

- DINAMICA –

Dinamica este partea mecanicii care se ocupă cu studiul mișcării corpurilor materiale, ținând seama de forțele care acționează asupra lor.

Problema fundamentală în dinamică este de a determina legile de mișcare ale corpurilor, ținând cont de forțele care acționează asupra acestora. În unele cazuri, se pune problema inversă: de a determina forțele astfel ca mișcarea să fie cea dorită.

Studiul mișcării începe cu cel al punctului material. Acesta este un corp de dimensiuni neglijabile, asimilat cu un punct geometric în care se concentrează o anumită masă. Problemele legate de mișcarea punctului material se vor trata în capitolul de dinamica punctului. În partea a doua vom studia sistemele de puncte materiale și corpurile rigide, prezentând teoremele generale ce se vor aplica în acest caz. Ne vom referi și la partea de mecanică analitică, utilă în studiul altor mișcări și în special în teoria vibrațiilor care va fi ultima parte a acestei lucrări. În general, căutăm să exemplificăm teoria prin aplicații concrete care să contribuie la mai buna înțelegere a celor prezentate.

Ca orice știință, Mecanica se bazează pe câteva principii fundamentale care nu pot fi complet demonstrate teoretic sau experimental, dar nici nu pot fi reduse la alte legi mai simple. Aceste principii pot fi uneori verificate.

În general, mișcarea se studiază față de un sistem de referință inerțial. Prin sistem de referință inerțial se înțelege acel reper față de care un punct material izolat sau asupra căruia acționează un sistem de forțe în echilibru, se găsește în stare de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă. Un corp rigid izolat sau asupra căruia acționează un sistem de forțe în echilibru se găsește față de un sistem de referință inerțial în stare de repaus sau de translație rectilinie și uniformă.

Un sistem de referință legat de pământ poate fi considerat inerțial pentru fenomene care se desfășoară cu viteze mici în comparație cu viteza luminii, pentru fenomene care nu au o durată prea lungă și se efectuează într-un domeniu relativ mic al spațiului.

Stările de repaus și de mișcare rectilinie uniformă pentru punctul material, respectiv translație rectilinie și uniformă pentru corpul rigid, față de un sistem de

referință inerțial, se numesc stări inerțiale ale punctului material, respectiv ale corpului rigid. Ele se caracterizează prin accelerații egale cu zero.

Este de remarcat însă pe baza unei analize mai aprofundate că în teoria relativității se arată imposibilitatea admiterii sistemului absolut și deci mișcarea corpurilor trebuie studiată în interacțiunea lor, în legătura lor reciprocă.

Corpurile materiale își schimbă stările inerțiale datorită interacțiunii lor cu alte corpuri. Deoarece măsura interacțiunii dintre corpuri este forța, va exista o dependență între forța ce acționează asupra punctului material și mărimea care măsoară modificarea stării inerțiale, deci a vectorului accelerație. Această legătură este postulată prin legea lui Newton care exprimă proporționalitatea lor și care se va considera aici ca reprezentând principiul acțiunii forței. Acest principiu se enunță astfel: într-un sistem de referință inerțial, rezultanta forțelor ce acționează asupra unui punct material este proporțională cu accelerația acestui punct. Factorul de proporționalitate, constant și pozitiv, este masa punctului material. Matematic, legătura dintre forța \vec{F} ce acționează asupra punctului și accelerația sa \vec{a} , se exprimă prin legea lui Newton: $m\vec{a} = \vec{F}$. În cadrul Mecanicii clasice, se consideră forțe care pot depinde de timp, de vectorul de poziție \vec{r} și de viteza $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, a punctului material. Deci $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$ și deoarece $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$, legea lui Newton se poate scrie sub forma:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

Pentru rezolvarea problemelor de dinamica punctului material, legea lui Newton se proiectează pe axele unor diferite sisteme de referință: carteziene, polare, cilindrice, sferice sau naturale.

Masa m care apare în acest principiu, caracterizează proprietățile de inerție ale corpului, adică modul în care reacționează față de acțiunile corpurilor exterioare. Proprietățile individuale ale corpului, reflectate prin masa inertă, se opun acțiunilor exterioare. Spre deosebire de aceasta, se obișnuiește în Mecanică a se folosi termenul de masă pentru a preciza cantitatea de substanță pe care o conține un anumit corp obținută după cântărire.

În completarea acestui principiu, Newton a mai enunțat și regula paralelogramului: dacă asupra unui punct material acționează simultan două forțe având direcții diferite, atunci efectul este același ca și al unei singure forțe rezultante, având ca direcție și mărime diagonala paralelogramului având ca laturi forțele.

Un alt principiu este cel al egalității acțiunii și reacțiunii: acțiunile reciproce a două puncte materiale sunt întotdeauna egale și opuse. Pentru exemplificare se vor considera două puncte arbitrare A_i și A_j . Dacă punctul material A_i acționează asupra punctului material A_j cu o forță \vec{F}_{ji} , atunci punctul material A_j acționează asupra punctului A_i cu o forță situată pe suportul comun A_iA_j și notată \vec{F}_{ij} astfel că mărimile celor două forțe sunt egale dar au sensurile opuse. Principiul este valabil pentru cazul

punctelor aflate în contact direct dar și al acțiunii la distanță. Conform acestui principiu

$$\bar{\mathbf{F}}_{ij} + \bar{\mathbf{F}}_{ji} = 0$$

Față de punctul arbitrar O, suma momentelor este

$$\bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_{ij} + \bar{\mathbf{r}}_j \times \bar{\mathbf{F}}_{ji} = \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_{ij} - \bar{\mathbf{r}}_j \times \bar{\mathbf{F}}_{ij} = (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j) \times \bar{\mathbf{F}}_{ij} = \overline{\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i} \times \bar{\mathbf{F}}_{ij} = 0$$

Deoarece forțele interioare se pot grupa în perechi pentru care rezultanta și momentul resultant sunt nule, rezultă $\bar{\mathbf{R}}_{\text{int}} = 0$ și $\bar{\mathbf{M}}_{\text{int}} = 0$. În concluzie, forțele interioare ale unui sistem de puncte se află întotdeauna în echilibru.

13. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL LIBER

În cazul în care mișcarea corpului nu este influențată de dimensiunile lui, problema dinamică se reduce la studiul mișcării unui punct material.

Pentru punctul material liber, în majoritatea problemelor de dinamică, se cunosc forțele, masa punctului, poziția și viteza lui la momentul inițial care se consideră la $t=0$. În aceste condiții, se cere să se determine legea mișcării absolute a punctului material

13.1. Ecuațiile diferențiale ale mișcării punctului material liber

Relația vectorială dintre forța \vec{F} care acționează asupra punctului material de masă m și accelerația $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$, este dată de legea lui Newton:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad (13.1)$$

unde $\vec{r} = \vec{r}(t)$ reprezintă vectorul de poziție al punctului de masă constantă m în raport cu un punct arbitrar fix O iar \vec{F} este rezultanta forțelor date. În ecuația (13.1) se pune problema de a determina legea de mișcare a punctului material, dacă la momentul inițial $t=0$, se cunosc vectorul de poziție $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ și vectorul vitează $\vec{v}(0) = \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$.

Ecuația diferențială vectorială (13.1) nu poate fi integrată exact decât în cazuri foarte simple. În general, în locul ecuației de mișcare (13.1), se consideră ecuațiile obținute prin proiecția acesteia pe axele unui anumit sistem de coordonate. Se obțin în acest caz, ecuații de mișcare sub forma unor sisteme de ecuații diferențiale scalare. Modul de determinare a legii mișcării se poate urmări mai simplu, considerând sistemul cartezian de axe $Oxyz$. Astfel, din ecuația (13.1) se obține sistemul de ecuații diferențiale de ordinul doi, prin proiecții pe cele trei axe:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} &= Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} &= Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \quad (13.2)$$

unde X, Y și Z reprezintă proiecțiile rezultantei \vec{F} pe axele fixe Ox , Oy și respectiv Oz . Integrând acest sistem de trei ecuații diferențiale, obținem soluțiile generale care depind de șase constante de integrare C_1, C_2, \dots, C_6 :

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ y &= y(t, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ z &= z(t, C_1, C_2, \dots, C_6) \end{aligned} \quad (13.3)$$

Pentru a determina constantele de integrare, se înlocuiesc condițiile inițiale în soluțiile generale, precum și în derivata soluțiilor generale în raport cu timpul. Se obține sistemul:

$$\begin{aligned}x(0, C_1, C_2, \dots, C_6) &= x_0 \\y(0, C_1, C_2, \dots, C_6) &= y_0 \\z(0, C_1, C_2, \dots, C_6) &= z_0 \\\dot{x}(0, C_1, C_2, \dots, C_6) &= v_{0x} \\\dot{y}(0, C_1, C_2, \dots, C_6) &= v_{0y} \\\dot{z}(0, C_1, C_2, \dots, C_6) &= v_{0z}\end{aligned} \quad (13.4)$$

Din sistemul (13.4) se calculează constantele de integrare C_i ($i = \overline{1,6}$) care se înlocuiesc apoi în ecuațiile (13.3). Se obțin astfel legile de mișcare ale punctului material, care reprezintă o soluție particulară a ecuațiilor diferențiale ale mișcării, corespunzătoare condițiilor inițiale date:

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t) \quad (13.5)$$

Problema prezentată în acest mod se numește problema directă în dinamica punctului material, existența și unicitatea soluțiilor sistemului de ecuații (13.2) în condițiile date fiind asigurată de teorema Cauchy-Kovalevskia. Deoarece în probleme de dinamică proiecțiile forței $\vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$ satisfac obișnuit condițiile acestei teoreme, se poate afirma că legile mișcării există și sunt unic determinate.

Modul de determinare a legii de mișcare în coordonate carteziene este aplicabilă în oricare alt sistem de coordonate pentru care ecuațiile diferențiale au fost scrise anterior. Astfel, în cazul coordonatelor cilindrice θ , ρ și z se știe că

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

astfel că proiecțiile pe cele trei axe ale legii lui Newton sunt:

$$\begin{aligned}m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) &= F_\rho(t, \theta, \rho, z) \\m(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) &= F_\theta(t, \theta, \rho, z) \\m\ddot{z} &= F_z(t, \theta, \rho, z)\end{aligned} \quad (13.6)$$

În cazul coordonatelor sferice r , ρ și θ , proiecția ecuației (13.1) pe axe, este de forma:

$$\begin{aligned}m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - r\dot{\theta}^2) &= F_r(t, r, \varphi, \theta) \\m(2\dot{r} \sin \theta \dot{\varphi} + 2r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} + r \sin \theta \ddot{\varphi}) &= F_\varphi(t, r, \varphi, \theta) \\m(2\dot{r} \dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2) &= F_\theta(t, r, \varphi, \theta)\end{aligned} \quad (13.7)$$

În coordonate intrinseci, mișcarea se studiază prin proiecțiile ecuației (13.1) pe axele triedrului Frenet:

$$\begin{aligned}
m\dot{v} &= m\ddot{s} = F_t(t, s) \\
m \frac{v^2}{\rho} &= m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n(t, s) \\
0 &= F_b(t, s)
\end{aligned} \tag{13.8}$$

Dacă mișcarea punctului material este plană, raportând mișcarea la sistemul de referință plan Oxy, obținem două ecuații diferențiale:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= X(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) \\
m\ddot{y} &= Y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})
\end{aligned} \tag{13.9}$$

Mișcarea plană a punctului material se poate studia și în coordonate polare:

$$\begin{aligned}
m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F_r(t, r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) \\
m(2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) &= F_\theta(t, r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})
\end{aligned} \tag{13.10}$$

În cazul mișcării rectilinii, dacă se alege axa Ox ca axă a mișcării, obținem:

$$m\ddot{x} = X(t, x, \dot{x}) \tag{13.11}$$

Dacă se cunoaște legea de mișcare vectorială a punctului material $\vec{r} = \vec{r}(t)$, uneori se pune problema de a determina forța $\vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$ care acționează asupra punctului (problema inversă). În alte cazuri se pune problema determinării dependenței forței \vec{F} de poziția \vec{r} și viteza $\dot{\vec{r}}$ a punctului. În acest caz, problema nu admite soluție unică, fiind necesare și unele precizări suplimentare.

13.2. Mișcarea punctului material greu în vid

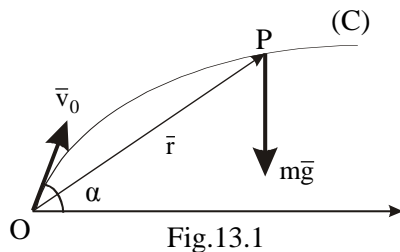


Fig.13.1

Un exemplu de mișcare a punctului material liber este mișcarea punctului material greu în vid, adică mișcarea unui punct material P de masă m care este lansat la suprafața pământului cu viteză inițială \vec{v}_0 , rezistența mediului fiind neglijabilă. Poziția inițială a punctului P se alege ca origine a sistemului de axe carteziene, deci $\vec{r}_0 = 0$ iar viteza inițială se

presupune că formează unghiul $\alpha \neq \pi/2$ cu orizontala. Rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului material este $\vec{F} = m\vec{g}$ (fig.13.1). Se pune problema să se determine legea de mișcare, viteza, traiectoria, săgeata h , bătaia. În acest caz simplu, ecuația lui Newton se scrie sub forma:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$$

de unde rezultă $\ddot{\vec{r}} = \vec{g}$. Prin integrare de două ori se obțin relațiile:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{g}t + \vec{C}_1 ; \quad \vec{r} = \vec{g}\frac{t^2}{2} + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2$$

Constantele vectoriale de integrare \vec{C}_1 și \vec{C}_2 se determină din condițiile inițiale:

$$t=0 ; \quad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0 ; \quad \vec{r}(0) = 0$$

Se obțin $\vec{C}_1 = 0$, $\vec{C}_2 = \vec{v}_0$, astfel că legea de mișcare se scrie sub forma $\vec{r} = \vec{g}\frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t$ deci vectorul \vec{r} este situat în planul vectorilor \vec{v}_0 și \vec{g} . Urmează că mișcarea are loc într-un plan vertical care conține viteza inițială. Față de acest plan vertical în care Ox este orizontală și Oy verticală, se obțin proiecțiile pe axe (fig.13.2)

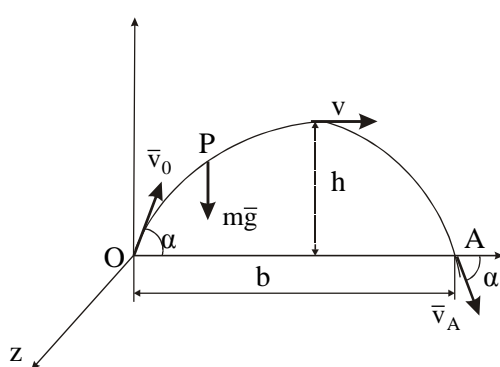


Fig.13.2

$$x = v_0 t \cos \alpha$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad (13.12)$$

Ecuția traiectoriei se deduce eliminând parametrul t între ecuațiile (13.12). Se obține

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (13.13)$$

Prin urmare traiectoria punctului este o parabolă cu axa de simetrie de ecuație

$$x = \frac{\tan \alpha}{2 \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}}$$

sau

$$x = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha \quad (13.14)$$

Pentru calculul înălțimii maxime h , numită săgeata traiectoriei, se înlocuiește (13.14) în (13.13). Același rezultat se obține și altfel: la momentul t_1 , $v_y=0$, deci

$t_1 = \frac{v_0}{g} \sin \alpha$ iar $h = y(t_1) = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$. Pentru calculul distanței OA, numită bătaie, se

pune condiția $y(t_2)=0$, astfel că rezultă $t_2 = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha$. Se obține bătaia

$$b = x(t_2) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha .$$

Observăm că timpul de urcare t_1 (necesar mișcării din O în V) este egal cu timpul de coborâre t_2-t_1 (mișcarea de la V la A).

Din relația (13.12) se obțin componentele vitezei

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha \\ v_y &= v_0 \sin \alpha - gt \end{aligned} \quad (13.15)$$

În punctul A viteza are componentele

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= v_0 \cos \alpha \\ v_{Ay} &= v_0 \sin \alpha - gt_2 = -v_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

astfel că mărimile vitezelor punctelor în O și A sunt egale. De asemenea $\frac{v_{Ay}}{v_{Ax}} = -\tan \alpha$

de unde se deduce că unghiul vitezei \bar{v}_A cu axa Ox este tot α .

O problemă importantă pentru balistică este determinarea unghiului α de înclinare a vitezei \bar{v}_0 , pentru ca traiectoria să treacă printr-un punct stabilit M(a,b). În acest sens, trebuie ca ecuația traiectoriei (13.13) să fie verificată de coordonatele punctului M. Notăm cu $m = \tan \alpha$, astfel că din ecuația (13.13) se obține ecuația

$$m^2 - \frac{2v_0^2}{ag}m + \frac{2v_0^2b}{a^2g} + 1 = 0 \quad (13.16)$$

Discriminantul ecuației (13.16), de gradul doi în m este

$$\Delta = 4 \left(\frac{v_0^4}{a^2g^2} - \frac{2v_0^2b}{ga^2} - 1 \right) \quad (13.17)$$

Pentru $\Delta > 0$ se obțin două valori pentru α iar pentru $\Delta < 0$ nici o valoare. În cazul $\Delta = 0$ ecuația (13.16) are o rădăcină dublă.

Un caz particular al mișcării punctului material greu în vid este mișcarea pe

verticală ($\alpha = \pi/2$) care poate fi descendentă sau ascendentă. În mișcarea descendentă (fig.13.3) punctul este lăsat să cadă liber fără viteză inițială din O situat la înălțimea $h = OA$. Proiecția pe axa Ox conduce la ecuațiile

$$\dot{x} = v = gt \quad ; \quad x = \frac{1}{2}gt^2 \quad (13.18)$$

Timpul de cădere de la înălțimea h

este $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ iar viteza în punctul A

este $v = \sqrt{2gh}$.

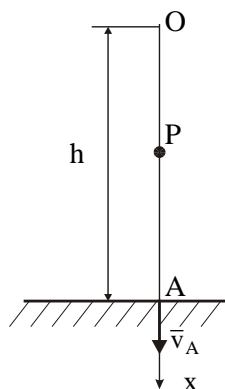


Fig.13.3

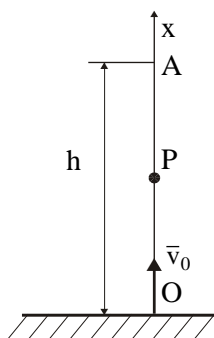


Fig.13.4

În mișcarea ascendentă-descendentă (fig.13.4), punctul material este aruncat pe verticală în sus cu viteză inițială v_0 din originea O. Pe axa Ox verticală-ascendentă obținem ecuațiile:

$$v = v_0 - gt \quad ; \quad x = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (13.19)$$

Timpul de urcare t_u și înălțimea h la care ajunge punctul material sunt respectiv

$$t_u = \frac{v_0}{g} \quad ; \quad h = \frac{v_0^2}{2g} \quad (13.20)$$

13.3. Mișcarea punctului material greu în aer

Spre deosebire de mișcarea punctului material greu în vid, asupra punctului acționează în plus față de greutatea sa $m\bar{g}$ și forța de rezistență a aerului \bar{R} . Forța \bar{R} are aceeași direcție cu a vectorului viteză dar sensul este opus sensului mișcării, astfel că se poate scrie:

$$\bar{R} = -R\bar{\tau} = -R \frac{\bar{v}}{v} \quad (13.21)$$

unde R și v sunt mărimile vectorilor \bar{R} și \bar{v} iar $\bar{\tau}$ este versorul tangentei la traiectorie. Experimental se constată că modulul R al rezistenței aerului este o funcție care depinde de viteză, se anulează pentru $v=0$, este pozitivă, derivabilă și monoton crescătoare în v , fără limită superioară. Pentru simplificare notăm

$$R(v) = mg\varphi(v) \quad (13.22)$$

unde $\varphi(v)$ este o mărime adimensională încât există o viteză critică v_{cr} unic

determinată astfel că $\varphi(v_{cr})=1$. Se admite că $\varphi(v) = \left(\frac{v}{v_{cr}}\right)^n$ unde numărul natural n

depinde de viteza aerului. De exemplu: $n=1$ pentru $v \in (0,1]$; $n=2$ pentru $v \in (1,240] \cup (420,550]$; $n=3$ pentru $v \in (240,300] \cup (375,420]$; $n=5$ pentru $v \in (300,375]$, etc.

Legea lui Newton, deci se mai scrie astfel:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{R}$$

sau

$$\bar{a} = \bar{g} - g\varphi(v) \frac{\bar{v}}{v} \quad (13.23)$$

Dacă se notează cu \bar{n} versorul normalei principale la traiectoria punctului, accelerația se știe că are expresia (ρ este raza de curbură a traiectoriei punctului)

$$\bar{a} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n} \quad (13.24)$$

Înmulțim vectorial la dreapta expresia (13.24) cu versorul $\bar{\tau}$, astfel că rezultă

$$\bar{a} \times \bar{\tau} = \frac{v^2}{\rho} \bar{n} \times \bar{\tau} \quad (13.25)$$

În relația (13.23) se ține seama că $\bar{v} = v\bar{\tau}$ și înmulțind aceasta tot la dreapta cu $\bar{\tau}$ rezultă

$$\bar{a} \times \bar{\tau} = \bar{g} \times \bar{\tau} \quad (13.26)$$

Din egalitățile (13.25) și (13.26) se deduce

$$\frac{v^2}{\rho} \bar{n} \times \bar{\tau} = \bar{g} \times \bar{\tau}$$

relație care înmulțită scalar cu \bar{g} , conduce la ecuația

$$(\bar{n} \times \bar{\tau}) \cdot \bar{g} = 0$$

Ultima relație arată că vectorii \bar{n} , $\bar{\tau}$ și \bar{g} sunt coplanari în orice punct al traiectoriei. Dar versorii $\bar{\tau}$ și \bar{n} determină planul osculator, deci acesta va conține și vectorul \bar{g} , astfel că traiectoria punctului material greu în aer este o curbă plană conținută în planul vertical ce conține viteza inițială \bar{v}_0 .

În particular, dacă viteza inițială \bar{v}_0 este verticală, din relația (13.23) obținem că și accelerația va fi tot verticală, deci mișcarea punctului material va fi verticală.

13.3.1. Aruncarea oblică a punctului material greu în aer

Se consideră punctul P de masă m, lansat din punctul O cu viteza inițială \bar{v}_0 înclinată cu unghiul α față de orizontală. Traiectoria punctului P va fi cuprinsă în planul vertical ce conține \bar{v}_0 . Datorită rezistenței aerului, traiectoria diferă de cea determinată în vid. Studiul acestei mișcări este mai dificil de făcut și acest lucru este posibil folosind coordonatele Frenet (fig.13.5). Se proiectează ecuația vectorială (13.23) pe direcția tangentei și a normalei principale, ținând seama de relația (13.24) și se obține:

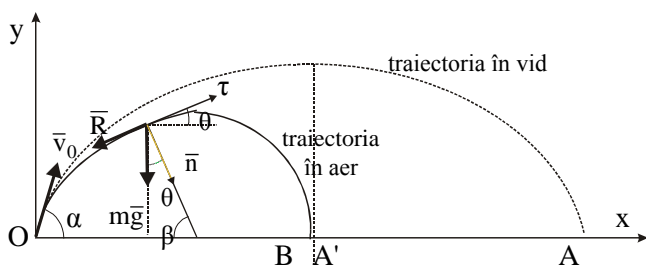


Fig.13.5

$$\dot{v} = -g[\sin \theta + \varphi(v)]$$

$$\frac{v^2}{\rho} = g \cos \theta \quad (13.27)$$

unde θ este unghiul dintre Ox și tangenta în punctul considerat P, iar ρ este raza de curbură a traiectoriei. A doua relație (13.27) indică faptul că mișcarea are loc numai pentru $\cos \theta > 0$. În

momentul inițial $\theta = \alpha$, astfel că în decursul mișcării, unghiul θ rămâne în domeniul $(-\pi/2, \alpha)$. Dacă se notează cu β unghiul mai mic ca $\pi/2$ dintre Ox și normala principală, atunci raza de curbură are expresia

$$\rho = \frac{ds}{d\beta}$$

și cum $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta$ și $v = \dot{s}$, rezultă:

$$\rho = -\frac{ds}{d\theta} = -\frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = -\frac{\dot{s}}{\dot{\theta}} = -\frac{v}{\dot{\theta}} \quad (13.28)$$

Ținând seama de (13.28) a doua relație din (13.27) devine:

$$v\dot{\theta} = -g \cos \theta \quad (13.29)$$

de unde rezultă că unghiul θ descrește monoton pentru $\theta \in (-\pi/2, \alpha)$. Eliminând timpul între ecuația (13.29) și prima ecuație (13.27) se obține:

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\theta} = \operatorname{tg} \theta + \frac{\varphi(v)}{\cos \theta} \quad (13.30)$$

adică o ecuație diferențială de ordinul întâi, ce definește viteza v în funcție de unghiul θ . În ipoteza că această ecuație diferențială are soluția $v=f(\theta)$, toate elementele mișcării se obțin prin integrare. Astfel, din ecuația (13.29) se deduce expresia timpului:

$$t = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{f(\theta)}{\cos \theta} d\theta \quad (13.31)$$

Pentru a determina legea de mișcare se folosesc relațiile:

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= v \cos \theta \\ v_y = \dot{y} &= v \sin \theta \quad ; \quad v=f(\theta) \end{aligned} \quad (13.32)$$

astfel că prin integrarea relațiilor (13.32) se găsește legea de mișcare sub formă parametrică:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\theta} f^2(\theta) d\theta \\ y &= -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\theta} f^2(\theta) \operatorname{tg} \theta d\theta \end{aligned} \quad (13.33)$$

Ținând seama că $\varphi(v) = \left(\frac{v}{v_{cr}} \right)^n$, relația (13.30) înmulțită cu $\cos \theta$ și izolând termenul

$\left(\frac{v}{v_{cr}} \right)^n$ devine

$$\frac{\cos \theta dv - v \sin \theta d\theta}{v d\theta} = \frac{v^n}{v_{cr}^n}$$

sau încă:

$$\frac{d(v \cos \theta)}{(v \cos \theta)^{n+1}} = \frac{1}{v_{cr}^n} \frac{d\theta}{\cos^{n+1} \theta}$$

Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul întâi, considerând în membrul stâng variabila $u = v \cos \theta$. În momentul inițial $\theta = \alpha$ și $u = v_0 \cos \alpha$, astfel că integrând ultima ecuație, se obține:

$$\frac{1}{(v \cos \theta)^n} - \frac{1}{(v_0 \cos \alpha)^n} = -\frac{n}{v_{cr}^n} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^{n+1} \theta} \quad (13.34)$$

Din relația (13.34) se obține viteza v în funcție de unghiul θ ($v = f(\theta)$). Legile mișcării (13.33) sunt astfel cunoscute. Dar aceste calcule sunt laborioase, astfel că vom face numai câteva observații. Din relația (13.28) se deduce $\dot{\theta} < 0$, ceea ce înseamnă că θ scade în timp de la valoarea maximă α la $-\pi/2$.

Pentru $\theta \in [0, \alpha]$ rezultă $\sin \theta > 0$ deci și $\sin \theta + \varphi(v) > 0$. Din prima relație (13.27) rezultă $\dot{v} < 0$, adică viteza v scade pe traiectorie și deci $v \leq v_0$. Pentru $\theta \in (-\pi/2, 0)$ și $\sin \theta + \varphi(v) > 0$, atunci v continuă să scadă. Dacă $\theta \in (-\pi/2, 0)$ și $\sin \theta + \varphi(v) < 0$, atunci v crește. În acest ultim caz, rezultă $\varphi(v) < 1$ deci v rămâne mărginită $v < v_{cr}$. Din proprietățile vitezei se poate deduce că

$$\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}} v = v_{cr}$$

Din prima relație (13.32) rezultă $\dot{x} > 0$ deci x este crescător și mărginit pentru că și viteza v este limitată. Valoarea maximă a lui x se determină din prima relație (13.33) pentru $\theta = -\pi/2$. Deoarece această valoare rămâne finită, rezultă că traiectoria admite asimptota verticală situată la distanța OA' dată de ecuația

$$x = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{-\frac{\pi}{2}} f^2(\theta) d\theta \quad (13.35)$$

13.3.2. Mișcarea pe verticală a punctului material greu în aer

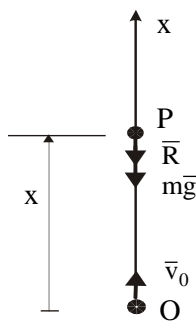


Fig.13.6

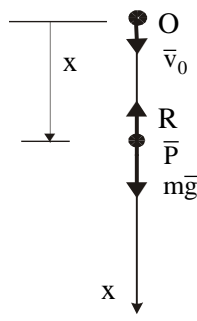


Fig.13.7

Pentru ca mișcarea punctului P să fie verticală, trebuie ca viteza inițială să fie verticală (sau zero). Vom analiza două situații distincte: mișcarea ascendentă (fig.13.6) și mișcarea descendentă (fig.13.7).

În cazul mișcării ascendente ($\theta = \pi/2$) din relația (13.23) se obține:

$$\frac{dv}{dt} = -g[1 + \varphi(v)] \quad (13.36)$$

care se integrează și se obține:

$$gt = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{1 + \varphi(v)} \quad (13.37)$$

Din relația $dx = vdt$ se obține

$$gx = - \int_{v_0}^v \frac{v dv}{1 + \varphi(v)} \quad (13.38)$$

Din relația (13.36) se deduce $\frac{dv}{dt} < 0$ adică v descrește până când se anulează. Acest lucru se întâmplă pentru momentul

$$t_{\max} = \frac{1}{g} \int_0^{v_0} \frac{dv}{1 + \varphi(v)} \quad (13.39)$$

Înălțimea maximă la care ajunge punctul este dată de relația

$$x_{\max} = \frac{1}{g} \int_0^{v_0} \frac{v dv}{1 + \varphi(v)} \quad (13.40)$$

În particular dacă forța de rezistență a aerului are forma

$$R = mgkv \quad ; \quad \varphi(v) = kv \quad (13.41)$$

din relația (13.39) se deduce

$$t_{\max} = \frac{1}{g} \int_0^{v_0} \frac{dv}{1 + kv} = \frac{1}{kg} \ln(1 + kv_0)$$

iar din relația (13.40) se obține

$$x_{\max} = \frac{1}{g} \int_0^{v_0} \frac{v dv}{1 + kv} = \frac{v_0}{kg} - \frac{1}{kg} \ln(1 + kv_0)$$

În cazul mișcării descendente, ecuația mișcării (13.23) proiectată pe direcția mișcării este

$$\frac{dv}{dt} = g[1 - \varphi(v)] \quad (13.42)$$

care integrată conduce la rezultatul următor

$$gt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{1 - \varphi(v)} \quad (13.43)$$

și

$$gx = \int_{v_0}^v \frac{v dv}{1 - \varphi(v)} \quad (13.44)$$

Dacă $v > v_{cr}$ rezultă $\varphi(v) > 1$ și deci din relația (13.42) rezultă $\dot{v} < 0$. Viteza v este descrescătoare și tinde asimptotic la v_{cr} . Dacă $v < v_{cr}$ rezultă $\varphi(v) < 1$ astfel că $\dot{v} > 0$. Viteza este crescătoare și tinde asimptotic la v_{cr} . În concluzie forța de rezistență a aerului are un efect nivelator de viteze asupra mișcării de cădere a punctului, cu tendința de a o uniformiza.

13.4. Mișcarea punctului material sub acțiunea forțelor centrale

13.4.1. Proprietățile mișcării

Un punct P de masă m este acționat de forța centrală \vec{F} , dacă forța trece tot timpul prin același punct fix O numit centrul forțelor (fig. 13.8). Forța centrală poate fi de atracție ($\vec{F} = -F\vec{u}_r$) sau de respingere (repulsivă: $\vec{F}' = -F'\vec{u}_r$).

