cauchy-Schwartzeva neenakost

Naj sta $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$. Potlej

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)$$

Oris dokaza. Naslednji izraz je nenegativen, posledično je diskriminanta kvadratne enačbe nepozitivna.

$$(xf(t) + g(t))^2 \geq 0$$

$$\int_a^b (xf(t) + g(t))^2\,dt \geq 0$$

□

5.3 Posplošeni integral

Definicija 5.12

$f : (a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[t,b]$ za vsak $t \in (a,b)$. Potem je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \downarrow a} \int_t^b f(x)\,dx$$

Izrek 5.13: Integralski kriterij

Naj bo $f : [1,\infty] \to \mathbb{R}$ **monotono padajoča ter nenegativna**. Potem:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konvergira} \iff \sum_{i=1}^{\infty} f(i) \text{ konvergira}$$

Oris dokaza. Trivialen sendvič z Riemmanovo vsoto. □

Trditev 5.14

Naj bo $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ integrabilna na vsakem intervalu $[a,t)$. Potem

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \ \text{ obstaja} \implies \int_a^b f(x)\,dx \ \text{ obstaja}$$

Oris dokaza. $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ ter $G(x) = \int_a^x |f(x)|\,dx$ sta zvezni na $[a, b)$ ter obstaja $\lim_{x\uparrow b} G(x)$. Uporabimo Cauchyjev pogoj za obstoj limite ter trikotniško neenakost za integrale. □

Izrek 5.15

Naj bo f integrabilna na $[a, b]$.

- $$s < 1 \implies \int_a^b \frac{f(x)}{(x-a)^s}\,dx \text{ obstaja}$$
- Če $s \geq 1$ ter obstja $m \in \mathbb{R}^+$, da je izpolnjen en izmed pogojev:
  † $\forall x \in [a, b] : f(x) \geq m$
  † $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq -m$
  $$\implies \int_a^b \frac{f(x)}{(x-a)^s}\,dx = \infty$$

Oris dokaza. Zamenjamo $|f(x)|$ z m ter uporabimo integralski kriterij. □

Trditev 5.16: Integrabilnost v $\pm\infty$

Naj bo f integrabilna na vsakem intervalu $[a, b]$, $b > a$. Potem:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ obstaja} \iff \forall \varepsilon > 0.\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall\, b, b' > B : \left|\int_{b'}^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

Oris dokaza. Preidemo na primitivno funkcijo ter uporabimo Cauchyjev pogoj za limite v neskončnosti. □

Izrek 5.17

Naj bo $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ zvezna za $a > 0$.

- $$g \text{ omejena} \wedge p > 1 \implies \int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p}\,dx \text{ konvergira}$$
- Če $p \leq 1$ ter obstaja $m \in \mathbb{R}^+$, da je izpolnjen eden izmed pogojev:
  † $\forall x \in [a, b] : g(x) \geq m$
  † $\forall x \in [a, b] : g(x) \leq -m$
  $$\implies \int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p}\,dx = \infty$$

5.4 Geometrija integrala

Definicija 5.18

Če je $F = (x(t), y(t))$ zvezno odvedljiva je $l(F) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt$

Izrek 5.19: Ploščine

- **Ploščina lika med grafoma zveznih funkcij** f in g je

$$\int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$$

- **Ploščina območja podanega s krivuljo:** $F = (x, y) : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva pot.
  - † Če je $y(t) \geq 0$ na $[a, b]$ in je $x(a) = \min\{x(t) | t \in [a, b]\}$ ter $x(b) = \max\{x(t) | t \in [a, b]\}$, potem je ploščina

$$pl(F) = \int_a^b y(t)\dot{x}(t)\, dt$$

  - † Če je $x(t) \geq 0$ na $[a, b]$ in je $y(a) = \min\{y(t) | t \in [a, b]\}$ ter $y(b) = \max\{y(t) | t \in [a, b]\}$, potem je ploščina

$$pl(F) = \int_a^b x(t)\dot{y}(t)\, dt$$

  - † V zvezno odvedljivih primerih z pozitivno usmerjeno regularno parametrizacijo enostavne sklenjene krivulje (:P) velja, da je ploščina enaka

$$pl(F) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\, dt$$

- **Ploščina notranjosti polarno parametrizirane krivulje:**
$F(\varphi) = (r(\varphi)\cos(\varphi), r(\varphi)\sin(\varphi))$; α začetni kot ter β terminalni kot, potem

$$pl(F) = \int_\alpha^\beta r(\varphi)^2 d\varphi$$

Izrek 5.20: Površina vrtenine

- **Funkcije:** Če je $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ zvezna funkcija, potem je

