算法分析与设计

浙江工业大学 2025.3.6

教师: 杜嘉欣 习题实验 1

习题实验 1

提交截止时间 2025.3.14

请用 LaTeX 编辑所有解答。所有问题请给出简洁的回答。提交文件格式为 PDF。

姓名: xxx

学号: xxxxxxxxx

题目 1-1. 给定集合 $A = \{i + \binom{5}{i} | i \in \mathbb{Z}, o \leq i \leq 4\}$，集合 $B = \{3i | i \in \{1, 2, 4, 5\}\}$。请分别给出以下运算的结果。

(a)$A \cap B$

(b) $|A \cup B|$

(c) $|A - B|$

集合 A 和 B 的计算如下：

$$A = \{i + \binom{5}{i} \mid i \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq 4\}$$

计算各项：

$$i = 0 : 0 + \binom{5}{0} = 1,$$
$$i = 1 : 1 + \binom{5}{1} = 6,$$
$$i = 2 : 2 + \binom{5}{2} = 12,$$
$$i = 3 : 3 + \binom{5}{3} = 13,$$
$$i = 4 : 4 + \binom{5}{4} = 9.$$

$$A = \{1, 6, 12, 13, 9\}$$

集合 B 计算如下：

$$B = \{3i \mid i \in \{1, 2, 4, 5\}\}$$

计算各项：

$$i = 1 : 3 \times 1 = 3,$$

$$i = 2 : 3 \times 2 = 6,$$

$$i = 4 : 3 \times 4 = 12,$$

$$i = 5 : 3 \times 5 = 15.$$

$$B = \{3, 6, 12, 15\}$$

(a) 交集计算：

$$A \cap B = \{6, 12\}$$

(b) 并集计算：

$$A \cup B = \{1, 6, 12, 13, 9, 3, 15\}$$

$$|A \cup B| = 7$$

(c) 差集计算：

$$A - B = \{1, 13, 9\}$$

$$|A - B| = 3$$

最终答案：

$$\textbf{(a)} \quad A \cap B = \{6, 12\}$$

$$\textbf{(b)} \quad |A \cup B| = 7$$

$$\textbf{(c)} \quad |A - B| = 3$$

题目 1-2. 有 2 个随机变量 X 和 Y。其中，X 表示抛无偏硬币三次后看到的人头数。Y 表示掷两个无偏六面骰子并将其值相乘的结果。请计算以下期望值，

(a)$E[X]$

(b) $E[Y]$

设随机变量 X 表示抛无偏硬币三次后看到的人头数，则 $X \sim \mathrm{Bin}(3, \frac{1}{2})$，其期望为

$$E[X] = np = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

设随机变量 Y 表示掷两个无偏六面骰子并将其值相乘的结果，记 X_1, X_2 为两个独立骰子的点数，则

$$E[Y] = E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2]$$

由于 $X_1, X_2 \sim U\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，其期望为

$$E[X_1] = E[X_2] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$$

故

$$E[Y] = \left(\frac{7}{2}\right) \times \left(\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{4}$$

题目 1-3. 令 $A = 600/6$，$B = 60mod42$。以下表达式正确的是？

(a) $A \equiv B(mod\ 2)$

(b) $A \equiv B(mod\ 3)$

(c) $A \equiv B(mod\ 4)$

设

$$A = \frac{600}{6} = 100, \quad B = 60 \mod 42 = 18$$

计算模运算：

$$A \mod 2 = 100 \mod 2 = 0, \quad B \mod 2 = 18 \mod 2 = 0$$

$$A \mod 3 = 100 \mod 3 = 1, \quad B \mod 3 = 18 \mod 3 = 0$$

$$A \mod 4 = 100 \mod 4 = 0, \quad B \mod 4 = 18 \mod 4 = 2$$

因此，正确的表达式是

$$\textbf{(a)} \quad A \equiv B \pmod 2$$

题目 1-4. 利用数学归纳法证明 $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$，其中 $n \geq 1$。

命题：对所有 $n \geq 1$，有

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

证明：利用数学归纳法。

1. 基础情况：当 $n = 1$ 时，

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1, \quad \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$$

故命题对 $n = 1$ 成立。

2. 归纳假设：假设对于 $n = k$，命题成立，即

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

3. 归纳推理：考虑 $n = k + 1$，有

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3$$

由归纳假设，得

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

化简右侧：

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right)$$

$$= (k+1)^2 \left(\frac{k^2 + 4k + 4}{4}\right) = (k+1)^2 \left(\frac{(k+2)^2}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2$$

即

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2$$

故命题对 $n = k+1$ 亦成立。根据数学归纳法，命题对所有 $n \geq 1$ 成立。

题目 1-5. 利用数学归纳法证明有 n 个节点的图最多只有 $n(n-1)/2$ 条边。
命题： 具有 n 个节点的图最多有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边。

证明： 使用数学归纳法。

1. 基础情况： 当 $n = 1$ 时，图只有一个节点，不可能有边，因此最多有

$$\frac{1(1-1)}{2} = 0$$

条边，命题成立。

2. 归纳假设： 假设对于 $n = k$，命题成立，即 k 个节点的图最多有

$$\frac{k(k-1)}{2}$$

条边。

3. 归纳推理： 考虑 $n = k + 1$ 的情况。向一个 k 个节点的最大边数图中加入一个新节点，该节点最多可以与已有的 k 个节点相连，添加最多 k 条边。因此，$k+1$ 个节点的图最多有

$$\frac{k(k-1)}{2} + k$$

条边，化简得

$$\frac{k(k-1)+2k}{2} = \frac{k^2-k+2k}{2} = \frac{k^2+k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

即 $n = k + 1$ 时命题仍然成立。

根据数学归纳法，命题对所有 $n \geq 1$ 成立。

题目 1-6. 数组中相邻的元素如果依次递增，那么这段递增的元素就称为数组的**递增子数组**。请给出函数 $count\_long\_subarrays(A)$ 的具体实现，该函数返回数组 A 中最长递增子数组的个数，其中 A 包含 $n > 0$ 个正整数。

输入： $A = (1, 3, 4, 2, 7, 5, 6, 9, 8)$

输出： $count = 2$

因为 A 中最长的递增子数组分别为 $(1, 3, 4)$ 和 $(5, 6, 9)$。

```python
def count_long_subarrays(A):
    if not A:
        return 0

    n = len(A)
    current_length = 1
    max_length = 1
    count = 1

    for i in range(1, n):
        if A[i] > A[i-1]:
            current_length += 1
        else:
            current_length = 1

        if current_length > max_length:
            max_length = current_length
            count = 1
        elif current_length == max_length:
            count += 1

    return count
```