

# 第一部分：导论与基本概念 (P1 - P5)

- **P1-P2 (封面与目录):** 本课程由西安电子科技大学人工智能学院李阳老师授课。涵盖四个主题：贝叶斯网络、条件独立性、马尔可夫随机场、图模型中的推断。
- **P3 (图模型的优势):**
  - **可视化:** 简单直观地展示概率模型的结构，辅助模型设计。
  - **性质洞察:** 通过观察图结构即可获得变量间的**条件独立性**。
  - **简化计算:** 将复杂的联合概率计算转化为图上的局部操作。
- **P4 (定义):**
  - **节点 (Nodes):** 表示随机变量（或变量组）。
  - **链接 (Links/Edges):** 表示变量间的概率关系。
- **P5 (两大分类):**
  - **有向图模型 (Directed):** 即**贝叶斯网络 (Bayesian Networks)**，适用于表达因果关系。
  - **无向图模型 (Undirected):** 即**马尔可夫随机场 (Markov Random Fields)**，适用于表达变量间的协同约束。

---

# 第二部分：贝叶斯网络 (Bayesian Networks) (P6 - P15)

- **P7-P8 (联合分布分解):**
  - 基于概率的**乘法法则 (Product Rule)**:  $p(a, b, c) = p(c|a, b)p(b|a)p(a)$ 。
  - 在图中， $a \rightarrow b$  表示  $a$  是  $b$  的**父节点 (parent)**， $b$  是  $a$  的**子节点 (child)**。
- **P10-P12 (分解定理 - 核心):**
  - **全连接图:** 任意两点间都有链接，不表达任何独立性。
  - **稀疏图 (缺失链接):** 缺失链接表示变量间的条件独立性，这是图模型的精髓。
  - **通用分解公式:** 对于  $K$  个节点，联合概率分布为：  
$$p(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^K p(x_k | pa_k)$$
 其中  $pa_k$  是  $x_k$  的所有父节点集合。
- **P14-P15 (约束与示例):**
  - 贝叶斯网络必须是**有向无环图 (DAG)**。
  - **示例:** 多项式回归的图模型表达，展示了权重  $w$  如何通过条件分布生成观测值  $t_n$ 。

## 第三部分：条件独立性与 D-划分 (P16 - P37)

这部分是复习的重难点，决定了如何从图结构推导出逻辑结论。

- **P17-P19 (基本定义):**

- $a \perp b | c$  表示在给定  $c$  的情况下， $a$  和  $b$  条件独立。
- 数学表达： $p(a, b | c) = p(a | c)p(b | c)$  或  $p(a | b, c) = p(a | c)$ 。

- **P20-P26 (三种基本结构 - 必考点):**

1. **Tail-to-Tail (尾对尾):**  $a \leftarrow c \rightarrow b$ 。若  $c$  未被观测，路径通畅 ( $a, b$  不独立)；若  $c$  被观测，路径阻断 ( $a \perp b | c$ )。
2. **Head-to-Tail (头对尾):**  $a \rightarrow c \rightarrow b$ 。若  $c$  未被观测，路径通畅；若  $c$  被观测，路径阻断 ( $a \perp b | c$ )。
3. **Head-to-Head (头对头):**  $a \rightarrow c \leftarrow b$ 。特殊情况：若  $c$  (或其后代) 未被观测，路径阻断 ( $a, b$  独立)；若  $c$  (或其后代) 被观测，路径反而通畅 ( $a, b$  不独立)。这被称为“解释掉”(Explaining away) 效应。

- **P28-P33 (实例分析 - 油箱案例):**

- 电池(B)和燃料(F)共同影响油表(G)。这是 Head-to-Head 结构。
- 观察到油表空了( $G = 0$ )，此时电池状态和燃料状态不再独立。如果发现电池没电了，那么燃料空的概率会下降，因为电池没电“解释掉了”油表为空的现象。

- **P34-P35 (D-Separation / D-划分规则):**

- 判定集合  $A$  和  $B$  是否被  $C$  阻断：若路径上存在节点满足：
    - (a) 节点在  $C$  中，且属于 tail-to-tail 或 head-to-tail。
    - (b) 节点及其后代都不在  $C$  中，且属于 head-to-head。
  - 满足以上任一则路径阻断。若所有路径都阻断，则  $A \perp B | C$ 。
- **P36-P37 (i.i.d. 的图表达):** 展示了重复实验（如高斯分布均值估计）在图模型中如何表达。

---

## 第四部分：马尔可夫随机场 (MRF) (P38 - P50)

- **P39-P40 (无向图定义):** 链接没有方向。条件独立性判定更简单：若  $A$  到  $B$  的所有路径都经过  $C$ ，则  $A \perp B | C$ 。

- **P41-P42 (团块 Cliques):**

- **团块 (Clique):** 节点子集，其中每对节点间都有链接。

- 极大团块 (Maximal Clique): 不能再加入任何其他节点形成更大团块的团块。
- P43-P44 (因子分解):
  - 联合分布定义在极大团块上:
$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \prod_C \psi_C(\mathbf{x}_C)$$
  - $\psi_C$  是势函数 (Potential function), 必须非负。
  - $Z$  是配分函数 (Partition function), 用于归一化 (计算代价极高)。
  - 通常表示为指数形式:  $\psi_C(\mathbf{x}_C) = \exp(-E(\mathbf{x}_C))$ , 其中  $E$  是能量函数 (Boltzmann 分布)。
- P45-P46 (应用: 图像去噪): 利用 MRF 建模像素间的空间相关性 (邻近像素倾向于相同颜色)。
- P47-P50 (有向图转无向图 - Moralization/道德化):
  - 为了保持 Head-to-Head 结构的依赖关系, 需要将父节点“结婚” (连线), 并去掉箭头。
  - 道德图 (Moral Graph): 这种处理后的无向图。

---

## 第五部分：图模型中的推断 (P51 - P59)

- P52 (贝叶斯定理的图表达): 展示了观测变量如何改变图的结构和计算方向。
- P53-P54 (计算复杂度问题):
  - 直接对联合概率求边缘分布  $p(x_n)$  的复杂度随变量数指数级增长。
  - 对于链式结构, 可以利用结合律优化。
- P56-P58 (消息传递/Message Passing):
  - 核心思想: 将全局计算分解为局部变量间的“消息”传递。
  - $p(x_n) = \frac{1}{Z} \mu_\alpha(x_n) \mu_\beta(x_n)$ 。
  - $\mu_\alpha$  是前向传递的消息,  $\mu_\beta$  是后向传递的消息。
- P59 (马尔可夫链): 这种消息传递方程本质上是马尔可夫过程中的 Chapman-Kolmogorov 方程。

---

### 💡 复习核心建议:

1. **必考对比:** 掌握贝叶斯网络 (有向、有归一化项、易表达因果) 与马尔可夫随机场 (无向、需计算  $Z$ 、易表达协同约束) 的区别。
2. **必练技能:** 给出一个复杂的 DAG 图, 利用 D-separation 规则判断任意两个节点集合是否

独立。

3. **计算理解:** 理解为什么需要势函数和能量函数, 以及为什么  $Z$  的计算是 MRF 的难点。
4. **推断直觉:** 记住“消息传递”就是利用**动态规划**的思想, 通过缓存局部计算结果来避免重复计算, 从而将指数复杂度降低到线性。

祝你复习顺利! 如果对具体的公式推导 (如 P56 的  $\mu$  递归公式) 有疑问, 可以随时问我。