Algebra 3

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

4. oktober 2024

Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says:
»I will give you this powerful machine, it will answer any question you like.
All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvelous machine.«

Michael Atiyah

Kazalo

1 Ponovitev Algebre 2

Definicija 1.1

Naj bo $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$

- $a \in \mathbb{K}$ je algebraičen nad $\mathbb{F}$, če je ničla nekega polinoma iz $\mathbb{F}[X]$.
- $\mathbb{K}$ je algebraična razširitev $\mathbb{F}$, če so vsi elefmenti $\mathbb{K}$ algebraični nad $\mathbb{F}$.
- $\mathbb{K}$ je končna razširitev $\mathbb{F}$, natanko tedaj, ko je $\mathbb{K}$ končnodimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

Trditev 1.2

Naj bo $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$.

- $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$. Če je $[\mathbb{L} : \mathbb{F}], [\mathbb{K} : \mathbb{L}] < \infty$, potem je $[\mathbb{K} : Ł] < \infty$ ter velja
$$[\mathbb{K} : \mathbb{F}] = [\mathbb{K} : \mathbb{L}][\mathbb{L} : \mathbb{F}].$$

1.1 Razpadna polja

Izrek 1.3

Za vsako polje $\mathbb{F}$ in nerazcepen polinom $p \in \mathbb{F}[X]$ obstaja razširitev $\mathbb{F}$ $\mathbb{K}$, da je za nek $a \in \mathbb{K}$ $p(a) = 0$.

Oris dokaza. $\mathbb{K} \cong \mathbb{F}[X]/\langle p(x)\rangle$. Očitno vsebuje podpolje izomorfno $\mathbb{F}$, element $x + \langle p(x)\rangle$ pa je ničla p. □

Definicija 1.4

Razpadno polje polinoma $p \in \mathbb{F}[X]$ je najmanjše polje, ki vsebuje $\mathbb{F}$ kot podpolje, ter v njem $p(x)$ razpade na linearne faktorje.

Definicija 1.5

Polje $\mathbb{F}$ je *algebraično zaprto*, če je razpadno polje vsakega polinoma $\mathbb{F}[X]$ enako $\mathbb{K}$. *Algebraično zaprtje* polja $\mathbb{F}$ je polje $\mathbb{K}$, ki je algebraično nad $\mathbb{F}$ in je algebraično zaprto.

Izrek 1.6

Do izomorfizma natančno obstaja samo eno razpadno polje.

Oris dokaza. □

Literatura

[1] prof. dr. Matej Brešar. *Predavanja Algebre 3*. 2025.