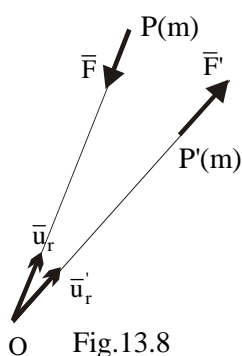


Fig. 13.8

Ecuatia fundamentală a mișcării în acest caz va fi:

$$m\vec{a} = \pm F\vec{u}_r \quad (13.44)$$

Înmulțind la stânga vectorial cu vectorul $\vec{r} = \overline{OP}$, se obține:

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times (\pm F\vec{u}_r) = 0$$

astfel că rezultă

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$$

Din ultima egalitate se deduce:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0$$

și deci

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{c} = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 \quad (13.45)$$

Deoarece viteza areolară $\overline{\Omega}$ s-a definit prin relația

$$\overline{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} \quad (13.46)$$

se obține

$$\overline{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{c}$$

Rezultă că un punct material liber sub acțiunea unei forțe centrale se mișcă cu viteza areolară constantă (legea ariilor).

Dacă se înmulțește relația (13.45) scalar cu \vec{r} , în cazul $\vec{c} \neq 0$ se obține:

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{r} = \vec{c} \cdot \vec{r} = 0$$

sau analitic:

$$c_x x + c_y y + c_z z = 0 \quad (13.47)$$

unde c_x, c_y și c_z sunt proiecțiile vectorului \vec{c} iar x, y, z proiecțiile vectorului \vec{r} pe axele unui sistem de coordonate cu originea în centrul forțelor O . Dar (13.47) reprezintă ecuația unui plan ce trece prin O , normal pe vectorul \vec{c} , rezultă că traiectoria unui punct material acționat de o forță centrală este plană. Acest plan este fix deoarece normala \vec{c} la acest plan este fixă.

În particular, dacă $\vec{c} = 0$, se obține

$$\vec{r} \times \vec{v} = 0$$

ceea ce în coordonate polare se mai scrie sub forma

$$r\vec{u}_r \times (v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta) = 0$$

sau

$$rv_\theta\vec{u}_r \times \vec{u}_\theta = 0$$

Deoarece $\vec{u}_r \times \vec{u}_\theta \neq 0$, se obține

$$rv_\theta = 0$$

sau, ținând seama că $v_\theta = r\dot{\theta}$:

$$r^2\dot{\theta} = 0$$

Ultima relație implică $\dot{\theta} = 0$ ($r \neq 0$) deci $\theta = \text{constant}$. În acest caz, mișcarea este rectilinie, având direcția lui v_0 (deci și a lui \vec{r}_0), conform relației (13.45).

Revenind la cazul $\vec{c} \neq 0$ și la relația (13.45), \vec{v} nu se poate anula, astfel că mișcarea are loc într-un singur sens.

Constanta c se numește constanta ariilor și mărimea se deduce, ca mai înainte în coordonate polare și este

$$c = r^2\dot{\theta} \quad (13.48)$$

13.4.2. Formula lui Binet

În cele ce urmează se pune problema de a determina traiectoria pe care se

mișcă punctul P de masă m sub acțiunea singurei forțe centrale \vec{F} . În momentul inițial poziția este dată de vectorul de poziție, iar viteza de vectorul \vec{v}_0 astfel că unghiul α dintre \vec{r}_0 și \vec{v}_0 este cunoscut. După cum s-a arătat, mișcarea este plană, deci putem folosi sistemul de coordonate polar (fig.13.9).

Forța centrală \vec{F} de mărime F se mai poate scrie sub forma

$$\vec{F} = F \frac{\vec{r}}{r}$$

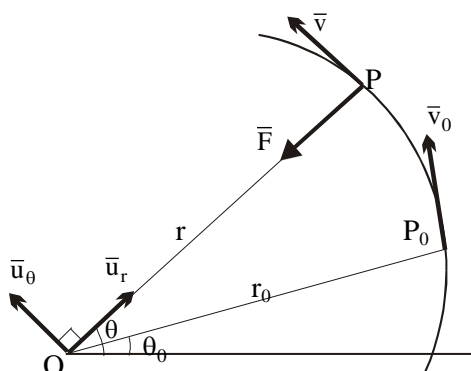


Fig.13.9

Pentru $F > 0$ forța \bar{F} este de respingere iar dacă $F < 0$ forța \bar{F} este de atracție. Proiectând legea lui Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{F}}$$

pe axele sistemului de coordonate polar, se găsește

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) &= 0 \end{aligned} \quad (13.49)$$

Ecuatiile (13.49) reprezintă ecuațiile diferențiale ale mișcării în coordonate polare. A doua ecuație (13.49) înmulțită cu r conduce la ecuația diferențială

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

care mai poate fi scrisă sub forma

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

de unde se poate deduce egalitatea

$$r^2\dot{\theta} = C \quad (13.50)$$

Aceasta este legea ariilor, care arată că în timpuri egale, raza polară descrie arii egale.

Traectoria se determină eliminând timpul între prima relație (13.49) și (13.50). Deci ar trebui calculate derivatele lui r numai în raport cu variabila θ . Pentru aceasta, din relația (13.50), rezultă

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \quad (13.51)$$

Ținând cont de această ecuație, rezultă

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Derivând ultima relație în raport cu timpul, obținem expresia lui \ddot{r} de forma

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Ultima relație înlocuită în prima ecuație (13.49) conduce la ecuația

$$m \left[-\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{C^2}{r^3} \right] = F$$

sau după simplificări:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{Fr^2}{mC^2} \quad (13.52)$$

Această ecuație diferențială, cunoscută sub numele de formula lui Binet, permite determinarea lui r ca funcție de θ . Prin integrare rezultă ecuația traectoriei punctului P sub formă explicită în coordonate polare.

Integrarea ecuației (13.52) conduce la apariția a două constante de integrare C_1 și C_2 , astfel că se obține

$$\frac{1}{r} = f(\theta, C_1, C_2)$$

Determinarea constantelor C_1 și C_2 se face din ultima relație, precum și din derivata acesteia în raport cu timpul, în momentul inițial:

$$t = 0 ; r = r_0 , \dot{r} = \dot{r}_0 , \theta = \theta_0$$

Se obține sistemul

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} &= f(\theta_0, C_1, C_2) \\ -\frac{\dot{r}_0}{r_0^2} &= \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} \cdot \dot{\theta}_0 \end{aligned}$$

Prin rezolvarea acestui sistem, se obțin coordonatele C_1 și C_2 . Constanta ariilor c care apare în formula lui Binet (13.52) se determină în aceleași condiții din formulele (13.50) și (13.45):

$$c = r_0^2 \dot{\theta}_0 = r_0 v_0 \sin \alpha \quad (13.53)$$

13.4.3. Mișcarea punctului material sub acțiunea forței de atracție universală (newtoniană)

Forță de atracție newtoniană are mărimea de forma

$$F = -f \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

unde m_1 și m_2 sunt masele celor două corpuri care se atrag, r este distanța dintre centrele lor iar f este constanta atracției universale: $f = 6,66 \cdot 10^{-11} \text{ Kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$.

Mișcarea punctului sub acțiunea forței de atracție universală este un caz particular de mișcare sub acțiunea forțelor centrale.

Din formula lui Binet (13.52), pentru expresia forței F de atracție universală deducem

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{f m_1}{C^2}$$

Cu notația $p = \frac{C^2}{f m_1}$ și cu substituția $\frac{1}{r} = u$, ultima ecuație se mai scrie astfel:

$$u'' + u = \frac{1}{p} \quad (13.54)$$

unde am notat $u'' = \frac{d^2 u}{d\theta^2}$. Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul doi liniară cu coeficienți constanți. Ecuația caracteristică atașată ecuației omogene corespunzătoare este

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

care are rădăcinile complex conjugate $\lambda_{1,2} = \pm i$, astfel că ecuația diferențială omogenă are soluția de forma

$$u_0(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0)$$

unde A și θ_0 sunt două constante de integrare. Soluția particulară a ecuației neomogene (13.54) este

$$u_p = \frac{1}{p}$$

astfel că soluția sa generală va fi

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{p}$$

Cu notația $A = \frac{\varepsilon}{p}$, obținem

$$u(\theta) = \frac{\varepsilon}{p} \cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{p}$$

sau revenind la variabila inițială:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)} \quad (13.55)$$

cu ε și θ_0 constante de integrare.

Ecuația (13.54) reprezintă o conică în coordonate polare, având focarul în centrul O , excentricitatea ε și parametrul p . Natura conicei depinde de excentricitatea ε și anume:

- a) $\varepsilon=0$, conica este un cerc
- b) $\varepsilon \in (0,1)$, conica este o elipsă
- c) $\varepsilon=1$, conica este o parabolă
- d) $\varepsilon \in (1,\infty)$, conica este o hiperbolă

În cele ce urmează se vor determina constantele de integrare ε și θ_0 . Din condițiile inițiale amintite la paragraful 13.4.2, deducem pentru componentele vitezei:

$$v_r(0) = v_0 \cos \alpha$$

$$v_\theta(0) = v_0 \sin \alpha$$

Deoarece $v_r = \dot{r}$, se derivează relația (13.55) în raport cu timpul și deci se obține

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon p \sin(\theta - \theta_0)}{[1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)]^2} \dot{\theta}$$

Ținând seama de relațiile (13.51) și (13.55), ultima relație devine

$$\dot{r} = \frac{C\varepsilon}{p} \sin(\theta - \theta_0)$$

În condițiile inițiale $t=0$: $\theta=0$, $r(0)=r_0$, $v_r(0)=v_0 \cos \alpha$, rezultă

$$r_0 = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta_0}$$

$$-\frac{C\varepsilon}{p} \sin \theta_0 = v_0 \cos \alpha$$

de unde se deduc relațiile

$$\varepsilon \cos \theta_0 = \frac{p - r_0}{r_0}$$

$$\varepsilon \sin \theta_0 = -\frac{pv_0 \cos \alpha}{C} = -\frac{p}{r_0 \operatorname{tg} \alpha}$$
(13.56)

Dar $p = \frac{C^2}{fm_1}$ astfel că din (13.53) se obține

$$p = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{fm_1}$$
(13.57)

Din relațiile (13.56) și (13.57) rezultă valoarea constantei de integrare θ_0 :

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{r_0 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{fm_1 - r_0 v_0 \sin^2 \alpha}$$
(13.58)

Din relațiile (13.56) prin ridicare la pătrat și adunare se obține

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{p - r_0}{r_0} \right)^2 + \frac{p^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{C^2}$$

Ținând seama de relațiile (13.53) și (13.57), ultima relație conduce la rezultatul

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{f^2 m_1^2} \left(v_0^2 - \frac{2fm_1}{r_0} \right)}$$
(13.59)

Discuția anterioară a conicelor în funcție de ε devine, ținând seama de (13.59):

- a) dacă $v_0 = \sqrt{\frac{fm_1}{r_0}}$ și $\alpha = \frac{\pi}{2}$ conica (traectoria) este cerc
- b) dacă $v_0 < \sqrt{\frac{2fm_1}{r_0}}$ conica este o elipsă
- c) dacă $v_0 = \sqrt{\frac{2fm_1}{r_0}}$ conica este o parabolă
- d) dacă $v_0 > \sqrt{\frac{2fm_1}{r_0}}$ conica este o hiperbolă

Se observă că există două valori limită ale vitezei inițiale v_0 pe care le notăm

$$v_1 = \sqrt{\frac{fm_1}{r_0}} \quad ; \quad v_2 = \sqrt{\frac{2fm_1}{r_0}}$$

în funcție de care punctul se mișcă în jurul centrului sau se îndepărtează.

Aceste două viteze se pot recalcula ținând seama că greutatea punctului de masă m la suprafața Pământului și forța de atracție universală sunt echivalente, deci

$$m_2 g = f \frac{m_1 m_2}{r_0^2}$$

unde $r_0 = 6370$ km este raza Pământului. Rezultă

$$\frac{f m_1}{r_0} = g r_0$$

astfel că obținem

$$v_1 = \sqrt{\frac{f m_1}{r_0}} = \sqrt{g r_0} \approx 7,9 \text{ km/s}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 f m_1}{r_0}} = \sqrt{2 g r_0} \approx 11,2 \text{ km/s}$$

ceea ce reprezintă prima respectiv a două viteză cosmică pentru lansări de corpuri de la suprafața Pământului.

Se observă că dacă $v_0 \leq v_1$ corpul este atras și cade pe Pământ. Pentru $v_1 < v_0 < v_2$ corpul se mișcă în jurul Pământului ca un satelit. Pentru $v_0 \geq v_2$ corpul se îndepărtează de Pământ.

13.4.4. Mișcarea rectilinie



Fig.13.10

Se consideră centrul fix O de masă m_1 , punctul P de masă m_2 situat pe axa Ox și forța \vec{F} de atracție newtoniană (fig.13.10). Mișcarea punctului P este dată de ecuația:

$$m_2 \ddot{x} = -f \frac{m_1 m_2}{x^2} \quad (13.60)$$

Ținând seama de relația

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{v dv}{dx}$$

ultima ecuație, după simplificare se reduce la următoarea ecuație cu variabile separabile:

$$v dv = -f m_1 \frac{dx}{x^2}$$

După integrare se obține

$$v^2 = \frac{2 f m_1}{x} + k$$

unde constanta k se va determina din condițiile inițiale:

$$t = 0 : x(0) = x_0; \dot{x}(0) = v_0$$

Se obține

$$k = v_0^2 - \frac{2fm_1}{x_0}$$

astfel că viteza are formula:

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 + 2fm_1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)} \quad (13.61)$$

Semnele din fața radicalului se aleg în funcție de semnul vitezei inițiale. Astfel, dacă $v_0 \leq 0$, punctul P se apropie de centrul O cu viteza din ce în ce mai mare, atingând acest punct cu viteza infinit de mare. Dacă $v_0 > 0$, punctul P se depărtează de O, viteza este din ce în ce mai mică, se anulează la $x = \infty$ pentru $v_0 = \frac{2fm_1}{x_0}$.

Pentru acest caz se poate determina viteza inițială v_0 cu care este lansat punctul P pe verticală în sus, pentru ca el să nu se mai întoarcă pe Pământ. Considerând raza Pământului $x_0 = R = 6370$ km, se regăsește valoarea

$$v_0 \geq 11,2 \text{ km/s}$$

Pentru $h < 0$ punctul P se oprește în punctul de abscisă

$$x_1 = -\frac{2fm_1}{h}$$

după care viteza își schimbă sensul, regăsind astfel cazul studiat $v_0 \leq 0$.

Dacă punctul cade liber de la $x = x_0$, viteza la suprafața Pământului (pentru $x = R$ - raza Pământului) va fi

$$v_1 = -\sqrt{2fm_1 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{x_0} \right)}$$

Timpul necesar căderii este

$$t_1 = \int_{x_0}^R \frac{dx}{v} = -\int_{x_0}^R \frac{dx}{\sqrt{2fm_1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)}}$$

13.5. Lucrul mecanic al forțelor

Lucrul mecanic exprimă cantitativ o schimbare a mișcărilor nemecanice în mișcare mecanică sau invers.

Prin definiție, lucrul mecanic al unei forțe constante \vec{F} ca mărime, direcție și sens care se deplasează rectiliniu pe drumul $\overline{PP_1}$ (fig.13.17) este produsul scalar dintre vectorii \vec{F} și $\overline{PP_1}$:

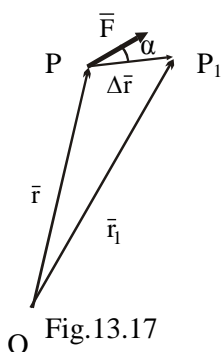


Fig.13.17

$$L = \vec{F} \cdot \overline{PP_1} = F \cdot PP_1 \cos(\vec{F}, \overline{PP_1}) = F \cdot PP_1 \cos \alpha \quad (13.62)$$

Lucrul mecanic este o mărime scalară.

Se observă că lucrul mecanic depinde de unghiul dintre forță și direcția deplasării. Astfel, pentru $0 \leq \alpha < \pi/2$, $\cos \alpha > 0$ și deci lucrul mecanic este pozitiv și se va numi lucru mecanic motor. Pentru $\alpha = \pi/2$ lucrul mecanic este nul iar pentru $\pi/2 < \alpha < \pi$ lucrul mecanic este negativ și se va numi lucru mecanic rezistent.

Dacă O este un reper fix, vectorii de poziție pentru punctele P și P₁ sunt $\vec{r} = \overline{OP}$, $\vec{r}_1 = \overline{OP_1}$ iar vectorul $\overline{PP_1}$ se poate considera ca o creștere a vectorului de poziție al punctului de aplicație al forței și se va nota $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$. Atunci lucrul mecanic corespunzător se va nota ΔL și deci

$$\Delta L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

Dacă deplasarea este elementară (notată cu $d\vec{r}$), atunci lucrul mecanic corespunzător al forței \vec{F} în deplasarea elementară $d\vec{r}$, notat cu dL va fi dat de formula

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

În cazul general, forța \vec{F} nu mai este constantă iar deplasarea nu este neapărat rectilinie. Prin urmare, se poate considera că punctul de aplicație al forței se deplasează pe o curbă (C) iar forța \vec{F} nu este constantă. Fie curba (C) și un punct P al curbei care se va deplasa pe arcul de curbă elementar PP_1 . Arcul PP_1 se poate

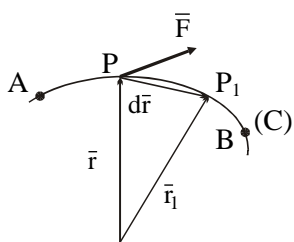


Fig.13.18

aproxima prin coarda PP_1 corespunzătoare iar forța \vec{F} se consideră un vector constant. În acest caz, se poate folosi definiția anterioară, astfel că lucrul mecanic elementar va fi definit prin

$$dL = \vec{F} d\vec{r} = Xdx + Ydy + Zdz \quad (13.63)$$

unde X, Y, Z sunt proiecțiile forței pe un sistem de referință Oxyz iar x, y, z sunt coordonatele punctului P de aplicație al forței.

Dacă A și B sunt două poziții arbitrare pe curba (c) între care se deplasează punctul P, atunci lucrul mecanic produs de forța \vec{F} în deplasarea de la A la B este

$$L_{A-B} = \int_{AB} (Xdx + Ydy + Zdz) \quad (13.64)$$

Integrala (13.64) este o integrală curbilinie, pentru calculul căreia trebuie cunoscută ecuația curbei.

În unele cazuri lucrul mecanic finit nu depinde de drumul parcurs. Astfel, forța \vec{F} se poate obține dintr-o funcție scalară U care depinde de poziția punctului de

aplicație P al forței: $U=U(x,y,z)$ unde x,y,z sunt coordonatele lui P:

$$\vec{F} = \text{grad } u = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \quad (13.65)$$

adică proiecțiile forței \vec{F} pe axele de coordonate X,Y,Z sunt derivatele parțiale ale funcției scalare U în raport respectiv cu coordonatele x,y,z :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} ; Y = \frac{\partial U}{\partial y} ; Z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (13.66)$$

Funcția U se numește funcție de forță iar forța \vec{F} corespunzătoare se numește forță conservativă. Condițiile de existență ale funcției de forță U sunt cunoscute din analiza matematică:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} ; \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} ; \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}$$

Aceste condiții, ținând seama de relațiile (13.66) se mai scriu în forma:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} ; \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} ; \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \quad (13.67)$$

Diferențiala funcției scalare U este:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad (13.68)$$

Pentru o forță conservativă, lucrul mecanic elementar devine:

$$dL = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU$$

deci lucrul mecanic elementar al unei forțe conservative este diferențiala totală exactă a funcției de forță U . Lucrul mecanic finit al forței conservative între pozițiile A și B pe curba (c) va fi

$$L_{A-B} = \int_{AB} (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_A^B dU = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A) = U_B - U_A \quad (13.69)$$

Cu alte cuvinte lucrul mecanic finit (total) al unei forțe conservative depinde numai de poziția inițială $A(x_A, y_A, z_A)$ și de poziția finală $B(x_B, y_B, z_B)$ ale punctului de aplicație al forței și este independent de curba (c).

Vom considera mai multe exemple de calcul al lucrului mecanic finit pentru forțe conservative. Primul exemplu este cel al unui punct material de masă m obligat

să se deplaseze pe o curbă arbitrară (c) între punctele A și B (fig.13.19) fără frecare.

Considerând un sistem de axe carteziene $Oxyz$ în care Oz este verticală, proiecțiile forței pe axe sunt:

$$X = 0, Y = 0, Z = -mg$$

Deoarece

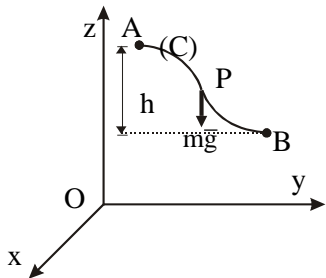


Fig.13.19

$$Z = -mg = \frac{\partial U}{\partial z}$$

rezultă

$$dU = \frac{\partial U}{\partial z} dz = -mgdz ; U = -mgz + C$$

Din formula (13.69) se obține

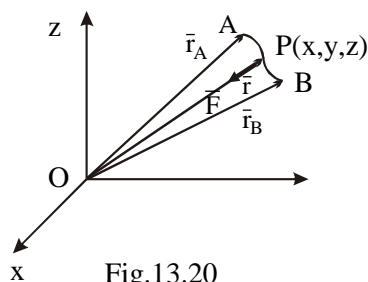


Fig.13.20

$$L_{A-B} = U_B - U_A = mg(z_A - z_B) = \pm mgh \quad (13.70)$$

În formula (13.70) semnul "+" se consideră ca în fig.13.19 adică dacă P se deplasează de la A înspre B (B se află "sub" A) iar semnul "-" în caz contrar.

Al doilea exemplu este cel al unei forțe elastice liniare $\vec{F} = -k\vec{r}$ unde k este constanta elastică a arcului iar \vec{r} este vectorul de poziție al punctului P (fig.13.20). În acest caz,

proiecțiile pe axe ale forței elastice sunt

$$X = -kx ; Y = -ky ; Z = -kz$$

Lucrul mecanic elementar al acestei forțe este

$$dL = \vec{F} d\vec{r} = -k\vec{r} d\vec{r} = -k(xdx + ydy + zdz) = -d\left[-\frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)\right] = d\left(-\frac{kr^2}{2}\right)$$

deci

$$U(x, y, z) = -\frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + C = -\frac{k}{2}r^2 + C$$

Lucrul mecanic finit între pozițiile A și B devine:

$$L_{A-B} = \frac{k(r_A^2 - r_B^2)}{2}$$

Ultimul exemplu este cel al forței de atracție universală. Se știe că forța de atracție universală pe care un punct O de masă m_1 o exercită asupra punctului P de masă m_2 este $\vec{F} = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ unde $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$. Lucrul mecanic elementar al acestei forțe devine:

$$dL = -f \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} d\vec{r} = -f \frac{m_1 m_2}{r^3} d\left(\frac{r^2}{2}\right) = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = d\left(f \frac{m_1 m_2}{r}\right)$$

Lucrul mecanic finit este:

$$L_{A-B} = fm_1 m_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = fm_1 m_2 \left(\frac{1}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}} \right) \quad (13.71)$$

Lucrul \vec{F} mecanic al unei forțe conservative al cărei punct de aplicație se deplasează

pe o curbă închisă este nul.

13.5.1. Proprietățile lucrului mecanic

1) Dacă deplasarea elementară $d\vec{r}$ a punctului de aplicație P al forței este sumă de mai multe deplasări elementare

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + \dots + d\vec{r}_n$$

atunci

$$dL = \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}d\vec{r}_1 + \vec{F}d\vec{r}_2 + \dots + \vec{F}d\vec{r}_n$$

sau

$$dL = dL_1 + dL_2 + \dots + dL_n$$

Lucrul mecanic elementar produs de o forță \vec{F} al cărei punct de aplicație efectuează o deplasare compusă, este egal cu suma lucrurilor mecanice elementare corespunzătoare fiecărei deplasări componente.

2) Dacă asupra punctului material acționează un sistem de forțe concurente $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, atunci se știe că acest sistem se reduce la rezultanta

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

Rezultă

$$dL = \vec{R}d\vec{r} = \vec{F}_1d\vec{r} + \vec{F}_2d\vec{r} + \dots + \vec{F}_nd\vec{r} \quad (13.73)$$

deci lucrul mecanic produs de rezultanta unui sistem de forțe concurente al cărei punct de aplicație se deplasează, este egal cu suma lucrurilor mecanice corespunzătoare fiecărei forțe a sistemului pentru aceeași deplasare.

Unitatea de măsură pentru lucrul mecanic în sistemul internațional (SI) este Joule (J), iar în sistemul tehnic este kilogram-forță-metru (kgfm). Un joule este lucrul mecanic produs de o forță de 1 newton al cărei punct de aplicație se deplasează cu un metru pe suportul forței și în sensul forței.

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ newton} \times 1 \text{ metru}$$

$$1 \text{ kgfm} \approx 9,81 \text{ joule}$$

13.6. Puterea și randamentul mecanic

Puterea este lucrul mecanic produs în unitatea de timp. Lucrul mecanic elementar dL produs în timpul dt are puterea

$$P = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (13.74)$$

Unitatea de măsură pentru putere în sistemul internațional este watt-ul (w). În sistemul tehnic unitatea de măsură este kgfm/s iar ca unitate tolerată calul putere

(CP):

$$1 \text{ w} = 1 \text{ J/s}$$

$$1 \text{ kgfm/s} \approx 9,8 \text{ w}$$

$$1 \text{ CP} = 75 \text{ kgfm/s} \approx 736 \text{ w}$$

În timpul funcționării unei mașini, lucrul mecanic consumat pentru acționarea acesteia L_m se numește lucru mecanic motor. Forțele motoare trebuie să învingă forțele rezistente, producând lucrul mecanic util L_u precum și forțele de frecare ce produc lucru mecanic pasiv L_p . Deci se poate scrie:

$$L_m = L_u + L_p$$

Randamentul mecanic η este prin definiție raportul dintre lucrul mecanic util și lucrul mecanic motor:

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} \quad (13.75)$$

care este o mărime adimensională, caracterizând eficiența mașinii. Deoarece $L_u = L_m - L_p$, randamentul mecanic se mai poate scrie:

$$\eta = 1 - \frac{L_p}{L_m} = 1 - \varphi$$

unde $\varphi = \frac{L_p}{L_m}$ se numește coeficientul de pierderi.

13.7. Teoremele generale ale dinamicii punctului material

13.7.1. Teorema impulsului

Impulsul unui punct material P de masă m este vectorul

$$\bar{h} = m\bar{v} \quad (13.76)$$

unde \bar{v} este viteza punctului P. Deci impulsul este un vector coliniar cu \bar{v} .

Teorema impulsului arată variația vectorului \bar{h} în timpul mișcării punctului material P. Dacă în formula (13.76) se derivează în raport cu timpul și se folosește legea lui Newton, se obține:

$$\dot{\bar{h}} = m\dot{\bar{v}} = m\bar{a} = \bar{F}$$

sau

$$\dot{\bar{h}} = \bar{F} \quad (13.77)$$

Relația (13.77) exprimă teorema impulsului: derivata impulsului în raport cu timpul este egală cu rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului, în orice

moment al mișcării.

Proiecția ecuației (13.77) pe un sistem de axe cartezian conduce la ecuațiile:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = X \quad ; \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = Y \quad ; \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = Z \quad (13.78)$$

unde $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ sunt proiecțiile vitezei iar X, Y, Z sunt proiecțiile forței rezultante pe axele respective.

În particular, dacă rezultanta $\bar{R} = 0$, rezultă $\dot{\bar{h}} = 0$, deci

$$\bar{h} = \bar{c} \quad (13.79)$$

Relația (13.79) exprimă teorema de conservare a impulsului. În particular, teorema de conservare a impulsului poate avea loc și pe o axă. Dacă de exemplu $X=0$ atunci proiecția impulsului pe axa Ox este constantă:

$$m\dot{x} = h_x = C$$

Constantele \bar{C} și C se determină din condițiile inițiale ale problemei.

13.7.2. Teorema momentului cinetic

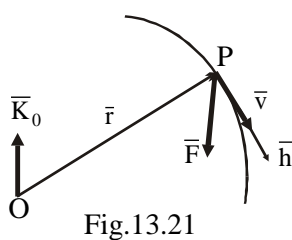


Fig.13.21

Momentul cinetic al unui punct material P în raport cu un punct fix O este vectorul \bar{K}_0 definit de relația

$$\bar{K}_0 = \bar{r} \times m\bar{v} \quad (13.80)$$

unde $\bar{r} = \overline{OP}$ iar \bar{v} este viteza cu care se mișcă punctul P. Momentul cinetic este deci momentul impulsului în raport cu punctul fix O (fig.13.21).

Vectorul \bar{K}_0 este un vector legat de punctul O iar

mărimea este

$$K_0 = r \cdot h \sin(\bar{r}, \bar{h})$$

Prin derivarea în raport cu timpul a relației (13.80), se obține

$$\dot{\bar{K}}_0 = \dot{\bar{r}} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\dot{\bar{v}} = \bar{r} \times m\bar{a}$$

Ținând seama de legea lui Newton, ultima relație devine

$$\dot{\bar{K}}_0 = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_0 \quad (13.81)$$

Deci, derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui punct material în raport cu punctul fix O este egală cu momentul resultant al forțelor ce acționează asupra punctului, moment calculat de asemenea în raport cu punctul O.

Pe un sistem de axe cartezian, proiecțiile relației (13.81) sunt

$$\begin{aligned} m(\dot{y}\dot{z} - \dot{z}\dot{y}) &= yZ - zY \\ m(\dot{z}\dot{x} - \dot{x}\dot{z}) &= zX - xZ \\ m(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}) &= xY - yX \end{aligned} \quad (13.82)$$

Fiecare din aceste egalități \bar{F} arată că derivata în raport cu timpul a momentului cinetic față de o axă oarecare este egală cu momentul forței față de aceea axă.

Dacă în timpul mișcării $\bar{M}_0 = 0$, rezultă

$$\dot{\bar{K}}_0 = 0, \quad \bar{K}_0 = \bar{C}$$

adică momentul cinetic se conservă (teorema de conservare a momentului cinetic). Dacă una din componentele momentului \bar{M}_0 pe axe este nulă, proiecția momentului cinetic pe aceea axă se conservă. De exemplu, dacă $\bar{M}_{0x} = 0$, atunci

$$\dot{K}_{0x} = 0, \quad K_{0x} = C_x$$

2.7.3. Principiul Inerției (D'Alembert)

Legea lui Newton pentru un punct material de masă m aflat în mișcare este

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

sau

$$\bar{F} + (-m\bar{a}) = 0$$

adică forța \bar{F} este echilibrată de o nouă forță definită formal ca fiind

$$\bar{F}_i = -m\bar{a}$$

și numită forță de inerție. Deci, se poate scrie:

$$\bar{F} + \bar{F}_i = 0 \quad (13.83)$$

Relația (13.83) reprezintă relația de echilibru dinamic (principiul lui D'Alembert): o particulă materială se află în echilibru dinamic tot timpul mișcării sub acțiunea forței rezultante și a forței de inerție.

2.7.4. Teorema energiei cinetice

Energia cinetică a unui punct material de masă m și de viteză \bar{v} este

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (13.84)$$

și deci este o mărime scalară, pozitivă.

Energia potențială caracterizează capacitatea mișcării nemecanice de a trece într-o anumită mișcare mecanică. Aceasta se pune în evidență numai când forțele ce acționează asupra punctului material sunt conservative.