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

- **Parametrične krivulje:** Če je $F = (x(t), y(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}$ je

$$P = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

- **Polarno podane krivulje:** Če je $F = (r(\varphi)\cos(\varphi), r(\varphi)\sin(\varphi)) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ je

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta r(\varphi)\sin(\varphi)\sqrt{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2}\, d\varphi$$

Izrek 5.21: Volumen vrtenine

- **Funkcija:** $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ zvezna funkcija, sledi

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

- **Parametrične krivulje:** Če je $F = (x(t), y(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}$ je

$$V = \pi \int_a^b y(t)^2 \dot{x}(t)\, dt$$

- **Polarno podane krivulje:** Če je $F = (r(\varphi)\cos(\varphi), r(\varphi)\sin(\varphi)) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ je

$$V = \pi \int_\alpha^\beta -r(\varphi)^3 \sin(\varphi)^3\, d\varphi$$

5.5 Poučni zgledi

Naloga 5.22

Naj bo $f : [-1, 1] \to R$ gladka funkcija reda tri (tj. trikrat odvedljiva funkcija), za katero velja $f(-1) = f(1) = f''(-1) = 0$. Pokaži, da je:

$$\left(\int_{-1}^{1} f(x)\, dx\right)^2 < \frac{104}{315} \int_{-1}^{1} f'''(x)^2\, dx$$

Oris dokaza. Integriraj po delih, upoštevajoč, da pri odvajanju prosti členi u-ja izginejo, kar omogoča da se znebimo afinih konstant. Natančneje se slednjih znebimo na naslednji način

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = f(x)(x - \frac{1}{2})\Big|_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1} f'(x)(x - \frac{1}{2})\, dx$$

□

Naloga 5.23

Naj bo $f : [0, 1] \to [0, 1)$ integrabilna. Pokaži, da je:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)^n\, dx = 0$$

Oris dokaza. Funkcija je integrabilna po znanem izreku, izberemo pa lahko nekaj fiksnih testnih točk, za katere vemo, da so njihove funkcijske vrednosti manj kot 1; nato pa v limiti opazujemo le delitve, za katere je izbira testnih točk podmnožica fiksnih testnih točk. Riemmanove vsote so tako strogo pod 1, kar poda odgovor. □

Naloga 5.24

Naj bo $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Pokaži, da veljajo naslednje enakosti:

$$\int_0^{\pi} x f(\sin(x))\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin(x))\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(x))\, dx$$

Oris dokaza. Enakost drugega in tretjega integrala je očitna zaradi simetrije sin okoli $\frac{\pi}{2}$, enakost med prvim in drugim pa dobimo po uvedbi nove spremenljivke $u = \pi - x$ - ne pozabi spremeniti mej integriranja po tej substituciji. □

6 Funkcijska zaporedja in vrste

Definicija 6.1

Podobno podpoglavjema o zaporedjih in vrstah realnih števil, le da uporabljamo metriko:

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$$

Konvergenci glede na to metriko pravimo enakomerna konvergenca.

Izrek 6.2: Lastnosti enakomerne konvergence

- Če funkcijsko zaporedje konvergira enakomerno, potem konvergira tudi po točkah.
- **Metrični prostor funkcij z metriko d_∞ je poln.**
- Če zvezne funkcije $\{f_n\}$ konvergirajo enakomerno k $f \implies f$ zvezna.

Oris dokaza. $|f_n(x) - f(x)| < |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| + |f(a) - f(x)|$ □

Izrek 6.3: Weierstraßov kriterij

$\{f_n\}$ funkcijsko zaporedje ter obstaja zaporedje pozitivnih števil $\{m_n\}$, da $f_n(x) \leq m_n$, za vse n ter vse $x \in I$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_i \text{ konvergira} \implies \sum_{i=1}^{\infty} f_n(x) \text{ konvergira enakomerno}$$

Oris dokaza. Konvergenca po točkah očitna, uporabimo Cauchyjev kriterij za enakomerno konvergenco. □

6.1 Integriranje in odvajanje funkcijskih zaporedij

Izrek 6.4: Lastnosti enakomerne konvergence

- Če zvezne funkcije $\{f_n\} \in C[a, b]$ konvergirajo enakomerno proti f, potem je

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

- Zvezno odvedljive $\{f_n : [a, b] \to \mathbb{R}\}$ ter $\{f_n(c)\}$ konvergira za nek $c \in [a, b]$. Če $\{f_n' \to g\}$ enakomerno, potem $\{f_n \to f\}$ enakomerno ter velja

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)'$$

Ker zgornji izreki veljajo za enakomerno konvergentna zaporedja, veljajo tudi za enakomerno konvergentne vrste.

