Analiza 2a

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

4. oktober 2024

Kazalo

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Notacija

Standardna baza $\mathbb{R}^n$ je $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, kjer se 1 pojavi na i-tem mestu. Definiramo lahko skalarni produkt vektorjev ter normo vektorja

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_i y_i \quad \text{ter} \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2},$$

slednja porodi metriko

$$d_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Izrek 1.1: Heine-Borel

$$K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ je kompaktna} \iff K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ je zaprta in omejena.}$$

Metriki d_1 in d_2 na prostoru M sta *topološko ekvivalentni*, če inducirata isto toplogijo. Če pa obstajata $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, da za vse $x, y \in M$ velja:

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y),$$

pravimo, da sta *močno ekvivalentni*. Hitro pokažemo tudi, da sta močno ekvivalentni metriki tudi topološko ekvivalentni. Da je močna ekvivalentnost prav tako ekvivalenčna relacija vidimo preko naslednjega razmisleka:

$$\begin{aligned}\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y) \implies \alpha \leq \frac{d_2(x, y)}{d_1(x, y)} \leq \beta \implies \frac{1}{\alpha} \geq \frac{d_1(x, y)}{d_2(x, y)} \geq \frac{1}{\beta} \\ \implies \frac{1}{\alpha} d_2(x, y) \geq d_1(x, y) \geq \frac{1}{\beta} d_2(x, y)\end{aligned}$$

Topološko ekvivalentnost metrik $\|\cdot\|_\infty$ ter $\|\cdot\|_2$ je lahko dokazati, saj so odprte krogle v prvi evklidski kvadrati, v drugi pa standardne krogle.

Lema 1.2: Močna ekvivalenca $\|\cdot\|_\infty$ ter $\|\cdot\|_2$

S preprostimi premisleki v $\mathbb{R}^n$ dobimo:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$$

kar prav tako poda ekvivalentnost topologij.

Analogen premislek poda ekvivalenco vseh metrik $\|\cdot\|_p$ za $p \in \overline{\mathbb{R}}$. Zgornja lema zelo dobro motivira dejstvo, da se večina lepih lastnosti funkcij, kot sta na primer zveznost in odvedljivost, prenese na komponentne funkcije, kot jih definiramo na naslednji strani.

1.2 Zaporedja

Definicija 1.3

Zaporedje v $\mathbb{R}^n$ označujemo kot $\{a_m\}$, kjer je posamezni člen a_m oblike

$$a_m = (a_1^m, a_2^m, \dots, a_n^m).$$

Trditev 1.4

Naj bo $\{a_m\}$ zaporedje v $\mathbb{R}^n$. Zaporedje konvergira natanko tedaj, ko konvergirajo zaporedja $\{a_1^m\}, \{a_2^m\}, \dots, \{a_n^m\}$. V primeru konvergence velja:

$$\lim_{m\to\infty} a_m = (\lim_{m\to\infty} a_1^m, \lim_{m\to\infty} a_2^m, \dots, \lim_{m\to\infty} a_n^m).$$

Analogni izreki veljajo za obstoj stekališča ter za Cauchyjevost zaporedja $\{a_m\}$.

1.3 Zveznost

Praviloma imenujemo predpise $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcije, predpise $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pa preslikave.

Definicija 1.5

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zvezna v notranji točki $a \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vse $x \in D$ velja:

$$\|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Preslikava $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zvezna v točki $a \in D$, ko velja standarden ε-δ pogoj. Zveznost lahko karakteriziramo tudi z limitami zaporedij. Analogno definiramo enakomerno zveznost. Kot pričakovano je zvezna funkcija na kompaktu enakomerno zvezna.

Trditev 1.6

Preslikava $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kjer je K kompaktna množica, je omejena, doseže maksimum ter minimum, ter v primeru povezanosti K doseže tudi vse vmesne vrednosti.

Vsota, skalarni večkratnik, produkt ter kompozitum zveznih funkcij $D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je zvezna. Projekcija na i-to komponento, ki jo označimo kot π_i, polinomi v n spremenljivkah ter racionalne funkcije v točkah, kjer imenovalec nima ničle, so zvezne funkcije.