Lucrul mecanic finit al unei forțe conservative al cărei punct de aplicație se deplasează între pozițiile $A(x_A, y_A, z_A)$ și $B(x, y, z)$ este

$$L_{A-B} = U(x, y, z) - U(x_A, y_A, z_A)$$

Considerând punctul A astfel încât $U(x_A, y_A, z_A) = 0$, se poate scrie

$$L_{A-B} = U(x, y, z)$$

Energia potențială a punctului A este lucrul mecanic finit cu semn schimbat:

$$E_p = -L_{A-B} = -U(x, y, z) \quad (13.85)$$

Energia mecanică a unui punct material este suma energiilor cinetică și potențială la un moment dat:

$$E_m = E_c + E_p \quad (13.86)$$

Pentru a demonstra teorema energiei cinetice se consideră legea lui Newton sub forma

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Această relație înmulțită scalar cu $d\vec{r} = \vec{v}dt$, conduce la relația:

$$m\vec{v}d\vec{v} = \vec{F}d\vec{r}$$

sau, ținând seama că $\vec{v}^2 = v^2$ și $\vec{F}d\vec{r} = dL$:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dL$$

Această relație exprimă teorema energiei cinetice sub formă diferențială

$$dE_c = dL \quad (13.87)$$

și se enunță astfel: variația energiei cinetice în intervalul de timp dt este egală cu lucrul mecanic elementar efectuat în același interval de timp de către forțele ce acționează asupra punctului material.

Integrând ecuația (13.87) între pozițiile arbitrare A și B situate la distanță finită, se obține expresia teoremei energiei cinetice sub formă finită:

$$(E_c)_B - (E_c)_A = L_{A-B} \quad (13.88)$$

unde

$$(E_c)_A = \frac{1}{2}mv_A^2 \quad ; \quad (E_c)_B = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Se poate enunța teorema energiei cinetice sub formă finită: variația energiei cinetice a unui punct material între două poziții distincte este egală cu lucrul mecanic finit efectuat de forțele ce acționează asupra punctului material între cele două poziții.

În particular, dacă asupra unui punct material acționează numai forțe conservative, se poate scrie:

$$dE_c = dL = dU = -dE_p$$

sau

$$d(E_c + E_p) = 0 \quad ; \quad dE_m = 0$$

de unde rezultă

$$E_m = E_c + E_p = \text{const.} \quad (13.89)$$

Relația (13.89) reprezintă teorema de conservare a energiei mecanice: dacă asupra unui punct material acționează numai forțe conservative, energia sa mecanică se conservă.

14. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI

Un punct material este supus la legături dacă nu are posibilitatea de a ocupa orice poziție învecinată. Punctul poate fi supus la restricții geometrice când acesta nu poate să se deplaseze în anumite direcții. Restricțiile geometrice nu au legătură cu forțele care acționează asupra punctului și pot reduce numărul gradelor de libertate ale punctului de la trei la două sau la unul singur.

Analitic, dacă între coordonatele x, y, z ale punctului material, componentele vitezei $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ și timpul t există relații de forma

$$f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \leq 0 \quad (14.1)$$

se spune că punctul material este supus la legături. Legăturile nu pot fi modificate sau distruse, oricât de mari ar fi forțele ce acționează.

Dacă timpul apare explicit în relația (14.1) legătura se numește reonomă. În caz contrar, adică timpul t nu apare explicit în relația (14.1), legătura se numește scleronomă.

Pe de altă parte, legăturile pot fi neolonyme sau olonyme dacă în relația (14.1) apar explicit derivatele $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ sau respectiv nu apar. În cele ce urmează se întâlnesc numai legături olonyme, deci care au forma

$$f(t, x, y, z) = 0 \quad (14.2)$$

Un punct material poate fi supus la maxim două legături de forma (14.1) respectiv (14.2). Legăturile (14.1) se numesc unilaterale iar studiul mișcării este mai complicat. Legăturile (14.1) exprimate prin egalități sau cele de forma (14.2) se numesc bilaterale.

Punctul material liber are trei grade de libertate pentru că poziția lui se poate determina prin trei parametri independenți. Punctul are două grade de libertate în cazul când este supus la o legătură bilaterală olonomă iar dacă punctul este supus la două legături de forma (14.2), punctul are un singur grad de libertate.

Legătura (14.2) poate fi interpretată din punct de vedere geometric ca fiind ecuația unei suprafețe pe care punctul se deplasează. În acest caz, punctul se mișcă pe o suprafață. Deoarece fiecare legătură reprezintă o suprafață, dacă este supus la două legături, rezultă că punctul rămâne pe o curbă ca intersecție a două suprafețe.

Spre deosebire de cazul punctului material liber, trebuie să ținem seama și de efectul legăturii. Pentru aceasta se va folosi axioma legăturilor: orice legătură se poate suprima și acestea se pot înlocui cu forțe de legătură care produc același efect ca și legătura asupra mișcării punctului. Prin aplicarea acestei axiome, punctul material

devine liber sub acțiunea rezultantei forțelor date \bar{R}_d și a celor de legătură \bar{R}_l . În acest caz legea lui Newton devine:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{R}_d + \bar{R}_l \quad (14.3)$$

Rezultanta \bar{R}_l apriori necunoscută se compune din reacțiunea normală \bar{N} a legăturii și forța de frecare \bar{F}_f , adică

$$\bar{R}_l = \bar{N} + \bar{F}_f \quad (14.4)$$

Forța de frecare se opune mișcării și se poate scrie

$$\bar{F}_f = -\mu N \frac{\bar{v}}{v} ; \quad F_f = \mu N \quad (14.5)$$

unde μ este coeficientul de frecare de alunecare.

În cazul ideal $\mu=0$ și deci $F_f=0$.

14.1. Mișcarea punctului material pe o suprafață ideală

Se consideră mișcarea unui punct material de masă m obligat să rămână pe suprafața de ecuație

$$f(t, x, y, z) = 0$$

deci legătura este bilaterală. Acest lucru se poate întâmpla dacă de exemplu punctul material considerat ca o sferă mică se mișcă între două suprafețe cu contact. Legăturile fiind ideale, forța de frecare se poate neglija în calcule. Reacțiunea normală are direcția normalei la suprafață în punctul considerat, astfel încât se poate scrie:

$$\bar{N} = \lambda \text{grad} f = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k} \right) \quad (14.6)$$

unde λ este o constantă, deocamdată necunoscută.

Dacă se consideră suprafața fixă la un moment $t=t_0$, $f(t_0, x, y, z)=0$, se obține $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ și deci reacțiunea este normală la suprafață dar trebuie considerată suprafața la momentul $t=t_0$. Dacă legăturile sunt reonome, deplasarea reală a punctului nu mai este tangentă la suprafață.

Ecuatia diferențială a mișcării devine:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}_d + \lambda \text{grad} f \quad (14.7)$$

Notând $\bar{F}_d = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$ (în coordonate carteziene), proiecțiile ecuației vectoriale (14.7) pe axe sunt

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\
m\ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \\
m\ddot{z} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{14.8}$$

Aceste trei ecuații diferențiale, împreună cu ecuația analitică a suprafeței $f(t,x,y,z)=0$ determină necunoscutele x,y,z,λ ca funcții de timp t . Dacă se elimină λ între ecuațiile (14.8) se obține sistemul

$$\frac{m\ddot{x} - X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{m\ddot{y} - Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{m\ddot{z} - Z}{\frac{\partial f}{\partial z}}
\tag{14.9}$$

care împreună cu ecuația legăturii determină legea de mișcare:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

Cu legea de mișcare cunoscută, din (14.9) se determină și λ , astfel că mărimea reacțiunii normale devine

$$N = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

În cazul în care punctul material este legat de un fir, forța de legătură corespunzătoare reacțiunii normale este tensiunea din fir, notată T , care are direcția firului, de mărime necunoscută, cu sensul îndreptat de la punctul material considerat în studiu la punctul de fixare al firului. Dacă firul este inextensibil și are capătul fix, suprafața pe care se deplasează punctul material este o sferă.

În cazul legăturii reonome, lucrul mecanic al reacțiunii \bar{N} este în general diferit de zero, chiar și în cazul legăturilor ideale. Acest lucru rezultă dacă se diferențiază relația (14.2):

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = -\frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Lucrul mecanic elementar al reacțiunii devine:

$$dL = \bar{N} \cdot d\vec{r} = \lambda \text{grad} f \cdot d\vec{r} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Acest lucru se explică prin observația anterioară: deplasarea reală a punctului material nu este tangențială suprafeței.

14.2. Mișcarea punctului material pe o curbă ideală

Ecuația unei curbe față de un reper cartezian este dată prin intersecția a două suprafețe:

$$f_1(t, x, y, z) = 0 \quad , \quad f_2(t, x, y, z) = 0 \quad (14.10)$$

Ecuatia de mișcare este

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \overline{\mathbf{F}}_d + \overline{\mathbf{N}}$$

unde $\overline{\mathbf{N}}$ este situată în planul normal al curbei, deci planul determinat de direcțiile celor doi vectori $\text{grad}f_1$ și $\text{grad}f_2$ normali suprafețelor (14.10) și are expresia

$$\overline{\mathbf{N}} = \lambda_1 \text{grad}f_1 + \lambda_2 \text{grad}f_2$$

Ecuatia diferențială vectorială a mișcării este

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \overline{\mathbf{F}}_d + \lambda_1 \text{grad}f_1 + \lambda_2 \text{grad}f_2 \quad (14.11)$$

Proiectând (14.11) pe axele unui sistem cartezian se obține sistemul

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{aligned} \quad (14.12)$$

Ecuatiile (14.12) împreună cu (14.10) formează un sistem de 5 ecuații cu 5 necunoscute: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, λ_1 și λ_2 . În acest fel se pot determina legea de mișcare și reacțiunea legăturii. Sistemul (14.12) este liniar în λ_1 și λ_2 și ca să fie compatibil trebuie ca determinantul construit cu coeficienții acestora și din termenii liberi să se anuleze:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & m\ddot{x} - X \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & m\ddot{y} - Y \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & m\ddot{z} - Z \end{vmatrix} = 0 \quad (14.13)$$

Legea de mișcare se poate determina rezolvând sistemul format din ecuațiile (14.10) și (14.13). Reacțiunea normală devine:

$$N = \sqrt{\left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2} \quad (14.14)$$

14.3. Pendulul matematic

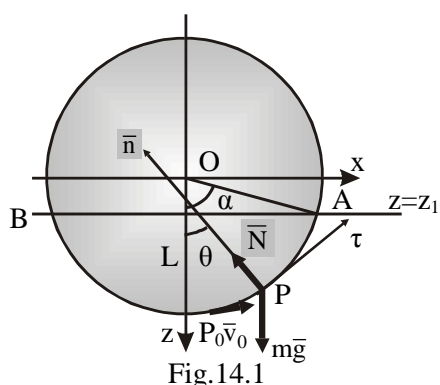


Fig.14.1

Pendulul matematic este un punct material greu care se mișcă pe un cerc situat într-un plan vertical sub acțiunea gravitației proprii fără frecare (fig.14.1).

Deci punctul este supus la o legătură, fiind obligat să rămână pe un cerc. Pendulul

matematic poate fi realizat printr-o legătură unilaterală (legătura prin fir) sau printr-o legătură bilaterală (bilă de dimensiune mică ce se poate deplasa într-un tub).

În cele ce urmează se vor considera legăturile bilaterale. Traectoria fiind cunoscută, studiul mișcării se va face în coordonate intrinseci prin proiecția ecuației vectoriale

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{N}} \quad (14.15)$$

pe direcțiile tangentei și a normalei principale:

$$\begin{aligned} m a_\tau &= m\dot{v} = mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \\ m a_n &= m \frac{v^2}{L} = mL\dot{\theta}^2 = N - mg \cos \theta \end{aligned} \quad (14.16)$$

unde θ este unghiul dintre verticală și raza OP a cercului.

Din ecuațiile (14.16) se obțin:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (14.17)$$

$$N = m(L\dot{\theta}^2 + g \cos \theta) \quad (14.18)$$

Ecuația (14.17) se mai numește ecuația diferențială a mișcării pendulului matematic. Această ecuație diferențială de ordinul doi și neliniară îl definește pe θ ca funcție de timp. Dar integrarea ecuației (14.17) este dificilă din cauza neliniarității. Din aceasta se poate obține totuși o integrală primă și anume se înmulțește cu $d\theta = \dot{\theta} dt$:

$$\dot{\theta} \ddot{\theta} dt + \frac{g}{L} \sin \theta d\theta = 0$$

Se integrează ultima ecuație din care se obține

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{L} \cos \theta = C$$

unde C este constantă de integrare și se determină din condițiile inițiale: presupunem că punctul P este lansat din poziția $\theta = \theta_0$ cu viteza inițială v_0 , sau

$$t = 0: \theta = \theta_0; \dot{\theta} = \frac{v_0}{L}$$

Rezultă

$$C = \frac{v_0^2}{2L^2} - \frac{g}{L} \cos \theta_0$$

După înlocuirea constantei C se obține legea de variație a vitezei unghiulare $\dot{\theta}$ în funcție de θ și a vitezei v în funcție de θ :

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{L^2} + \frac{2g}{L} (\cos \theta - \cos \theta_0)} \quad (14.19)$$

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 + 2gL (\cos \theta - \cos \theta_0)} \quad (14.20)$$

Dacă se alege axa Oz verticală descendentă, cu notațiile:

$$z_0 = L \cos \theta_0 ; \quad z = L \cos \theta ; \quad z_1 = z_0 - \frac{v_0^2}{2g}$$

ecuația (14.20) se mai scrie și sub forma:

$$v = \sqrt{2g(z - z_1)} \quad (14.21)$$

Din această ecuație se discută diferite situații în care are loc mișcarea pendulului.

Astfel dreapta $z=z_1$ reprezintă locul geometric al punctelor de viteză nulă. Mișcarea va fi posibilă numai pentru $z \geq z_1$ și punctul P trebuie să se afle întotdeauna sub dreapta $z \geq z_1$. Această dreaptă intersectează cercul în punctele A și B. Punctul P se va mișca pe arcul de cerc AB din fig. 14.1 executând o mișcare oscilatorie. Din relația (14.20) se obține că în punctele A și B se anulează și își schimbă semnul astfel că se modifică sensul mișcării. Pentru $v_0 > 0$, punctul P se mișcă spre A, apoi pe arcul AB prima dată de la A spre B, apoi își schimbă succesiv sensul mișcării.

Notând cu α unghiul P_0OA , obținem $z_1 = L \cos \alpha$ astfel că se poate deduce:

$$z_1 = z_0 - \frac{v_0^2}{2g} = L \cos \theta_0 - \frac{v_0^2}{2g} = L \cos \alpha$$

sau
$$\cos \theta_0 = \cos \alpha + \frac{v_0^2}{2gL}$$

cu ajutorul căreia ecuația (14.19) devine:

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2g}{L}(\cos \theta - \cos \alpha)} \quad (14.22)$$

Reacțiunea normală dată de (14.18) devine cu ajutorul relației (14.22) și a notațiilor făcute:

$$N = \frac{mg}{L}(3z - 2z_1) \quad (14.23)$$

Se observă că reacțiunea normală poate fi pozitivă sau negativă ceea ce are mare importanță în cazul legăturilor unilaterale de care ne vom ocupa în continuare. Dacă $N \geq 0$ firul este întins și punctul se mișcă pe cerc iar pentru $N < 0$ punctul nu mai este obligat să rămână pe cerc și continuă printr-o mișcare liberă. Semnul reacțiunii N depinde de poziția punctului P față de dreapta $z = \frac{2}{3}z_1$.

Se deosebesc următoarele cazuri:

a) Dreapta $z=z_1$ se află sub centrul cercului O. Mișcarea este oscilatorie pe arc mic AB (fig. 14.2). Punctul material nu părăsește cercul iar firul rămâne tot timpul întins.

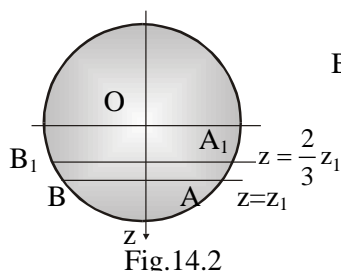


Fig. 14.2

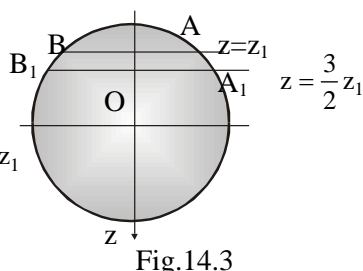


Fig. 14.3

b) Dreapta $z=z_1$ se află deasupra centrului O. În acest caz mișcarea are loc până în A_1 sau B_1 iar

firul nu mai este întins. Punctul va avea o mișcare liberă (fig.14.3).

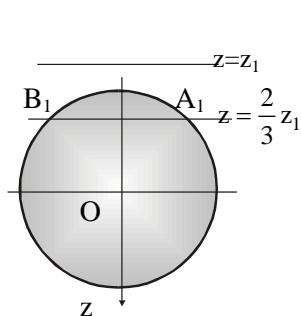


Fig.14.4

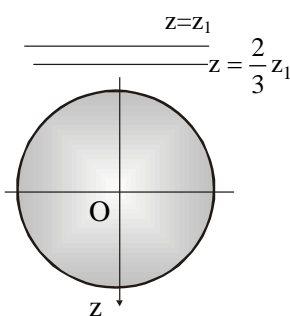


Fig.14.5

c) Dreapta $z=z_1$ este deasupra cercului iar $z=\frac{2}{3}z_1$ îl intersectează în A_1 și B_1 . Mișcarea are loc pe arcul mare de cerc A_1B_1 după care punctul are o mișcare liberă (fig.14.4)

d) Dreapta $z=\frac{2}{3}z_1$ este deasupra cercului, punctul material descrie în continuare

în același sens cercul (fig.14.5).

Deoarece mișcarea este periodică, vom determina perioada T a mișcării în cazul mișcării oscilatorii. Punctul material se va deplasa de la A la B și invers (fig.14.2). Relația (14.22) se mai poate scrie și astfel:

$$dt = \sqrt{\frac{L}{2g}} \left(\pm \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} \right)$$

de unde prin integrare se obține:

$$T = \int_0^T dt = \sqrt{\frac{L}{2g}} \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} \right]$$

Schimbând θ cu $-\theta$, perioada T devine

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

Folosind identitățile trigonometrice

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} ; \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

expresia perioadei devine

$$T = 2 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Cu notațiile

$$\sin \frac{\alpha}{2} = k ; \quad \sin\varphi = \frac{1}{k} \sin \frac{\theta}{2}$$

se deduce că

$$\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2k} \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

de unde se obține

$$d\theta = \frac{2k \cos \varphi d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2k \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Expresia perioadei devine:

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (14.24)$$

Acesta este o integrală eliptică completă de speța I.

Deoarece $k \sin \varphi$ este mică ($0 < k \sin \varphi < 1$) se poate folosi dezvoltarea în serie:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} k^{2n} \sin^{2n} \varphi$$

Pentru a calcula perioada T, notăm

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi$$

Integrând prin părți, ultima integrală se mai scrie succesiv:

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} \varphi \cdot \sin^2 \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} \varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} \varphi \cdot \cos \varphi (\cos \varphi d\varphi) = \\ &= I_{2n-2} - \left. \frac{\sin^{2n-1} \varphi \cos \varphi}{2n-1} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi = I_{2n-2} - \frac{I_{2n}}{2n-1} \end{aligned}$$

Prin urmare se obține următoarea relație de recurență pentru I_{2n} :

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$$

sau dând valori: $n=1,2,3,\dots$, ultima relație devine:

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} I_0$$

unde

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

In final,

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \frac{\pi}{2}$$

astfel că formula aproximativă a perioadei este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right)^2 k^{2n} \right] =$$

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 k^6 + \dots \right] \quad (14.25)$$

În particular, în cazul oscilațiilor mici ($\theta \leq 4^\circ - 5^\circ$), se poate considera $\sin \theta \approx \theta$, astfel că ecuația diferențială (14.17) a micilor oscilații este

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

sau, cu notația $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

ecuație diferențială de ordinul doi liniară. Soluția acestei ecuații este

$$\theta = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = C \sin(\omega t + \theta_0) \quad (14.26)$$

unde C_1 și C_2 , respectiv C și θ_0 sunt constante de integrare. Cum condițiile inițiale se scriu sub forma:

$$t = 0: \theta = \theta_0; \quad v = v_0$$

se obțin respectiv:

$$C_1 = \theta_0; \quad C_2 = \frac{v_0}{L\omega}; \quad C = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{v_0^2}{L^2\omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{L\omega\theta_0}{v_0}$$

Soluția devine:

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{L\omega} \sin \omega t = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{v_0^2}{L^2\omega^2}} \sin \left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{L\omega\theta_0}{v_0} \right) \quad (14.27)$$

astfel că oscilațiile mici ale pendulului matematic sunt armonice cu perioada

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (14.28)$$

15. DINAMICA MIȘCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL

În unele cazuri trebuie să se studieze mișcarea sau repausul punctului material față de un sistem de referință mobil, când trebuie considerate două sisteme de referință, unul fix și celălalt mobil.

Mișcarea punctului față de reperul mobil se numește relativă, caz în care

elementele mișcării sunt viteza relativă \bar{v}_r și accelerația relativă \bar{a}_r . Mișcarea punctului față de reperul fix se numește mișcare absolută iar elementele mișcării sunt viteza absolută \bar{v}_a și accelerația absolută \bar{a}_a . Mișcarea de transport a punctului este mișcarea acestuia fixat de reperul mobil față de reperul fix, elementele mișcării fiind viteza de transport \bar{v}_t , accelerația de transport \bar{a}_t și viteza unghiulară a sistemului mobil $\bar{\omega}_l$.

Se cunosc din Cinematică relațiile pentru viteze și accelerații:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_t + \bar{v}_r \quad (25.1)$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_t + \bar{a}_r + \bar{a}_c \quad (25.2)$$

unde accelerația Coriolis este

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_l \times \bar{v}_r$$

Presupunem cunoscută rezultanta \bar{F}_d a forțelor ce acționează asupra punctului de masă m , condițiile inițiale și legăturile punctului. Se pune problema să se determine legea mișcării relative a punctului și forțele de legătură \bar{F}_l .

Legea lui Newton este:

$$m\bar{a}_a = \bar{F}_d + \bar{F}_l \quad (25.3)$$

care se mai scrie sub forma:

$$m\bar{a}_r = \bar{F}_d + \bar{F}_l - m\bar{a}_t - m\bar{a}_c$$

Termenii $-m\bar{a}_t = \bar{F}_{it}$ și $-m\bar{a}_c = \bar{F}_{ic}$ se numesc respectiv forță de inerție de transport și forță de inerție Coriolis. Ecuația vectorială fundamentală pentru studiul mișcării relative a punctului material, cu aceste notații se poate scrie sub forma:

$$m\bar{a}_r = \bar{F}_d + \bar{F}_l + \bar{F}_{it} + \bar{F}_{ic} \quad (25.4)$$

Această ecuație se proiectează pe axele reperului mobil, rezultând ecuațiile diferențiale ale mișcării relative.

Comparând ecuațiile (25.3) și (25.4) se observă că legea lui Newton se aplică și în raport cu reperul mobil cu condiția să se introducă în plus forțele de inerție de transport și de inerție Coriolis.

În particular, cu ajutorul ecuației (25.4) se poate studia echilibrul relativ al punctului material. Pentru aceasta trebuie ca $\bar{v}_r = 0$ și $\bar{a}_r = 0$ ceea ce implică $\bar{a}_c = 0$ și $\bar{F}_{ic} = 0$, astfel că rezultă condiția

$$\bar{F}_d + \bar{F}_l + \bar{F}_{it} = 0 \quad (25.5)$$

Deci pentru repaus relativ rezultanta forțelor date, a celor de legătură și forța de inerție de transport trebuie să fie în echilibru.

Este important să se cerceteze dacă există sisteme mobile astfel încât ecuația de mișcare a punctului material să se scrie la fel ca pentru sistemele fixe. Aceasta înseamnă că forțele inerțiale să nu mai intervină în studiul mișcării relative. Astfel de sisteme se numesc sisteme inerțiale. Rezultă că trebuie îndeplinită condiția

$$\bar{F}_{it} + \bar{F}_{ic} = 0$$

ceea ce revine la condiția

$$\bar{a}_t + 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r = 0$$

Ultima relație are loc pentru orice valoare a lui \bar{v}_r astfel că se impun condițiile:

$$\bar{a}_t = 0 \quad ; \quad \bar{\omega}_t = 0 \quad (25.6)$$

Condiția $\bar{\omega}_t = 0$ impune ca sistemul mobil să aibă o mișcare de translație iar din condiția $\bar{a}_t = 0$; $\bar{a}_t^n = 0$ mișcarea sistemului mobil este rectilinie, $\bar{a}_t^t = 0$ mișcarea este uniformă. Deci sistemele de referință inerțiale au mișcări de translație rectilinie și uniformă.

În general sistemul de referință inerțial se consideră că are originea în Soare iar axele orientate către anumite stele considerate fixe.

Sistemele de referință legate de Pământ nu sunt inerțiale dar într-o aproximație, din cauza valorilor mici ale forțelor de inerție se pot considera ca fiind inerțiale. Pentru a dovedi această afirmație, sistemul de referință fix se consideră având originea în centrul Soarelui iar sistemul de referință mobil cu originea în centrul Pământului.

Accelerația de transport a unui punct P este

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

unde \bar{a}_0 este accelerația centrului 0 al Pământului, $\bar{\omega}$ și $\bar{\varepsilon}$ viteza și accelerația unghiulară de rotație în jurul polilor iar $\bar{r} = \overline{OP}$. Accelerația \bar{a}_0 are în mișcarea aproximativ circulară uniformă cu perioada 365 zile și raza $R \approx 150.000.000$ km, valoarea

$$a_0 = R\Omega^2 = R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0,006 \text{ m/s}^2$$

Termenul $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$ are mărimea maximă la ecuator: $|\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})| = \omega^2 r$ unde $r = 6370$ km este raza Pământului și deci

$$\omega^2 r \approx \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600}\right)^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \approx 0,03 \text{ m/s}^2$$

Rezultă $\omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ și deci $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = 0$ sau $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} \approx 0$. Accelerația de transport are valoare foarte mică, prin urmare se poate neglija.

În ceea ce privește accelerația Coriolis

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r$$

se poate deduce chiar dacă se consideră $v_r = 360 \text{ km/h} = 100 \text{ m/s}$, că mărimea $a_c < 2\omega v_r = 2 \cdot 7,3 \cdot 10^{-5} \cdot 100 = 0,0146 \text{ m/s}^2$, deci și aceasta este considerată neglijabilă. În concluzie, față de accelerația gravitațională $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$, toate celelalte accelerații sunt neglijabile, deci sistemul legat de Pământ se poate considera inerțial.

16. DINAMICA PUNCTULUI DE MASĂ VARIABILĂ

16.1 Stabilirea ecuației diferențiale a mișcării punctului material de masă variabilă

Pentru realizarea marilor viteze necesare pentru lansările de sateliți artificiali ai Pământului, K.E.Țiolkovski, H.Oberth (născut în Sibiu în 1894), R.H.Goddard etc. au preconizat utilizarea rachetei ca mijloc de propulsie.

Modelul mecanic al rachetei este constituit de teoria punctului de masă variabilă. Racheta este un corp solid care este propulsat astfel: o cantitate de combustibil transportat de o rachetă produce prin ardere gaze care sunt expulzate cu o mare viteză, fapt care imprimă rachetei o mișcare în sensul opus, fenomen asimilabil cu reculul armelor de foc.

În acest paragraf vom considera că masa punctului este variabilă în timp: $m=m(t)$. Dacă punctului de masă m i se alipesc particule de masă Δm în timpul Δt atunci masa lui este crescătoare iar dacă i se desprind particule de masă $(-\Delta m)$ masa punctului este descrescătoare.

Pentru început se consideră cazul alipirii. Presupunem că punctul de masă m în mișcare are viteza absolută \bar{v} iar particula care se alipește și are masa Δm , are viteza $\bar{v} + \Delta \bar{v}$. În același interval de timp viteza particulei este tot $\bar{v} + \Delta \bar{v}$.

Înainte de alipire, sistemul punct material-particulă are impulsul

$$\bar{H}(t) = m\bar{v} + \Delta m\bar{u} \quad (16.1)$$

iar după alipire

$$\bar{H}(t + \Delta t) = (m + \Delta m)(\bar{v} + \Delta \bar{v}) \quad (16.2)$$

Notând cu \bar{F} rezultanta forțelor date și de legătură ce acționează asupra punctului material, teorema impulsului se scrie în formele echivalente

$$\dot{\bar{H}} = \bar{F} \Leftrightarrow \frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{F} \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{H}(t + \Delta t) - \bar{H}(t)}{\Delta t} = \bar{F} \quad (16.3)$$

În cazul de față, ținând seama de relațiile (16.1) și (16.3) se obține:

$$\bar{H}(t + \Delta t) - \bar{H}(t) = m\Delta \bar{v} + \Delta m(\bar{v} - \bar{u})$$

astfel că rezultă

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m\Delta \bar{v} + \Delta m(\bar{v} - \bar{u})}{\Delta t} = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} + (\bar{v} - \bar{u}) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = m \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\bar{v} - \bar{u})$$

(16.4)

Ținând seama de relațiile (16.3) și (16.4), se obține:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dm}{dt} (\bar{u} - \bar{v}) \quad (16.5)$$

Ecuția (16.5) este ecuația fundamentală a mișcării punctului de masă variabilă. Aceasta a fost propusă de Mescerski și Levi-Civita independent unul de celălalt în prima parte a secolului XX. Ea explică cu o foarte bună precizie mișcarea rachetei. Este de remarcat că această ecuație obținută pe baza considerentelor de ordin mecanic foarte simplificate, care au fost expuse mai sus, este implicit cuprinsă în rezultatele găsite de Euler încă în secolul al XVIII-lea. Expresia

$$\bar{u} - \bar{v} = \bar{v}_r$$

reprezintă viteza relativă a particulei față de punctul material înainte de alipire.

În cazul desprinderii, se presupune că în timpul Δt , masa punctului se modifică la $m - \Delta m$ iar viteza devine $\bar{v} + \Delta \bar{v}$. Particula de masă Δm în același interval de timp își schimbă viteza de la \bar{v} la \bar{u} .

Înainte de desprindere, impulsul sistemului punct material-particulă este

$$\bar{H}(t) = m\bar{v}$$

iar după desprindere

$$\bar{H}(t + \Delta t) = (m - \Delta m)(\bar{v} + \Delta \bar{v}) + \Delta m\bar{u}$$

Din ultimele două relații, se deduce:

$$\bar{H}(t + \Delta t) - \bar{H}(t) = m\Delta \bar{v} - \Delta m(\bar{v} - \bar{u})$$

astfel că aplicând teorema impulsului (16.3) se obține

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dm}{dt} (\bar{u} - \bar{v}) \quad (16.6)$$

unde $\bar{v}_r = \bar{u} - \bar{v}$ reprezintă viteza relativă a particulei față de punctul material după desprindere.

Ecuțiile (16.5) și (16.6) sunt identice, dacă se consideră că la desprindere masa particulei este negativă ($dm < 0$).

Termenul

$$\bar{F}_r = \frac{dm}{dt} (\bar{u} - \bar{v}) = \frac{dm}{dt} \bar{v}_r \quad (16.7)$$

din ecuațiile (16.5) sau (16.6) se numește forță reactivă, astfel că ecuația fundamentală a mișcării punctului de masă variabilă se mai poate prezenta și sub forma

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{F}_r \quad (16.8)$$

Se observă că spre deosebire de legea lui Newton, la punctele de masă variabilă se introduce o forță complementară (forța de reacție).

În particular, pentru $\bar{v}_r = 0$, forța reactivă este nulă și ecuația mișcării (16.6) este identică cu legea lui Newton dar masa m este variabilă.

Un alt caz important corespunde particulei în repaus, când $\bar{u} - \bar{v} = 0$ astfel că ecuația (16.6) devine:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}$$

Un exemplu în acest sens este cel al meteoriților care cad pe o planetă.

În general, se poate considera că în același timp se alipesc și se desprind particule: particula de masă $(-dm_1)$ cu $dm_1 > 0$ se desprinde iar particula de masă dm_2 se alipește. Vitezele absolute ale particulelor după desprindere sunt \bar{u}_1 și înainte de desprindere \bar{u}_2 iar viteza absolută a punctului material este \bar{v} .

