

## 实验 - 动态规划算法

**提交截止时间 2025.4.10**。本次习题主要涉及动态规划算法。请用  $\text{\LaTeX}$  编辑所有解答。  
提交文件格式为 PDF。

---

姓名: xxx

学号: xxxxxxxx

---

### 题目 -1. 选择数字游戏 [30 分]

有一个在高中流行的游戏，老师在黑板上写下一系列的整数，同学们可以从这些数中选择**相邻**的几个数字，每个人只有一次选择机会，他可以将选择的数字写在自己的本子上，然后将选择的数字累加，累加的结果报告老师。选择的数字累加和最大的同学将胜出。你的任务是设计一个确保能胜出的算法，并给出具体的累加和。

---

**输入:**

4, -6, 5, 2, -1

**输出:**

7

**解释:**

累加和最大的子序列是 5, 2, 它们的和是 7

(a) 描述该问题简单穷举的算法，并给出时间复杂度。[5 分]

(b) 描述使用分治算法求解该问题的过程，并分析分治算法求解的时间复杂度。[5 分]

- (c) 详细描述用动态规划求解该问题的步骤，并分析其时间复杂度。[5 分]
- (d) 给出动态规划算法求解问题的实现代码。[10 分]
- (e) 给出输入数据为  $[-13, -3, -25, -20, -3, -16, -23, -12, -5, -22, -15, -4, -7]$  的输出。  
[5 分]

### 题目 -2. 基因序列比对 [30 分]

基因（遗传因子）是产生一条多肽链或功能 RNA 所需的全部核苷酸序列。碱基是合成核苷、核苷酸和核酸的基本组成单位，生物体中常见的碱基有 5 种，分别是腺嘌呤（A）、鸟嘌呤（G）、胞嘧啶（C）、胸腺嘧啶（T）和尿嘧啶（U），人体大约有 30 亿碱基对。假设在一个犯罪现场警察获得嫌疑犯毛发，通过测试获得了其基因序列，也就是由 A,T,C,G 和 U 组成的字符串序列  $s_1$ ，警察现在怀疑某人可能到过犯罪现场，并且获得了他的基因序列  $s_2$ 。现在你需要设计一个算法，计算这两个序列公共子串的长度给警察，以便警察判断两个基因序列的相似性。你的算法要求返回这两个基因片段最长的公共子序列。

---

**输入:**

$s_1 = \text{"AGGTAC"}$

$s_2 = \text{"GUTUAYC"}$

**输出:**

4

**解释:**

输出子序列是 GTAC

- (a) 描述一个简单穷举求解该问题的算法，并分析其时间复杂度。[5 分]
- (b) 描述动态规划求解该问题的主要步骤，并分析其时间复杂度。[5 分]
- (c) 如果输入序列  $s_1 = \text{AGGTAB}$ ,  $s_2 = \text{GXTXAYB}$ ，给出按照动态规划求解的动态规划表的值。[10 分]
- (d) 给出动态规划求解该问题的代码实现。[10 分]

### 题目 -3. 矩阵乘法最优结合 [35 分]

数学课上张老师在讲解矩阵的乘法，现在张老师在黑板上写下几个矩阵，由于矩阵乘法满

足结合律，也就是可以通过括号来改变计算顺序，不同顺序的计算结果相同，但计算的效率不同。张老师请大家设计一个算法，告诉他如何设计一个最优的计算顺序来最快计算矩阵连乘，你的算法并不需要计算矩阵连乘的结果，只需要告诉最优顺序的连乘操作次数。

- (a) 假设张老师给出了三个矩阵  $A$ 、 $B$  和  $C$ ，它们各自的行列数分别是  $10 \times 30$ 、 $30 \times 5$  和  $5 \times 60$ ，请给出  $(AB)C$  和  $A(BC)$  两个不同结合下所需的操作数（假设一次乘法的操作数记为 1）。[5 分]
- (b) 假设有  $n$  个矩阵，请给出一个递归算法来实现简单穷举，并分析其时间复杂度。[5 分]
- (c) 描述动态规划求解该问题的主要步骤，并分析其时间复杂度，假设  $n$  个矩阵的行列数记为  $P_1, P_2, \dots, P_n$ 。[5 分]
- (d) 如果输入 6 个矩阵，它们各自行列数为 30, 35, 15, 5, 10, 20, 25，请根据动态规划算法给出动态规划表，表中横坐标索引  $i$ ，纵坐标索引  $j$  [10 分]
- (e) 给出动态规划求解该问题的代码实现。[10 分]

#### 题目 -4. 数字跳棋游戏 (可选题)[5 分]

小明设计了一个数字跳棋游戏，让我们一起来了解一下这个游戏。游戏的棋盘包含起点  $S$  和终点  $E$ ，起点与终点之间的每一个棋子都用数字标示。玩家们需要从起点  $S$  出发，选择在棋子之间跳跃直到终点。玩家只能往前跳跃，且每次跳跃之间棋子数字都必须保持递增。如果玩家选择直接从起点  $S$  跳到终点  $E$ ，那么得分为 0。玩家的得分通过跳跃次数来计算，得分最多的玩家胜出。玩家的任务是对于给定的棋盘和棋子，找到获胜的策略，输出最终的得分。



图中玩家选择 3, 7, 40, 80 将得到最多的得分 4。

- (a) 如果各个棋子的分值是 10, 22, 9, 33, 21, 50, 41, 60, 80，那么玩家获胜的得分是多少？
- (b) 描述利用穷举法求解该问题的步骤，并给出其时间复杂度。
- (c) 详细描述用动态规划求解该问题的步骤。
- (d) 给出动态规划求解该问题的代码实现。