实验 - 动态规划算法

提交截止时间 2025.4.10 。本次习题主要涉及动态规划算法。请用 LaTeX 编辑所有解答。提交文件格式为 PDF。

姓名: xxx
学号: xxxxxxxx

题目 -1. **选择数字游戏** [30 分]
有一个在高中流行的游戏，老师在黑板上写下一系列的整数，同学们可以从这些数中选择**相邻**的几个数字，每个人只有一次选择机会，他可以将选择的数字写在自己的本子上，然后将选择的数字累加，累加的结果报告老师。选择的数字累加和最大的同学将胜出。你的任务是设计一个确保能胜出的算法，并给出具体的累加和。

输入:

4, -6, 5, 2, -1

输出:

7

解释:

累加和最大的子序列是 5, 2，它们的和是 7

(a) 描述该问题简单穷举的算法，并给出时间复杂度。[5 分]

该问题本质上是求解最大子数组和问题。简单穷举算法如下：

1. 枚举所有可能的子数组。对于长度为 n 的数组，共有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个连续子数组。

2. 对于每个子数组，计算它的和。
3. 找出和最大的子数组。

伪代码如下：

```
max_subarray_brute_force(arr):
    n = length(arr)
    max_sum = negative_infinity
    result_start = result_end = -1

    for i = 0 to n-1:
        current_sum = 0
        for j = i to n-1:
            current_sum += arr[j]
            if current_sum > max_sum:
                max_sum = current_sum
                result_start = i
                result_end = j

    return max_sum, result_start, result_end
```

时间复杂度分析：外层循环需要 $O(n)$ 时间，内层循环最多需要 $O(n)$ 时间，因此总的时间复杂度为 $O(n^2)$。

(b) 描述使用分治算法求解该问题的过程，并分析分治算法求解的时间复杂度。[5 分]

分治法的基本思想是将问题分解为子问题，然后合并子问题的解。对于最大子数组和问题，我们可以将数组分为左右两部分，最大子数组要么在左半部分，要么在右半部分，要么跨越中点。

算法步骤如下：

1. 将数组分为左右两部分。
2. 递归计算左半部分的最大子数组和。
3. 递归计算右半部分的最大子数组和。
4. 计算跨越中点的最大子数组和。

5. 返回上述三种情况中的最大值。

其中，计算跨越中点的最大子数组和的方法是：

1. 从中点向左扫描，找出左半部分的最大和。
2. 从中点向右扫描，找出右半部分的最大和。
3. 将两部分和相加。

时间复杂度分析：设 $T(n)$ 为规模为 n 的问题的时间复杂度，根据分治递归式：

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n) \tag{1}$$

根据主定理，该递归式的解为 $T(n) = O(n \log n)$。

(c) 详细描述用动态规划求解该问题的步骤，并分析其时间复杂度。[5 分]

动态规划法的思想是利用问题的最优子结构性质，通过解决子问题来解决原问题。对于最大子数组和问题，我们定义状态 $dp[i]$ 表示以第 i 个元素结尾的最大子数组和。

算法步骤如下：

1. 初始化 $dp[0] = arr[0]$，$\max\_\mathrm{sum} = dp[0]$。
2. 对于 i 从 1 到 $n-1$，根据状态转移方程 $dp[i] = \max(dp[i-1]+arr[i], arr[i])$ 计算 $dp[i]$。
3. 更新全局最大和 $\max\_\mathrm{sum} = \max(max\_sum, dp[i])$。
4. 最终 max_sum 即为最大子数组和。

状态转移方程解释：对于位置 i，我们要么将当前元素加入前面的子数组（$dp[i-1] + arr[i]$），要么重新开始一个新的子数组（$arr[i]$）。

时间复杂度分析：算法只需要遍历一次数组，时间复杂度为 $O(n)$。空间复杂度为 $O(n)$，如果对空间进行优化，只需要两个变量来保存当前最大和和全局最大和，空间复杂度可以降为 $O(1)$。

(d) 给出动态规划算法求解问题的实现代码。[10 分]

以下是使用 Python 实现的动态规划算法：

```
def max_subarray_dp(arr):
    """
```

```
    动态规划法求解最大子数组和
    时间复杂度：O(n)，其中n是数组长度
    """
    n = len(arr)
    # dp[i]表示以第i个元素结尾的最大子数组和
    dp = [0] * n
    dp[0] = arr[0]

    # 记录全局最大和及其结束位置
    max_sum = dp[0]
    end_index = 0

    for i in range(1, n):
        # 状态转移方程：要么将当前元素加入前面的子数组，要么重新开始一个子数组
        dp[i] = max(dp[i-1] + arr[i], arr[i])
        if dp[i] > max_sum:
            max_sum = dp[i]
            end_index = i

    # 回溯找到子数组的起始位置
    start_index = end_index
    while start_index > 0 and dp[start_index-1] > 0:
        start_index -= 1

    return max_sum, start_index, end_index

def main():
    # 测试用例
    arr = [4, -6, 5, 2, -1]
    max_sum, start, end = max_subarray_dp(arr)
    print(f"最大子数组和: {max_sum}")
```

print(f"子数组: {arr[start:end+1]}")