Procesele de desprindere și alipire sunt independente între ele, astfel că rezultă că se poate generaliza ecuația de mișcare a punctului material de masă variabilă, sub forma

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dm_1}{dt}(\bar{u}_1 - \bar{v}) + \frac{dm_2}{dt}(\bar{u}_2 - \bar{v}) \quad (16.9)$$

16.2 Teoreme generale în dinamica punctului material de masă variabilă

În cazul punctului de masă variabilă, teoremele generale au forme deosebite față de cele întâlnite la punctul material de masă constantă.

Teorema impulsului se obține din formula (16.6) și are forma

$$\dot{\bar{H}} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F} + \frac{dm}{dt}\bar{u} \quad (16.10)$$

Teorema momentului cinetic se obține din (16.10) pe care o înmulțim vectorial cu \bar{r} și ținând seama că $\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} = 0$:

$$\dot{\bar{K}} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F} + \frac{dm}{dt}(\bar{r} \times \bar{u}) \quad (16.11)$$

Se observă că pentru $\bar{u} = 0$ se regăsește teorema momentului cinetic (13.81) pentru punctul material de masă constantă.

Teorema energiei cinetice se obține înmulțind ecuația (16.6) cu $d\bar{r} = \bar{v}dt$:

$$m d\bar{v} \cdot \bar{v} = \bar{F} \cdot \bar{v}dt + dm(\bar{u} - \bar{v})\bar{v}$$

sau

$$\frac{1}{2} m dv^2 + dm \cdot v^2 = \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} + dm(\bar{u} - \bar{v})$$

și deci în final

$$d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) + \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} + dm(\bar{u} - \bar{v}) \quad (16.12)$$

17. TEOREMA ENERGIEI CINETICE

17.1. Lucrul mecanic al forțelor ce acționează asupra unui corp rigid

Se consideră un corp rigid (C) a cărui mișcare generală se reduce într-un punct O la o mișcare de translație cu viteza $\bar{\mathbf{v}}_0$ a lui O și la o mișcare de rotație cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul axei instantanee ce trece prin O. Pentru început, se presupune că asupra unui punct P care are vectorul de poziție $\bar{\mathbf{r}} = \overline{OP}$ acționează o singură forță $\bar{\mathbf{F}}$. Se știe că viteza $\bar{\mathbf{v}}$ a lui P este dată de relația:

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}$$

În timpul dt , punctul P se va deplasa cu distanța elementară vectorială

$$d\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{v}} dt = \bar{\mathbf{v}}_0 dt + (\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}) dt$$

Pe de altă parte, lucrul mecanic elementar al forței $\bar{\mathbf{F}}$ este

$$dL = \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}_0 dt + \bar{\mathbf{F}} (\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}) dt$$

sau ținând seama de o proprietate a produsului mixt, se obține

$$dL = \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}_0 dt + (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}}) \bar{\omega} dt$$

Dacă se notează cu $d\bar{\mathbf{r}}_0 = \bar{\mathbf{v}}_0 dt$ deplasarea elementară în mișcarea de translație a rigidului și convenind să se noteze $d\bar{\theta} = \bar{\omega} dt$ unghiul elementar de rotație, ultima relație devine

$$dL = \bar{\mathbf{F}} d\bar{\mathbf{r}}_0 + (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}}) d\bar{\theta}$$

Ținând seama că $\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{M}}_0$ reprezintă momentul forței $\bar{\mathbf{F}}$ în raport cu punctul O, se obține:

$$dL = \bar{\mathbf{F}} d\bar{\mathbf{r}}_0 + \bar{\mathbf{M}}_0 d\bar{\theta} \quad (17.1)$$

În cazul general, dacă asupra corpului rigid acționează un sistem oarecare de forțe $(\bar{\mathbf{F}}_i)_{i=1, N}$, atunci lucrul mecanic elementar se obține adunând lucrurile mecanice ale fiecărei forțe:

$$dL = \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) d\vec{r}_0 + \left(\sum_{i=1}^N \vec{M}_{i0} \right) d\vec{\theta}$$

Dar

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{R} ; \sum_{i=1}^N \vec{M}_{i0} = \vec{M}_0$$

sunt forța rezultantă respectiv momentul resultant și deci în final:

$$dL = \vec{R} d\vec{r}_0 + \vec{M}_0 d\vec{\theta} \quad (17.2)$$

În particular, dacă asupra corpului rigid (C) acționează un cuplu de forțe (\vec{F} , $-\vec{F}$) reprezentat prin vectorul moment \vec{M} (fig.17.1), pentru că $\vec{R} = \vec{F} - \vec{F} = 0$, rezultă din formula (17.2):

$$dL = \vec{M} \cdot d\vec{\theta} = M d\theta \cos \alpha$$

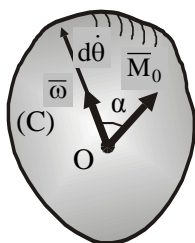


Fig.17.1

deci lucrul mecanic elementar al unui cuplu este egal cu produsul scalar dintre vectorul \vec{M} și vectorul rotație elementară $d\vec{\theta} = \vec{\omega} dt$.

Lucrul mecanic finit între două poziții A și B este:

$$L_{A-B} = \int_A^B \vec{M} d\vec{\theta} = \int_A^B M d\theta \cos \alpha \quad (17.3)$$

Se întâlnesc două cazuri: $\alpha = 0$ (cuplu motor) sau $\alpha = \pi$ (cuplu rezistent) pentru care lucrul mecanic devine respectiv:

$$L_{A-B} = M\theta ; L_{A-B} = -M\theta \quad (17.4)$$

17.2. Lucrul mecanic al forțelor interioare

Fie forțele \vec{F} și $-\vec{F}$ interioare care acționează asupra particulelor P și Q și au vectorii de poziție $\vec{r}_P = \vec{OP}$ și $\vec{r}_Q = \vec{OQ}$. Lucrul mecanic elementar al acestor forțe interioare devine:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}_P + (-\vec{F}) \cdot d\vec{r}_Q = \vec{F} \cdot d(\vec{r}_P - \vec{r}_Q) = \vec{F} \cdot d\vec{QP}$$

Cum forța \vec{F} este coliniară cu \vec{QP} , $\vec{F} = \lambda \vec{QP}$, rezultă

$$dL = \lambda \vec{QP} d\vec{QP} = \frac{1}{2} \lambda d\vec{QP}^2 - \frac{1}{2} \lambda \vec{QP}^2$$

Pentru un sistem $(\vec{F}_i, -\vec{F}_i)_{i=1, N}$ de forțe interioare, lucrul mecanic elementar va fi

$$dL = \frac{1}{2} \sum \lambda_i dQ_i P_i^2$$

Dar într-un rigid particulele P_i și Q_i au

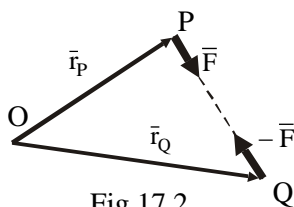


Fig.17.2

nemodificată distanța $P_i Q_i$, deci $P_i Q_i = \text{constantă}$, astfel că

$$dL = 0$$

În concluzie, lucrul mecanic al tuturor forțelor interioare dintre particulele unui rigid este nul oricare ar fi deplasarea rigidului.

17.3. Calculul energiei cinetice în diferite mișcări ale rigidului

Pentru un sistem de N puncte materiale energia cinetică se definește ca fiind suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor sale:

$$E_C = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (17.5)$$

Energia cinetică este o mărime scalară, pozitivă, dependentă de timp.

În cazul unui corp rigid, viteza \vec{v} a unui punct arbitrar depinde de parametrii cinematici ai distribuției vitezelor. În general, calculul energiei cinetice este dificil, astfel că vom studia separat fiecare caz particular în parte:

a) Rigid în mișcare de translație. Toate punctele rigidului au la un moment dat aceeași viteză $\vec{v}_i = \vec{v}_0 = \vec{v}$, deci formula de calcul a energiei cinetice este

$$E_C = \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} M v^2 \quad (17.6)$$

unde $M = \sum_{i=1}^N m_i$ este masa rigidului.

b) Rigid în mișcare de rotație (fig. 17.3). Viteza unui punct oarecare P din rigid este:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Mărimea vitezei este:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega d$$

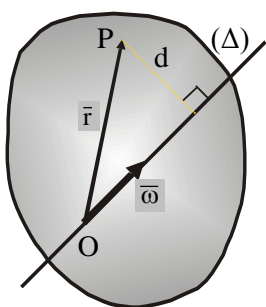


Fig. 17.3

unde ω reprezintă mărimea vitezei unghiulare (aceeași pentru toate punctele din rigid) iar d este distanța de la punctul P la axa Δ . Energia cinetică a rigidului este:

$$E_C = \sum \frac{1}{2} m v^2 = \sum \frac{1}{2} m \omega^2 d^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum m d^2 = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2 \text{ unde } J_{\Delta}$$

este momentul de inerție al rigidului în raport cu axa de rotație (Δ). Deci

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2 \quad (17.7)$$

În cazul general axa Δ își schimbă poziția în timp și în spațiu, deci momentul

de inerție J_{Δ} este variabil în timp. Când axa de rotație este fixă, J_{Δ} este constant. În acest caz, rigidul are o mișcare de rotație cu axă fixă.

Dacă axa de rotație Δ este mobilă în jurul unui punct fix O situat pe axă, J_{Δ} este variabil și deci mai greu de calculat. În acest caz rigidul are o mișcare de rotație cu punct fix. Prin urmare, se alege un sistem de referință $Oxyz$ cu originea în punctul fix O , legat de rigid, deci mobil odată cu rigidul. Axele Ox , Oy , Oz sunt axe principale de inerție ale rigidului în raport cu punctul fix O . Cosinusurile directoare ale direcției axei Δ (deci ale lui $\vec{\omega}$) sunt:

$$\cos \alpha = \frac{\omega_x}{\omega}; \cos \beta = \frac{\omega_y}{\omega}; \cos \gamma = \frac{\omega_z}{\omega} \quad (17.8)$$

astfel că din formula (6.32) se obține:

$$J_{\Delta} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma \quad (17.9)$$

în care J_x, J_y, J_z sunt momentele de inerție ale rigidului în raport cu punctul fix O .

Înlocuind (17.8) în (17.9) se obține

$$E_C = J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 \quad (17.10)$$

în care $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ sunt funcții de timp.

c) Rigid în mișcare plană. Se consideră centrul de greutate C al rigidului iar sistemul de referință $Cxyz$ are axa Cz perpendiculară pe planul mișcării. În acest caz, axa instantanee de rotație Δ este perpendiculară pe planul mișcării în centrul instantaneu de rotație I și deci Δ este paralelă cu Cz . Aplicând formula lui Steiner, momentul de inerție J_{Δ} este:

$$J_{\Delta} = J_z + M \cdot IC^2$$

Înlocuind această relație în (17.7) și ținând seama că $\omega \cdot IC = v_C$, formula de calcul a energiei cinetice în mișcarea plană devine:

$$E_C = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (17.11)$$

Formula (17.11) este prima formulă a lui Koenig iar ω și v_C sunt dependente de timp.

d) Rigid în mișcare generală. Distribuția de viteze în mișcarea generală a rigidului este de rototranslație, fiind caracterizată de viteza unghiulară $\vec{\omega}$ în jurul axei instantanee de rotație Δ trecând prin centrul de greutate C și prin viteza v_C a acestuia. Viteza \vec{v} a unui punct oarecare P al cărui vector de poziție este $\vec{CP} = \vec{r}$ este dată de expresia:

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

și deci

$$E_C = \sum \frac{1}{2} m v^2 = \sum \frac{1}{2} m [v_C^2 + 2 \vec{v}_C \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \omega^2 d^2]$$

unde d este distanța de la punct la axa Δ . Ultima expresie se mai scrie:

$$E_C = \frac{1}{2} v_C^2 \sum m + \frac{\omega^2}{2} \sum m d^2 + \sum m \bar{v}_C \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

Ținând seama de notațiile:

$$\sum m = M ; \sum m d^2 = J_A$$

și de relația

$$\bar{v}_C \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) = (\bar{v}_C \times \bar{\omega}) \cdot \bar{r}$$

se obține

$$\sum m \bar{v}_C (\bar{\omega} \times \bar{r}) = (\bar{v}_C \times \bar{\omega}) \sum m \bar{r} = 0$$

pentru că $\sum m \bar{r} = 0$ ($\bar{r} = \overline{CP}$). În final:

$$E_C = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2 \quad (17.12)$$

Energia cinetică a rigidului în mișcarea generală este energia cinetică a centrului maselor adunată cu energia cinetică în mișcarea de rotație în jurul axei instantanee ce trece prin centrul maselor (Teorema a doua a lui Koenig).

17.4. Teorema energiei cinetice

Se consideră un sistem material oarecare supus la diferite forțe exterioare date și de legătură și la diferite forțe interioare în două poziții succesive A și B.

Pentru fiecare particulă care compune sistemul, se scrie teorema energiei cinetice și se însumează:

$$\sum \frac{1}{2} m v_B^2 - \sum \frac{1}{2} m v_A^2 = L_{A-B} \quad (17.13)$$

Dacă se notează $E_{CB} = \sum \frac{1}{2} m v_B^2$ energia cinetică totală a sistemului în poziția

B și $E_{CA} = \sum \frac{1}{2} m v_A^2$ energia cinetică a sistemului în poziția A și L_{A-B} suma lucrurilor mecanice ale tuturor forțelor date, de legătură și interioare între pozițiile A și B, atunci (17.13) se mai scrie:

$$E_{CB} - E_{CA} = L_{A-B} \quad (17.14)$$

ceea ce constituie teorema energiei cinetice sub formă integrală.

Sub formă diferențială, teorema energiei cinetice se exprimă sub forma:

$$dE_C = dL \quad (17.15)$$

unde E_C este energia cinetică a sistemului iar dL este lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare date, de legătură și interioare:

$$dL = dL_d + dL_l + dL_{int}$$

Pentru corpuri rigide, forțele interioare nu intervin deoarece lucrul lor mecanic este nul, iar energia cinetică se calculează prin însumarea energiilor cinetice ale fiecărui corp.

17.5. Teorema conservării energiei

În unele situații sistemele materiale dispun de o energie care rezultă numai din poziția ocupată într-un anumit câmp de forțe. Aceste forțe pot efectua lucru mecanic. De exemplu, forța dintr-un arc sau greutatea corpurilor pot produce lucru mecanic. Această energie de poziție a sistemelor materiale se numește potențială. Mărimea energiei potențiale se determină calculând lucrul mecanic rezistent pentru a aduce sistemul material dintr-o poziție inițială la poziția dorită și schimbând semnul acestui lucru mecanic pentru a-l face pozitiv. Dacă se notează energia potențială cu E_P , atunci:

$$E_P = -L = -\int \vec{F} d\vec{r} = -U$$

unde U este funcția de forță. Forța derivă dintr-o funcție de forțe deci câmpul este conservativ.

Presupunând că forțele exterioare și interioare alcătuiesc un sistem conservativ, se poate scrie:

$$L_{A-B} = L_{ext} + L_{int} = U_B - U_A = E_{P_A} - E_{P_B}$$

deci teorema energiei cinetice (17.14) devine:

$$E_{C_B} - E_{C_A} = E_{P_A} - E_{P_B}$$

sau

$$E_{C_B} + E_{P_B} = E_{C_A} + E_{P_A} \quad (17.16)$$

Suma $E_C + E_P$ dintre energia cinetică și energia potențială se numește energie mecanică. Formula (17.16) duce la teorema de conservare a energiei într-un câmp conservativ de forțe, energia mecanică a unui sistem material este constantă. În astfel de câmpuri conservative are loc o trecere a energiei cinetice în energie potențială și

invers: o trecere a energiei potențiale în energie cinetică.

În Univers, legea conservării energiei are o expresie mai generală: suma dintre energia cinetică E_C , potențială E_P precum și toate celelalte energii W (termică, electrică, magnetică etc.) este constantă, într-un sistem izolat în mișcare:

$$E_C + E_P + W = \text{const.}$$

18. TEOREMELE IMPULSULUI

18.1. Calculul impulsului și a momentului cinetic

Pentru un sistem de N particule materiale sau de corpuri în mișcare, impulsul total \bar{H} este suma vectorială a impulsurilor particulelor sale:

$$\bar{H} = \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \bar{r}_i \right) = \frac{d}{dt} (M \bar{r}_C) = M \bar{v}_C \quad (18.1)$$

unde \bar{v}_C este viteza centrului de greutate al sistemului. Impulsul total al unui sistem material în mișcare este impulsul centrului său de masă în care se presupune concentrată toată masa sistemului.

Momentul cinetic total \bar{K}_0 în raport cu un punct O , la un moment arbitrar, este suma vectorială a momentelor cinetice ale particulelor componente:

$$\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i \quad (18.2)$$

În general, din definiția (18.2) nu se poate stabili o formulă generală de calcul a momentului cinetic total așa cum s-a stabilit pentru impulsul total, deoarece momentul cinetic total depinde de punctul O și de distribuția vitezelor particulelor.

Impulsul total \bar{H} și momentul cinetic \bar{K}_0 alcătuiesc torsorul de reducere în punctul O al tuturor impulsurilor sistemului în mișcare considerat.

Vom stabili formulele de calcul pentru momentul cinetic total în diferite mișcări ale unui corp rigid, după cum urmează:

a) Pentru un corp rigid în mișcare de translație:

$$\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \left(\sum_{i=1}^N m_i \bar{r}_i \right) \times \bar{v}_C = M \bar{r}_C \times \bar{v} = \bar{r}_C \times \bar{H} \quad (18.3)$$

În particular dacă punctul O coincide cu centrul de greutate C , rezultă

$$\bar{K}_C = 0$$

b) Pentru un corp rigid în mișcare de rotație oarecare, se consideră un punct O de pe

axa Δ de rotație, în jurul căreia corpul se rotește cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$. În formula (18.2) viteza are formula $\bar{v}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i$ și deci:

$$\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times m_i (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \sum_{i=1}^N m_i [\bar{r}_i^2 \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \bar{r}_i) \bar{r}_i]$$

În raport cu sistemul de referință Oxyz, se poate scrie

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2; \quad \bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}; \quad \bar{\omega} \cdot \bar{r}_i = \omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i$$

astfel că rezultă:

$$\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^N m_i [(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}) - (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)(x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k})]$$

Se proiectează ultima expresie pe axele sistemului de coordonate și se notează K_{0x}, K_{0y}, K_{0z} proiecțiile lui \bar{K}_0 pe axe:

$$\bar{K}_0 = K_{0x} \bar{i} + K_{0y} \bar{j} + K_{0z} \bar{k}$$

de unde pentru K_{0x} se obține:

$$K_{0x} = \omega_x \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i$$

Ținând seama de formulele:

$$\sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) = J_x; \quad \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i = J_{xy}; \quad \sum_{i=1}^N m_i z_i x_i = J_{xz}$$

expresia lui K_{0x} devine:

$$K_{0x} = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z \quad (18.4)$$

și analog

$$K_{0y} = J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z - J_{xy} \omega_x$$

$$K_{0z} = J_z \omega_z - J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y$$

În particular, dacă corpul rigid are o mișcare de rotație cu axă fixă, alegând axa de rotație Oz să coincidă cu Δ , deci celelalte două axe Ox și Oy sunt situate într-un plan perpendicular pe axă, avem:

$$\omega_x = \omega_y = 0; \quad \omega_z = \omega$$

și deci

$$K_{0x} = -J_{xz} \omega; \quad K_{0y} = -J_{yz} \omega; \quad K_{0z} = J_z \omega$$

$$\bar{K}_0 = -J_{xz} \omega \bar{i} - J_{yz} \omega \bar{j} + J_z \omega \bar{k} \quad (18.5)$$

În cazul când rigidul este un corp de revoluție, axa de rotație este chiar axă de simetrie (deci axă principală de inerție) și alegând axa Oz ca axă de rotație, rezultă:

$$\omega_x = \omega_y = 0; \quad \omega_z = \omega$$

$$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0; \quad K_x = K_y = 0; \quad K_z = J_z \omega$$

$$\bar{K}_0 = J_z \omega \bar{k}$$

$$(18.6)$$

c) Pentru un corp rigid în mișcare de rotație cu punct fix O, este important să se aleagă axele de coordonate ca fiind axele principale de inerție ale rigidului corespunzătoare punctului O. În acest caz, formula momentului cinetic are expresia:

$$\bar{K}_0 = J_x \omega_x \bar{i} + J_y \omega_y \bar{j} + J_z \omega_z \bar{k} \quad (18.7)$$

unde J_x, J_y, J_z sunt momentele principale de inerție în raport cu axele principale de inerție.

d) Pentru un rigid în mișcare generală, se va descompune această mișcare într-o translație cu viteza \bar{v}_C a centrului maselor și o mișcare de rotație în jurul axei instantanee trecând prin centrul maselor cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$. Dacă se notează J_x, J_y, J_z momentele principale de inerție în raport cu axele principale de inerție Cx, Cy, Cz și $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ proiecțiile pe aceste axe ale vitezei unghiulare $\bar{\omega}$, atunci expresia momentului cinetic este:

$$\bar{K}_0 = J_x \omega_x \bar{i} + J_y \omega_y \bar{j} + J_z \omega_z \bar{k} \quad (18.8)$$

În particular, dacă mișcarea este plană, față de sistemul de coordonate $Cxyz$ amintit mai sus, cu axa Cz perpendiculară pe planul mișcării iar $\bar{\omega}$ dirijat după această axă, formula momentului cinetic este:

$$\bar{K}_C = -J_{xz} \omega \bar{i} - J_{yz} \omega \bar{j} + J_z \omega \bar{k} \quad (18.9)$$

Dacă axa Cz este principală de inerție, se obține:

$$\bar{K}_C = J_z \omega \bar{k}$$

18.2. Teoremele impulsului pentru corpul rigid

Pentru un sistem oarecare de particule, am notat cu \bar{H} impulsul total al sistemului și prin \bar{K}_0 momentul său cinetic total în raport cu un punct fix O sau în raport cu centrul de greutate C al sistemului. De asemenea se notează cu \bar{R} rezultanta tuturor forțelor exterioare date și de legătură ce acționează asupra sistemului și cu \bar{M}_0 momentul resultant al tuturor acestor forțe în raport cu punctele O sau C:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i^d + \sum_{i=1}^N \bar{F}_i^l; \quad \bar{M}_0 = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times \bar{F}_i^d + \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times \bar{F}_i^l$$

a) Prima teoremă a impulsului (teorema centrului de masă): Derivata impulsului total în raport cu timpul este egală cu rezultanta tuturor forțelor date și de legătură:

$$\dot{\bar{H}} = M \bar{a}_C = \bar{R} \quad (18.10)$$

Intr-adevăr:

$$\bar{H} = M \bar{v}_C = \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i$$

iar prin derivare în raport cu timpul se găsește:

$$\dot{\vec{H}} = M\dot{\vec{v}}_C = M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$

Dar

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^p \vec{F}_{ij}$$

unde \vec{F}_i este rezultanta forțelor date și de legătură iar $\sum_{j=1}^p \vec{F}_{ij}$ este rezultanta forțelor interioare. Rezultă:

$$\dot{\vec{H}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \vec{F}_{ij} = \vec{R}$$

Forțele interioare sunt două câte două egale și opuse deci se anulează în suma efectuată.

b) Teorema a doua a impulsului (teorema momentului cinetic). Derivata momentului cinetic total în raport cu punctele O sau C, în raport cu timpul, este egală cu suma momentelor forțelor date și de legătură în raport cu același punct:

$$\dot{\vec{K}}_0 = \vec{M}_0 = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (18.11)$$

Intr-adevăr, momentul cinetic în raport cu un punct arbitrar P are expresia:

$$\vec{K}_0 = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m\vec{v}_i$$

unde \vec{r}_i este vectorul de poziție al unui punct P_i din sistem, de masă m_i și viteză \vec{v}_i .

Alegând punctul fix O_1 și notând $\vec{O_1P_i} = \vec{r}_{i1}$, se poate scrie relația

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i1} - \vec{r}_{10}$$

unde $\vec{r}_{10} = \vec{O_1O}$. După derivare rezultă:

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_0$$

Derivata momentului cinetic devine:

$$\dot{\vec{K}}_0 = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \times (m_i \vec{v}_i) + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (m \dot{\vec{v}}_i) = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_0) \times \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (m_i \vec{a}_i)$$

Folosind legea lui Newton pentru punctul P_i , se obține:

$$\dot{\vec{K}}_0 = -\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_0 \times \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^p \vec{F}_{ij} \right)$$

sau

$$\dot{\vec{K}}_0 = -\vec{v}_0 \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

Dar forțele interioare sunt în echilibru deci are loc relația

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = 0$$

Deci derivata momentului cinetic este:

$$\dot{\bar{\mathbf{K}}}_0 = \bar{\mathbf{M}}_0 - M\bar{\mathbf{v}}_0 \times \bar{\mathbf{v}}_C \quad (18.12)$$

adică teorema momentului cinetic în forma cea mai generală.

În aplicații este mai comod să se găsească în ce condiții termenul $M\bar{\mathbf{v}}_0 \times \bar{\mathbf{v}}_C$ este nul. Astfel, dacă punctul 0 este punct fix, atunci $\bar{\mathbf{v}}_0 = 0$, astfel că teorema momentului cinetic se scrie sub forma

$$\dot{\bar{\mathbf{K}}} = \bar{\mathbf{M}}_0$$

Dacă punctul O coincide cu centrul de greutate C al sistemului atunci $\bar{\mathbf{v}}_C = 0$ și deci

$$\dot{\bar{\mathbf{K}}}_C = \bar{\mathbf{M}}_C \quad (18.14)$$

În particular, dacă sistemul de particule sau un corp rigid au o mișcare plană și considerând punctul 0 în centrul instantaneu de rotație I al sistemului, atunci $\bar{\mathbf{v}}_0 = \bar{\mathbf{v}}_I = 0$ și deci:

$$\dot{\bar{\mathbf{K}}}_I = \bar{\mathbf{M}}_I \quad (18.15)$$

Observație (Teorema momentului cinetic în raport cu un punct aflat în mișcare)

În acest caz, se consideră un sistem de particule în mișcare ce au centrul de greutate C. Viteza absolută a unui punct P_i din sistem $\bar{\mathbf{v}}_i$ se poate considera ca fiind compunerea vitezei de transport (viteza centrului de greutate $\bar{\mathbf{v}}_C$) și a vitezei relative $\bar{\mathbf{v}}_{ri}$ față de un sistem de referință mobil. Deci

$$\bar{\mathbf{v}}_i = \bar{\mathbf{v}}_C + \bar{\mathbf{v}}_{ri}$$

Momentul cinetic va fi în acest caz

$$\bar{\mathbf{K}}_C = \sum_{i=1}^N m_i \bar{\mathbf{r}}_i \times (\bar{\mathbf{v}}_C + \bar{\mathbf{v}}_{ri}) = \left(\sum_{i=1}^N m_i \bar{\mathbf{r}}_i \right) \times \bar{\mathbf{v}}_C + \sum_{i=1}^N m_i \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{v}}_{ri} = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{r}}_i \times (m \bar{\mathbf{v}}_{ri})$$

deoarece $\sum_{i=1}^N m_i \bar{\mathbf{r}}_i = 0$. Prin urmare

$$\bar{\mathbf{K}}_C = (\bar{\mathbf{K}}_C)_{rel} \quad (18.16)$$

adică momentul cinetic față de centrul de greutate C se calculează luând în considerare numai mișcarea relativă a sistemului.

Revenind la sistemul de referință cu originea într-un punct O aflat în mișcare de translație, momentul cinetic în raport cu punctul O se poate scrie:

$$\bar{\mathbf{K}}_O = \overline{\mathbf{OC}} \times M\bar{\mathbf{v}}_0 + \bar{\mathbf{K}}_{r0}$$

unde $\bar{\mathbf{K}}_{r0}$ este momentul cinetic calculat în mișcarea relativă față de punctul O.

Deoarece $\overline{\mathbf{OC}}$ are originea mobilă, se poate scrie $\dot{\overline{\mathbf{OC}}} = \bar{\mathbf{v}}_C - \bar{\mathbf{v}}_0$ astfel că derivata momentului cinetic devine:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{K}}}_O &= \dot{\overline{\mathbf{OC}}} \times (M\bar{\mathbf{v}}_0) + \overline{\mathbf{OC}} \times (M\dot{\bar{\mathbf{v}}}_0) + \dot{\bar{\mathbf{K}}}_{r0} = \\ &= (\bar{\mathbf{v}}_C - \bar{\mathbf{v}}_0) \times M\bar{\mathbf{v}}_0 + \overline{\mathbf{OC}} \times M\dot{\bar{\mathbf{a}}}_0 + \dot{\bar{\mathbf{K}}}_{r0} = M\bar{\mathbf{v}}_C \times \bar{\mathbf{v}}_0 + \overline{\mathbf{OC}} \times M\dot{\bar{\mathbf{a}}}_0 + \dot{\bar{\mathbf{K}}}_{r0} \end{aligned}$$

Din formula (18.12) se obține:

$$M\vec{v}_C \times \vec{v}_O + \overline{OC} \times (M\vec{a}_O) + \dot{\vec{K}}_{r0} = \vec{M}_O - M\vec{v}_O \times \vec{v}_C$$

sau

$$\dot{\vec{K}}_{r0} = \vec{M}_O = \overline{OC} \times (M\vec{a}_O) \quad (18.17)$$

Dacă se cunoaște mișcarea punctului O se poate folosi teorema momentului cinetic (18.17)

18.3. Teoreme de conservare a impulsului și a momentului cinetic pentru corpul rigid

Dacă rezultanta tuturor forțelor date și de legătură ce acționează asupra unui sistem material este nulă, impulsul total al sistemului este constant (se conservă). Într-adevăr

$$\dot{\vec{H}} = 0$$

deci se poate scrie teorema de conservare a impulsului

$$\vec{H} = \vec{C}(\text{const.}) = \vec{H}_0 \quad (18.18)$$

Teorema de conservare a impulsului poate avea loc și pe o direcție, de exemplu Ox: dacă rezultanta forțelor date și de legătură are proiecție nulă pe Ox: $R_x=0$ atunci proiecția impulsului pe axa Ox este constantă:

$$\dot{H}_x = M\dot{v}_{cx} = 0 ; H_x = Mv_{cx} = \text{const.}$$

Dacă momentul resultant al forțelor date și de legătură față de un punct fix sau față de centrul de greutate este nul ($\vec{M}_O = 0$), atunci momentul cinetic total al sistemului față de același punct se conservă. Deci:

$$\dot{\vec{K}} = 0$$

care prin integrare conduce la ecuația

$$\vec{K}_0 = \vec{C}(\text{const.}) \quad (18.19)$$

Dacă tot timpul mișcării unui sistem material momentul resultant al forțelor date și de legătură ce acționează asupra lui, în raport cu o axă fixă este nul, momentul cinetic total al sistemului față de aceeași axă fixă se conservă. De exemplu, dacă $M_{0z}=0$ rezultă $K_{0z}=\text{constant}$.

18.4. Dinamica mișcării plane a rigidului

Se consideră un corp rigid (C) de masă M în mișcare plană și care este

acționat de sistemul de forțe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N$. Ne propunem să studiem mișcare corpului.

Din Cinematică se cunoaște că în acest caz, un plan al rigidului rămâne tot timpul mișcării într-un plan fix din spațiu și că în orice plan al rigidului paralel cu planul fix menționat, distribuția de mase și accelerații sunt aceleași.

Pentru a studia dinamica mișcării plane se alege reperul fix $O_1x_1y_1z_1$ astfel ca planul $O_1x_1z_1$ să treacă prin centrul C de greutate al rigidului și să rămână paralel cu planul fix. Reperul mobil se alege cu originea în centrul de greutate : $O \equiv C$. Axele O_1z_1 și Cz se aleg paralele, astfel că planul Oxy alunecă peste planul $O_1x_1y_1$. Se mai consideră un sistem de axe auxiliar $Cx'y'$ astfel ca axele Cx' și Cy' să fie paralele cu O_1x_1 și respectiv O_1y_1 . Cu ajutorul acestor axe se determină unghiul $\theta(t)$.

