2021-2022（二）浙江工业大学高等数学 A 期末试卷 A 参考答案

一、填空题（本题满分 33 分，每小题 3 分）

1. $y=\dfrac{1}{x}$ ； 2. $e^{2x}-e^{-x}$； 3. $\lambda=3$； 4. $-\dfrac{1}{2}$ ； 5. $(f_1'+yf_2')dx+(f_1'+xf_2')dy$；

6. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ； 7. $\int_1^2 dx\int_{1-x}^0 f(x,y)dy$ ； 8. $12a$； 9. $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$； 10. $\dfrac{\pi}{2}$ ； 11. $\dfrac{\pi}{4}$.

二、 选择题（本题满分 12 分，每小题 3 分）

1-4：DABD

三、试解下列各题（本题满分 12 分，每小题 6 分）

1. 解：设 $P=y\sin 2x-yf(x)\tan x,\ Q=f(x)$，则由曲线积分与路径无关的充要条件可得：

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即 $f'(x)=\sin 2x-f(x)\tan x\Rightarrow f(x)=-2\cos^2 x+c\cos x$ 1分 2分 4分

又由 $f(0)=-2\Rightarrow c=0$，$\therefore f(x)=-2\cos^2 x.$ 6分

2. 解：设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则曲面 $z=2x^2+\dfrac{y^2}{2}$ 在 M_0 的法向量为 $\vec{n}_1=(4x_0,y_0,-1)$. 2分

又平面 $2z+2y-4x+1=0$ 的法向量为 $\vec{n}_2=(-2,1,1)$. 于是 $\vec{n}_1//\vec{n}_2$，由此得

$x_0=\dfrac{1}{2},y_0=-1$，所以 $z_0=2x_0^2+\dfrac{1}{2}y_0^2=1$，即曲面 $z=2x^2+\dfrac{y^2}{2}$ 上点 $M_0\left(\dfrac{1}{2},-1,1\right)$ 处的 3分 4分

切平面平行于平面 $2z+2y-4x+1=0$，

且所求的切平面方程为 $2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-(y+1)-(z-1)=0$，即 $2x-y-z-1=0$. 5分

曲面 $z=2x^2+\dfrac{y^2}{2}$ 上点 $M_0\left(\dfrac{1}{2},-1,1\right)$ 处的法线方程为 $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$. 6分

四 、试解下列各题（本题满分 14 分，每小题 7 分）

1. 解： 记 $D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,(x,y)\in D\right\},D_2=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2>1,(x,y)\in D\right\}$， 2分

则

$$\iint_D |x^2+y^2-1|d\sigma = -\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy + \iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$$ —4分

$$= -\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy + \iint_{D}(x^2+y^2-1)dxdy - \iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$= -2\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy + \iint_{D}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(r^2-1)rdr + \int_0^1 dx\int_0^1(x^2+y^2-1)dy = \underline{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}}$$ 8分

2. 解：令 $P = x^2-2y$， $Q = -(x+\sin^2 y)$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2, \frac{\partial Q}{\partial x} = -1,$$

选择 $BA: y=1$ 由 $B(2,1)$ 到 $A(0,1)$，则由格林公式得

$$\text{原式} = \oint_{L+BA}(x^2-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy + \int_{AB}(x^2-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$

$$= \iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy + \int_{AB}(x^2-2y)dx-\underline{(x+\sin^2 y)dy}$$ 3分

$$= \iint_D dxdy + \int_0^2(x^2-2)dx = \iint_D dxdy + \int_0^2(x^2-2)dx = \frac{\pi}{2}+\frac{8}{3}-4.$$

2分 2分

五 、试解下列各题（本题满分 24 分，每小题 8 分）

1. 解：将直线 l 的方程改写成一般式： $\begin{cases} x-y-1=0, \\ y+z-1=0. \end{cases}$ 过 l 的平面束方程为

$$(x-y-1)+\lambda(y+z-1)=0, \text{即} x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0.$$ 2分

由向量 $(1,\lambda-1,\lambda)$ 与（1，-1,2）垂直得 $\underline{\lambda=-2}$. 从而所求投影直线的方程为

4分

$$l_0: \begin{cases} x-3y-2z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}, \text{ 即} \begin{cases} x=2y \\ z=-\frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$$

6分

由旋转曲面的特点可知，并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程为:

$$\underline{x^2+z^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2}, \text{ 即 } 4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

8分

2. 解：补上 $\Sigma_1: z=0\ \ (x^2+y^2\le 4)$ 下侧, Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围闭区域，则

$$\iint_{\Sigma} y^2dzdx+zdxdy=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} y^2dzdx+zdxdy-\iint_{\Sigma_1} y^2dzdx+zdxdy$$ 4分

$$=\iiint_{\Omega}(2y+1)dxdydz-0$$ ——2分

$$=\iiint_{\Omega}2ydV+\iiint_{\Omega}dV$$ 2分

$$=0+\frac{16\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}$$

3.解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)5^n}{n5^{n+1}}=\frac{1}{5}\Rightarrow R=5$，收敛区间为(-5,5). 2分

又当 $x=5$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5}$ 发散；当 $x=-5$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{5}$ 发散;

所以收敛域为 $(-5,5)$； ——4分

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}x^{n-1}=(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{5^n}t^{n-1}dt)'=[\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{5})^n]'=(\frac{x}{5-x})'=\frac{5}{(5-x)^2}$$ 7分

于是 $s(1)=\frac{5}{16}$. ——8分

六 、证明题（本题满分 5 分）

证明：

$$\because |x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})|<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|$$ 2分

$$<\frac{1}{2^2}|x_{n-1}-x_{n-2}|<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|.$$ 4分

其中 ξ 介于 x_n，x_{n-1} 之间.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|=|x_2-x_1|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|$ 收敛，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛. 5分