(e) 给出输入数据为 [-13, -3, -25, -20, -3, -16, -23, -12, -5, -22, -15, -4, -7] 的输出。[5 分]

对于输入数据 [-13, -3, -25, -20, -3, -16, -23, -12, -5, -22, -15, -4, -7]，执行动态规划算法：

首先初始化 dp[0] = -13，max_sum = -13。

然后按照状态转移方程依次计算 dp 值：

$$dp[1] = \max(dp[0] + arr[1], arr[1]) = \max(-13 + (-3), -3) = -3 \tag{2}$$
$$dp[2] = \max(dp[1] + arr[2], arr[2]) = \max(-3 + (-25), -25) = -25 \tag{3}$$
$$dp[3] = \max(dp[2] + arr[3], arr[3]) = \max(-25 + (-20), -20) = -20 \tag{4}$$

此时 max_sum 更新为-3，end_index 更新为 1。

继续计算：

$$dp[4] = \max(dp[3] + arr[4], arr[4]) = \max(-20 + (-3), -3) = -3 \tag{5}$$
$$dp[5] = \max(dp[4] + arr[5], arr[5]) = \max(-3 + (-16), -16) = -16 \tag{6}$$
$$dp[6] = \max(dp[5] + arr[6], arr[6]) = \max(-16 + (-23), -23) = -23 \tag{7}$$
$$dp[7] = \max(dp[6] + arr[7], arr[7]) = \max(-23 + (-12), -12) = -12 \tag{8}$$
$$dp[8] = \max(dp[7] + arr[8], arr[8]) = \max(-12 + (-5), -5) = -5 \tag{9}$$
$$dp[9] = \max(dp[8] + arr[9], arr[9]) = \max(-5 + (-22), -22) = -22 \tag{10}$$
$$dp[10] = \max(dp[9] + arr[10], arr[10]) = \max(-22 + (-15), -15) = -15 \tag{11}$$
$$dp[11] = \max(dp[10] + arr[11], arr[11]) = \max(-15 + (-4), -4) = -4 \tag{12}$$
$$dp[12] = \max(dp[11] + arr[12], arr[12]) = \max(-4 + (-7), -7) = -7 \tag{13}$$

最终结果是：

最大子数组和: -3

子数组: [-3]

这表示在这个全是负数的数组中，最大子数组和是-3，对应的子数组是数组中

的第二个元素 [-3]。

题目 -2. 基因序列比对 [30 分]
基因（遗传因子）是产生一条多肽链或功能 RNA 所需的全部核苷酸序列。碱基是合成核苷、核苷酸和核酸的基本组成单位，生物体中常见的碱基有 5 种，分别是腺嘌呤（A）、鸟嘌呤（G）、胞嘧啶（C）、胸腺嘧啶（T）和尿嘧啶（U），人体大约有 30 亿碱基对。假设在一个犯罪现场警察获得嫌疑犯毛发，通过测试获得了其基因序列，也就是由 A,T,C,G 和 U 组成的字符串序列 s_1，警察现在怀疑某人可能到过犯罪现场，并且获得了他的基因序列 s_2。现在你需要设计一个算法，计算这两个序列公共字串的长度给警察，以便警察判断两个基因序列的相似性。你的算法要求返回这两个基因片段最长的公共子序列。

输入:

s_1=”AGGTAC”

s_2=”GUTUAYC”

输出:

4

解释:

输出子序列是 GTAC

(a) 描述一个简单穷举求解该问题的算法，并分析其时间复杂度。[5 分]

该问题是求解最长公共子序列 (LCS) 问题。简单穷举算法的思路是枚举序列 s_1 的所有子序列，然后检查它们是否是序列 s_2 的子序列，并找出最长的。

算法步骤如下：

1. 枚举序列 s_1 的所有子序列。对于长度为 m 的序列，共有 2^m 个子序列。
2. 对于每个子序列，检查它是否是序列 s_2 的子序列。检查的方法是贪心地在 s_2 中匹配子序列的字符。
3. 在所有同时是 s_1 和 s_2 子序列的序列中，找出最长的一个。