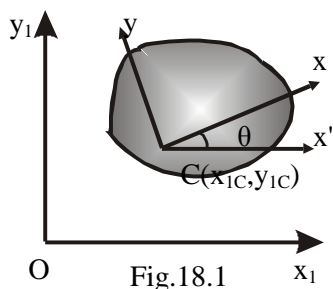


Fig.18.1

Coordonatele centrului de greutate C față de reperul fix sunt $C(x_{1c}, y_{1c}, 0)$. (fig.18.1).

Rigidul în mișcare plană are trei grade de libertate:

$$x_{1c} = x_{1c}(t) ; y_{1c} = y_{1c}(t) ; \theta = \theta(t) \quad (18.20)$$

În punctul C , forțele date și de legătură se reduc la rezultanta \bar{R} și momentul \bar{M} :

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} ; \bar{M}_C = M_{Cx}\bar{i} + M_{Cy}\bar{j} + M_{Cz}\bar{k} \quad (18.21)$$

Pentru a rezolva problema propusă, se aplică teorema impulsului (teorema centrului de masă):

$$M\bar{a}_C = \bar{R}$$

și a momentului cinetic față de centrul C de greutate:

$$\bar{\dot{K}}_C = \bar{M}_C$$

Proiecțiile pe axele reperului mobil a celor două ecuații vectoriale conduc la rezolvarea următorului sistem, ținând seama că $\dot{\bar{K}} = \frac{d\bar{K}}{dt} = \frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{k}$:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_{1c} &= X \\ M\ddot{y}_{1c} &= Y \\ 0 &= Z \\ -J_{C_{xz}}\ddot{\theta} + J_{C_{yz}}\dot{\theta}^2 &= M_{Cx} \\ -J_{C_{yz}}\ddot{\theta} + J_{C_{xz}}\dot{\theta}^2 &= M_{Cy} \\ J_{Cz}\ddot{\theta} &= M_{Cz} \end{aligned} \quad (18.22)$$

În cazul particular al unei plăci plane, care are o mișcare în planul fix $O_1x_1y_1$, se aleg axele Cx și Cy ca fiind axe principale centrale de inerție. În acest caz, sistemul (18.22) se simplifică și are forma:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{x}_{IC} &= X \\
 M\ddot{y}_{IC} &= Y \\
 J_{Cz}\ddot{\theta} &= M_{Cz}
 \end{aligned}
 \tag{18.23}$$

Sistemul (18.23) se rezolvă în anumite condiții inițiale date.

În cazul când rigidul este supus la legături, forțele de legătură introduc necunoscute în plus și prin urmare trebuie să se scrie și relațiile suplimentare de natură geometrică sau mecanică.

19. Dinamica rigidului cu axă fixă

Se consideră un corp rigid având în punctele O_1 și O_2 două articulații ideale (fig.19.1). Asupra rigidului acționează un sistem de forțe exterioare date care se reduc în raport cu punctul O_1 la un torsesor având elementele \bar{R} și M_{O_1} . În cele două articulații apar reacțiunile dinamice necunoscute \bar{R}_1 și \bar{R}_2 .

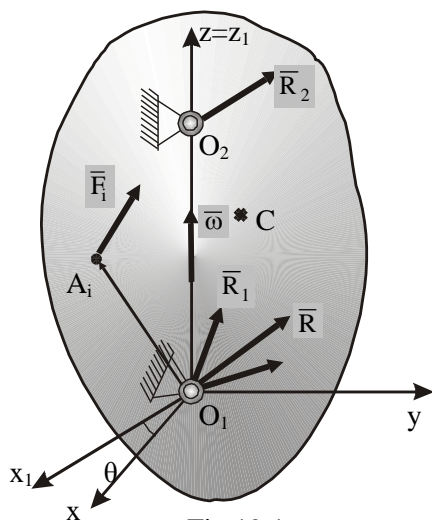


Fig.19.1

Se aleg două sisteme de referință: sistemul de axe $O_1x_1y_1z_1$ este fix, cu axa O_1z_1 dirijată după axa fixă iar sistemul O_1xyz este mobil cu axa Oz suprapusă cu O_1z_1 . Legea de mișcare a corpului este dată de unghiul $\theta(t)$ făcut de axa fixă O_1x_1 cu axa mobilă O_1x .

În momentul inițial se presupune cunoscută poziția corpului dată prin unghiul θ_0 și viteza unghiulară de rotație inițială ω_0 . Se pune problema determinării legii de mișcare $\theta = \theta(t)$ și reacțiunile \bar{R}_1 din articulația O_1 și \bar{R}_2 din articulația O_2 . Rigidul este acționat de forțele exterioare $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_N$ al căror torsesor de reducere în O_1 este:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i ; \quad \bar{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^N \overline{O_1A_i} \times \bar{F}_i
 \tag{19.1}$$

Notând

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{R}}_1 &= X_1 \bar{\mathbf{i}} + Y_1 \bar{\mathbf{j}} + Z_1 \bar{\mathbf{k}} \\ \bar{\mathbf{R}}_2 &= X_2 \bar{\mathbf{i}} + Y_2 \bar{\mathbf{j}} + Z_2 \bar{\mathbf{k}}\end{aligned}\quad (19.2)$$

problema are 7 necunoscute: $\theta(t), X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$. Pentru soluționare se aplică teoremele impulsului și a momentului cinetic. Pentru a aplica teorema impulsului:

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}} = \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{R}}_1 + \bar{\mathbf{R}}_2 \quad (19.3)$$

avem:

$$\bar{\mathbf{H}} = M \bar{\mathbf{v}}_C$$

unde M este masa rigidului iar $\bar{\mathbf{v}}_C$ este viteza centrului său de greutate:

$$\bar{\mathbf{v}}_C = \bar{\omega} \times \overline{O_1 C} = (\dot{\theta} \bar{\mathbf{k}}) \times (x_C \bar{\mathbf{i}} + y_C \bar{\mathbf{j}} + z_C \bar{\mathbf{k}}) = -\dot{\theta} y_C \bar{\mathbf{i}} + \dot{\theta} x_C \bar{\mathbf{j}}$$

Accelerația punctului C este raportată la reperul mobil, astfel că se aplică regula de derivare a vectorilor care au proiecțiile pe sistemul de referință mobil:

$$\bar{\mathbf{a}}_C = \dot{\bar{\mathbf{v}}}_C = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_C}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{\mathbf{v}}_C = -(\dot{\theta}^2 x_C + \ddot{\theta} y_C) \bar{\mathbf{i}} + (\ddot{\theta} x_C - \dot{\theta}^2 y_C) \bar{\mathbf{j}}$$

unde $\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_C}{\partial t}$ este derivata relativă.

Cu acestea, relația (19.3) proiectată pe axele mobile, conduce la sistemul

$$\begin{aligned}M(\dot{\theta}^2 x_C + \ddot{\theta} y_C) + X_1 + X_2 + X &= 0 \\ M(\ddot{\theta}^2 y_C - \ddot{\theta} x_C) + Y_1 + Y_2 + Y &= 0 \\ Z_1 + Z_2 + Z &= 0\end{aligned}\quad (19.4)$$

unde

$$\bar{\mathbf{R}} = X \bar{\mathbf{i}} + Y \bar{\mathbf{j}} + Z \bar{\mathbf{k}}$$

Acest sistem nu se poate rezolva deoarece are 3 ecuații și 7 necunoscute, deci se impune aplicarea teoremei momentului cinetic:

$$\dot{\bar{\mathbf{K}}}_{01} = \bar{\mathbf{M}}_{01} + \overline{O_1 O_2} \times \bar{\mathbf{R}}_2 \quad (19.5)$$

unde $\bar{\mathbf{K}}_{01}$ este momentul cinetic al rigidului calculat în raport cu punctul fix O_1 , adică:

$$\bar{\mathbf{K}}_{01} = -J_{xz} \dot{\theta} \bar{\mathbf{i}} - J_{yz} \dot{\theta} \bar{\mathbf{j}} + J_z \dot{\theta} \bar{\mathbf{k}}$$

Derivata momentului cinetic este

$$\dot{\bar{\mathbf{K}}}_{01} = \frac{d\bar{\mathbf{K}}_{01}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_{01}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{\mathbf{K}}_{01} = (J_{yz} \dot{\theta}^2 - J_{xz} \ddot{\theta}) \bar{\mathbf{i}} - (J_{xz} \dot{\theta}^2 + J_{yz} \ddot{\theta}) \bar{\mathbf{j}} + J_z \ddot{\theta} \bar{\mathbf{k}}$$

Dar

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}_{01} &= M_x \bar{\mathbf{i}} + M_y \bar{\mathbf{j}} + M_z \bar{\mathbf{k}} \\ \overline{O_1 O_2} \times \bar{\mathbf{R}}_2 &= -h Y_2 \bar{\mathbf{i}} + h X_2 \bar{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

unde $h = O_1 O_2$.

Proiecțiile pe axele mobile ale ecuației (19.5) sunt:

$$\begin{aligned}
J_{yz}\dot{\theta}^2 - J_{xz}\ddot{\theta} - M_x + hY_2 &= 0 \\
J_{xz}\dot{\theta}^2 + J_{yz}\ddot{\theta} + M_y + hX_2 &= 0 \\
J_z\ddot{\theta} - M_z &= 0
\end{aligned}
\tag{19.6}$$

Ecuatiile (19.4) și (19.6) formează un sistem de 6 ecuații cu care se va studia problema propusă.

Astfel, din ultima ecuație a sistemului (19.6) se obține ecuația diferențială a mișcării de rotație a rigidului și de aici legea mișcării $\theta = \theta(t)$. Din primele două ecuații (19.6) se obțin:

$$\begin{aligned}
Y_2 &= \frac{1}{h}(M_x + J_{xz}\ddot{\theta} - J_{yz}\dot{\theta}^2) \\
X_2 &= -\frac{1}{h}(M_y + J_{yz}\ddot{\theta} + J_{xz}\dot{\theta}^2)
\end{aligned}$$

Din primele două ecuații (19.4) se determină X_1 și Y_1 :

$$\begin{aligned}
X_1 &= -M(\dot{\theta}^2 x_C + \ddot{\theta} y_C) - X + \frac{1}{h}(M_y + J_{yz}\ddot{\theta} + J_{xz}\dot{\theta}^2) \\
Y_1 &= M(\ddot{\theta} x_C - \dot{\theta}^2 y_C) - Y - \frac{1}{h}(M_x + J_{xz}\ddot{\theta} + J_{yz}\dot{\theta}^2)
\end{aligned}$$

Din ecuația a treia (19.4) se deduce numai suma $Z_1 + Z_2$.

Problema este deci nedeterminată pentru că există o necunoscută în plus. Pentru a elimina în practică această nedeterminare, se adoptă anumite soluții constructive. De obicei în O_2 se realizează o articulație cilindrică ideală, deci pentru această legătură $Z_2 \equiv 0$. Din a treia ecuație (19.4), în acest caz se obține $Z_1 = -Z$.

Dacă rigidul se rotește uniform și axele mobile se aleg astfel încât centrul de greutate C este situat în planul Oyz ($x_C = 0$), proiecțiile reacțiunilor devin ($\dot{\theta} = \omega_0$):

$$\begin{aligned}
X_1 &= -X + \frac{1}{h}(M_y + J_{xz}\omega_0^2) \\
Y_1 &= -Y - \omega_0^2 y_C + \frac{1}{h}(J_{yz}\omega_0^2 - M_x) \\
Z_1 &= -Z
\end{aligned}
\tag{19.7}$$

$$\begin{aligned}
X_2 &= -\frac{1}{h}(M_y + J_{xz}\omega_0^2) \\
Y_2 &= \frac{1}{h}(M_x - J_{yz}\omega_0^2) \\
Z_2 &= 0
\end{aligned}$$

Dacă rigidul este centrat ($x_C = y_C = 0$) rezultă:

$$X_1 = -X + \frac{M_y}{h}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 &= -Y - \frac{M_x}{h} \\
Z_1 &= 0 \\
X_2 &= -\frac{M_y}{h} \\
Y_2 &= \frac{M_x}{h} \\
Z_2 &= 0
\end{aligned}
\tag{19.8}$$

Dacă momentul resultant al forțelor exterioare în raport cu punctul O_1 este nul ($\bar{M}_{01}=0$), rezultă:

$$\dot{\theta} = \omega_0 ; \ddot{\theta} = 0$$

iar reacțiunile dinamice devin:

$$\begin{aligned}
X_1 &= -M\omega_0^2 x_C - X + \frac{J_{xz}\omega_0^2}{h} \\
Y_1 &= -M\omega_0^2 y_C \\
Z_1 &= 0
\end{aligned}
\tag{19.9}$$

$$\begin{aligned}
X_2 &= -\frac{J_{xz}\omega_0^2}{h} \\
Y_2 &= -\frac{J_{yz}\omega_0^2}{h} \\
Z_2 &= 0
\end{aligned}$$

Dacă se admite în plus că O_1z este axă principală de inerție în raport cu punctul O_1 , atunci $J_{xy}=J_{yz}=0$ și din (19.9) se obține $X_2=Y_2=Z_2=0$. Cu alte cuvinte axa de rotație își păstrează direcția și dacă articulația O_2 lipsește. O astfel de axă se numește axă spontană de rotație.

În tehnică există numeroase corpuri care se rotesc cu viteze unghiulare mari și se numesc rotoare, la care reacțiunile din lagăre trebuie să fie cât mai mici posibile. Pentru aceasta, din sistemul (19.4) și (19.6) rezultă că trebuie să se anuleze x_C , y_C , J_{xz} și J_{yz} . Operația prin care se realizează aceste condiții la un rotor se numește echilibrare.

Echilibrarea cea mai simplă este echilibrarea statică ceea ce înseamnă readucerea centrului de greutate pe axa de rotație.

Spre deosebire de aceasta, pentru a face axa de rotație să devină principală centrală de inerție, este necesară o echilibrare dinamică.

Ecuția a treia din (19.6):

$$J_z \ddot{\theta} = M_z(t, \theta, \dot{\theta}) \tag{19.10}$$

poate fi tratată asemănător ecuației mișcării rectilinii a punctului material. Dacă $M_z = M_z(t)$, atunci soluția ecuației (19.10) devine:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{J_z} \int_0^t (t - \tau) M_z(\tau) d\tau$$

Dacă $M_z = M_z(\theta)$, atunci viteza unghiulară $\dot{\theta}$ este dată de formula

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2}{J_z} \int_{\theta_0}^{\theta} M_z(\tau) d\tau} \quad \text{și deci} \quad t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\omega_0^2 + \frac{2}{J_z} \int_{\theta_0}^{\theta} M_z(\gamma) d\gamma}}$$

Dacă $M_z = M_z(\dot{\theta})$ atunci $t = J_z \int_{\omega_0}^{\dot{\theta}} \frac{d\tau}{M_z(\tau)}$ de unde se poate determina viteza unghiulară

$\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$. Ecuația de mișcare (19.10) se poate obține și aplicând teorema energiei cinetice.

19.1. Pendulul fizic

Pendulul fizic este un caz particular al rigidului cu o axă fixă și anume este un corp care se poate mișca în jurul unei axe orizontale Oz și este acționat numai de greutatea proprie (fig.19.2).

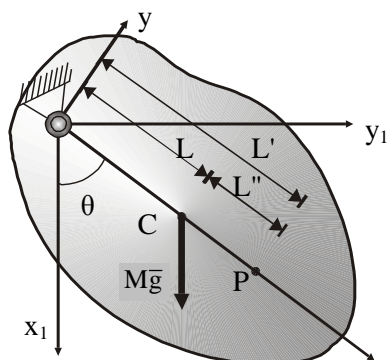


Fig.19.2

Mișcarea se studiază în ipoteza că unghiul $\theta(t)$ este crescător. Se alege axa $Oz_1 \equiv Oz$ de-a lungul axei de rotație și în sensul vitezei unghiulare $\bar{\omega}$. Axa Ox_1 este verticală, trece prin O iar axa Ox trece prin centrul de greutate C ($OC=L$).

Mișcarea se studiază cu ajutorul ecuației (19.10) și observând că momentul greutății $m\bar{g}$ este negativ (\bar{M}_0 în sens invers cu $\bar{\omega}$):

$$J_z \ddot{\theta} = -MgL \sin \theta \quad (19.11)$$

unde M este masa pendulului fizic. Ecuația (19.11) se mai scrie sub forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{J_z} \sin \theta = 0 \quad (19.12)$$

Ecuația (19.12) este similară ecuației pendulului matematic (14.17). Din comparația ecuațiilor de mișcare a acestor pendule se deduce:

$$\frac{g}{L'} = \frac{MgL}{J_z}$$

de unde se obține lungimea L' a unui pendul matematic care oscilează la fel ca pendulul fizic:

$$L' = \frac{J_z}{ML} \quad (19.13)$$

Acest pendul matematic se numește pendul matematic sincron cu pendulul fizic studiat.

Pentru valori mici ale unghiului θ ($\theta \approx 4^\circ \dots 5^\circ$) se poate considera $\sin \theta \approx \theta$, astfel că ecuația (19.12) se poate scrie sub forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{J_z} \theta = 0$$

de unde prin integrare, se obține

$$\theta = C_1 \cos \sqrt{\frac{MgL}{J_z}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{MgL}{J_z}} t$$

cu C_1 și C_2 constante de integrare care se pot determina din condițiile inițiale. Perioada oscilațiilor armonice este

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{MgL}}$$

Se poate arăta că lungimea pendulului matematic sincron este mai mare decât OG: $L' > L$. Astfel, în formula (19.13) se aplică formula lui Steiner și se obține:

$$L' = \frac{J_z}{ML} = \frac{J_{Cz} + ML^2}{ML} = L + \frac{J_{Cz}}{ML} = L + L'' \quad (19.14)$$

Cu ajutorul formulei (19.13) se determină pe axa Ox un punct P astfel ca $OP = L'$. Punctul O se numește centru de suspensie iar punctul P se numește centru de oscilație.

Dacă se suspendă pendulul fizic în P (centrul de oscilație) și se calculează lungimea pendulului matematic sincron, ținând seama că $OP = L''$, rezultă:

$$L_1 = \frac{J_{Pz}}{ML''} = \frac{J_{Cz} + ML''^2}{ML''^2} = L'' + \frac{J_{Cz}}{ML''} \quad (19.15)$$

Din (19.14) se deduce $L'' = \frac{J_{Cz}}{ML}$

astfel că $L_1 = L + \frac{J_{Cz}}{ML} = L' = OP$

Dacă se suspendă un pendul fizic în centrul de oscilație P, se obține drept nou centru de oscilație centrul inițial de suspensie O. Deoarece centrele de suspensie și oscilație se pot schimba reciproc, un astfel de pendul fizic se numește reversibil.

În cazul pendulului fizic, având $M_x = M_y = 0$ și $M_z = -MgL \sin \theta \neq 0$, axa de rotație este axă permanentă de rotație și este necesar să fie sprijinit într-un singur punct al ei

(O) pentru ca $\bar{R}_2 = 0$. În ipoteza că planul Oxy este plan de simetrie, deci $J_{xz}=J_{yz}=0$, din (19.4) și (19.6) se obține:

$$X_1 = -Mg \cos \theta - ML \left[\omega_0^2 + \frac{2MgL}{J_z} (\cos \theta - \cos \theta_0) \right]$$

$$Y_1 = Mg \sin \theta - \frac{M^2 g L^2}{J_z} \sin \theta$$

$$Z_1 = 0$$

Am ținut seama că din ecuația (19.12) prin integrare în condițiile inițiale:

$$t = 0 : \theta = \theta_0 ; \dot{\theta} = \omega_0$$

rezultă

$$\dot{\theta}^2 = \omega_0^2 + \frac{2MgL}{J_z} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

De asemenea, proiecțiile forței exterioare $M\bar{g}$ pe axele mobile sunt

$$X = Mg \cos \theta ; Y = -Mg \sin \theta ; Z = 0$$

20. DINAMICA RIGIDULUI CU PUNCT FIX

Se consideră un corp rigid de masă m având punctul O fix, a cărui fixare se realizează printr-o articulație sferică ideală (fig.20.1). Rigidul este acționat de forțele $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N$ al căror torsor de reducere în punctul fix O este:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i ; \bar{M}_0 = \sum_{i=1}^N \overline{OA_i} \times \bar{F}_i \quad (20.1)$$

Se pune problema de a determina legea de mișcare a rigidului și reacțiunea dinamică \bar{R}' din articulația O .

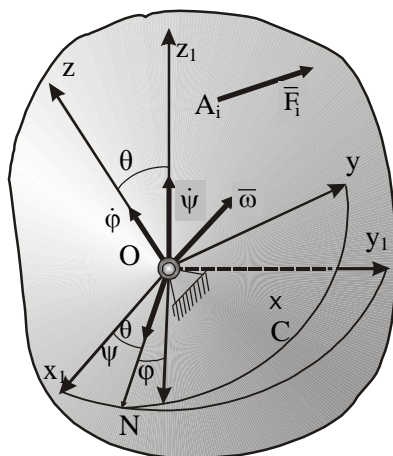


Fig.20.1

Se amintește că un rigid cu un punct fix are trei grade de libertate. De obicei se aleg unghiurile lui Euler ca parametri independenți astfel încât cu ajutorul lor se definește poziția rigidului la un moment dat. Considerând că axele mobile Oxyz legate de rigid sunt dirijate după direcțiile principale de inerție în raport cu punctul fix O , momentul cinetic devine:

$$\bar{K}_0 = J_x \omega_x \bar{i} + J_y \omega_y \bar{j} + J_z \omega_z \bar{k} \quad (20.2)$$

Legea de mișcare și reacțiunea dinamică din O se obțin din teoremele

impulsului și a momentului cinetic în raport cu punctul O:

$$m\bar{a}_C = \bar{R} + \bar{R}' \quad (20.3)$$

$$\dot{\bar{K}}_0 = \bar{M}_0 \quad (20.4)$$

unde momentul forțelor exterioare în raport cu punctul O este cunoscut:

$$\bar{M}_0 = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k}$$

iar

$$\dot{\bar{K}}_0 = \frac{\partial \bar{K}_0}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{K}_0$$

Înlocuind ultimele expresii în relația (20.4) și proiectând pe axele mobile, se obțin ecuațiile:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= M_x \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= M_y \\ J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= M_z \end{aligned} \quad (20.5)$$

Aceste ecuații se numesc ecuațiile lui Euler pentru mișcarea rigidului cu punct fix. Din sistemul (20.5) se deduc relații de forma:

$$\omega_x = \omega_x(t) ; \omega_y = \omega_y(t) ; \omega_z = \omega_z(t) \quad (20.6)$$

Dacă pentru studiul mișcării rigidului cu punct fix se folosesc unghiurile lui Euler, atunci

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (20.7)$$

Din sistemul (20.7) ținând seama de relațiile (20.6), prin integrare se determină legea de mișcare sub forma

$$\psi = \psi(t) ; \theta = \theta(t) ; \varphi = \varphi(t) \quad (20.8)$$

Dar integrarea sistemelor (20.5) și (20.7) este dificilă și poate fi efectuată numai în câteva cazuri particulare pentru orice condiții inițiale și care se va face ulterior.

Cunoscând mișcarea rigidului, reacțiunea dinamică se determină din relația (20.3):

$$\bar{R}' = m\bar{a}_C - \bar{R}$$

sau

$$\bar{R}' = m(\varepsilon \times \overline{OC}) + m[\omega \times (\omega \times \overline{OC})] - \bar{R} \quad (20.9)$$

20.1. Integrarea sistemului (20.5) în cazul Euler-Poinsot

Cazul Euler-Poinsot este caracterizat prin $\bar{M}_0 = 0$ sau $M_x = M_y = M_z = 0$. În acest caz, torsorul de reducere în punctul fix O este format dintr-o singură forță \bar{R} ce

trece prin punctul O. Un exemplu în acest sens este un corp rigid greu suspendat în centrul său de greutate C, neacționat de alte forțe.

Ecuatiile lui Euler devin:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= 0 \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= 0 \\ J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= 0 \end{aligned} \quad (20.10)$$

Dacă prima ecuație se înmulțește cu ω_x , a doua cu ω_y iar ultima cu ω_z și apoi se adună, se obține:

$$J_x \dot{\omega}_x \omega_x + J_y \dot{\omega}_y \omega_y + J_z \dot{\omega}_z \omega_z = 0$$

sau prin integrare:

$$J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 = \text{const.} = 2E_{C_0} \quad (20.11)$$

Relația (20.11) reprezintă integrala primă a energiei cinetice.

Pe de altă parte, dacă se înmulțește prima ecuație din (20.10) cu $J_x \omega_x$, a doua ecuație cu $J_y \omega_y$ și ultima ecuație cu $J_z \omega_z$, apoi se adună, rezultă:

$$J_x^2 \dot{\omega}_x \omega_x + J_y^2 \dot{\omega}_y \omega_y + J_z^2 \dot{\omega}_z \omega_z = 0$$

Integrând ultima ecuație, se obține:

$$J_x^2 \omega_x^2 + J_y^2 \omega_y^2 + J_z^2 \omega_z^2 = \text{const.} = K_0^2 \quad (20.12)$$

ceea ce reprezintă constanta momentului cinetic.

Integrala primă a energiei cinetice împreună cu integrala primă a momentului cinetic și cu una dintre ecuațiile lui Euler, formează un sistem de ecuații diferențiale echivalent cu ecuațiile lui Euler (20.10):

$$\begin{aligned} J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 &= 2E_{C_0} \\ J_x^2 \omega_x^2 + J_y^2 \omega_y^2 + J_z^2 \omega_z^2 &= K_0^2 \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= 0 \end{aligned} \quad (20.13)$$

în care $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ sunt funcții de timp necunoscute. Se vor exprima vitezele unghiulare ω_x și ω_z funcție de ω_y . Astfel, în sistemul (20.13), se înmulțește prima ecuație cu $(-J_z)$ se adună cu a doua ecuație și se obține:

$$\omega_x^2 (J_x^2 - J_x J_z) + \omega_y^2 (J_y^2 - J_y J_z) = K_0^2 - 2E_{C_0} J_z$$

Din această ecuație se deduce:

$$\omega_x = C_1 \sqrt{C_2^2 - \omega_y^2} \quad (20.14)$$

unde s-au folosit notațiile:

$$C_1 = \sqrt{\frac{J_y(J_y - J_z)}{J_x(J_x - J_z)}}; \quad C_2^2 = \frac{K_0^2 - 2E_{C_0} J_z}{J_y(J_y - J_z)}$$

Pentru exprimarea lui ω_z în funcție de ω_y se înmulțește prima ecuație din

(20.13) cu J_x și împreună cu a doua ecuație, prin scădere, se obține relația:

$$\omega_y^2(J_y J_x - J_y^2) + \omega_z^2(J_x J_z - J_z^2) = 2E_{C_0} J_z - K_0^2$$

din care se obține

$$\omega_z = C_3 \sqrt{C_4^2 - \omega_y^2} \quad (20.15)$$

unde

$$C_3 = \sqrt{\frac{J_y(J_x - J_y)}{J_z(J_x - J_z)}}; \quad C_4^2 = \frac{2E_{C_0} J_x - K_0^2}{J_y(J_x - J_y)}$$

Toate constantele C_1, C_2, C_3 și C_4 sunt definite în ipoteza $J_x > J_y > J_z$.

Ultima ecuație a sistemului (20.13), după folosirea relațiilor (20.14) și (20.15), se mai scrie astfel:

$$J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) C_1 C_3 \sqrt{(C_2^2 - \omega_y^2)(C_4^2 - \omega_y^2)} = 0$$

sau separând variabilele:

$$\frac{d\omega_y}{\sqrt{(C_2^2 - \omega_y^2)(C_4^2 - \omega_y^2)}} = C_5 dt \quad (20.16)$$

unde

$$C_5 = \frac{J_z - J_x}{J_y} C_1 C_3$$

Deoarece $C_2 > C_4$, urmează că ecuația (20.16) este definită numai dacă

$$\omega_y^2 < C_2^2; \quad \omega_y^2 < C_4^2 \Leftrightarrow \omega_y^2 < C_4^2$$

și deci $\omega_y \in (-C_4, C_4)$ astfel că se deduce că $\omega_y(t)$ este o funcție mărginită.

Dacă se notează

$$K^2 = \frac{C_4^2}{C_2^2}; \quad C = C_2 C_5; \quad \omega_y = C_4 x$$

ecuația (20.16) se scrie și sub forma:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = C dt \quad (20.17)$$

Dacă t_0 este valoarea lui t pentru care $\omega_y(t_0) = 0$, prin integrarea ecuației (20.17) se obține:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = C(t - t_0) \quad (20.18)$$

Integrala din membrul stâng al ecuației (20.18) este o integrală de tip eliptic și este echivalentă cu ecuația

$$x = \operatorname{sn} C(t - t_0)$$

unde $\operatorname{sn} \alpha$ este funcția eliptică sinus amplitudine de α care este o funcție periodică.

Prin urmare x este o funcție periodică de timp. Pentru $x=1$, se notează

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

și deci perioada lui x este

$$T = \frac{4K}{C} = \frac{4}{C} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (20.19)$$

Această integrală a apărut și la pendulul matematic. Revenind asupra substituțiilor făcute se obțin că $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ pot fi exprimate cu ajutorul unor funcții periodice de timp, astfel că sistemul (20.15) este rezolvat.

În anul 1834, Poinsot a dat o reprezentare geometrică a mișcării solidului cu un punct fix. Astfel, se consideră că elipsoidul de inerție al corpului în raport cu punctul fix O de ecuație

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 1 = 0 \quad (20.20)$$

Dreapta suport a vectorului viteză unghiulară $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$ intersectează elipsoidul de inerție în punctul $\lambda \omega_x, \lambda \omega_y, \lambda \omega_z$. Din condiția ca să se afle și pe elipsoidul de ecuație (20.20) se obține:

$$\lambda^2 (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2) = 1$$

de unde se obține

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2E_{C_0}}}$$

și deci

$$Q \left(\frac{\omega_x}{\sqrt{2E_{C_0}}}, \frac{\omega_y}{\sqrt{2E_{C_0}}}, \frac{\omega_z}{\sqrt{2E_{C_0}}} \right)$$

Dacă se notează cu P planul tangent în Q la elipsoidul de inerție, acesta are ecuația:

$$J_x x x_Q + J_y y y_Q + J_z z z_Q - 1 = 0$$

obținut prin dedublare. În ultima ecuație se înlocuiesc coordonatele lui Q și se obține

$$J_x x \omega_x + J_y y \omega_y + J_z z \omega_z - \sqrt{2E_{C_0}} = 0$$

Parametrii directori ai normalei la planul P sunt $J_x \omega_x, J_y \omega_y, J_z \omega_z$ adică chiar proiecțiile momentului cinetic \vec{K}_0 pe axe. Dar vectorul \vec{K}_0 a fost constant, astfel că normala planului P are o direcție fixă în spațiu. Pe de altă parte, distanța de la punctul fix O la planul P este

$$d = \frac{|J_x \omega_x \cdot 0 + J_y \omega_y \cdot 0 + J_z \omega_z \cdot 0 - \sqrt{2E_{C_0}}|}{\sqrt{J_x^2 \omega_x^2 + J_y^2 \omega_y^2 + J_z^2 \omega_z^2}} = \frac{\sqrt{2E_{C_0}}}{K_0} \quad (20.21)$$

de unde se deduce că planul tangent P considerat se află la o distanță constantă de punctul fix O. Deoarece planul P are și direcția fixă rezultă că planul P este fix în spațiu. Aceasta va permite să concluzionăm că elipsoidul de inerție al corpului cu un punct fix se rostogolește fără alunecare pe un plan fix P în spațiu, pivotând în jurul axei de rotație. Rostogolirea are loc fără alunecare, deoarece punctul comun Q de contact dintre plan și elipsoid are viteza nulă, găsindu-se pe axa de rotație. Dar vectorii $\vec{\omega}$ și \vec{OQ} au același suport, deci se observă din cele de mai sus, modul cum variază viteza unghiulară $\vec{\omega}$ ca direcție și modul în timpul mișcării.

