参考解答

一、选择题

1. (A)　2. (D)　3. (C)　4. (C)　5. (D)　6. (B)

7. (C)　8. (C)　9. (D)　10. (C)　11. (A)

二、解答题：

1.（ 6 分）设 $f(x)$ 为可导函数，且满足 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t dt=x+1$，求 $f(x)$.

解：两边对 x 求导， $f'(x)\cos x-f(x)\sin x+2f(x)\sin x=1$，

得　$$f'(x)+f(x)\tan x=\sec x$$

解一阶线性微分方程，得：

$$f(x)=e^{-\int \tan x dx}(\int \sec x\cdot e^{\int \tan x dx}dx)=\cos x(\tan x+C)=\sin x+C\cos x.$$

$$f(0)=1, C=1$$

$$f(x)=\sin x+\cos x$$

2.（6 分）求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程.

解：所求平面的法线向量 n 可取为已知直线的方向向量，即

$$\mathbf{n}=(1,\ -2,\ 4)\times(3,\ 5,\ -2)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\1 & -2 & 4\\3 & 5 & -2\end{vmatrix}=-16\mathbf{i}+14\mathbf{j}+11\mathbf{k}.$$

所平面的方程为

$$-16(x-2)+14y+11(z+3)=0,$$

即 $16x-14y-11z-65=0$.

3.（6 分）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-3xyz=1$ 确定的函数，求全微分 $dz,\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：两边求微分：$3z^2dz=3yzdx+3xzdy+3xydz$

$$dz=\frac{yz}{z^2-xy}dx+\frac{xz}{z^2-xy}dy,\quad z^2-xy\neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy},\ z^2-xy\neq 0$$

4.（6 分）计算二重积分 $\iint\limits_D (2x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：由直线 $y=1, y-x-1=0$ 及 $x+y-3=0$ 所围成.

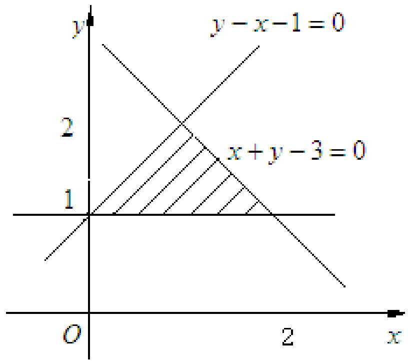
解：画出区域D的图形，选择先对 x 积分，这时区域D的表达式为 $\begin{cases} y-1\le x\le 3-y, \\ 1\le y\le 2, \end{cases}$

于是 $\iint\limits_{\mathrm{D}} (2x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}y \int_{y-1}^{3-y} (2x-y)\mathrm{d}x$

$= \int_1^2 (x^2-xy)\Big|_{y-1}^{3-y} \mathrm{d}y$

$= \int_1^2 (2y^2-8y+8)\mathrm{d}y$

$= (\frac{2}{3}y^3-4y^2+8y)\Big|_1^2 = \frac{2}{3}$



5.（7 分）已知曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$，求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

解：利用拉格朗日乘数法

$F(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$

$F_x=\mu+2x\lambda=0$，$F_y=\mu+2y\lambda=0$，$F_z=2z-4\lambda z+3\mu=0$

再根据条件 $\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$，

解得 $(x,y,z)=(1,1,1)$或$(x,y,z)=(-5,-5,5)$

由于实际问题存在最大值和最小值，因此曲线上最远点是 $(-5,-5,5)$，最近点是 $(1,1,1)$.

6.（8 分）计算曲线积分 $\int\limits_{\mathrm{C}} \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 C 是沿逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=1$.

解：令曲线的参数方程为 $x=\cos t, y=\sin t, t\in[0,2\pi]$

$\int\limits_{\mathrm{C}} \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2} = \int\limits_{\mathrm{C}} (x+y)dx-(x-y)dy$

$= \int_0^{2\pi} (\cos t+\sin t)d(\cos t)-(\cos t-\sin t)d(\sin t) = \int_0^{2\pi}(-1)dt = -2\pi$

7.（8 分）计算曲面积分 $\iint\limits_{\Omega} dydz+dzdx+zdxdy$，其中 Ω 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，

$z \geq 0$ 的上侧.

解：令 $P=1, Q=1, R=z$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=1$，

令 $\Sigma=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq a^2, z=0\}$ 为上半球面的下侧，

根据高斯公式

$$\iint\limits_{\Omega\cup\Sigma} dydz+dzdx+zdxdy=\iiint\limits_{V} dv=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

因此

$$\iint\limits_{\Omega} dydz+dzdx+zdxdy=\frac{2}{3}\pi a^3-\iint\limits_{\Sigma} dydz+dzdx+zdxdy$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3-0=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

8.（8 分）判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\dfrac{1}{n^p}\,(p\in R)$ 的敛散性，若收敛是绝对收敛还是条件收敛. 解：

原级数可以化简为.

当 $p \leq 0$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \sin\dfrac{1}{n^p} \neq 0$ 所以级数发散.

当 $1<p$ 时，由于 $\sin\dfrac{1}{n^p}$ 与 $\dfrac{1}{n^p}$ 等价，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛，所以原级数绝对收敛.

当 $0<p\leq 1$ 时，由于 $\sin\dfrac{1}{n^p}$ 与 $\dfrac{1}{n^p}$ 等价，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散，又根据莱布尼兹定理，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\dfrac{1}{n^p}$ 收敛，所以原级数条件收敛.

9. (8 分) 计算幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{nx^{2n-1}}{2^n}$ 的收敛域及其和函数.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|(-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)x^{2n+1}}{2^{n+1}}\right|}{\left|(-1)^n\dfrac{nx^{2n-1}}{2^n}\right|}=\dfrac{|x|^2}{2}<1$，收敛半径 R=$\sqrt{2}$，

当 $x=\sqrt{2}$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{\sqrt{2}}$ 发散，当 $x=-\sqrt{2}$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1} n}{\sqrt{2}}$ 发散，

收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，

令和函数 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^{2n-1}}{2^n}$，则

$$\int s(x)dx=\int(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^{2n-1}}{2^n})dx=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{x^2}{2})^n+C=\frac{1}{x^2+2}+C_1$$

则和函数

$$s(x)=\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^2+2}+C_1)=-\frac{2x}{(2+x^2)^2}$$

10.（4 分）设数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$0<a_n,b_n<\frac{\pi}{2},\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$也收敛.

证明：由于$1-\cos b_n$与$\frac{b_n^2}{2}$等价, 所以由正项级数的比较判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2(1-\cos b_n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2(1+a_n-\cos a_n)}=\frac{1}{2}.$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$也收敛.