伪代码如下（递归实现）：

```
lcs_brute_force(s1, s2, i=0, j=0, current=""):
    # 如果任一序列达到末尾，返回当前构建的子序列
```

```
if i == length(s1) or j == length(s2):
    return current

# 如果当前字符相同，则将其加入子序列
if s1[i] == s2[j]:
    return lcs_brute_force(s1, s2, i + 1, j + 1, current + s1[i])

# 否则，尝试跳过s1或s2中的当前字符，取较长的结果
skip_s1 = lcs_brute_force(s1, s2, i + 1, j, current)
skip_s2 = lcs_brute_force(s1, s2, i, j + 1, current)

if length(skip_s1) > length(skip_s2):
    return skip_s1
else:
    return skip_s2
```

时间复杂度分析：最坏情况下，递归树的高度为 $m+n$，其中 m 和 n 分别是两个序列的长度。每个递归调用分裂为两个子调用，因此总的时间复杂度为 $O(2^{m+n})$。

(b) 描述动态规划求解该问题的主要步骤，并分析其时间复杂度。[5 分]

动态规划法的思想是利用问题的最优子结构性质，通过解决子问题来解决原问题。对于 LCS 问题，我们定义状态 $dp[i][j]$ 表示序列 s_1 的前 i 个字符和序列 s_2 的前 j 个字符的最长公共子序列的长度。

算法步骤如下：

1. 初始化一个 $(m+1)\times(n+1)$ 的二维数组 dp，其中 m 和 n 分别是两个序列的长度。初始值全部为 0。
2. 根据状态转移方程填充 dp 数组：

状态转移方程如下：

当 $i=0$ 或 $j=0$ 时：

$$dp[i][j]=0 \tag{14}$$

当 $i > 0$ 且 $j > 0$ 且 $s_1[i-1] = s_2[j-1]$ 时：

$$dp[i][j] = dp[i-1][j-1] + 1 \tag{15}$$

当 $i > 0$ 且 $j > 0$ 且 $s_1[i-1] \neq s_2[j-1]$ 时：

$$dp[i][j] = \max(dp[i-1][j], dp[i][j-1]) \tag{16}$$

3. 最终 $dp[m][n]$ 即为最长公共子序列的长度。
4. 通过回溯 dp 数组，我们可以构建出最长公共子序列。

构建最长公共子序列的方法是：

1. 初始化 $i = m$，$j = n$。
2. 当 $i > 0$ 且 $j > 0$ 时：
   - 如果 $s_1[i-1] = s_2[j-1]$，则将该字符加入 LCS，并令 $i = i-1$，$j = j-1$。
   - 否则，如果 $dp[i-1][j] > dp[i][j-1]$，则令 $i = i-1$；否则令 $j = j-1$。
3. 重复步骤 2，直到 $i = 0$ 或 $j = 0$。
4. 反转得到的序列，即为最长公共子序列。

时间复杂度分析：填充 dp 数组需要 $O(m \times n)$ 的时间，构建最长公共子序列需要 $O(m + n)$ 的时间，因此总的时间复杂度为 $O(m \times n)$。空间复杂度也是 $O(m \times n)$。

(c) 如果输入序列 $s_1 = AGGTAB$, $s_2 = GXTXAYB$，给出按照动态规划求解的动态规划表的值。[10 分]

对于输入序列 $s_1 = AGGTAB$ 和 $s_2 = GXTXAYB$，动态规划表的填充过程如下：

通过回溯 dp 数组，我们可以构建出最长公共子序列。从 $dp[6][7] = 4$ 开始（$i = 6$, $j = 7$）：

- 检查 $s_1[6-1] = \mathrm{B}$ 与 $s_2[7-1] = \mathrm{B}$：两字符相同，将 B 加入 LCS，$i = 5$，$j = 6$。
- 检查 $s_1[5-1] = \mathrm{A}$ 与 $s_2[6-1] = \mathrm{Y}$：两字符不同，比较 $dp[4][6] = 2$ 和 $dp[5][5] = 3$，由于 $dp[5][5] > dp[4][6]$，选择 $j = j-1$，所以 $j = 5$。

$dp[i][j]$		G	X	T	X	A	Y	B
	0	0	0	0	0	0	0	0
A	0	0	0	0	0	1	1	1
G	0	1	1	1	1	1	1	1
G	0	1	1	1	1	1	1	1
T	0	1	1	2	2	2	2	2
A	0	1	1	2	2	3	3	3
B	0	1	1	2	2	3	3	4