20.2. Integrarea sistemului (20.5) în cazul Lagrange-Poisson

În acest caz, corpul cu un punct fix este supus numai acțiunii greutatei proprii $m\vec{g}$ aplicată în centrul de greutate C la distanța $z_C = OC$. Punctul fix O este situat pe axa de revoluție Oz, corpul solid fiind unul de revoluție. În acest caz $x_C = y_C = 0$ și deci $J_x = J_y$ iar axa Oz_1 a reperului fix $Ox_1y_1z_1$ este verticală (fig.20.2)

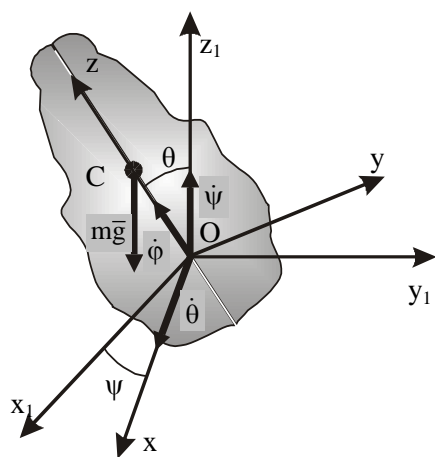


Fig.20.2

Cu aceste particularizări, ecuațiile lui Euler (20.5) devin:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_x) \omega_y \omega_z &= -z_C \sin \theta \cos \varphi \\ J_x \dot{\omega}_y + (J_z - J_x) \omega_x \omega_z &= z_C \sin \theta \sin \varphi \quad (20.22) \\ J_z \dot{\omega}_z &= 0 \end{aligned}$$

Din ultima ecuație se obține $\dot{\omega}_z = 0$ deci:

$$\omega_z = \omega_{z_0}$$

A treia ecuație a sistemului (20.7) în acest caz devine integrală primă:

$$\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} = \omega_{z_0} \quad (20.23)$$

Deoarece din alegerea axelor (fig.20.2) rezultă $\varphi = 0$ și deci proiecțiile pe axele reperului mobil ale vitezei unghiulare

(20.7) devin:

$$\omega_x = \dot{\theta} ; \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta ; \omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \quad (20.24)$$

Momentul față de axa Oz_1 a forței unice $m\vec{g}$ este nul, deci din teorema momentului

cINETIC în raport cu axa Oz_1 rezultă:

$$K_{z_1} = \text{const.} = K_{z_{10}} \quad (20.25)$$

Proiecția K_{z_1} a momentului cinetic de componente $J_x \omega_x$, $J_y \omega_y$, $J_z \omega_z$ față de axele principale de inerție Oxyz este

$$K_{z_1} = J_x \omega_y \sin \theta + J_z \omega_z \cos \theta$$

Ținând seama de relațiile (20.23), (20.24) și (20.25), ultima relație devine:

$$J_x \dot{\psi} \sin^2 \theta + J_z \omega_{z_0} \cos \theta = \text{const.} \quad (20.26)$$

sau

$$\dot{\psi} \sin^2 \theta = \alpha + \beta \cos \theta, \quad \alpha, \beta = \text{const.}$$

Greutatea $m\bar{g}$ admite funcția de forță $U = -mgz_{1c} = -mgz_c \cos \theta$ iar din integrala energiei cinetice se obține

$$E_C = U + C \quad (C = \text{const.})$$

Dar

$$E_C = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_x \omega_y^2 + J_z \omega_z^2) = \frac{1}{2} [J_x (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + J_z \omega_{z_0}^2]$$

și deci integrala energiei cinetice devine:

$$J_x (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + 2mgz_c \cos \theta = \text{const.}$$

sau încă

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta = \gamma + \delta \cos \theta, \quad \gamma, \delta = \text{const.}, \gamma > 0, \delta < 0 \quad (20.27)$$

Ecuatiile (20.23), (20.26), (20.27) sunt trei integrale prime cu ajutorul cărora se va studia mișcarea în cazul Lagrange-Poisson.

Astfel, prin eliminarea lui $\dot{\psi}$ între ecuațiile (20.26) și (20.27) se obține:

$$(\alpha + \beta \cos \theta)^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = (\gamma + \delta \cos \theta) \sin^2 \theta$$

Cu notația $u = \cos \theta$ se obține $\dot{u} = -\dot{\theta} \sin \theta$ sau

$$\dot{u}^2 = P(u) \quad (20.28)$$

unde $P(u)$ este polinomul de gradul trei în u :

$$P(u) = (\gamma + \delta u)(1 - u^2) - (\alpha + \beta u)^2$$

Relația (20.28) se mai scrie și astfel:

$$\pm \frac{du}{\sqrt{P(u)}} = dt$$

Notând $u(0) = u_0$, prin integrarea ultimei relații, se deduce:

$$\pm \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{P(u)}} = t \quad (20.29)$$

Radicalul va avea valoare pozitivă sau negativă după cum \dot{u} va fi pozitiv sau negativ. Membrul stâng al relației (20.29) este o integrală eliptică. Pentru a nu apela la integralele de tip eliptic, se va studia calitativ ecuația (20.29) în funcție de

intervalele de variație ale variabilei u . Deoarece $u = \cos \theta \in [-1, 1]$ interesează comportarea polinomului $P(u)$ pentru $u \in [-1, 1]$. Din relația (20.28) se observă ca $P(u_0) \geq 0$ unde u_0 este valoarea inițială a lui u .

În cazul $P(u_0) > 0$, șirul lui Rolle pentru valorile lui u luate în ordinea $-\infty, -1, u_0, +1, +\infty$ este pentru $P(u)$ în succesiunea de semne: $- - + - +$. Având trei alternări de semn, polinomul $P(u)$ admite trei rădăcini reale: $u_1 \in (-1, u_0)$, $u_2 \in (u_0, 1)$, $u_3 \in (1, \infty)$.

În cazul $P(u_0) = 0$ șirul lui Rolle corespunzător devine: $- - 0 - +$ astfel că polinomul $P(u) = 0$ admite tot trei rădăcini reale: $u_1 = u_2 = u_0, u_3 \in (1, \infty)$.

În concluzie, în ambele cazuri, polinomul $P(u)$ admite trei rădăcini reale dintre care două dintre ele sunt cuprinse între $(-1, 1)$ iar a treia va fi cuprinsă în intervalul $(1, \infty)$. Prin urmare se poate scrie:

$$P(u) = -\delta(u - u_1)(u_2 - u)(u_3 - u)$$

Pentru existența ecuației (20.29) este necesar ca $P(u) > 0$ și deoarece $u_3 > u$, rezultă că u trebuie să fie cuprins între u_1 și u_2 (δ este negativ). Dacă se notează θ_1, θ_2 valorile pentru care $u_1 = \cos \theta_1$ respectiv $u_2 = \cos \theta_2$ și presupunând $u_1 < u_2$, urmează că unghiul de nutație θ trebuie cuprins între valorile

$$\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$$

Dacă se notează $u_0 = \cos \theta_0$, se observă că unghiul θ va crește sau va scădea, după cum semnul radicalului este "-" sau "+". În ipoteza că semnul este "-" atunci θ crește până la valoarea θ_1 . Timpul corespunzător t_1 pentru a ajunge la această valoare se obține din relația (20.29):

$$t_1 = \int_{u_1}^{u_0} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}$$

deci o mărime finită. În momentul $t = t_1$, $P(u_1) = 0$, u își schimbă semnul astfel că θ începe să scadă la θ_2 . Intervalul de timp pentru ca θ să ajungă de la θ_1 la θ_2 este:

$$t_2 - t_1 = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}$$

La momentul t_2 când $\theta = \theta_2$, $P(u_2) = 0$, u își schimbă din nou semnul, devenind negativă astfel că θ crește la θ_1 . Intervalul de timp necesar pentru ca θ să ajungă de la θ_2 la θ_1 este același

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}$$

deci egal cu $t_2 - t_1$. Urmează că oscilațiile între θ_1 și θ_2 se fac în intervale de timp

egale, ceea ce înseamnă că funcția u (deci θ) este periodică cu perioada

$$T = 2(t_2 - t_1) = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}$$

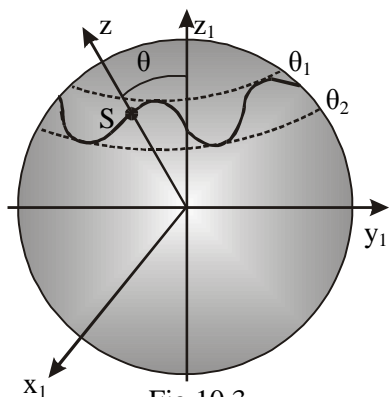


Fig.10.3

Pentru a avea o imagine geometrică a mișcării de mai sus, se consideră o sferă cu centrul în punctul fix O și de rază egală cu unitatea. Axa Oz intersectează sfera într-un punct S (fig.20.3).

Pentru $\theta_1 = \arccos u_1$ și $\theta_2 = \arccos u_2$ se obțin două plane perpendiculare pe axa fixă Oz_1 care determină pe sferă două cercuri situate în plane paralele. Mișcarea oscilatorie a lui S va avea loc între aceste două cercuri.

Din relația (20.26) se obține:

$$\dot{\psi} = \frac{\alpha + \beta u}{1 - u^2}$$

Pentru $u' = -\frac{\alpha}{\beta}$ se obține $\dot{\psi} = 0$ și deci

$$\theta' = \arccos u'$$

Punctele în care $\dot{\psi} = 0$ se găsesc pe cercul paralel determinat de θ' . Dacă $\theta' = \theta_1$ sau $\theta' = \theta_2$ curba lui S are puncte singulare.

Dacă $u_1 = u_2$, cele două cercuri se confundă și axa Oz descrie un con cu unghiul la vârf constant. Această condiție este $\dot{\theta} = 0$.

20.3. Integrarea sistemului (20.5) în cazul Sofia Kovalevskaja

Sofia Kovalevskaja a dat în anul 1888 un nou caz de integrabilitate pentru cazul

$$J_x = J_y ; y_C = z_C = 0 ; x_C \neq 0$$

Se consideră că axa mobilă Ox trece prin centrul de greutate C , ceea ce nu particularizează problema, dar se consideră și suplimentar:

$$J_x = J_y = 2J_z$$

Ecuatiile lui Euler (20.5) pentru acest caz particular devin:

$$J_x \dot{\omega}_x - \frac{1}{2} J_x \omega_x \omega_y = 0$$

$$J_x \dot{\omega}_y - \frac{1}{2} J_x \omega_x \omega_z = mgx_C \cos \theta$$

$$\frac{1}{2} J_x \dot{\omega}_z = -mgx_C \sin \theta \cos \varphi$$

care se mai scriu sub forma:

$$2\dot{\omega}_x = \omega_x \omega_y$$

$$2\dot{\omega}_y = -\omega_x \omega_z + 2 \frac{x_C}{J_x} mg \cos \theta$$

$$\dot{\omega}_z = -\frac{2x_C}{J_x} mg \sin \theta \cos \varphi$$

Dacă se notează a, b, c cosinusurile directoare ale axei Oz_1 , ultimele ecuații devin:

$$2\dot{\omega}_x = \omega_y \omega_z$$

$$2\dot{\omega}_y = -\omega_x \omega_z + 2 \frac{x_C}{J_x} mgc \quad (20.30)$$

$$\dot{\omega}_z = -\frac{2x_C}{J_x} mgb$$

În acest caz particular, teorema energiei cinetice devine:

$$J_x (\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_z \omega_z^2 = -2mx_C a \quad (20.31)$$

iar teorema momentului cinetic este:

$$J_x (\omega_x a + \omega_y b) + J_z \omega_z c = C_0 \quad (20.32)$$

Relațiile (20.31) și (20.32) sunt două integrale prime ale mișcării rigidului cu punct fix. Se mai poate considera ca integrală primă și relația $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Versorul \bar{k}_1 al axei fixe Oz_1 este dat de formula

$$\bar{k}_1 = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k} \quad (20.33)$$

de unde prin derivare se obține: $\dot{\bar{k}}_1 = \dot{a}\bar{i} + \dot{b}\bar{j} + \dot{c}\bar{k} + \bar{\omega} \times \bar{k}_1 = 0$. Din ultima relație rezultă

$$\dot{a} + \omega_y c - \omega_z b = 0$$

$$\dot{b} + \omega_z a - \omega_x c = 0 \quad (20.34)$$

$$\dot{c} + \omega_x b - \omega_y a = 0$$

Din primele două ecuații din (20.30), cu notația $i^2 = -1$, se obține:

$$2(\dot{\omega}_x + i\dot{\omega}_y) = -i\omega_z(\omega_x + i\omega_y) + \frac{2x_C mg}{J_x} ic$$

iar din primele două ecuații din (20.34): $\dot{a} + i\dot{b} = -i\omega_z(a + ib) + ic(\omega_x + i\omega_y)$

Se elimină c din ultimele două ecuații și se obține:

$$\frac{d}{dt} \left[(\omega_x + i\omega_y)^2 - \frac{mgx_C}{J_x} (a + ib) \right] = -\omega_z i \left[(\omega_x + i\omega_y)^2 - \frac{mgx_C}{J_x} (a + ib) \right]$$

care se mai scrie și astfel:
$$\frac{d}{dt} \ln \left[(\omega_x + i\omega_y)^2 - \frac{mgx_C}{J_x} (a + ib) \right] = -\omega_z i$$

Schimbând pe i cu $-i$ se găsește:

$$\frac{d}{dt} \ln \left[(\omega_x - i\omega_y)^2 - \frac{mgx_C}{J_x} (a - ib) \right] = \omega_z i$$

Dacă ultimele relații se adună și se integrează, se obține

$$\left[(\omega_x + i\omega_y)^2 - \frac{mgx_C}{J_x} (a + ib) \right] \left[(\omega_x - i\omega_y)^2 - \frac{mgx_C}{J_x} (a - ib) \right] = \text{const.} \quad (20.35)$$

ceea ce constituie a patra integrală primă a sistemului (20.5). Prin urmare, se poate studia mișcarea și în acest caz cu ajutorul integralelor prime.

20.4. Giroscopul

Giroscopul este un corp de revoluție ce se rotește cu viteză unghiulară foarte mare în jurul axei sale de simetrie conținând punctul fix în care corpul este suspendat.

Momentele principale de inerție au proprietatea

$$J_x = J_y \ll J_z$$

deoarece se alege axa Oz axa de simetrie.

Centrul de greutate C al rigidului se află pe axa sa de simetrie și poate să coincidă cu punctul fix O iar giroscopul se numește centrat, sau nu coincide cu aceasta și giroscopul se numește necentrat (giroscop greu).

20.4.1. Giroscopul centrat

Este un caz particular al cazului Euler-Poinsot. Ecuațiile lui Euler, în ipotezele enunțate sunt de forma:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_x) \omega_y \omega_z &= 0 \\ J_x \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= 0 \\ J_z \dot{\omega}_z &= 0 \end{aligned} \quad (20.36)$$

Din ultima relație se deduce:

$$\omega_z = \omega_{z0} (= \text{const.}) \quad (20.37)$$

Ținând seama de relația (20.37), sistemul (20.36) devine:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x + \left(\frac{J_z}{J_x} - 1 \right) \omega_y \omega_{z0} &= 0 \\ \dot{\omega}_y + \left(1 - \frac{J_z}{J_x} \right) \omega_x \omega_{z0} &= 0\end{aligned}\quad (20.38)$$

În relațiile (20.38) se derivează prima ecuație în raport cu timpul și se folosește și a doua ecuație, astfel că se obține:

$$\ddot{\omega}_x + \left(\frac{J_z}{J_x} - 1 \right)^2 \omega_x \omega_{z0}^2 = 0 \quad (20.39)$$

Ecuația (20.39) este o ecuație diferențială de ordinul doi, liniară și cu coeficienți constanți a cărei soluție este de forma:

$$\omega_x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt \quad (20.40)$$

unde C_1 și C_2 sunt constante de integrare care se pot determina din condițiile inițiale iar p este dat de relația

$$p^2 = \left(\frac{J_z}{J_x} - 1 \right)^2 \omega_{z0}^2$$

Pentru determinarea componentei ω_y , se substituie relația (20.40) în prima ecuație din (20.38) și se obține formula:

$$\omega_y = C_2 \cos pt - C_1 \sin pt \quad (20.41)$$

Din relațiile (20.37), (20.40) și (20.41) reiese că

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = C_1^2 + C_2^2 + \omega_{z0}^2 = \text{const.} \quad (20.42)$$

adică viteza unghiulară în acest caz este constantă tot timpul mișcării.

De asemenea din aceleași relații se observă că $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ sunt funcții mărginite de timp și la o mică perturbare a acestora nu diferă mult de poziția inițială. Toate aceste funcții sunt periodice cu perioada dată de formula:

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \frac{J_x}{(J_z - J_x)\omega_{z0}}$$

(ω_z fiind constantă este periodică). Urmează că axa de rotație Oz este stabilă, ceea ce are importanță în studiul și construcția acestor tipuri de giroscopae. Axa giroscopului nu se îndepărtează prea mult de axa de rotație Oz și tinde repede spre ea din cauză că $J_z \gg J_x$ și deci T are valoare mică.

Dacă axa giroscopului se rotește în planul Oxy cu un unghi mic $d\psi$, vectorul moment cinetic \vec{K}_0 va avea poziția \vec{K}'_0 păstrându-și mărimea. Variația $d\vec{K}_0$ a vectorului \vec{K}_0 în acest timp scurt și de unghi mic $d\psi$, poate fi egală cu $\vec{K}_0 d\psi$, cu direcția și sensul axei Oy . Din ecuația de mișcare

$$d\vec{K}_0 = \vec{M}_0 dt$$

unde \bar{M}_0 este cuplul care acționează asupra rigidului, se observă că \bar{M}_0 are aceeași

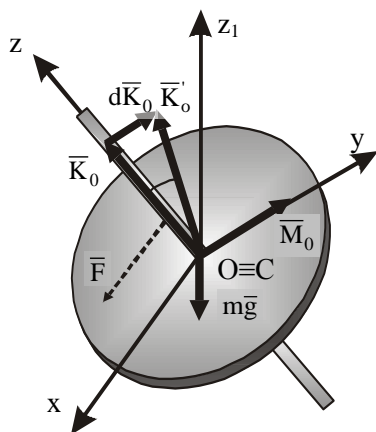


Fig.20.4

direcție și sens cu vectorul $d\bar{K}_0$, deci situat în planul Oxy (fig.20.4) în sensul lui Oy. Prin urmare, cuplul de moment \bar{M}_0 are tendința de a roti axa Oz în jurul axei Oy. Pentru a obține o deplasare a axei giroscopului în planul Oyz, va trebui aplicată asupra axei Oz o forță \bar{F} dirijată în sensul axei Oz. Acest efect este în aparență în contradicție cu cele studiate în Statică. Dacă n-ar exista rotația $\bar{\omega}$, axa de rotație s-ar deplasa în sensul axei Ox; este suficient ca solidul să se rotească repede în jurul axei Oz pentru ca forța \bar{F} să dea naștere unei deplasări în sensul lui Oy. Aceasta se explică astfel: forța \bar{F} produce momentul \bar{M}_0 dirijat după axa Oy. Momentul \bar{M}_0

produce la rândul său o variație a momentului cinetic de forma:

$$\bar{K}'_0 = \bar{K}_0 + d\bar{K}_0$$

Suportul vectorului \bar{K}'_0 reprezintă noua axă de rotație a giroscopului, înclinată față de cea inițială cu unghiul $d\psi$, deoarece axa inițială Oz era o axă stabilă de rotație. Această proprietate se numește efect giroscopic. Prin urmare, efectul giroscopic constă în faptul că acționând asupra unui giroscop cu forța \bar{F} care produce momentul \bar{M}_0 , giroscopul în loc să execute o deplasare în sensul forței \bar{F} , își deplasează axa de rotație pe o direcție perpendiculară pe forță în sensul momentului \bar{M}_0 . În baza principiului acțiunii și a reacțiunii, giroscopul acționează asupra mediului exterior cu un cuplu numit cuplu giroscopic, al cărui moment \bar{M}_g este egal și de sens opus celui din O:

$$\bar{M}_g = -\bar{M}_0$$

Este de remarcat că efectul giroscopic apare și la giroscopul necentrat.

În cele ce urmează, se studiază mișcarea giroscopului centrat care deci se rotește în jurul unei alte axe decât axa principală de inerție corespunzătoare punctului O. În acest caz, rigidul se rotește cu viteza unghiulară $\bar{\omega}'$ în jurul axei sale de simetrie, iar aceasta la rândul său se rotește cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ în jurul axei fixe Oz_1 . Mișcarea se va numi mișcare de precesie regulată. Vectorul moment cinetic \bar{K}_0 este un vector constant, deci dirijat după axa fixă Oz_1 (fig.20.5).

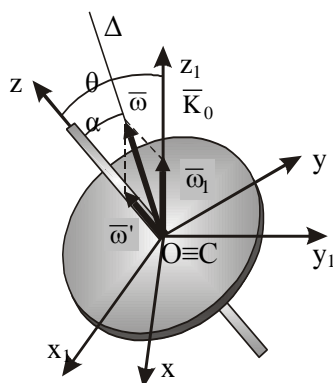


Fig.20.5

Unghiul θ dintre axele Oz și Oz_1 rămâne constant în tot timpul mișcării giroscopului centrat. Acest lucru rezultă din scrierea proiecției momentului cinetic \bar{K}_0 pe axa Oz în două moduri:

$$K_z = J_z \omega_z = K_0 \cos \theta$$

Rezultă:
$$\cos \theta = \frac{J_z \omega_{z0}}{K_0}$$

Am arătat că vectorul $\bar{\omega}$ este constant ca mărime în tot timpul mișcării (20.42). Ținând seama de aceasta, se arată că unghiul α dintre vectorul $\bar{\omega}$ și axa Oz este constant:

$$\omega_z = \omega \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\omega_{z0}}{\omega} = \text{const.}$$

În consecință și unghiul $\theta - \alpha$ dintre vectorul $\bar{\omega}$ și axa Oz_1 este constant.

Se știe că vectorul viteză unghiulară $\bar{\omega}$ se scrie astfel:

$$\bar{\omega} = \dot{\psi} \bar{k}_1 + \dot{\phi} \bar{k} + \dot{\theta} \bar{n} \quad (20.43)$$

unde \bar{n} este versorul liniei nodurilor și $\dot{\theta} = 0$ pentru că θ s-a arătat că este constant. Dar $\bar{\omega}$ se mai scrie și astfel:

$$\bar{\omega} = \omega \cos(\theta - \alpha) \bar{k}_1 + \omega \cos \alpha \bar{k} \quad (20.44)$$

Din relațiile (20.43) și (20.44) se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \omega \cos(\theta - \alpha) = \text{const.} = \omega_1 \\ \dot{\phi} &= \omega \cos \alpha = \text{const.} = \omega' \end{aligned} \quad (20.45)$$

Prin integrarea ultimelor două ecuații, în condiții inițiale date, se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(t) = \omega_1 t + \psi_0 \\ \phi &= \phi(t) = \omega' t + \phi_0 \end{aligned} \quad (20.46)$$

adică precesia și rotația proprie sunt mișcări uniforme.

Mișcarea rigidului cu un punct fix care se rotește cu viteza unghiulară ω' constantă în jurul axei de simetrie Oz iar aceasta la rândul ei se rotește cu viteza unghiulară ω_1 constantă în jurul fixe axei Oz_1 , se numește mișcarea de precesie regulată. În acest caz, unghiul θ dintre axele Oz și Oz_1 rămâne tot timpul constant.

Axa Oz mobilă față de axa Oz_1 fixă, descrie un con care se numește con de precesie și are unghiul la vârf 2θ . La rândul său, axa instantanee de rotație Δ descrie în jurul axei mobile Oz un con numit con polodic și are unghiul la vârf 2α . Axa Δ descrie în jurul axei fixe Oz_1 un con numit con herpolodic cu unghiul la vârf $2(\theta - \alpha)$.

20.4.2. Giroscopul necentrat

Este un caz particular al cazului Lagrange-Poisson. Spre deosebire de giroscopul centrat, aici centrul de greutate C nu mai coincide cu punctul fix O ci cu un alt punct de pe axa de simetrie: $OC = \eta$.

Deoarece $J_z \gg J_x$, giroscopul necentrat se rotește în jurul axei de simetrie Oz cu viteza unghiulară $\bar{\omega}'$ foarte mare în

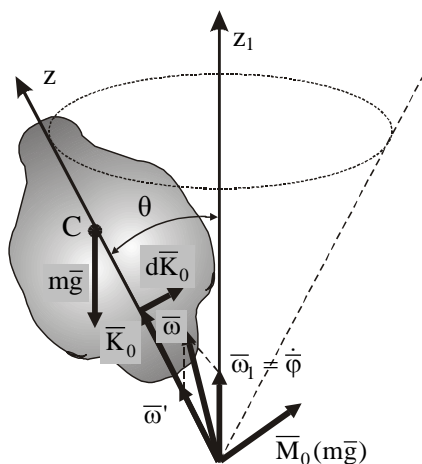


Fig.10.6

comparație cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ mică în jurul axei fixe Oz_1 . Deci $\omega' \gg \omega_1$.

Viteza unghiulară absolută a giroscopului este (fig.20.6) $\bar{\omega} = \bar{\omega}' + \bar{\omega}_1$

Greutatea giroscopului $m\bar{g}$ în loc să încline axa Oz și să mărească unghiul θ , determină mișcarea de rotație cu viteza unghiulară ω_1 în jurul axei fixe Oz_1 . Momentul \bar{M}_0 al greutății în raport cu punctul fix O produce o variație $d\bar{K}_0$ a momentului cinetic și deci axa mobilă Oz se va mișca în sensul lui $d\bar{K}_0$ coliniară cu \bar{M}_0 . Deci și în acest caz apare fenomenul giroscopic.

Mișcarea de rotație a giroscopului cu viteza unghiulară ω_1 a axei mobile Oz în jurul axei fixe se numește mișcare de precesie, deci în această mișcare se produce o variație a unghiului de precesie ψ și deci $\bar{\omega}_1 = \dot{\bar{\psi}}$.

În cele ce urmează, se prezintă o soluție aproximativă a acestui caz, presupunând $\omega \approx \omega'$ și $\omega' \gg \omega_1$ precum și $J_z \gg J_x$. Pentru aceasta se va determina momentul \bar{M}_0 al forțelor ce acționează solidul din ecuația $\bar{M}_0 = \dot{\bar{K}}_0$.

Ținând seama că $\omega_1 = \dot{\psi}$ și $\omega' = \dot{\phi} \approx \omega$, din formulele (20.7) se deduce:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_1 \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_y &= \omega_1 \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_z &= \omega + \omega_1 \cos \theta\end{aligned}\quad (20.47)$$

unde

$$\psi \approx \omega t + \varphi_0$$

Ținând seama de relațiile (20.47), relațiile (20.5) se mai scriu:

$$\begin{aligned}M_x &= [(J_x - J_y + J_z)\omega + (J_z - J_y)\omega_1 \cos \theta]\omega_1 \sin \theta \cos \varphi \\ M_y &= [(J_x - J_y - J_z)\omega + (J_x - J_z)\omega_1 \cos \theta]\omega_1 \sin \theta \sin \varphi \\ M_z &= (J_y - J_x)\omega_1^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi\end{aligned}$$

sau, luând în considerare că giroscopul este un corp de revoluție ($J_x = J_y$), ultimele formule se simplifică și devin:

$$\begin{aligned}M_x &= [J_z\omega + (J_z - J_x)\omega_1 \cos \theta]\omega_1 \sin \theta \cos \varphi \\ M_y &= -[J_z\omega + (J_z - J_x)\omega_1 \cos \theta]\omega_1 \sin \theta \sin \varphi \\ M_z &= 0\end{aligned}\quad (20.48)$$

Se observă că momentul \bar{M}_0 este situat în planul Oxy , normal pe vectorul ω , deci dirijat după linia nodurilor (fig.10.1) și are mărimea

$$M_0 = |J_z\omega + (J_z - J_x)\omega_1 \cos \theta|\omega_1 \sin \theta = \left| J_z + (J_z - J_x)\frac{\omega_1}{\omega} \cos \theta \right| \omega \omega_1 \sin \theta$$

Prin urmare, se poate scrie:

$$\bar{M}_0 = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega} \left[J_z + (J_z - J_x)\frac{\omega_1}{\omega} \cos \theta \right]$$

Din ipoteza $\omega \approx \omega' \gg \omega_1$ se observă că raportul $\frac{\omega_1}{\omega}$ se poate neglija într-o primă aproximație și deci momentul \bar{M}_0 devine:

$$\bar{M}_0 \approx J_z \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega} \quad (20.49)$$

Cuplul giroscopic conform celor amintite anterior va fi:

$$\bar{M}_g = -\bar{M}_0 \approx J_z \bar{\omega} \times \bar{\omega}_1$$

și acționează în punctul O.

Momentul în raport cu punctul O al greutatei $m\bar{g}$ are mărimea ($OC = \eta$):

$$M_0 = mg\eta \sin \theta$$

Din formula (20.49) se deduce:

$$M_0 = J_z \omega_1 \omega \sin \theta$$

Din ultimele relații se obține:

$$\omega_1 = \frac{mg\eta}{J_z \omega} = \text{const.}$$

În mișcarea de precesie, viteza unghiulară este deci constantă. Unghiul θ rămâne de asemenea constant în timpul mișcării. Ca urmare, mișcarea se numește mișcare de precesie regulată.

21. MIȘCAREA GENERALĂ A RIGIDULUI

Se consideră un corp rigid de masă m acționat de un sistem finit $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N$ de forțe fără a fi supus la vreo restricție geometrică. Pentru a studia mișcarea acestui rigid, se alege sistemul de referință fix $O_1x_1y_1z_1$ și sistemul de referință $Cxyz$ cu originea în centrul de greutate C al rigidului iar axele Cx, Cy, Cz sunt axe principale centrale de inerție. De asemenea se mai consideră un triedru $Cx'y'z'$ cu axele paralele cu cel fix astfel încât împreună cu reperul mobil se determină unghiurile ψ, φ, θ ale lui Euler.

Față de reperul fix, centrul de greutate are coordonatele $C(x_C, y_C, z_C)$. Parametrii mișcării sunt aceste coordonate precum și unghiurile lui Euler:

$$x_C = x_C(t); y_C = y_C(t); z_C = z_C(t); \psi = \psi(t); \varphi = \varphi(t); \theta = \theta(t) \quad (21.1)$$

Pentru a studia mișcarea se aplică teoremele impulsului și a momentului cinetic:

$$m\bar{a}_C = \bar{R}^d + \bar{R}^l \quad (21.2)$$

$$\dot{\bar{K}}_C = \bar{M}_C^d + \bar{M}_0^l \quad (21.3)$$

Ecuatiile (21.2) se proiectează pe axele reperului fix iar ecuația (21.3) pe

axele reperului mobil. Se obține sistemul de șase ecuații scalare cu șase necunoscute:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_C &= R_x^d + R_x^1 \\
 m\ddot{y} &= R_y^d + R_y^1 \\
 m\ddot{z}_C &= R_z^d + R_z^1 \\
 J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_z\omega_y &= M_{Cx}^d + M_{Cx}^1 \\
 J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z &= M_{Cy}^d + M_{Cy}^1 \\
 J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y &= M_{Cz}^d + M_{Cz}^1
 \end{aligned} \tag{21.4}$$

Prin integrarea sistemului (21.4) se obțin relațiile

$$x_C = x_C(t) ; y_C = y_C(t) ; z_C = z_C(t) \tag{21.5}$$

care dau poziția centrului de greutate C la un moment dat, precum și

$$\omega_x = \omega_x(t) ; \omega_y = \omega_y(t) ; \omega_z = \omega_z(t) \tag{21.6}$$

cu ajutorul cărora prin integrare se obțin unghiurile lui Euler:

$$\psi = \psi(t) ; \varphi = \varphi(t) ; \theta = \theta(t) \tag{21.7}$$

Relațiile (21.5) și (21.7) obținute prin integrare conțin 12 constante de integrare care deci se determină din condițiile inițiale referitoare la poziția și viteza centrului de greutate C respectiv la valorile unghiurilor lui Euler și a derivatelor acestora.