Izrek 1.7

Če je funkcija $f : D \to \mathbb{R}^n$ zvezna v točki $a \in D$, je tudi funkcija $f_j : D_j \to \mathbb{R}$, kjer je $f_j : t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ ter $D_j = \pi_i(D)$, ki jo dobimo s projekcijo f na eno izmed koordinatnih osi, zvezna funkcija v a_j.

Oris dokaza. Najlažje z zaporedji $\square$

Primer 1.8

Zveznost koordinatnih funkcij ne implicira zveznosti večdimenzionalne funkcije. To ilustrira naslednji primer:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dokaz. f je zvezna na $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Poglejmo še komponentni funkciji $f(x, b)$ ter $f(a, y)$. Če je eno izmed števil a, b enako 0 je po definiciji $f(x, y)$ tedaj komponentna funkcija ničelna, ki je zvezna. Če sta obe izmed spremenljivk a, b neničelni pa sta projekciji prav tako zvezni. Da $f(x, y)$ ni zvezna pa lahko vidimo, saj je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, x) = 1 \neq 0 = f(0, 0)$. $\square$

Nasvet

Če limita funkcije v $\mathbb{R}^n$ obstaja, potem je neodvisna od »poti«, po kateri se približujemo tej točki. V zgornjem primeru vidimo, da ob izbiri poti, ki je premica $x = y$ dobimo protislovje.

Žal pa obrat zgornjega nauka ne velja - če limita obstaja po vseh premicah, ki potekajo skozi dano točko to še ne pomeni, da dejansko obstaja.

1.4 Preslikave iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

$F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kjer je

$$f : x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T$$

Vidimo, da F določa m funkcij n spremenljivk.

Trditev 1.9

Naj bo $a \in D \subset \mathbb{R}^n$. Naj bo $F = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$. Preslikava F je zvezna v a natanko tedaj, ko so $f_1, \ldots, f_m$ zvezne v a.

Lema 1.10: Linearne preslikave so omejene

Naj bo $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Trdimo, da obstaja $M \geq 0$, da za vse $x \neq 0$ velja

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq M.$$

Pravzaprav je **omejenost linearne preslikave ekvivalentna njeni zveznosti**.

Oris dokaza. $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\| < \infty$, kjer enakost sledi po homogenosti A, neenakost pa po zveznosti linearnih preslikav ter kompaktnostni sfere v $\mathbb{R}^m$. Ker je količina $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ končna lahko definiramo $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, ki je dejansko norma na $\mathbb{R}^{n \times m}$.

Ekvivalenca je iz desne v levo očitna, iz leve v desno pa jo implicira to, da je linearna preslikava zvezna natanko tedaj, ko je zvezna v 0, tam pa je zvezna, ker je Lipschitzova. $\square$

1.5 Parcialni odvod in diferenciabilnost

Iz analize 1 vemo, da je odvod neka limita, diferenciabilnost pa poda neko afino aproksimacijo. To podedujemo.

Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ notranja točka D. Sledi, da obstaja tak $r > 0$, da so $(a_1, \dots, a_j - r, \dots, a_n)$ ter $(a_1, \dots, a_j + r, \dots, a_n)$ znotraj D.

Definicija 1.11

Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *parcialno odvedljiva* po spremenljivki x_j v točki $a = (a_1, \dots, a_n)$, če obstaja limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n)}{h},$$

oziroma, če je naslednja funkcija odvedljiva v točki a_j

$$x_j \mapsto f(a_1, \dots, x_j, \dots, a_n).$$

Odvod v točki a označimo kot:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \text{ali} \quad f_{x_j}(a)$$

Vse elementarne funkcije so parcialno odvedljive, po vseh spremenljivkah, povsod kjer so definirane.

Definicija 1.12

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ter a notranja točka D. f je *diferenciabilna*, v točki a, če obstaja tak linearen funkcional $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da velja:

$$f(a + h) = f(a) + L \cdot h + o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h \to 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0$$

Če tak L obstaja, je seveda enolično določen, kar pomeni, da lahko govorimo o diferencialu funkcije v določeni točki. Diferencial funkcije f v točki a označujemo kot $L = df_a$.