Table 1: 动态规划表 $dp[i][j]$

- 检查 $s_1[5-1] = \mathrm{A}$ 与 $s_2[5-1] = \mathrm{A}$：两字符相同，将 A 加入 LCS，$i = 4$，$j = 4$。
- 检查 $s_1[4-1] = \mathrm{T}$ 与 $s_2[4-1] = \mathrm{X}$：两字符不同，比较 $dp[3][4] = 1$ 和 $dp[4][3] = 2$，由于 $dp[4][3] > dp[3][4]$，选择 $i = i-1$，所以 $i = 3$。
- 检查 $s_1[3-1] = \mathrm{T}$ 与 $s_2[4-1] = \mathrm{X}$：两字符不同，比较 $dp[2][4] = 1$ 和 $dp[3][3] = 2$，由于 $dp[3][3] > dp[2][4]$，选择 $j = j-1$，所以 $j = 3$。
- 检查 $s_1[3-1] = \mathrm{T}$ 与 $s_2[3-1] = \mathrm{T}$：两字符相同，将 T 加入 LCS，$i = 2$，$j = 2$。
- 检查 $s_1[2-1] = \mathrm{G}$ 与 $s_2[2-1] = \mathrm{X}$：两字符不同，比较 $dp[1][2] = 0$ 和 $dp[2][1] = 1$，由于 $dp[2][1] > dp[1][2]$，选择 $j = j-1$，所以 $j = 1$。
- 检查 $s_1[2-1] = \mathrm{G}$ 与 $s_2[1-1] = \mathrm{G}$：两字符相同，将 G 加入 LCS，$i = 1$，$j = 0$。

因此，最长公共子序列是 GTAB，长度为 4。

(d) 给出动态规划求解该问题的代码实现。[10 分]

以下是使用 Python 实现的最长公共子序列的动态规划算法：

```
def lcs_dp(s1, s2):
    """
    动态规划法求最长公共子序列
    时间复杂度：O(m*n)，其中m和n分别是两个序列的长度
    空间复杂度：O(m*n)
    """
```

```
m, n = len(s1), len(s2)

# 创建dp表，dp[i][j]表示s1[0:i]和s2[0:j]的最长公共子序列长度
dp = [[0] * (n + 1) for _ in range(m + 1)]

# 填充dp表
for i in range(1, m + 1):
    for j in range(1, n + 1):
        if s1[i - 1] == s2[j - 1]:
            # 如果当前字符相同，则最长公共子序列长度加1
            dp[i][j] = dp[i - 1][j - 1] + 1
        else:
            # 否则，取跳过s1或s2当前字符后的较大值
            dp[i][j] = max(dp[i - 1][j], dp[i][j - 1])

# 构建最长公共子序列
lcs = []
i, j = m, n
while i > 0 and j > 0:
    if s1[i - 1] == s2[j - 1]:
        lcs.append(s1[i - 1])
        i -= 1
        j -= 1
    elif dp[i - 1][j] > dp[i][j - 1]:
        i -= 1
    else:
        j -= 1

# 返回最长公共子序列（需要反转）
return ''.join(reversed(lcs))
```

使用示例：

```
s1 = "AGGTAC"
s2 = "GUTUAYC"
lcs = lcs_dp(s1, s2)
print(f"序列1: {s1}")
print(f"序列2: {s2}")
print(f"最长公共子序列: {lcs}")
print(f"长度: {len(lcs)}")
```

对于上述例子，输出结果为：

```
序列1: AGGTAC
序列2: GUTUAYC
最长公共子序列: GTAC
长度: 4
```

题目 -3. 矩阵乘法最优结合 [35 分]

数学课上张老师在讲解矩阵的乘法，现在张老师在黑板上写下几个矩阵，由于矩阵乘法满足结合律，也就是可以通过括号来改变计算顺序，不同顺序的计算结果相同，但计算的效率不同。张老师请大家设计一个算法，告诉他如何设计一个最优的计算顺序来最快计算矩阵连乘，你的算法并不需要计算矩阵连乘的结果，只需要告诉最优顺序的连乘操作次数。

(a) 假设张老师给出了三个矩阵 A、B 和 C，它们各自的行列数分别是 10×30、30×5 和 5×60，请给出 $(AB)C$ 和 $A(BC)$ 两个不同结合下所需的操作数（假设一次乘法的操作数记为 1）。[5 分]

矩阵乘法的计算规则：如果矩阵 A 是 $p \times q$ 的，矩阵 B 是 $q \times r$ 的，那么计算 $A \times B$ 需要 $p \times q \times r$ 次基本操作（乘法和加法）。