Primer 6.5

Funkcijsko zaporedje

$$\{e^{x-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

po točkah konvergira proti 0 na $\mathbb{R}$, hkrati pa enakomerno divergira, saj je $f_n(n) = 1$.

Naloga 6.6

Naj $\{f_n\}$ enakomerno konvergira k 0 na $[a, b]$ ter velja $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \dots$ za vse $x \in [a, b]$. Pokaži, da naslednje funkcijsko zaporedje konvergira enakomerno na $[a, b]$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f_i(x)$$

Oris dokaza. Prostor funkcij z metriko d_∞ je poln, potlej se poslužimo Cauchyjevega pogoja. □

Naloga 6.7

Naj bo $\{f_n\} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ zaporedje zvezno odvedljivih funkcij iz $\mathbb{R}$ v $(0, \infty)$, ki po točkah konvergira k $f(x) = 0$. Denimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ ter $x \in \mathbb{R}$ velja $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ ter $f_n'(x) \leq 0$.
Pokaži, da naslednja vrsta konvergira na $\mathbb{R}$ ter konvergira enakomerno na $[0, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f_n(x)$$

6.2 Potenčne vrste

Izrek 6.8: Obstoj konvergenčnega radija

Za potenčno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ obstaja $R \in [0,\infty]$ z lastnostjo:

- za $x \in (c-R, c+R)$ je vrsta konvergentna, ter divergentna za $|x-c| > R$, v točkah $|x-c| = R$ pa bodisi konvergira, bodisi divergira
- Vrsta konvergira absolutno in enakomerno na $[c-r, c+r]$ za vsak $r < R$.

Oris dokaza. Prva točka sledi po supremumu, druga pa upoštevajoč, da če vrsta konvergira pri $x = x_0$, potem $\lim_{n\to\infty} |a_n x^n| = 0 \implies |a_n x^n < M|$ ter $|a_n x^n| < \left|a_n \left(\frac{r}{x_0}\right)^n\right| \leq M\left(\frac{r}{x_0}\right)^n$, zaključimo z Weierstraßom. □

Izrek 6.9: Cauchy-Hadamard

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ potenčna vrsta. Za konvergenčni polmer R velja:

- $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, če ta limita obstaja.
- $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, če ta limita obstaja.
- $$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Oris dokaza. Za prva dva očitno. Če je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$ hitro dobiš neničelnost limite členov. Če je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$, potem najdemo q, da je $|x| < \frac{1}{q} < \frac{1}{a}$, po definiciji $\limsup$ za vse $n > N$ velja: $\sqrt[n]{a_n} < q$, ker je $|qx| < 1$ smo pokazali da vrsta konvergira. Če je $A > \frac{1}{|x|}$ obstaja neskončno n, da je $\sqrt[n]{a_n} > \frac{1}{|x|} \implies |a_n x^n| > 1$. □

Izrek 6.10: Zveznost, odvedljivost ter integrabilnost

Po izreku 6.8 vemo, da je vsosta potenčne vrste s konvergenčnim radijem $R > 0$ **zvezna** funkcija na $(c-R, c+R)$. O krajiščih pa govori *Abelov izrek:*

$$\text{Če } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)^n \text{ konvergira pri } x = \pm R, \text{ potem je vsota zvezna pri } x = \pm R.$$

Naj bo $R > 0$ konvergenčni polmer $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i x^i$. Potem imata vrsti, ki jih dobimo z členoma odvajanjem in integriranjem f prav tako konvergenčni polmer R ter za vse $x \in (-R, R)$ velja:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{in} \quad \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Oris dokaza. Drugi del trivialen, R ostaja konvergenčni radij, ker je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

□

6.3 Taylorjeva vrsta

Trditev 6.11

Če je P polinom stopnje n velja:

$$P(x+y) = P(x) + \frac{P'(x)}{1!}y + \frac{P''(x)}{2!}y^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x)}{n!}y^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(x)}{i!}y^i$$

Definicija 6.12: Taylorjev polinom

f je n-krat odvedljiva v okolici a. **n-ti Taylorjev polinom funkcije f pri** a je

$$T_{n,a}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Če je f neskončnokrat odvedljiva v okolici a lahko f priredimo **Taylorjevo vrsto**:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i = \lim_{n\to\infty} T_{n,a}(x),$$

če slednja obstaja.

Hitra posledica je, da če je f vsota konvergentne potenčne vrste, potem je f vsota prirejene Taylorjeve vrste.