Trditev 1.13

Če je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciabilna v notranji točki $a = (a_1, \dots, a_n)$, potem f zvezna v točki a ter je f v a parcialno odvedljiva po vseh spremeljivkah.
Pri tem velja, da je za $h = (h_1, \dots, h_n)$:

$$(df_a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n.$$

Opomnimo, da ker linearni funkcional zapišemo kot $1 \times n$ matriko, ter vektor kot $n \times 1$ matriko, potem izračun linearnega funkcionala ustreza »skalarnemu produktu« vrstice in stolpca. Zapišemo:

$$df_a = [\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)] \quad \text{ter} \quad \vec{h} = [h_1, \ldots, h_n]^T,$$

ter

$$(df_a)(h) = (df_a)^T \cdot \vec{h}.$$

Oris dokaza. Zveznost f v a je očitna. Naj bo $L = (l_1, \ldots, l_n)$ ter $h = (h_1, 0, \ldots, 0)$, kjer $h_1 \neq 0$. Sledi:

$$f(a+h) = f(a) + l_1 h_1 + o(h) \implies \frac{f(a+h) - f(a)}{h_1} = l_1 + \frac{o(h)}{h_1},$$

$$\lim_{h_1 \to o} \frac{f(a+h) - f(a)}{h_1} = l_1.$$

Analogen postopek dokaže odvedljivost tudi v ostalih komponentah □

Primer 1.14

Ali je funkcija, ki je parcialno odvedljiva v vseh spremenljivkah tudi diferenciabilna v dani točki? Naj bo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0; \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ta funkcija je parcialno odvedljiva v obeh spremenljivkah. Velja $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ ter $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Ker pa funkcija f ni niti zvezna v $(0,0)$, ne more biti tam diferenciabilna.

Primer 1.15

Opazujmo še

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f je gotovo zvezna v $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Če zapišemo v polarnih koordinatah je

$$f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \begin{cases} 2r\cos(\varphi)^2\sin(\varphi); r > 0 \\ 0; r = 0 \end{cases}$$

Ni težko preveriti, da je f parcialno odvedljiva povsod v obeh spremenjivkah. Če bi bila f diferenciabilna v $(0,0)$ bi bil $df_{(0,0)} = [0,0]$. Toraj bi moralo veljati, da je

$$f(h,k) = f(0,0) + df_{(0,0)}[h,k]^T + o(h,k).$$

Ker sta prva dva sumanda ničelna je $f(h,k) = o(h,k)$. Sledi, da naj bi bilo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|2r\cos(\varphi)^2\sin(\varphi)|}{r},$$

kar je protislovno po neodvisnosti limite od poti.

Izrek 1.16

Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija in naj bo $a \in D$ notranja točka. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremeljivkah v okolici točke a in so zvezni v a, Tedaj je f diferenciabilna v a.

Oris dokaza. Dokažemo za $n = 2$, saj profesor trdi, da je dokaz v splošnem analogen. Naj bo $a = (a,b)$ ter (h,k) tak, da je $\|(h,k)\| \leq \varepsilon$. Sledi

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) - f(a,b) &= f(a+h,b+k) - f(a,b+k) + f(a,b+k) - f(a,b) = \\ &= f_x(a^*,b+k)\cdot h + f_y(a,b^*)\cdot k = f_x(a,b)\cdot h + \epsilon_1(h,k) + f_y(a,b)\cdot k + \epsilon_2(h,k) = \\ &= f_x(a,b)\cdot h + f_y(a,b)\cdot k, \end{aligned}$$

kjer druga enakost sledi po dvakratni uporabi Lagrangevega izreka, tretja pa po zveznosti parcialnih odvodov. □

1.6 Višji parcialni odvodi

Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija in je D odprta. Denimo, da je f parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah na D. Sledi, da so $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}$ tudi funkcije n spremenljivk, Tudi te so lahko parcialno odvedljive.

Preprosti zgled poda domnevo, da je $(f_x)_y = (f_y)_x$. *Mešani odvodi so enaki* oz. *operatorji odvoda komutirajo.*

Literatura

[1] prof. dr. Miran Černe. *Predavanja iz Analize 2a*. 2025.