计算 $(AB)C$：

1. 首先计算 AB：矩阵 A 是 10×30 的，矩阵 B 是 30×5 的，所以 AB 是 10×5 的，计算需要 $10 \times 30 \times 5 = 1500$ 次操作。
2. 然后计算 $(AB)C$：AB 是 10×5 的，矩阵 C 是 5×60 的，所以 $(AB)C$ 是 10×60 的，计算需要 $10 \times 5 \times 60 = 3000$ 次操作。
3. 总操作数是 $1500 + 3000 = 4500$ 次。

计算 $A(BC)$：

1. 首先计算 BC：矩阵 B 是 30×5 的，矩阵 C 是 5×60 的，所以 BC 是 30×60 的，计算需要 $30 \times 5 \times 60 = 9000$ 次操作。
2. 然后计算 $A(BC)$：矩阵 A 是 10×30 的，BC 是 30×60 的，所以 $A(BC)$ 是 10×60 的，计算需要 $10 \times 30 \times 60 = 18000$ 次操作。
3. 总操作数是 $9000 + 18000 = 27000$ 次。

因此，$(AB)C$ 的操作数为 4500 次，$A(BC)$ 的操作数为 27000 次，很明显 $(AB)C$ 的计算顺序更优。

(b) 假设有 n 个矩阵，请给出一个递归算法来实现简单穷举，并分析其时间复杂度。[5 分]

对于 n 个矩阵 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的连乘问题，我们可以用递归算法来穷举所有可能的括号化方案。

递归思路如下：

1. 对于矩阵链 $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_j$，我们可以在任何位置 k（其中 $i \leq k < j$）分割它。
2. 分割后，我们得到两个子问题：计算 $A_i, \ldots, A_k$ 的最优括号化方案，和计算 $A_{k+1}, \ldots, A_j$ 的最优括号化方案。
3. 然后，我们将这两个子问题的解组合起来，并加上合并这两个结果所需的操作数。
4. 比较所有可能的分割点 k，找出使总操作数最小的分割点。

伪代码如下：

```
matrix_chain_brute_force(p, i, j):
    # p是矩阵维度数组，p[i-1] x p[i]表示第i个矩阵的维度
    # 计算A_i, A_{i+1}, ..., A_j的最优括号化方案

    if i == j:
        return 0  # 只有一个矩阵，无需乘法操作

    min_cost = infinity
```

```
for k = i to j-1:
    # 计算在k处分割的代价
    cost = matrix_chain_brute_force(p, i, k) +
           matrix_chain_brute_force(p, k+1, j) +
           p[i-1] * p[k] * p[j]
    if cost < min_cost:
        min_cost = cost

return min_cost
```

时间复杂度分析：设 $T(n)$ 为计算 n 个矩阵的最优括号化方案所需的时间。根据递归式：

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1}[T(k) + T(n-k)] + O(n) \tag{17}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n-1} T(k) + O(n) \tag{18}$$

解这个递归式，可以得到 $T(n) = O(2^n)$。这是一个指数级的时间复杂度，对于大规模问题是不实用的。

(c) 描述动态规划求解该问题的主要步骤，并分析其时间复杂度，假设 n 个矩阵的行列数记为 $P_1, P_2, \ldots, P_n$。[5 分]

动态规划法的思想是利用问题的最优子结构性质，通过解决子问题来解决原问题。对于矩阵链乘法问题，我们定义状态 $m[i][j]$ 表示计算矩阵链 $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_j$ 所需的最小操作数。

算法步骤如下：

1. 初始化 $m[i][i] = 0$，表示单个矩阵不需要乘法操作。
2. 对于链长 l 从 2 到 n，计算所有长度为 l 的子链的最优方案：
   (a) 对于所有起点 i 从 1 到 $n-l+1$，计算终点 $j = i + l - 1$。
   (b) 初始化 $m[i][j] = \infty$。
   (c) 对于所有可能的分割点 k 从 i 到 $j-1$，计算代价 $q = m[i][k] + m[k+1][j] + p_{i-1} \times p_k \times p_j$。

(d) 如果 $q < m[i][j]$，则更新 $m[i][j] = q$，同时记录最优分割点 $s[i][j] = k$（用于构建最优括号化方案）。

3. 最终 $m[1][n]$ 即为计算整个矩阵链所需的最小操作数。

状态转移方程为：

当 $i = j$ 时，$m[i][j] = 0$

当 $i < j$ 时：

$$m[i][j] = \min_{i \leq k < j} \{m[i][k] + m[k+1][j] + p_{i-1} \times p_k \times p_j\} \tag{19}$$

时间复杂度分析：有 $O(n^2)$ 个子问题，每个子问题需要 $O(n)$ 的时间来考虑所有可能的分割点，因此总的时间复杂度为 $O(n^3)$。空间复杂度为 $O(n^2)$。