În particular, dacă față de centrul de greutate, forțele și momentele date și de legătură sunt nule:

$$\begin{aligned}
 \bar{R}^d + \bar{R}^1 &= 0 \\
 \bar{M}_C^d + \bar{M}_C^1 &= 0
 \end{aligned} \tag{21.8}$$

atunci rigidul are o mișcare rectilinie și uniformă a centrului de greutate C cu viteză constantă \bar{v}_C și o mișcare de rotație cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}_0$ în jurul unei axe centrale principale de inerție. Cu alte cuvinte s-a obținut o particularizare a mișcării rigidului cu punct fix și anume cazul Euler-Poinsot.

În general integrarea sistemului (21.4) este dificilă și poate fi efectuată numai în anumite situații particulare.

21.1. Teorema momentului cinetic în cazul mișcării generale a rigidului

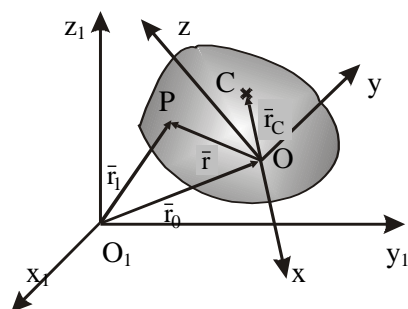


Fig.21.1

Se consideră un punct oarecare P din sistemul aflat în mișcare generală (fig.21.1). Mișcarea va fi raportată la reperul fix $O_1x_1y_1z_1$. Centrul de greutate C are vectorul

de poziție \bar{r}_C față de reperul mobil. Vectorul de poziție al punctului P și viteza lui sunt respectiv:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r} ; \bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

Momentul cinetic față de punctul fix O_1 este:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{0_1} &= \int_{(D)} \bar{r}_1 \times \bar{v} dm = \int_{(D)} (\bar{r}_0 + \bar{r}) \times (\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}) dm = \\ &= \bar{r}_0 \times \bar{v}_0 \int_{(D)} dm + \bar{r}_0 \times \left[\bar{\omega} \times \int_{(D)} \bar{r} dm \right] + \left[\int_{(D)} \bar{r} dm \right] \times \bar{v}_0 + \int_{(D)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm \end{aligned}$$

care se mai scrie și sub forma

$$\bar{K}_{0_1} = m\bar{r}_0 \times \bar{v}_0 + m\bar{r}_0 \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_C) + \bar{r}_C \times m\bar{v}_0 + \int_{(D)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm$$

Deoarece

$$\bar{v}_C = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_C$$

expresia momentului cinetic devine:

$$\bar{K}_{0_1} = \bar{r}_0 \times m\bar{v}_C + \bar{r}_C \times m\bar{v}_0 + \int_{(D)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm \quad (21.9)$$

În vederea aplicării teoremei momentului cinetic, se derivează relația (21.9) în raport cu timpul și se obține

$$\begin{aligned} \dot{\bar{K}}_{0_1} &= m\dot{\bar{r}}_0 \times \bar{v}_C + m\bar{r}_0 \times \dot{\bar{v}}_C + \dot{\bar{r}}_C \times m\bar{v}_0 + \bar{r}_C \times m\dot{\bar{v}}_0 + \frac{d}{dt} \int_{(D)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm = \\ &= m\bar{v}_0 \times \bar{v}_C + m\bar{r}_0 \times \bar{a}_C + (\bar{\omega} \times \bar{r}_C) \times m\bar{v}_0 + \bar{r}_C \times m\bar{a}_0 + \frac{d}{dt} \int_{(D)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm \end{aligned}$$

Ținând seama de următoarea relație:

$$m\bar{v}_0 \times \bar{v}_C + (\bar{\omega} \times \bar{r}_C) \times m\bar{v}_0 = m\bar{v}_0 \times (\bar{v}_C - \bar{\omega} \times \bar{r}_C) = m\bar{v}_0 \times (\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_C - \bar{\omega} \times \bar{r}_C) = 0$$

derivata momentului cinetic devine:

$$\dot{\bar{K}}_{0_1} = \bar{r}_0 \times m\bar{a}_C + \bar{r}_C \times m\bar{a}_0 + \frac{d}{dt} \int_{(D)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm = \bar{M}_{0_1} \quad (21.10)$$

unde \bar{M}_{0_1} este momentul resultant față de punctul fix O_1 . Dar:

$$\bar{M}_{0_1} = \bar{M}_0 + \bar{r}_0 \times \bar{R}$$

unde \bar{M}_0 este momentul resultant față de punctul O iar \bar{R} rezultanta forțelor ce acționează rigidul. Prin urmare, relația (21.10) se mai scrie:

$$\frac{d}{dt} \int_{(D)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm + \bar{r}_C \times m\bar{a}_0 = \bar{M}_0 \quad (21.11)$$

Teorema momentului cinetic (21.10) se poate simplifica în anumite cazuri particulare și printr-o alegere convenabilă a reperului mobil.

21.2. Relația dintre energia cinetică și momentul cinetic în cazul mișcării generale a rigidului

Expresia momentului cinetic al unui rigid în mișcare generală, față de punctul fix O_1 este dată de formula (21.9). Pentru energia cinetică se folosește relația:

$$E_C = \frac{1}{2} \int_{(D)} v^2 dm = \frac{1}{2} (\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r})^2 dm = \frac{v_0^2}{2} \int_{(D)} dm + \int_{(D)} \bar{v}_0 (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm + \frac{1}{2} \int_{(D)} (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 dm$$

sau:

$$E_C = \frac{1}{2} m v_0^2 + m (\bar{v}_0 \times \bar{\omega}) \bar{r}_C + \frac{1}{2} \int_{(D)} (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 dm \quad (21.12)$$

Relația (21.9) înmulțită scalar cu vectorul viteză unghiulară conduce la rezultatul:

$$\bar{K}_{0_1} \bar{\omega} = m (\bar{r}_0 \times \bar{v}_C) \bar{\omega} + m (\bar{r}_C \times \bar{v}_0) \bar{\omega} + \bar{\omega} \int_{(D)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm$$

Dar $\bar{\omega} [\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] = (\bar{\omega} \times \bar{r})^2$, astfel că rezultă $\int_{(D)} (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 dm = \bar{\omega} \int_{(D)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm$

Folosind aceste rezultate și comparând energia cinetică și momentul cinetic al rigidului în mișcare generală, se obține:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{0_1} \bar{\omega} &= 2E_C - m v_0^2 + m (\bar{\omega} \times \bar{r}_0) \bar{v}_C - m (\bar{v}_0 \times \bar{\omega}) \bar{r}_C = \\ &= 2E_C + m (\bar{\omega} \times \bar{r}_0) \bar{v}_C - m v_0^2 - m (\bar{\omega} \times \bar{r}_C) \bar{v}_0 = \\ &= 2E_C + m \bar{v}_C (\bar{\omega} \times \bar{r}_0) - m \bar{v}_0 (\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_C) \end{aligned}$$

Ținând seama de relația

$$\bar{v}_C = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_C$$

se obține

$$\bar{K}_{0_1} \bar{\omega} = 2E_C + m \bar{v}_C (-\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_0) \quad (21.13)$$

În particular, dacă $\bar{v}_0 = 0$ și $\bar{r}_0 = 0$ (mișcări de rotație), relația (21.13) devine:

$$\bar{K}_{0_1} \bar{\omega} = 2E_C \quad (21.14)$$

22. PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT

Fie un sistem de puncte materiale P_i , $i = \overline{1, N}$. Legea lui Newton pentru acest punct se scrie:

$$m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i^d + \bar{F}_i^l + \sum_{j=1}^N \bar{F}_{ij} \quad (22.1)$$

unde $\bar{F}_i^d, \bar{F}_i^l, \sum_{j=1}^N \bar{F}_{ij}$ reprezintă rezultanta forțelor direct aplicate, a forțelor de legătură respectiv suma forțelor interioare ce acționează asupra punctului.

Prin introducerea forței de inerție de forma

$$\bar{F}_i^l = -m_i \bar{a}_i$$

se poate exprima principiul lui D'Alembert pentru un punct material din sistem sub forma

$$\bar{F}_i^d + \bar{F}_i^l + \sum_{j=1}^N \bar{F}_{ij} + \bar{F}_i^l = 0 \quad (22.2)$$

Ultima relație prin înmulțire vectorială la stânga cu vectorul $\bar{r}_i = \overrightarrow{OP_i}$ devine:

$$\bar{r}_i \times \bar{F}_i^d + \bar{r}_i \times \bar{F}_i^l + \bar{r}_i \times \sum_{j=1}^N \bar{F}_{ij} + \bar{r}_i \times \bar{F}_i^l = 0 \quad (22.3)$$

Relațiile (22.2) și (22.3) sunt scrise pentru un punct oarecare din sistem. Dacă relațiile de forma (22.2) și (22.3) se scrie pentru toate punctele din sistem iar apoi se însumează vectorial fiecare relație, se obțin:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \bar{F}_i^d + \sum_{i=1}^N \bar{F}_i^l + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \bar{F}_i^l &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times \bar{F}_i^d + \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times \bar{F}_i^l + \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times \left(\sum_{j=1}^N \bar{F}_{ij} \right) + \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times \bar{F}_i^l &= 0 \end{aligned} \quad (22.4)$$

Ținând seama că suma tuturor forțelor interioare este nulă, deoarece sunt în echilibru două câte două și cu elementele

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{R}}^d &= \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{F}}_i^d ; \bar{\mathbf{R}}^I = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{F}}_i^I ; \bar{\mathbf{R}}^I = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{F}}_i^I \\ \bar{\mathbf{M}}_o^d &= \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i^d ; \bar{\mathbf{M}}_o^I = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i^I ; \bar{\mathbf{M}}_o^I = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i^I\end{aligned}$$

ecuațiile (22.4) se mai scriu sub forma

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{R}}^d + \bar{\mathbf{R}}^I + \bar{\mathbf{R}}^I &= 0 \\ \bar{\mathbf{M}}_o^d + \bar{\mathbf{M}}_o^I + \bar{\mathbf{M}}_o^I &= 0\end{aligned}\quad (22.5)$$

Ecuațiile (22.5) exprimă principiul lui D'Alembert pentru cazul general al unui sistem finit de puncte materiale și se exprimă astfel:

Torsorul de reducere în punctul O al forțelor direct aplicate, al forțelor de legătură și al forțelor de inerție este nul.

În timpul mișcării, forțele direct aplicate și forțele de legătură ce acționează asupra sistemului se echilibrează cu forțele de inerție. Acest echilibru se mai numește și echilibru dinamic.

Pentru a aplica principiul lui D'Alembert într-o problemă de dinamică trebuie în prealabil calculat torsorul forțelor de inerție. Pentru a calcula rezultanta $\bar{\mathbf{R}}^I$ și momentul resultant $\bar{\mathbf{M}}_o^I$, se compară ecuațiile (22.5) cu teoremele impulsului și a momentului cinetic. Se obțin formulele:

$$\bar{\mathbf{R}}^I = -\dot{\bar{\mathbf{H}}} = -m\dot{\bar{\mathbf{a}}}_C \quad (22.6)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_o^I = -\dot{\bar{\mathbf{K}}}_0 \quad (22.7)$$

cu mențiunea că momentele trebuie calculate în raport cu un punct fix sau în raport cu centrul de greutate C al sistemului.

În general se preferă să se calculeze momentul cinetic față de reperul mobil. Prin urmare pentru calculul derivatei vectorului moment cinetic trebuie să se folosească formula

$$\dot{\bar{\mathbf{K}}}_0 = \frac{d\bar{\mathbf{K}}_0}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_0}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{\mathbf{K}}_0 \quad (22.8)$$

unde $\bar{\omega}$ este viteza unghiulară în mișcarea de rotație a corpului iar $\frac{\partial}{\partial t}$ înseamnă derivata relativă în raport cu reperul mobil. Deci relația (22.7) se mai scrie:

$$\bar{\mathbf{M}}_o^I = -\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_0}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{\mathbf{K}}_0 \right) \quad (22.9)$$

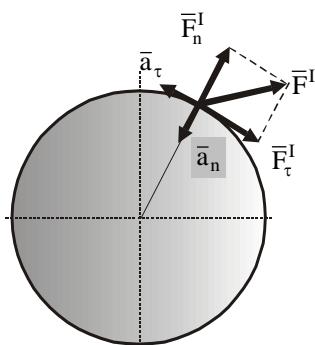


Fig.22.1

22.1. Calculul torsorului de inerție pentru câteva cazuri uzuale

În probleme practice, pentru a aplica principiul lui D'Alembert este necesar să se cunoască forța de inerție în cazul punctului material sau taylorul forțelor de inerție în cazul rigidului sau al sistemelor de puncte materiale pentru anumite mișcări particulare.

a) Mișcarea circulară a punctului material

În mișcarea circulară accelerația \bar{a} are două componente: componenta normală de mărime $a_n = R\omega^2$ și componenta tangențială de mărime $a_t = R\varepsilon$. Forța de inerție \bar{F}^I are deci componentele: forța de inerție normală (centrifugă) (fig.12.1) de mărime

$$F_n^I = mR\omega^2 \quad (22.10)$$

și forța de inerție tangențială (centripetă) de mărime:

$$F_t^I = mR\varepsilon \quad (22.11)$$

Aceste componente au sensurile opuse accelerațiilor corespunzătoare. Modulul forței de inerție este

$$F^I = mR\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (22.12)$$

b) Mișcarea de translație

În mișcarea de translație a rigidului se ține seama că $\bar{\omega} = \bar{\varepsilon} = 0$, $\bar{a} = \bar{a}_C$ și deci elementele taylorului forțelor de inerție în centrul de greutate C al rigidului sunt:

$$\bar{F}^I = -m\bar{a}_C; \quad \bar{M}_C^I = 0 \quad (22.13)$$

c) Mișcarea de rotație cu axă fixă a rigidului

Se presupune că rigidul are o mișcare de rotație în jurul axei fixe Δ cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ care are direcția axei Δ iar axa mobilă Oz coincide cu axa de rotație Δ . Deci $\omega_x = \omega_y = 0$ și $\bar{\omega} = \omega\bar{k}$. Centrul de greutate C are accelerația

$$\bar{a}_C = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_C + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_C)$$

Din formula (20.6) se obține rezultanta forțelor de inerție sub forma:

$$\bar{R}^I = -m\bar{a}_C = -m\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_C - m(\bar{\omega} \cdot \bar{r}_C)\bar{\omega} + m\omega^2\bar{r}_C \quad (22.14)$$

Relația (22.14) proiectată pe axele reperului mobil conduce la ecuațiile

$$R_x^I = m(\omega^2 x_C + \varepsilon y_C); \quad R_y^I = m(\omega^2 y_C - \varepsilon x_C); \quad R_z^I = 0 \quad (22.15)$$

Momentul cinetic \bar{K}_0 raportat tot la reperul mobil se scrie astfel:

$$\bar{K}_0 = -J_{xz}\omega\bar{i} - J_{yz}\omega\bar{j} + J_z\omega\bar{k}$$

Aplicând formula (22.9) se obține:

$$\bar{M}_0^I = J_{xz}\dot{\omega}\bar{i} + J_{yz}\dot{\omega}\bar{j} - J_z\dot{\omega}\bar{k} + \omega\bar{k} \times (-J_{xz}\omega\bar{i} - J_{yz}\omega\bar{j} + J_z\omega\bar{k})$$

ceea ce conduce la proiecțiile momentului resultant al forțelor de inerție după cum urmează:

$$\begin{aligned}
M_{0x}^I &= J_{xz} \varepsilon - J_{yz} \omega^2 \\
M_{0y}^I &= J_{yz} \varepsilon + J_{xz} \omega^2 \\
M_{0z}^I &= -J_z \varepsilon
\end{aligned}
\tag{22.16}$$

În particular, dacă axa Oz este principală de inerție în raport cu orice punct de pe ea, atunci $x_C = y_C = 0$, $J_{xz} = J_{yz} = 0$, astfel că rezultanta forțelor de inerție și momentul resultant al forțelor de inerție sunt

$$\bar{\mathbf{R}}^I = 0; \bar{\mathbf{M}}_0^I = -J_z \varepsilon \bar{\mathbf{k}} \tag{22.17}$$

Dacă rigidul este o placă ce se rotește în jurul unei axe din planul său (de exemplu Ox) atunci $y_C = 0$ și $J_{yz} = 0$ și deci tursorul forțelor de inerție în raport cu punctul O va fi format din:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{R}}^I &= m x_C (\omega^2 \bar{\mathbf{i}} - \varepsilon \bar{\mathbf{j}}) \\
\bar{\mathbf{M}}_0^I &= J_{xz} (\varepsilon \bar{\mathbf{i}} + \omega^2 \bar{\mathbf{j}}) - J_z \varepsilon \bar{\mathbf{k}}
\end{aligned}
\tag{22.18}$$

d) Mișcarea de rotație cu punct fix a rigidului

În acest caz, axele reperului mobil se vor alege axele principale de inerție în raport cu punctul fix O. Deci, se poate scrie:

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{\omega}} &= \omega_x \bar{\mathbf{i}} + \omega_y \bar{\mathbf{j}} + \omega_z \bar{\mathbf{k}} \\
\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \varepsilon_x \bar{\mathbf{i}} + \varepsilon_y \bar{\mathbf{j}} + \varepsilon_z \bar{\mathbf{k}} \\
\bar{\mathbf{r}}_C &= x_C \bar{\mathbf{i}} + y_C \bar{\mathbf{j}} + z_C \bar{\mathbf{k}} \\
\bar{\mathbf{K}}_0 &= J_x \omega_x \bar{\mathbf{i}} + J_y \omega_y \bar{\mathbf{j}} + J_z \omega_z \bar{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Elementele tursorului forțelor de inerție sunt:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{R}}^I &= -m \bar{\mathbf{a}}_C = -m [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \bar{\mathbf{r}}_C + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}_C)] \\
\bar{\mathbf{M}}_0^I &= -\dot{\bar{\mathbf{K}}}_0 = -\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_0}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{K}}_0 \right)
\end{aligned}
\tag{22.19}$$

Proiecțiile pe axe sunt respectiv:

$$\begin{aligned}
F_x^I &= m(\varepsilon_z y_C - \varepsilon_y z_C) + m[(\omega_y^2 + \omega_z^2)x_C - \omega_x(y_C \omega_y + z_C \omega_z)] \\
F_y^I &= m(\varepsilon_x z_C - \varepsilon_z x_C) + m[(\omega_z^2 + \omega_x^2)y_C - \omega_y(z_C \omega_z + x_C \omega_x)] \\
F_z^I &= m(\varepsilon_y x_C - \varepsilon_x y_C) + m[(\omega_x^2 + \omega_y^2)z_C - \omega_z(x_C \omega_x + y_C \omega_y)] \\
M_{0x}^I &= -J_x \varepsilon_x + \omega_y \omega_z (J_y - J_z) \\
M_{0y}^I &= -J_y \varepsilon_y + \omega_z \omega_x (J_z - J_x) \\
M_{0z}^I &= -J_z \varepsilon_z + \omega_x \omega_y (J_x - J_y)
\end{aligned}
\tag{22.20}$$

e) Mișcare generală a rigidului

Pentru acest caz, reducerea forțelor de inerție se face în raport cu centrul de

greutate al rigidului astfel că se obțin:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}}^I &= -m\bar{\mathbf{a}}_C \\ \bar{\mathbf{M}}_C^I &= -\dot{\bar{\mathbf{K}}}_C = -\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_C}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{K}}_C\right)\end{aligned}\quad (22.22)$$

23. PRINCIPIUL DEPLASĂRILOR VIRTUALE

Se consideră un sistem de particule materiale, în stare de mișcare sau de repaus. O particulă oarecare P se mută într-o altă poziție P' situată în vecinătatea infinit apropiată de P. Aceasta deplasare se consideră elementară virtuală iar vectorul $\overline{PP'}$ se numește deplasare virtuală a punctului P. Deplasarea virtuală $\overline{PP'}$ se notează cu $\delta\bar{\mathbf{r}}$, unde $\bar{\mathbf{r}}$ este vectorul de poziție al particulei P: $\bar{\mathbf{r}} = \overline{OP}$, spre deosebire de deplasările reale care se notează cu $d\bar{\mathbf{r}}$. Deplasarea virtuală $\delta\bar{\mathbf{r}}$ este fictivă, imaginară, fără a fi o deplasare efectivă. Deplasarea reală $d\bar{\mathbf{r}}$ are loc într-un timp real, elementar $dt \neq 0$, pe când deplasarea virtuală are loc instantaneu, adică $\delta t = 0$. În deplasarea virtuală, particula ajunge din P în P' în același timp.

Deplasările virtuale care își păstrează intacte toate legăturile avute cu exteriorul înainte de a avea loc deplasarea se numesc deplasări compatibile cu legăturile. Deplasările virtuale în care cel puțin o legătură nu mai este posibilă se numesc deplasări incompatibile cu legăturile.

Presupunând că asupra punctului P acționează o forță $\bar{\mathbf{F}}$ (dată, de legătură, de inerție sau interioară) aceasta va produce în deplasarea reală $d\bar{\mathbf{r}}$, lucrul mecanic real elementar

$$dL = \bar{\mathbf{F}}d\bar{\mathbf{r}}$$

Printr-o deplasare virtuală $\delta\bar{\mathbf{r}}$, forța $\bar{\mathbf{F}}$ va produce lucrul mecanic virtual elementar

$$\delta L = \bar{\mathbf{F}}\delta\bar{\mathbf{r}} = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \quad (23.1)$$

unde X,Y,Z sunt proiecțiile forței $\bar{\mathbf{F}}$ pe axe iar $\delta x, \delta y, \delta z$ sunt proiecțiile pe aceleași axe ale deplasării elementare virtuale $\delta\bar{\mathbf{r}}$. Simbolul δ are aceleași proprietăți ca și diferențiala obișnuită d, deci este un operator de diferențiere.

Dacă se consideră un sistem finit de puncte materiale și un punct oarecare P_i ($i = 1, N$) din sistem, atunci legea lui Newton se scrie sub forma:

$$m_i \bar{\mathbf{a}}_i = \bar{\mathbf{F}}_i^d + \bar{\mathbf{F}}_i^I + \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{F}}_{ij}$$

sau

$$\bar{F}_i^d + \bar{F}_i^l + \sum_{j=1}^N \bar{F}_{ij} + \bar{F}_i^I = 0 \quad (23.2)$$

unde $\bar{F}_i^I = -m_i \bar{a}_i$ este forța de inerție. Dacă această relație vectorială se înmulțește scalar cu deplasarea virtuală $\delta \bar{r}_i$, se obține:

$$\bar{F}_i^d \delta \bar{r}_i + \bar{F}_i^l \delta \bar{r}_i + \left(\sum_{j=1}^N \bar{F}_{ij} \right) \delta \bar{r}_i + \bar{F}_i^I \delta \bar{r}_i = 0 \quad (23.3)$$

Dacă relația (23.3) se scrie pentru toate punctele din sistem și se adună aceste relații, se găsește:

$$\sum_{i=1}^N \bar{F}_i^d \delta \bar{r}_i + \sum_{i=1}^N \bar{F}_i^l \delta \bar{r}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{F}_{ij} \delta \bar{r}_i + \sum_{i=1}^N \bar{F}_i^I \delta \bar{r}_i = 0 \quad (23.4)$$

sau:

$$\delta L^d + \delta L^l + \delta L^{int} + \delta L^I = 0 \quad (23.5)$$

Această relație se mai numește principiul deplasărilor virtuale:

într-o deplasare virtuală a sistemului, lucrul mecanic virtual elementar al forțelor date, de legătură, al celor interioare și al celor de inerție trebuie să fie nul.

În aplicații sunt utile următoarele cazuri particulare:

- a) În probleme de statică se consideră $\delta L^I = 0$ (nu apar forțe de inerție).
- b) Într-un sistem format din corpuri rigide, lucrul mecanic virtual elementar al forțelor interioare este zero: $\delta L^{int} = 0$
- c) Într-un sistem ideal (fără frecare) dacă deplasările sunt compatibile cu legăturile atunci lucrul mecanic virtual elementar al forțelor de legătură este zero: $\delta L^l = 0$

În general principiul deplasărilor virtuale se aplică pentru deplasări virtuale arbitrare.

Dacă se pune problema determinării legilor de mișcare pentru un sistem material, atunci se presupun legăturile ideale, iar corpurile rigide, astfel că $\delta L^{int} = 0$. Pe de altă parte, sistemului i se dă deplasări virtuale compatibile cu legăturile deci $\delta L^l = 0$. În concluzie, legile de mișcare se pot determina din condiția:

$$\delta L^d + \delta L^I = 0 \quad (23.6)$$

Dacă sistemul material are n grade de libertate, atunci poziția acestuia este dată de parametrii independenți q_1, q_2, \dots, q_n care sunt coordonatele generalizate ale sistemului (parametri geometrici: distanțe și/sau unghiuri).

Dând sistemului, succesiv, n deplasări virtuale compatibile cu legăturile, prin variația succesivă a unui parametru, de exemplu $q_i \neq 0$ care va deveni $q_i + \delta q_i$ celelalte rămânând neschimbate, se obține câte o ecuație ($i = \overline{1, n}$). În acest fel, se obțin n ecuații care dau poziția de echilibru în statică, sau prin integrare dau legile de mișcare în cazul dinamic. Apoi, aplicând sistemului deplasări incompatibile cu

legăturile, convenabil alese, se pot determina valorile reacțiunilor statice sau a reacțiunilor dinamice, după caz.

O altă formă a principiului deplasărilor virtuale este principiul vitezelor virtuale. În locul deplasărilor virtuale $\delta \vec{r}_i$ se consideră

$$\delta \vec{r}_i = \vec{v}_i \delta t$$

unde δt este timpul în care au loc deplasările, același pentru orice punct din sistem. Împărțind cu δt , relația (23.1) devine principiul vitezelor virtuale și are forma:

$$\frac{\delta L}{\delta t} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (X_i v_{ix} + Y_i v_{iy} + Z_i v_{iz}) = 0 \quad (23.7)$$

Această relație este aplicabilă în cazul stabilirii condițiilor de echilibru a mecanismelor sau la sisteme de corpuri cărora li se cunoaște distribuția de viteze.

O problemă interesantă de statică este următoarea: să se determine poziția de echilibru a unui sistem de corpuri acționat numai de greutatea acestora și supus la legături ideale. Pentru a rezolva această problemă de statică ($\delta L^I = 0$) se aleg deplasări virtuale compatibile cu legăturile ($\delta L^I = 0$) astfel că principiul deplasărilor virtuale devine:

$$\delta L^d = 0$$

ceea ce implică:

$$\delta L^d \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^d \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{g} \delta \vec{r}_i = \left(\sum_{i=1}^n m_i \delta \vec{r}_i \right) \vec{g} = \delta \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) \vec{g} = \delta (M \vec{r}_C) \vec{g} = M \vec{g} \delta \vec{r}_C = 0 \quad (23.8)$$

unde M este masa sistemului iar \vec{r}_C este vectorul de poziție al centrului de greutate.

Intr-un sistem de referință Oxyz se pot scrie relațiile:

$$\vec{g} = -g \vec{k} ; \vec{r}_C = x_C \vec{i} + y_C \vec{j} + z_C \vec{k} ; \delta \vec{r}_C = \delta x_C \vec{i} + \delta y_C \vec{j} + \delta z_C \vec{k}$$

astfel că din (23.8) se deduce

$$\delta z_C = 0 \quad (23.9)$$

Relația (23.8) reprezintă principiul lui Torricelli: într-o poziție de echilibru static, cota centrului de greutate al sistemului are o valoare extremă: minimă când centrul de greutate ocupă poziția cea mai de jos (echilibru stabil) sau maximă când centrul de greutate ocupă poziția cea mai de sus (echilibru instabil). Dacă $z_C = \text{const.}$, centrul de greutate rămâne în același plan orizontal (echilibru indiferent).

Găsirea pozițiilor de echilibru revine deci la determinarea extremelor funcției z_C .

Principiul deplasărilor virtuale are o largă aplicabilitate în toate capitolele mecanicii. Astfel se pot determina reacțiunile statice în cazul legăturilor ideale, eforturile în barele grinzilor cu zăbrele, reacțiunile și legile de mișcare.

24. CIOCNIRI ȘI PERCUȚII

24.1. Definiții. Ipoteze simplificatoare

În capitolele precedente s-a admis continuitatea vitezelor, a accelerațiilor și a forțelor și în general s-a presupus că fenomenele mecanice sunt continue în timp. În tehnică se întâlnesc cazuri în care în intervale de timp foarte mici apar variații mari de viteză, dar deplasarea în spațiu a particulelor materiale rămâne foarte mică. Fenomenul mecanic în care vitezele particulelor materiale ale unui sistem variază brusc într-un interval scurt de timp se numește ciocnire mecanică.

Fenomenul de ciocnire apare când două particule în mișcare se întâlnesc pentru un moment scurt și vitezele lor se schimbă instantaneu. Se pot da numeroase exemple când intervine ciocnirea: prelucrarea metalelor (forjarea, nituirea, ștanțarea), mișcarea proiectilului la gura tunului, lovirea unei bile de un perete, aplicarea bruscă a unei legături rigide unui corp aflat în mișcare (desfacerea sau pierderea bruscă a unei legături nu este o ciocnire deoarece vitezele variază continuu). Solidarizarea bruscă a două mecanisme dintre care unul se află în mișcare și altul în repaus este o ciocnire, pe când desolidarizarea dintre mecanisme nu este ciocnire.

În timpul ciocnirii se produc forțe foarte mari numite forțe percutante. Percuția este o mărime vectorială ce exprimă acțiunea forțelor percutante care apar la o ciocnire. Se admite că în timpul când are loc ciocnirea particulelor materiale este valabilă legea lui Newton. O particulă de masă m are în momentul t_1 înainte de ciocnire viteza v_1 iar în momentul t_2 imediat după ciocnire, viteza \bar{v}_2 . Pentru această particulă se aplică legea lui Newton:

$$m\bar{a} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$$

de unde

$$m d\bar{v} = \bar{F} dt$$

și integrând în intervalul $[t_1, t_2]$ se obține:

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt \quad (24.1)$$

Integrala din membrul drept al relației (24.1) se numește percuție și se notează prin P , adică

$$\bar{P} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}(t) dt$$

Din relația (24.1) se obține legea: *variația impulsului unei particule materiale în timpul ciocnirii este egală cu percuția forțelor direct aplicate și de legătură ce acționează asupra particulei materiale:*

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \bar{P} \quad (24.2)$$

Notând cu \bar{F}_m valoarea forței \bar{F} într-un punct din intervalul $[t_1, t_2]$ (valoarea medie), se obține:

$$\bar{P} = \bar{F}_m(t_2 - t_1)$$

Din relația (24.2) se observă că percuția \bar{P} este finită deoarece variația vitezei este mare dar finită. Deci forța medie \bar{F}_m trebuie să fie foarte mare pentru că înmulțită cu timpul foarte mic $t_2 - t_1$ să dea o valoare finită. În timpul ciocnirii, forțele corespunzătoare trebuie să aibă valori foarte mari și se vor numi forțe percutante.

În calculul percuțiilor, forțele obișnuite se neglijează și se consideră numai forțele percutante (de exemplu greutatea corpurilor, forțele elastice, se pot neglija).

În timpul ciocnirii, particulele materiale nu se deplasează, adică nu-și schimbă vectorul de poziție, spre deosebire de vectorul vitezei. În acest fel ciocnirea este un fenomen local. Într-adevăr din relația $d\bar{r} = \bar{v} dt$, prin integrare pe intervalul $[t_1, t_2]$ se obține

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{v} dt = \bar{v}_m(t_2 - t_1) \quad (24.3)$$

Intervalul $t_2 - t_1$ fiind mic, rezultă că și diferența $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$ este mică, deci în timpul ciocnirii variația poziției punctului poate fi neglijabilă.