Zanima nas obnašanje $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Izrek 6.13: Taylorjev izrek

Naj bo f odvedljiva $(n+1)$-krat na odprtem intervalu I, ki vsebuje a. Za vsaj $x \in I$ obstaja c med a in x, da velja:

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Oris dokaza. Za $0 \leq k \leq n$ velja $R_{n,a}^{(k)}(a) = 0$. Fiksiramo x ter izberemo $s \in \mathbb{R}$, da je $R_{n,a}(x) = s(x-a)^{n+1}$. Uvedemo $G(y) = R_{n,a}(y) - s(y-a)^{n+1}$, velja $G(x) = 0$ ter $\forall 0 \leq k \leq n : G^{(k)}(a) = 0$. Rezultat sledi po n-kratni uporabi Rollovega izreka, upoštevajoč definiciji G ter $R_{n,a}$. □

Moč Taylorjevega izreka leži v tem, da lahko pogosto omejimo vrednosti, ki jih koeficient $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ zavzame med a in x, kar nam omogoča vspostaviti uporabne neenakosti.

Primer 6.14

Opazujmo

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x}};\ x > 0 \\ 0;\ x \le 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}};\ x > 0 \\ 0;\ x \le 0 \end{cases}$$

Ker je $\lim_{\delta \to 0} \delta^{-1} e^{\frac{-1}{\delta}} = 0$ je očitno $f \in C^\infty$ ter $f^{(n)}(0) = 0\ \forall n$. Prirejena Taylorjeva vrsta f v 0 je potlej enaka ničelni in konvergira povsod, njena vsota pa ni f. Zato uvedemo naslednji razred funkcij.

Definicija 6.15: Analitične funkcije

$f : I \to \mathbb{R}$ je **realno analitična** na intervalu I (označimo $f \in C^\omega(I)$), če $\forall a \in I. \exists r_a > 0.\ (a - r_a, a + r_a) \subseteq I$ in je f na $(a - r_a, a + r_a)$ vsota konvergentne potenčne vrste:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k,\ x \in (a - r_a, a + r_a)$$

Izrek 6.16: Splošni Taylorjev izrek

Naj bo I odprt interval vsebujoč a in $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}(I)$. Za vsak $x \in I$ in $p \in \mathbb{N}$ obstaja c med x in a, da za $f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$ velja:

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{p \cdot n!} (x-a)^p (x-c)^{n-p+1}$$

V posebnih primerih velja:

- $p = n + 1$:
$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$
- $p = 1$:
$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-a)(x-c)^n$$

Oris dokaza. Fiksiramo $x \in I$ ter izberemo poljubne $b \in I$ ter $p \in \mathbb{N}$. Definiramo $\varphi(x) = T_{n,x}(b) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^p R_{n,a}(b)$, velja $\varphi(x) \in C^1(I)$. Ker je $f(a) = f(b)$ rezultat sledi po Rollejevem izreku, saj je:

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x) + (b-x)f''(x) - (b-x)f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$$
$$+ (-p) \left(\frac{(b-x)^{p-1}}{(b-a)^p} \right) R_{n,a}(b)$$
$$\implies R_{n,a}(b) = \frac{(b-x)^{n-p+1}(b-a)^p}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(c)$$

$\square$

Naloga 6.17: Taylorjeve vrste osnovnih funkcij

- $f(x) = e^x$ s konvergenčnim radijem ∞:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $f(x) = \sin(x)$ s konvergenčnim radijem ∞:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $f(x) = \cos(x)$ s konvergenčnim radijem ∞:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $f(x) = \ln(1+x)$ s konvergenčnim radijem 1:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad \forall x \in (-1, 1)$$

- $f(x) = (1+x)^\alpha$ za $\alpha \in \mathbb{R}$, kjer je $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad x \in (-1, 1)$$

- logaritem v okolici $a \in \mathbb{R}^+$, ki konvergira za $\left|\frac{x-a}{a}\right| < 1 \implies 0 < x < 2a$:

$$\begin{aligned}\log(x) = \log(a + x - a) = \log(a) + \log\left(1 + \frac{x-a}{a}\right) &= \\ = \log(a) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \left(\frac{x-a}{a}\right)^k & \qquad x \in (0, 2a)\end{aligned}$$

7 Metrični prostori

Definicija 7.1: Osnovni pojmi

- **Notranja, zunanja** ter **robna** točka so definirane preko vsebovanosti njihovih okolic v množici.
- Množica je **odprta**, če so vse njene točke notranje ter **zaprta**, če vsebuje vse svoje robne točke.
- Dodatno definirano **stekališče** zaporedja kot tako točko, ki ima v vsaki svoji okolici neskončno mnogo členov zaporedja.
- Množica je **kompaktna**, če ima vsako njeno pokritje končno podpokritje ter **lokalno kompaktna**, če ima vsaka njena točka kompaktno okolico.