(d) 如果输入 6 个矩阵，它们各自行列数为 30, 35, 15, 5, 10, 20, 25，请根据动态规划算法给出动态规划表，表中横坐标索引 i，纵坐标索引 j[10 分]

矩阵维度数组 $p = [30, 35, 15, 5, 10, 20, 25]$，其中 $p[i-1] \times p[i]$ 表示第 i 个矩阵的维度。

计算动态规划表 $m[i][j]$ 的过程如下：

1. 初始化 $m[i][i] = 0$，表示单个矩阵不需要乘法操作。

$$m[1][1] = m[2][2] = m[3][3] = m[4][4] = m[5][5] = m[6][6] = 0 \tag{20}$$

2. 计算长度为 2 的子链：

$$m[1][2] = m[1][1] + m[2][2] + p_0 \times p_1 \times p_2 = 0 + 0 + 30 \times 35 \times 15 = 15750 \tag{21}$$

$$m[2][3] = m[2][2] + m[3][3] + p_1 \times p_2 \times p_3 = 0 + 0 + 35 \times 15 \times 5 = 2625 \tag{22}$$

$$m[3][4] = m[3][3] + m[4][4] + p_2 \times p_3 \times p_4 = 0 + 0 + 15 \times 5 \times 10 = 750 \tag{23}$$

$$m[4][5] = m[4][4] + m[5][5] + p_3 \times p_4 \times p_5 = 0 + 0 + 5 \times 10 \times 20 = 1000 \tag{24}$$

$$m[5][6] = m[5][5] + m[6][6] + p_4 \times p_5 \times p_6 = 0 + 0 + 10 \times 20 \times 25 = 5000 \tag{25}$$

3. 计算长度为 3 的子链：

$m[1][3]$ 可以有两种分割方式，我们计算各自的代价然后取最小值：

分割点 $k = 1$: $m[1][1] + m[2][3] + p_0 \times p_1 \times p_3 = 0 + 2625 + 30 \times 35 \times 5 = 7875$

分割点 $k = 2$: $m[1][2] + m[3][3] + p_0 \times p_2 \times p_3 = 15750 + 0 + 30 \times 15 \times 5 = 18000$

因此，$m[1][3] = \min(7875, 18000) = 7875$

同理计算 $m[2][4]$、$m[3][5]$、$m[4][6]$...

4. 计算长度为 4 的子链：$m[1][4]$、$m[2][5]$、$m[3][6]$...

5. 计算长度为 5 的子链：$m[1][5]$、$m[2][6]$...

6. 计算长度为 6 的子链：$m[1][6]$...

最终的动态规划表如下：

$m[i][j]$	1	2	3	4	5	6
1	0	15750	7875	9375	11875	15125
2	-	0	2625	4375	7125	10500
3	-	-	0	750	2500	5375
4	-	-	-	0	1000	3500
5	-	-	-	-	0	5000
6	-	-	-	-	-	0

Table 2: 动态规划表 $m[i][j]$

从表中可以看出，计算整个矩阵链 $A_1, A_2, \ldots, A_6$ 所需的最小操作数是 $m[1][6] = 15125$。

(e) 给出动态规划求解该问题的代码实现。[10 分]

以下是使用 Python 实现的矩阵链乘法问题的动态规划算法：

```
def matrix_chain_dp(p):
    """
    动态规划法求解矩阵连乘的最优计算顺序
    p是矩阵维度序列，p[i] x p[i+1]表示第i+1个矩阵的维度
    时间复杂度：O(n^3)，其中n是矩阵数量
    """
    n = len(p) - 1  # 矩阵数量
```

```
    # 创建dp表，m[i][j]表示计算第i个矩阵到第j个矩阵的最小乘法次数
    m = [[0] * (n + 1) for _ in range(n + 1)]

    # 创建s表，s[i][j]记录最优分割点
    s = [[0] * (n + 1) for _ in range(n + 1)]

    # 计算链长为l的所有子问题
    for l in range(2, n + 1):
        for i in range(1, n - l + 2):
            j = i + l - 1
            m[i][j] = float('inf')
            for k in range(i, j):
                # 计算在k处分割的代价
                cost = m[i][k] + m[k+1][j] + p[i-1] * p[k] * p[j]
                if cost < m[i][j]:
                    m[i][j] = cost
                    s[i][j] = k

    return m, s

def print_optimal_parens(s, i, j):
    """打印最优括号化方案"""
    if i == j:
        print(f"A{i}", end="")
    else:
        print("(", end="")
        print_optimal_parens(s, i, s[i][j])
        print_optimal_parens(s, s[i][j] + 1, j)
        print(")", end="")
```

