浙江工业大学2022—2023学年第二学期高等数学期末考试A卷参考答案

一、选择题(每题3分, 共33分)

1–5. DCBCC　　6–10. BABDA　　11. C

二、解答题(共67分)

二(1) (6分)　等号两边分别对x, y求偏导, 有

$$\varphi_1' b z_x + \varphi_2'(c - a z_x) + \varphi_3'(-b) = 0$$

所以

$$z_x = \frac{b\varphi_3' - c\varphi_2'}{b\varphi_1' - a\varphi_2'}$$

$$\varphi_1'(b z_y - c) + \varphi_2'(-a z_y) + \varphi_3' a = 0$$

所以

$$z_y = \frac{c\varphi_1' - a\varphi_3'}{b\varphi_1' - a\varphi_2'}$$

因此, $a z_x + b z_y = c$.

二(2) (6分)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

二(3) (6分)

$$\int_0^1 y^2dy\int_y^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx = \int_0^1 dx\int_0^x \frac{y^2}{\sqrt{1+x^4}}dy$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx = \frac{1}{12}\int_0^1 \frac{d(1+x^4)}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{6}\sqrt{1+x^4}\ |_0^1$$
$$= \frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$$

二(4) (6分) 曲线绕y轴旋转所得旋转曲面方程为$3x^2+3z^2+2y^2=12$, 在$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处切平面法向量$\overrightarrow{n}=(6x,4y,6z)|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=(0,4\sqrt{3},6\sqrt{2})$ 所以, 切平面方程为

$$4\sqrt{3}(y-\sqrt{3})+6\sqrt{2}(z-\sqrt{2})=0,$$

即

$$2\sqrt{3}y+3\sqrt{2}z-12=0.$$

二(5) (7分) 易求L 参数方程

$$\begin{cases} x=3t-2, \\ y=t \end{cases} \quad t:1\to 2.$$

$$原式 = \int_1^2 [(3t-2+t)\cdot 3+t-3t+2]dt$$
$$= \int_1^2 (10t-4)dt = 11.$$

二(6) (7分) 点(x,y)到$x+y-8=0$的距离$d=\frac{|x+y-8|}{\sqrt{2}}$,问题转化为满足条件$x^2+2xy+5y^2-16y=0$下求$(x+y-8)^2$的最小值点. 则

$$L(x,y,\lambda)=(x+y-8)^2+\lambda(x^2+2xy+5y^2-16y)$$

$$\begin{cases} L_x=2(x+y-8)+\lambda(2x+2y)=0, \\ L_y=2(x+y-8)+\lambda(2x+10y-16)=0, \\ L_\lambda=x^2+2xy+5y^2-16y=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases} 或 \begin{cases} x=-6, \\ y=2. \end{cases}$$

由背景可知$(2,2),(-6,2)$一个得最短距离, 一个得最长距离.
$(2,2)$ 到直线距离为$d_1=\frac{|2+2-8|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$,
$(-6,2)$ 到直线距离为$d_2=\frac{|-6+2-8|}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$.
所以最短距离为$2\sqrt{2}$.

二(7) (8分) $\sum_1 : z=0, x^2+y^2 \le 1$, 取下侧

$$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} xzdydz + yzdzdx - (z^2+1)dxdy = \iiint\limits_{\Omega} (z+z-2z)dV = 0,$$

其中Ω是由Σ_1, Σ_2 围成空间区域.

$$\iint\limits_{\Sigma_1} xzdydz + yzdzdx - (z^2+1)dxdy = -\iint\limits_{(\Sigma_1)_{xy}} (-1)dxdy = \pi,$$

所以原式$= 0 - \pi = -\pi$.

二(8) (8分) 曲线积分与路径无关, 则$-f'(x) = e^x + 2f(x)$,即

$$f'(x) + 2f(x) = -e^x$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\int 2dx}\left[\int (-e^x)e^{\int 2dx}dx + C\right] \\ &= e^{-2x}\left[-\int e^{3x}dx + C\right] = -\frac{1}{3}e^x + Ce^{-2x} \end{aligned}$$

又因为$f(0) = 0 \ \therefore C = \frac{1}{3}$,

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}(e^{-2x} - e^x).$$

二(9) (8分)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}} \Big/ \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}\right| = \frac{1}{3}, \ \therefore \text{收敛半径R=3}$$

收敛区间为$(-3,3)$.

当$x=-3$时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$发散;

当$x=3$时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛,所以收敛域为$(-3,3]$

令和函数$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}x^n$,则

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\cdot 3^n}x^{n-1} \\ &= \frac{1/3}{1+x/3} = \frac{1}{3+x} \end{aligned}$$

且$S(0)=0$,所以

$$S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x \frac{1}{3+t}dt$$
$$=ln(3+x)-ln3=ln(1+\frac{x}{3}),x\in(-3,3]$$

二(10) (5分) 令$y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,则$y'(x)=(a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

$$y''(x)=(a_1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1})'=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=y(x),$$

得$y''-y=0$. 特征方程$r^2-1=0$, 特征根为$r_1=1,r_2=-1$.
所以$y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x},y'(x)=c_1e^x-c_2e^{-x}$

$$\begin{cases} a_0=y(0)=c_1+c_2=4, \\ a_1=y'(0)=c_1-c_2=1. \end{cases}$$

$$c_1=\frac{5}{2},c_2=\frac{3}{2}.$$
$$\therefore y(x)=\frac{5}{2}e^x+\frac{3}{2}e^{-x}$$

又因为

$$y(x)=\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{5}{2\cdot n!}+\frac{3(-1)^n}{2\cdot n!}\right]x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5+3(-1)^n}{2\cdot n!}x^n$$

所以
$$a_n=\frac{5+3\cdot(-1)^n}{2\cdot n!}.$$