Nasvet

Vsako množico lahko razdelimo na disjunktno unijo notranjih, robnih ter zunanjih točk. Glede na to razdelitev potem dosti lažje govorimo o odprtosti, zaprtosti ter ostalih pojmih.

Trditev 7.2

- Komplement odprte množice je zaprta ter obratno.
- Končni preseki ter (morda neskončne) unije odprtih množic so odprte množice.
- Množica je zaprta $\iff$ vsebuje vsa svoja stekališča.
- Konvergentno zaporedje $\implies$ Cauchyjevo zaporedje.
- $\mathcal{C}[a,b]$ je **poln** za metriko $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$

Trditev 7.3: O kompaktu

- Kompaktna množica $\implies$ zaprta in omejena množica.
- **Zaporedje ima vsaj eno stekališče na kompaktu.**
- [**Heine-Borel**]: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktna $\iff$ A je zaprta in omejena.
- Kompakten metrični prostor $\implies$ poln metrični prostor.
- K_j neprazne ter zaprte v kompaktnem metričnem prostoru K.

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots \implies \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$$

Oris dokaza. Pokažemo, da obstaja stekališče. Če ne bi, bi za vse točke veljalo, da v neki njihovi ε-okolici ni nobene točke zaporedja, te ε-okolice tvorijo pokritje, kompaktnost da končno pokritje, protislovje saj ima zaporedje neskončno členov.

Pokažemo kompakten $\implies$ poln. Zaporedje ima stekališče, Cauchyjevo zaporedje s stekališčem ima tam limito. □

7.1 Metrični podprostori

Zaprtost, odprtost ter kompaktnost se dedujejo na podprostore kot bi želeli.

Trditev 7.4

- Množica je odprta v podprostoru $\iff$ je presek odprte množice ter podprostora, analogno za zaprte množice.
- Množica je kompaktna v podprostoru $\iff$ je kompaktna v prostoru.

7.2 Preslikave med metričnimi prostori

Definicija 7.5

- Preslikava $f : M_1 \to M_2$ je zvezna v točki $a \in M_1$, če $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, da $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
- Ekvivalentno je preslikava zvezna, če za vsako okolico $f(a)$ obstaja okolica a, da je slika slednje podmnožica okolice $f(a)$, ali pa če je praslika odprte(zaprte) množice odprta (zaprta), ali pa če konvergentna zaporedja slika v konvergentna.

Trditev 7.6

- Kompozitum zveznih preslikav je zvezna.
- Zvezna preslikava slika kompaktne množice v kompaktne.
- Zvezna funkcija na kompaktu doseže minimum in maksimum.
- Zvezna funkcija na kompaktu je enakomerno zvezna.

Izrek 7.7: Banachov skrčitveni izrek

Skrčitev je endomorfizem metričnega prostora, za katerega velja za nek $q < 1$

$$d(f(x), f(y)) < q \cdot d(x, y).$$

Vsaka skrčitev v polnem prostoru je **zvezna** in ima **natanko eno negibno točko**.

Oris dokaza. Enoličnost je očitna. Definiramo zaporedje

$$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}},$$

kjer je $x_0 \in M$ poljuben.

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{m-1} q^{i-n} d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{1-q} d(x_n, x_{n+1})$$
$$d(x_n, x_{n+1}) < q d(x_{n-1}, x_n) < \cdots < q^n d(x_0, x_1)$$

Sledi, da je $d(x_n, x_m) < \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$. Zaporedje $\{x_i\}$ je potem Cauchyjevo, v polnem metričnem prostoru konvergentno. □

Primer 7.8

V metričnih prostorih, ki imajo metriko inducirano z integralom - klasični primer je

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \text{ na prostoru } \mathcal{C}[0, 1],$$

je pogosto uporaben protiprimer funkcijsko zaporedje oblike

$$\chi_n(x) = \begin{cases} n - n^3 x; \text{ za } x \in [0, \frac{1}{n^2}] \\ 0; \text{ drugače} \end{cases}$$

saj imajo določeni integral poljubno majhen, njihove funkcijske vrednosti pa so poljubno velike.
Njihove grafe si lahko predstavljamo kot pravokotne trikotnike s katetami dolžin n ter $\frac{1}{n^2}$ na intervalu $[0, \frac{1}{n^2}]$ ter identično 0 potlej.

Literatura

[1] prof. dr. Barbara Drinovec-Drnovšek. *Zapiski predavanj iz Analize 1.* 2017.