使用示例：

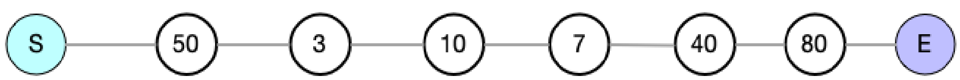
```
p = [30, 35, 15, 5, 10, 20, 25]
```

m, s = matrix_chain_dp(p)
print(f"最小乘法次数: {m[1][len(p)-1]}")
print("最优括号化方案: ", end="")
print_optimal_parens(s, 1, len(p)-1)

对于上述例子，输出结果为：

最小乘法次数: 15125
最优括号化方案: ((A1(A2A3))((A4A5)A6))

题目 -4. 数字跳棋游戏 (可选题)[5 分]
小明设计了一个数字跳棋游戏，让我们一起来了解一下这个游戏。游戏的棋盘包含起点 S 和终点 E，起点与终点之间的每一个棋子都用数字标示。玩家们需要从起点 S 出发，选择在棋子之间跳跃直到终点。玩家只能往前跳跃，且每次跳跃之间棋子数字都必须保持递增。如果玩家选择直接从起点 S 跳到终点 E，那么得分为 0。玩家的得分通过跳跃次数来计算，得分最多的玩家胜出。玩家的任务是对于给定的棋盘和棋子，找到获胜的策略，输出最终的得分。



图中玩家选择 3，7，40，80 将得到最多的得分 4。

(a) 如果各个棋子的分值是 10, 22, 9, 33, 21, 50, 41, 60, 80，那么玩家获胜的得分是多少？

这个问题实际上是求解最长递增子序列 (LIS - Longest Increasing Subsequence) 的问题。在跳棋游戏中，我们需要找到一个严格递增的序列，使得序列长度最大。注意，游戏的得分是跳跃次数，即序列的长度。

对于棋子分值 10, 22, 9, 33, 21, 50, 41, 60, 80，我们需要找到其中的最长递增子序列。

使用动态规划算法分析：

1. 定义 dp[i] 表示以第 i 个元素结尾的最长递增子序列的长度。
2. 初始化 dp[i] = 1（每个元素自身就是一个长度为 1 的递增子序列）。

3. 对于每个位置 i，考虑之前的所有位置 j < i，如果 nums[i] > nums[j]，则可以将第 i 个元素接在以第 j 个元素结尾的序列之后，得到 dp[i] = max(dp[i], dp[j] + 1)。

计算过程：

$$
\begin{align}
dp[0] &= 1 \quad (10) \tag{26}\\
dp[1] &= 2 \quad (10, 22) \tag{27}\\
dp[2] &= 1 \quad (9) \tag{28}\\
dp[3] &= 3 \quad (10, 22, 33) \tag{29}\\
dp[4] &= 2 \quad (10, 21) \tag{30}\\
dp[5] &= 4 \quad (10, 22, 33, 50) \tag{31}\\
dp[6] &= 4 \quad (10, 22, 33, 41) \tag{32}\\
dp[7] &= 5 \quad (10, 22, 33, 50, 60) \tag{33}\\
dp[8] &= 6 \quad (10, 22, 33, 50, 60, 80) \tag{34}
\end{align}
$$

最长递增子序列是 [10, 22, 33, 50, 60, 80]，长度为 6。因此，玩家获胜的得分是 6。

(b) 描述利用穷举法求解该问题的步骤，并给出其时间复杂度。

穷举法的基本思想是生成所有可能的递增子序列，并找出其中最长的一个。

算法步骤如下：

1. 从起点开始，考虑两种选择：跳过当前棋子，或者选择当前棋子并继续跳跃。
2. 如果选择当前棋子，下一步只能跳到值比当前值大的棋子上。
3. 递归地探索所有可能的跳跃路径，并记录最长的路径长度。

伪代码如下：

```
lis_brute_force(nums, curr_idx=0, prev_val=negative_infinity, curr_sequence=[]):
    # 基本情况：到达数组末尾
    if curr_idx == length(nums):
        return curr_sequence
```

```
# 选择1：跳过当前数字
skip_result = lis_brute_force(nums, curr_idx + 1, prev_val, curr_sequence)

# 选择2：如果当前数字大于前一个选择的数字，则选择当前数字
take_result = []
if nums[curr_idx] > prev_val:
    new_sequence = curr_sequence + [nums[curr_idx]]
  take_result = lis_brute_force(nums, curr_idx + 1, nums[curr_idx], new_sequence)

# 返回长度更大的序列
if length(take_result) > length(skip_result):
    return take_result
else:
    return skip_result
```

