

第一部分：导论与基本概念 (P1 - P5)

- **P1-P2 (封面与目录):** 本课程由西安电子科技大学人工智能学院李阳老师授课。涵盖四个主题：贝叶斯网络、条件独立性、马尔可夫随机场、图模型中的推断。
- **P3 (图模型的优势):**
 - **可视化:** 简单直观地展示概率模型的结构，辅助模型设计。
 - **性质洞察:** 通过观察图结构即可获得变量间的**条件独立性**。
 - **简化计算:** 将复杂的联合概率计算转化为图上的局部操作。
- **P4 (定义):**
 - **节点 (Nodes):** 表示随机变量（或变量组）。
 - **链接 (Links/Edges):** 表示变量间的概率关系。
- **P5 (两大分类):**
 - **有向图模型 (Directed):** 即**贝叶斯网络 (Bayesian Networks)**，适用于表达因果关系。
 - **无向图模型 (Undirected):** 即**马尔可夫随机场 (Markov Random Fields)**，适用于表达变量间的协同约束。

第二部分：贝叶斯网络 (Bayesian Networks) (P6 - P15)

- **P7-P8 (联合分布分解):**
 - 基于概率的**乘法法则 (Product Rule)**: $p(a, b, c) = p(c|a, b)p(b|a)p(a)$ 。
 - 在图中, $a \rightarrow b$ 表示 a 是 b 的**父节点 (parent)**, b 是 a 的**子节点 (child)**。
 - **P10-P12 (分解定理 - 核心):**
 - **全连接图:** 任意两点间都有链接，不表达任何独立性。
 - **稀疏图 (缺失链接):** 缺失链接表示变量间的条件独立性，这是图模型的精髓。
 - **通用分解公式:** 对于 K 个节点，联合概率分布为：
$$p(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^K p(x_k | pa_k)$$
其中 pa_k 是 x_k 的所有父节点集合。
 - **P14-P15 (约束与示例):**
 - 贝叶斯网络必须是有向无环图 (DAG)。
 - **示例:** 多项式回归的图模型表达，展示了权重 w 如何通过条件分布生成观测值 t_n 。
-

第三部分：条件独立性与 D-划分 (P16 - P37)

这部分是复习的**重难点**，决定了如何从图结构推导出逻辑结论。

- **P17-P19 (基本定义):**

- $a \perp b | c$ 表示在给定 c 的情况下， a 和 b 条件独立。
- 数学表达: $p(a, b | c) = p(a | c)p(b | c)$ 或 $p(a | b, c) = p(a | c)$ 。

- **P20-P26 (三种基本结构 - 必考点):**

1. **Tail-to-Tail (尾对尾):** $a \leftarrow c \rightarrow b$ 。若 c **未被观测**，路径通畅 (a, b 不独立)；若 c **被观测**，路径阻断 ($a \perp b | c$)。
2. **Head-to-Tail (头对尾):** $a \rightarrow c \rightarrow b$ 。若 c **未被观测**，路径通畅；若 c **被观测**，路径阻断 ($a \perp b | c$)。
3. **Head-to-Head (头对头):** $a \rightarrow c \leftarrow b$ 。**特殊情况:** 若 c (或其后代) **未被观测**，路径阻断 (a, b 独立)；若 c (或其后代) **被观测**，路径反而通畅 (a, b 不独立)。这被称为“解释掉”(Explaining away) 效应。

- **P28-P33 (实例分析 - 油箱案例):**

- 电池(B)和燃料(F)共同影响油表(G)。这是 Head-to-Head 结构。
- 观察到油表空了($G = 0$)，此时电池状态和燃料状态不再独立。如果发现电池没电了，那么燃料空的概率会下降，因为电池没电“解释掉了”油表为空的现象。

- **P34-P35 (D-Separation / D-划分规则):**

- 判定集合 A 和 B 是否被 C 阻断：若路径上存在节点满足：
 - (a) 节点在 C 中，且属于 tail-to-tail 或 head-to-tail。
 - (b) 节点及其后代都不在 C 中，且属于 head-to-head。
- 满足以上任一则路径阻断。若所有路径都阻断，则 $A \perp B | C$ 。

- **P36-P37 (i.i.d. 的图表达):** 展示了重复实验（如高斯分布均值估计）在图模型中如何表达。

第四部分：马尔可夫随机场 (MRF) (P38 - P50)

- **P39-P40 (无向图定义):** 链接没有方向。条件独立性判定更简单：若 A 到 B 的所有路径都经过 C ，则 $A \perp B | C$ 。

- **P41-P42 (团块 Cliques):**

- **团块 (Clique):** 节点子集，其中每对节点间都有链接。

- **极大团块 (Maximal Clique):** 不能再加入任何其他节点形成更大团块的团块。
 - **P43-P44 (因子分解):**
 - 联合分布定义在**极大团块**上:
$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \prod_C \psi_C(\mathbf{x}_C)$$
 - ψ_C 是**势函数 (Potential function)**, 必须非负。
 - Z 是**配分函数 (Partition function)**, 用于归一化 (计算代价极高)。
 - 通常表示为指数形式: $\psi_C(\mathbf{x}_C) = \exp(-E(\mathbf{x}_C))$, 其中 E 是能量函数 (Boltzmann 分布)。
 - **P45-P46 (应用: 图像去噪):** 利用 MRF 建模像素间的空间相关性 (邻近像素倾向于相同颜色)。
 - **P47-P50 (有向图转无向图 - Moralization/道德化):**
 - 为了保持 Head-to-Head 结构的依赖关系, 需要将父节点“结婚” (连线), 并去掉箭头。
 - **道德图 (Moral Graph):** 这种处理后的无向图。
-

第五部分: 图模型中的推断 (P51 - P59)

- **P52 (贝叶斯定理的图表达):** 展示了观测变量如何改变图的结构和计算方向。
 - **P53-P54 (计算复杂度问题):**
 - 直接对联合概率求边缘分布 $p(x_n)$ 的复杂度随变量数指数级增长。
 - 对于链式结构, 可以利用结合律优化。
 - **P56-P58 (消息传递/Message Passing):**
 - **核心思想:** 将全局计算分解为局部变量间的“消息”传递。
 - $p(x_n) = \frac{1}{Z} \mu_\alpha(x_n) \mu_\beta(x_n)$ 。
 - μ_α 是前向传递的消息, μ_β 是后向传递的消息。
 - **P59 (马尔可夫链):** 这种消息传递方程本质上是马尔可夫过程中的 **Chapman-Kolmogorov 方程**。
-



复习核心建议:

1. **必考对比:** 掌握贝叶斯网络 (有向、有归一化项、易表达因果) 与马尔可夫随机场 (无向、需计算 Z 、易表达协同约束) 的区别。
2. **必练技能:** 给出一个复杂的 DAG 图, 利用 **D-separation** 规则判断任意两个节点集合是否

独立。

3. **计算理解:** 理解为什么需要势函数和能量函数, 以及为什么 Z 的计算是 MRF 的难点。
4. **推断直觉:** 记住“消息传递”就是利用**动态规划**的思想, 通过缓存局部计算结果来避免重复计算, 从而将指数复杂度降低到线性。

祝你复习顺利! 如果对具体的公式推导 (如 P56 的 μ 递归公式) 有疑问, 可以随时问我。