时间复杂度分析：最坏情况下，对于每个位置，我们都需要考虑选择或不选择两种情况，因此时间复杂度为 $O(2^n)$，其中 n 是棋子的数量。

(c) 详细描述用动态规划求解该问题的步骤。

动态规划法的思想是利用问题的最优子结构性质，通过解决子问题来解决原问题。对于最长递增子序列问题，我们定义状态 $dp[i]$ 表示以第 i 个元素结尾的最长递增子序列的长度。

算法步骤如下：

1. 初始化 dp 数组，dp[i] = 1，表示每个元素自身就是一个长度为 1 的递增子序列。
2. 对于每个位置 i（从 1 到 n-1），遍历所有之前的位置 j（从 0 到 i-1）：
   - 如果 nums[i] > nums[j]，则可以将第 i 个元素接在以第 j 个元素结尾的序列之后，得到 dp[i] = max(dp[i], dp[j] + 1)。
3. 最终，最长递增子序列的长度是 dp 数组中的最大值。

为了构建出实际的最长递增子序列，我们还需要记录每个位置的前一个元素的索引：

1. 初始化 prev 数组，prev[i] = -1，表示没有前一个元素。
2. 在更新 dp[i] 时，如果通过 nums[j] 得到更长的序列，则更新 prev[i] = j。
3. 通过回溯 prev 数组，我们可以构建出最长递增子序列。

状态转移方程：

$$dp[i] = \max_{j<i, nums[j]<nums[i]} \{dp[j] + 1\} \tag{35}$$

时间复杂度分析：有两层嵌套循环，因此时间复杂度为 $O(n^2)$，其中 n 是棋子的数量。空间复杂度为 $O(n)$。

(d) 给出动态规划求解该问题的代码实现。

以下是使用 Python 实现的最长递增子序列的动态规划算法：

```
def lis_dp(nums):
    """
    动态规划法求解最长递增子序列
    时间复杂度：O(n^2)，其中n是数组长度
    空间复杂度：O(n)
    """
    if not nums:
        return []

    n = len(nums)
    # dp[i]表示以第i个元素结尾的最长递增子序列的长度
    dp = [1] * n
    # prev[i]记录以第i个元素结尾的最长递增子序列的前一个元素的索引
    prev = [-1] * n

    # 填充dp数组
    for i in range(1, n):
        for j in range(i):
            if nums[i] > nums[j] and dp[i] < dp[j] + 1:
```

```
            dp[i] = dp[j] + 1
            prev[i] = j

    # 找到最长递增子序列的结束位置
    max_length = max(dp)
    end_index = dp.index(max_length)

    # 重建最长递增子序列
    lis = []
    while end_index != -1:
        lis.append(nums[end_index])
        end_index = prev[end_index]

    # 逆序返回，得到正确的顺序
    return list(reversed(lis))
```

使用示例：

```
test_case = [10, 22, 9, 33, 21, 50, 41, 60, 80]
lis = lis_dp(test_case)
print(f"最长递增子序列: {lis}")
print(f"得分: {len(lis)}")
```

对于上述例子，输出结果为：

```
最长递增子序列: [10, 22, 33, 50, 60, 80]
得分: 6
```

这表示玩家应该按照 $10 \to 22 \to 33 \to 50 \to 60 \to 80$ 的顺序跳跃，得分为 6。

此外，值得一提的是，最长递增子序列问题还有一个时间复杂度为 $O(n \log n)$ 的优化算法，基于二分查找，在实际应用中更为高效：

```
def lis_dp_optimized(nums):
    """
```

```
优化的动态规划法求解最长递增子序列
时间复杂度：O(n log n)，其中n是数组长度
空间复杂度：O(n)
"""
if not nums:
    return []

n = len(nums)
# tails[i]存储长度为i+1的递增子序列的最小结尾值
tails = []
# 记录每个元素所在的递增子序列长度
length = [0] * n

for i in range(n):
    # 二分查找：查找第一个大于等于nums[i]的位置
    left, right = 0, len(tails)
    while left < right:
        mid = (left + right) // 2
        if tails[mid] < nums[i]:
            left = mid + 1
        else:
            right = mid

    # 如果找不到，则添加到tails末尾
    if left == len(tails):
        tails.append(nums[i])
    else:
        tails[left] = nums[i]

    length[i] = left + 1
```

```
    # 重建最长递增子序列
    lis_length = len(tails)
    lis = [0] * lis_length
    curr_len = lis_length

    for i in range(n - 1, -1, -1):
        if length[i] == curr_len:
            lis[curr_len - 1] = nums[i]
            curr_len -= 1
            if curr_len == 0:
                break

    return lis
```