Pentru a rezolva problema ciocnirii a două particule materiale se renunță la ipoteza rigidității lor. Se va ține seama de faptul că în domeniul de contact, corpurile se deformează.

24.2. Teoreme generale pentru studiul ciocnirii

Se consideră un sistem de puncte materiale de mase m_i în care au loc ciocniri, astfel încât în intervalul scurt de timp de la t_1 la t_2 , vitezele punctelor se modifică de la \bar{v}_{1i} la \bar{v}_{2i} , vectorul de poziție rămânând nemodificat \bar{r}_i . Forțele percutante ce

acționează asupra punctului de masă m_i sunt $\bar{F}_i^d, \bar{F}_i^l, \bar{F}_i^{int}$ cărora le corespund percuțiile $\bar{P}_i^d, \bar{P}_i^l, \bar{P}_i^{int}$. Relația (24.2) pentru acest punct este:

$$m_i \bar{v}_{2i} - m_i \bar{v}_{1i} = \bar{P}_i^d + \bar{P}_i^l + \bar{P}_i^{int} \quad (24.4)$$

Însumând pentru toate punctele din sistem, rezultă:

$$\sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_{2i} - \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_{1i} = \sum_{i=1}^N \bar{P}_i^d + \sum_{i=1}^N \bar{P}_i^l \quad (24.5)$$

Am ținut seama că din $\sum_{i=1}^N \bar{F}_i^{int} = 0$ rezultă și $\sum_{i=1}^N \bar{P}_i^{int} = 0$. Cu notațiile:

$$\bar{H}_1 = \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_{1i} = m \bar{v}_{1C} ; \quad \bar{H}_2 = \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_{2i} = m \bar{v}_{2C}$$

impulsul sistemului înainte de ciocnire, respectiv impulsul sistemului după ciocnire se obține prima lege pentru studiul ciocnirii, care se enunță astfel: în timpul ciocnirii variația impulsului este egală cu suma percuțiilor exterioare date și de legătură:

$$\bar{H}_2 - \bar{H}_1 = \sum_{i=1}^N \bar{P}_i^d + \sum_{i=1}^N \bar{P}_i^l \quad (24.6)$$

Vectorul de poziție \bar{r}_i rămâne nemodificat în timpul ciocnirii, astfel că $\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_{1i}$ respectiv $\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_{2i}$ reprezintă momentul cinetic al punctului cu masa m_i înainte și după ciocnire, calculat în raport cu originea O a vectorilor \bar{r}_i .

Înmulțind vectorial relația (24.4) la stânga și adunând relațiile obținute pentru toate punctele sistemului, rezultă a doua lege generală pentru studiul ciocnirii:

$$\sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_{2i} - \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_{1i} = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times \bar{P}_i^d + \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times \bar{P}_i^l$$

sau ținând seama de definiția momentului cinetic al unui sistem:

$$(\bar{K}_0)_2 - (\bar{K}_0)_1 = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times \bar{P}_i^d + \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times \bar{P}_i^l \quad (24.7)$$

Enunțul acesteia este: *variația momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale în timpul ciocnirii este egală cu momentul resultant al percuțiilor exterioare date și de legătură ce acționează asupra sistemului, calculat în raport cu același punct față de care s-a calculat și momentul cinetic.*

Legile (24.6) și (24.7) corespund teoremelor impulsului și a momentului cinetic din cadrul mecanicii continue.

Se întâlnesc în practică și unele situații cum ar fi acelea datorate introducerii bruste a unei legături rigide persistente în mișcarea unui sistem de corpuri rigide. Dacă se consideră o particulă de masă m_i cu vitezele \bar{v}_{1i} și \bar{v}_{2i} înainte și respectiv după aplicarea legăturii, se poate scrie:

$$m_i (\bar{v}_{2i} - \bar{v}_{1i}) = \bar{P}_i$$

\bar{P}_i fiind percuția rezultantă ce acționează punctul de masă m_i . Înmulțind scalar ambii membri cu \bar{v}_{2i} și apoi însumând pentru toate punctele, se obține:

$$\sum_{i=1}^N m_i (\bar{v}_{2i} - \bar{v}_{1i}) \bar{v}_{2i} = \sum_{i=1}^N \bar{P}_i \bar{v}_{2i}$$

Ținând seama de identitatea

$$(\bar{v}_{2i} - \bar{v}_{1i}) \bar{v}_{2i} = \frac{1}{2} (\bar{v}_{2i} - \bar{v}_{1i})^2 + \frac{1}{2} \bar{v}_{2i}^2 - \frac{1}{2} \bar{v}_{1i}^2$$

ultima relație se scrie:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_{2i}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_{1i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\bar{v}_{1i} - \bar{v}_{2i})^2 = \sum_{i=1}^N \bar{P}_i \bar{v}_{2i} \quad (24.8)$$

În relația (24.8) termenii din membrul stâng au semnificații fizice. Astfel:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_{2i}^2 = E_{C_2}$$

reprezintă energia cinetică totală a sistemului după ciocnire.

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_{1i}^2 = E_{C_1}$$

reprezintă energia cinetică totală a sistemului înainte de ciocnire.

Termenul

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\bar{v}_{1i} - \bar{v}_{2i})^2 = E'_C$$

reprezintă energia cinetică pe care ar avea-o sistemul dacă fiecare punct din sistem ar avea viteza pierdută $\bar{v}_{1i} - \bar{v}_{2i}$ (energia cinetică a vitezelor pierdute).

Prin urmare, relația (24.8) devine:

$$E_{C_2} - E_{C_1} + E'_C = \sum_{i=1}^N \bar{P}_i \bar{v}_{2i} \Leftrightarrow E'_C - (E_{C_1} - E_{C_2}) = \sum_{i=1}^N \bar{P}_i \bar{v}_{2i} \quad (24.9)$$

Formula (24.9) reprezintă teorema de variație a energiei cinetice, care se enunță astfel: *diferența dintre energia cinetică a vitezelor pierdute (E'_C) și dintre variația energiei cinetice în timpul ciocnirii ($\Delta E_C = E_{C_1} - E_{C_2}$) este egală cu suma produselor scalare dintre percuțiile aplicate punctelor și vitezele finale ale acestor puncte.*

Se menționează că în cazul unui sistem deformabil de puncte materiale, prin suma percuțiilor se înțelege suma percuțiilor exterioare (date și de legătură) și suma percuțiilor interioare, adică:

$$\sum_{i=1}^N \bar{P}_i = \sum_{i=1}^N \bar{P}_i^d + \sum_{i=1}^N \bar{P}_i^l + \sum_{i=1}^N \bar{P}_i^{\text{int}}$$

În cazul unui rigid, suma percuțiilor interioare este nulă și deci:

$$\sum_{i=1}^N \bar{P}_i = \sum_{i=1}^N \bar{P}_i^d + \sum_{i=1}^N \bar{P}_i^l$$

În particular, dacă sistemul este rigid și fără frecare, percuțiile exterioare \bar{P}_i sunt perpendiculare pe vitezele \bar{v}_{2i} și deci $\bar{P}_i \bar{v}_{2i} = 0$. În acest caz, teorema de variație a energiei cinetice se scrie astfel:

$$E_{C_1} - E_{C_2} = E'_C \quad (24.10)$$

Relația (24.10) se mai numește teorema lui Carnot care se enunță astfel: *în cazul sistemelor rigide, ideale, variația energiei cinetice (pierderea de energie cinetică) în timpul ciocnirii, este egală cu energia cinetică corespunzătoare vitezelor pierdute.*

În timpul ciocnirii nu este permisă aplicarea teoremei energiei cinetice ($dE_C = dL$) deoarece corpurile fiind deformabile, apar variații ale energiei cinetice, o parte din aceasta transformându-se în alte forme de energie (calorică, luminoasă, de deformare etc.)

24.3. Ciocnirea centrică a două sfere

Se consideră două sfere de mase m_1 și m_2 care se află în mișcare de translație pe direcția liniei centrelor cu vitezele \bar{v}_1 respectiv \bar{v}_2 (fig.24.1).

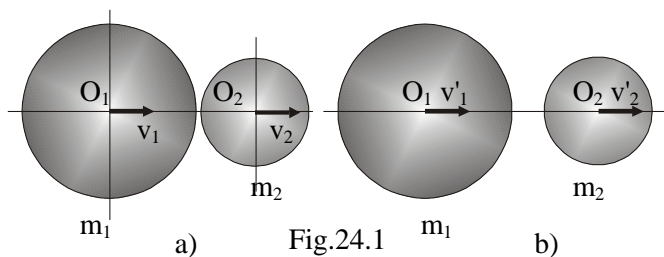


Fig.24.1

Se mai presupune că vitezele corpurilor sunt coliniare cu aceeași dreaptă. Dacă $v_1 > v_2$ sferele ajung în contact și deci are loc o

ciocnire. Se pune problema să se determine vitezele celor două sfere după ciocnire: v'_1 și v'_2 .

Aplicând teorema impulsului proiectată pe linia centrelor și ținând seama că intervin numai percuțiile de legătură, se obține:

$$H_2 - H_1 = 0 \Leftrightarrow H_2 = H_1$$

adică impulsul sistemului se conservă în timpul ciocnirii:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (24.11)$$

Pentru a obține o relație în plus, se ține seama de deformabilitatea corpurilor. Pe baza acestei ipoteze, în timpul ciocnirii se deosebesc două faze:

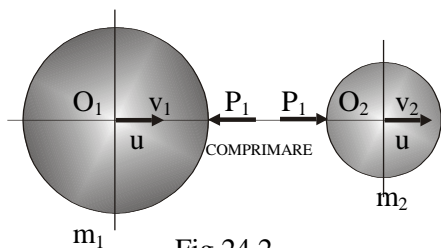


Fig.24.2

a) Faza de comprimare care începe în momentul contactului și durează până când vitezele sferelor devin egale. Viteza comună se notează cu u (fig.24.2). În

această fază foarte scurtă, centrele O_1 și O_2 sunt la distanța minimă între ele, sferele se comprimă, percuția de legătură ce acționează în acest interval se notează P_1 .

Aplicând teorema impulsului proiectată pe direcția liniei centrelor, se obțin ecuațiile:

$$\begin{aligned} m_1 u - m_1 v_1 &= -P_1 \\ m_2 u - m_2 v_2 &= P_1 \end{aligned} \quad (24.12)$$

b) Faza de destindere (fig.24.3) este caracterizată prin aceea că sferele se destind și își modifică vitezele, de la viteza comună u la vitezele v'_1 și respectiv v'_2 , sferele nu se mai ating. În această fază (foarte scurtă) percuția de legătură se notează cu P_2 .

Teorema impulsului proiectată pe direcția liniei centrelor conduce la ecuațiile:

$$\begin{aligned} m_1 v'_1 - m_1 u &= -P_2 \\ m_2 v'_2 - m_2 u &= P_2 \end{aligned} \quad (24.13)$$

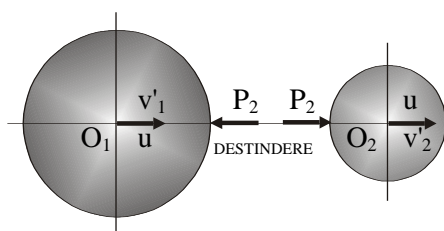


Fig.24.3

Pentru determinarea necunoscutelor u , v'_1 , v'_2 , P_1 și P_2 este necesară stabilirea unei noi ecuații.

Prin definiție, se introduce o mărime caracteristică corpurilor numită coeficient de restituire (coeficient de elasticitate la ciocnire) egal cu raportul percuțiilor P_1 și P_2 , adică

$$R = \frac{P_2}{P_1} \quad (24.14)$$

Pentru $R=1$, percuția restituită prin relaxare este egală cu percuția P_1 din perioada de comprimare. Cele două sfere se deformează la început dar apoi prin relaxare revin la forma inițială. Acesta este cazul corpurilor elastice iar ciocnirea în care $R=1$ se numește ciocnire elastică.

Pentru $R=0$, percuția $P_2=0$ deci nu mai apare relaxarea, sferele rămân deformate și lipite între ele. Sferele se numesc plastice iar ciocnirea se va numi ciocnire plastică.

În general restituirea P_2 nu se face complet ci parțial, ceea ce înseamnă că $R \in (0,1)$ și sferele își revin parțial la formele inițiale. În acest caz, ciocnirea se numește naturală și este situația cea mai întâlnită în practică.

Coeficientul R de restituire caracterizează fenomenul de ciocnire din punct de vedere elastic.

Unele din valorile coeficientului de restituire sunt următoarele: $R=15/16$ pentru sticlă-sticlă; $R=8/9$ pentru fildeș-fildeș; $R=5/9$ pentru oțel-oțel; $R=1/2$ pentru lemn-lemn; $R=0$ pentru argilă-argilă.

Revenind la problema determinării vitezelor și a percuțiilor de legătură, se vor rezolva ecuațiile (24.11), (24.12), (24.13) și (24.14), astfel că se obțin

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v'_1 + m_2 v'_2}{m_1 + m_2} \quad (24.15)$$

$$P_1 = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} ; P_2 = \frac{m_1 m_2 (v'_2 - v'_1)}{m_1 + m_2} ; R = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad (24.16)$$

$$v'_1 = v_1 - \frac{(1+R)(v_1 - v_2)}{1 + \frac{m_1}{m_2}} ; v'_2 = v_2 + \frac{(1+R)(v_1 - v_2)}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \quad (24.17)$$

Ținând seama că vitezele corpurilor înainte și după ciocnire sunt cunoscute, se poate calcula pierderea de energie cinetică în timpul ciocnirii (bilanțul energetic). În timpul ciocnirii centrice a două sfere are loc o variație a energiei cinetice a sistemului, o dispăre de energie cinetică ce se transformă în lucru mecanic de deformare, energie calorică etc. Notând această pierdere de energie cinetică prin ciocnire cu ΔE_C , se scrie

$$\Delta E_C = E_{C_1} - E_{C_2} = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \right)$$

care după înlocuirea relației (24.17) devine:

$$\Delta E_C = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - R^2) (v_1 - v_2)^2 \quad (24.18)$$

În cazul ciocnirii elastice ($R=1$), $\Delta E_C=0$, adică nu există pierdere de energie cinetică. Pierderea de energie cinetică este maximă în cazul ciocnirii plastice ($R=0$):

$$\Delta E_C = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Cazuri particulare

a) Dacă ciocnirea este elastică ($R=1$) iar sferile identice $m_1=m_2$, atunci din relația (24.17) se obțin $v'_1 = v_2$; $v'_2 = v_1$

adică sferile își schimbă vitezele între ele.

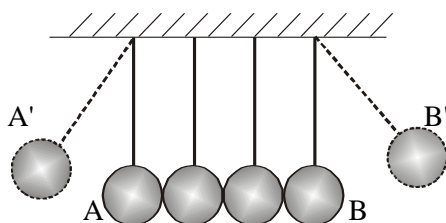


Fig.24.4

Dacă $v_2=0$ atunci $v'_1=0, v'_2=v_1$ adică sfera O_1 ciocnește cu viteza v_1 o altă sferă identică O_2 aflată în stare de repaus. Sfera O_1 transmite sferei O_2 viteza sa v_1 iar sfera O_1 se oprește. Acest rezultat explică cunoscuta experiență cu un număr oarecare de bile identice (de fildeș) prinse de un stativ (fig.24.4).

Depărtând bila A în poziția A' și lăsând-o să cadă, se constată că singura bilă care ia parte la mișcare este bila extremă B care ajunge în poziția B' fără ca celelalte bile să se miște.

b) Dacă ciocnirea are loc astfel că prima sferă lovește a doua sferă care se găsește în repaus iar ciocnirea este plastică ($v_2=0, R=0$), atunci pierderea de energie cinetică este

$$\Delta E_C = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2$$

Raportând această variație la energia cinetică inițială, rezultă:

$$\frac{\Delta E_C}{E_{C_1}} = \frac{\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$$

În practică se întâlnesc două cazuri extreme:

b1) $m_1 \gg m_2$ (raportul m_1/m_2 este foarte mare). În acest caz $\frac{\Delta E_C}{E_{C_1}}$ devine foarte mic

deci se disipează foarte puțină energie cinetică. Acesta este cazul baterii unui cui de masă m_2 cu un ciocan greu de masă m_1 într-un perete. Fenomenul se caracterizează prin producerea mișcării.

b2) $m_1 \ll m_2$, atunci $\Delta E_C \approx E_{C_1}$, adică aproape toată energia cinetică se transformă în altă formă de energie, de obicei de deformare. Acesta este cazul prelucrării prin deformări plastice: corpul care trebuie prelucrat se așează pe un suport greu (nicovală) încât masa piesei m_2 să fie mult mai mare decât masa m_1 a ciocanului.

24.4. Ciocnirea unei sfere cu un perete

Ciocnirea unei sfere cu un perete se poate interpreta ca un caz limită al ciocnirii a două sfere, peretele fiind considerat ca o sferă cu masa $m_2 = \infty$.

În relația (24.11) se admite că

$$v_2 = v'_2 = 0$$

pentru ca toți termenii să fie finiți.

Dacă ciocnirea este dreaptă, se consideră o sferă de masă m care cade de la înălțimea h_1 pe o suprafață orizontală fixă (fig.24.5). Valoarea coeficientului de restituire este R și deci

$$R = -\frac{v'_1}{v_1} \quad (24.19)$$

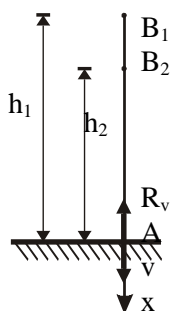


Fig.24.5

După ciocnire, sfera se ridică la înălțimea h_2 . Din considerente cinematice, aplicând formula lui Galilei, sfera ajunge în A cu viteza $v_1 = \sqrt{2gh_1}$

După ciocnirea din A, viteza devine

$$v'_1 = -\sqrt{2gh_2}$$

Semnul "-" semnifică faptul că viteza v'_1 este dirijată în sens contrar cu v_1 . Din relația (24.19) se deduce:

$$R = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad (24.20)$$

Aceasta este una din metodele de determinare a coeficientului de restituire R : măsurând înălțimile h_1 și h_2 se poate determina R .

Dar bila va sări de mai multe ori de pe suprafața orizontală cu care se

ciocnește ridicându-se la diferite înălțimi h_i . Se poate calcula lungimea drumului h parcurs de corp și timpul t necesar parcurgerii acestui drum până la oprire. Se obține:

$$h = h_1 + 2h_2 + 2h_3 + \dots$$

unde

$$h_2 = R^2 h_1; h_3 = R^2 h_2 = R^4 h_1; h_4 = R^2 h_3 = R^6 h_1, \dots$$

Deci

$$h = h_1 + 2R^2 h_1 (1 + R^2 + R^4 + \dots) = h_1 + \frac{2R^2 h_1}{1 - R^2} = \frac{1 + R^2}{1 - R^2} h_1 \quad (24.21)$$

Timpul necesar parcurgerii distanței h este

$$t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

Timpul necesar urcării pe distanța h_2 est egal cu cel necesar coborârii pe aceeași distanță și este

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = R \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

Pentru urcarea, respectiv coborârea pe înălțimea h_3 este necesar timpul

$$t_3 = \sqrt{\frac{2h_3}{g}} = R \sqrt{\frac{2h_2}{g}} \text{ sau } t_3 = R^2 \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \text{ etc.}$$

Deci se poate scrie:

$$t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} + 2R \sqrt{\frac{2h_1}{g}} + 2R^2 \sqrt{\frac{2h_1}{g}} + \dots$$

sau

$$t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} + 2R \sqrt{\frac{2h_1}{g}} (1 + R + R^2 + \dots) = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \left(1 + \frac{2R}{1 - R} \right) = \frac{1 + R}{1 - R} \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \quad (24.22)$$

Dacă ciocnirea unei sfere cu un perete este oblică, sfera de masă m se deplasează cu viteza v înclinată cu unghiul α față de normală și ciocnește un perete în O , coeficientul de restituire fiind R (fig.24.6).

După ciocnire, sfera are viteza v' înclinată cu unghiul β față de normală. In acest caz se vor folosi unele rezultate de la ciocnirea oblică a două sfere. Astfel viteza

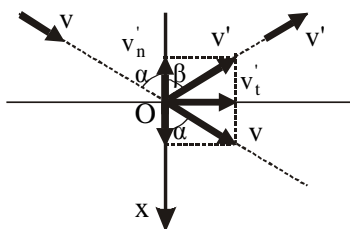


Fig.24.6

v se descompune în componenta normală v_n și tangențială v_t . Analog viteza v' se descompune în componentele v'_n respectiv v'_t .

Deoarece frecările se neglijează, componentele tangențiale nu se modifică:

$$v'_t = v_t \quad (24.23)$$

iar componentele normale se modifică după formula (24.19):

$$v'_n = -Rv_n$$

$$(24.24)$$

Pe de altă parte, din fig. 24.6 se deduc:

$$\begin{aligned} v_t &= v \sin \alpha ; v_n = v \cos \alpha \\ v'_t &= v' \sin \beta ; v'_n = -v' \cos \beta \end{aligned} \quad (24.25)$$

Din relațiile (24.23), (24.24) și (24.25) rezultă

$$\begin{aligned} v' \sin \beta &= v \sin \alpha \\ v' \cos \beta &= R v \cos \alpha \end{aligned}$$

Din ultimele relații se obține:

$$v' = v \sqrt{\sin^2 \alpha + R^2 \cos^2 \alpha} ; \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{R} \quad (24.26)$$

Din (24.26) se deduce că $\beta \geq \alpha$ iar în cazul ciocnirii elastice ($R=1$) se obține $\beta = \alpha$ și $v' = v$, rezultat asemănător legilor reflexiei razei de lumină (unghiurile de incidență și de reflexie sunt egale).

24.5. Ciocnirea oblică a două sfere

Se consideră două sfere de mase m_1 și m_2 care în momentul ciocnirii au vitezele \bar{v}_1 și \bar{v}_2 , dar nu sunt dirijate după linia centrelor. Viteza \bar{v}_1 formează unghiul α_1 cu linia centrelor iar viteza \bar{v}_2 formează unghiul α_2 cu aceeași axă (fig.24.7.a).

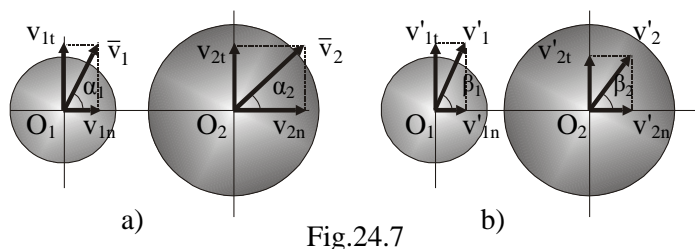


Fig.24.7

Pentru a studia ciocnirea oblică, se descompun vectorii viteze în câte două componente: după normala comună (linia centrelor) și după tangenta în punctul comun

(perpendiculară pe linia centrelor). Astfel se poate scrie:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_{1n} + \bar{v}_{1t} ; \bar{v}_2 = \bar{v}_{2n} + \bar{v}_{2t} \quad (24.27)$$

unde

$$v_{1n} = v_1 \cos \alpha_1 ; v_{1t} = v_1 \sin \alpha_1 ; v_{2n} = v_2 \cos \alpha_2 ; v_{2t} = v_2 \sin \alpha_2 \quad (24.28)$$

În timpul ciocnirii se neglijează frecările iar mișcările la începutul și la sfârșitul ciocnirilor vor fi de translație.

Imediat după ciocnire, vitezele celor două sfere sunt \bar{v}'_1 și \bar{v}'_2 iar descompunerea pe aceleași axe de mai înainte este:

$$\bar{v}'_1 = \bar{v}'_{1n} + \bar{v}'_{1t} ; \bar{v}'_2 = \bar{v}'_{2n} + \bar{v}'_{2t} \quad (24.28)$$

unde

$$v'_{1n} = v'_1 \cos \beta_1 ; v'_{1t} = v'_1 \sin \beta_1 ; v'_{2n} = v'_2 \cos \beta_2 ; v'_{2t} = v'_2 \sin \beta_2 \quad (24.29)$$

Deoarece s-au neglijat frecările, componentele tangențiale ale vitezelor înainte și după ciocnire nu se modifică, adică

$$v_{1t} = v'_{1t} ; v_{2t} = v'_{2t} \quad (24.30)$$

Componentele normale ale vitezelor se modifică ca la ciocnirea centrică, astfel că se poate scrie:

$$\begin{aligned} v'_{1n} &= v_{1n} - \frac{(1+R)(v_{1n} - v_{2n})}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \\ v'_{2n} &= v_{2n} + \frac{(1+R)(v_{1n} - v_{2n})}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \end{aligned} \quad (24.31)$$

Se pot calcula vitezele după ciocnire și înclinarea lor față de linia centrelor:

$$v'_1 = \sqrt{v'^2_{1n} + v'^2_{1t}} ; v'_2 = \sqrt{v'^2_{2n} + v'^2_{2t}} \quad (24.32)$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{v'_{1t}}{v'_{1n}} ; \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{v'_{2t}}{v'_{2n}} \quad (24.33)$$

24.6. Ciocnirea unei sfere cu un corp în mișcare de rotație cu axă fixă

Se consideră un corp (C) ce se poate roti în jurul unei axe fixe Oz (fig.24.8). Momentul de inerție axial al corpului în raport cu această axă este J_0 și corpul are viteza unghiulară instantanee ω . Într-un punct A al corpului în care normala la suprafața lui este perpendiculară pe axa Oz, un corp cu masa m și viteza v dirijată după această normală se ciocnește cu corpul (C). Viteza punctului de contact aparținând corpului (C) este $r\omega$ și este înclinată cu unghiul φ față de normala comună. Neglijând frecările se aplică rezultatele de la ciocnirea oblică și se consideră numai componenta normală a acestui punct:

$$r\omega \cos \varphi = \omega L$$

După ciocnire, corpul are viteza unghiulară ω' iar sfera are viteza v' . Coeficientul de restituire este cunoscut R .

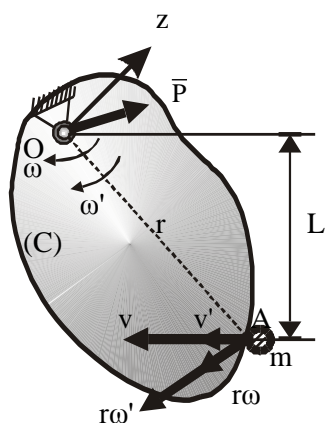


Fig.24.8

În timpul ciocnirii în punctul comun de contact apar două percuții egale și de sens opus, acționând una asupra corpului (C) și cealaltă asupra sferei. De asemenea mai apar percuții de legătură în axa Oz.

Pentru a elimina percuțiile de legătură din axă, se aplică teorema momentului cinetic în raport cu Oz și se ține seama că percuțiile din punctul de contact se anulează și deci:

$$(\bar{K}_0)_2 - (\bar{K}_0)_1 = 0 \quad (24.34)$$

Proiectând pe axa Oz se obține:

$$(K_{oz})_1 = J_0\omega + mvL \quad ; \quad (K_{oz})_2 = J_0\omega' + mv'L$$

Ecuția (24.34) proiectată pe axa Oz devine:

$$J_0\omega + mvL = J_0\omega' + mv'L \quad (24.35)$$

Coeficientul de restituire în acest caz devine:

$$R = \frac{\omega'L - v'}{v - \omega L} \quad (24.36)$$

Din ecuațiile (24.35) și (24.36) se obțin valorile:

$$\begin{aligned} v' &= v - \frac{(1+R)(v - \omega L)}{1 + \frac{mL^2}{J_0}} \\ \omega' &= \omega + \frac{(1+R)(v - \omega L)}{L + \frac{J_0}{mL}} \end{aligned} \quad (24.37)$$

Pierderea de energie cinetică prin ciocnire este:

$$\Delta E_C = E_{C_1} - E_{C_2} = \frac{1}{2}J_0\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{1}{2}J_0\omega'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \right)$$

de unde, folosind relațiile (24.37) se obține:

$$\Delta E_C = \frac{mJ_0}{2(mL^2 + J_0)}(1 - R^2)(v - \omega L)^2 \quad (24.38)$$

Variația energiei cinetice este maximă pentru $R=0$ (ciocnire plastică) iar în cazul $R=1$ (ciocnire elastică) nu se pierde energie cinetică.

24.7. Percuția aplicată unui corp cu axă fixă

Se consideră un corp cu masa m care se poate roti în jurul unei axe fixe realizată prin articulațiile O_1 și O_2 ($O_1O_2=h$) (fig.24.9).

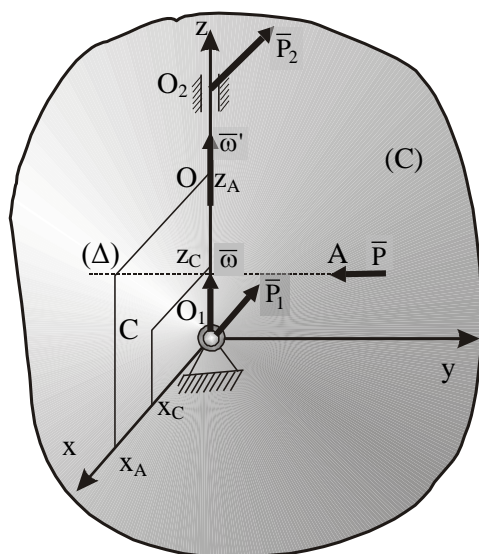


Fig.24.9

Sistemul de referință mobil O_1xyz se alege astfel ca O_1O_2 să coincidă cu axa O_1z , axa Ox este perpendiculară pe O_1z , planul O_1xz să conțină centrul de greutate C al corpului iar axa Oy se alege perpendiculară pe planul Oxz încât sistemul de referință să fie drept. Față de acest sistem de axe coordonatele centrului de greutate sunt cunoscute: $C(x_C, 0, z_C)$. În punctul $A(x_A, y_A, z_A)$ corpului i se aplică o percuție exterioră $\bar{P} = P_x \bar{i} + P_y \bar{j} + P_z \bar{k}$.

Din cauza acestei percuții, în O_1 și O_2 apar percuțiile de legătură

$$\bar{P}_1 = P_{1x} \bar{i} + P_{1y} \bar{j} + P_{1z} \bar{k} ;$$

$$\bar{P}_2 = P_{2x} \bar{i} + P_{2y} \bar{j} + P_{2z} \bar{k} \quad (24.39)$$

Dacă ω este viteza unghiulară

de rotație a corpului înainte de ciocnire iar momentele de inerție axiale și centrifugale se presupun cunoscute, se pune problema să se determine viteza unghiulară ω' după ciocnire și percuțiile de legătură din O_1 și O_2 .

Pentru determinarea acestor necunoscute se aplică teoremele generale ale ciocnirii (24.6) și (24.7) în care se va ține seama de următoarele formule:

$$\bar{H} = m\bar{v}_C = m\bar{\omega} \times \bar{r}_C = m\omega x_C \bar{j} ; \quad \bar{H}_2 - \bar{H}_1 = m(\omega' - \omega)x_C \bar{j}$$

$$\bar{K}_{O1} = -J_{xz} \omega \bar{i} - J_{yz} \omega \bar{j} + J_z \omega \bar{k} \quad (24.40)$$

$$(\bar{K}_{O1})_2 - (\bar{K}_{O1})_1 = -J_{xz} (\omega' - \omega) \bar{i} - J_{yz} (\omega' - \omega) \bar{j} + J_z (\omega' - \omega) \bar{k}$$

Teoremele ciocnirii se scriu sub forma:

$$\bar{H}_2 - \bar{H}_1 = m(\omega' - \omega)x_C \bar{j} = \bar{P} + \bar{P}_1 + \bar{P}_2 \quad (24.41)$$

$$(\bar{K}_{O1})_2 - (\bar{K}_{O1})_1 = -J_{xz} (\omega' - \omega) \bar{i} - J_{yz} (\omega' - \omega) \bar{j} + J_z (\omega' - \omega) \bar{k} = \bar{O}_1A \times \bar{P} + \bar{O}_1O_2 \times \bar{P}_2$$

Proiecțiile pe axele reperului mobil sunt:

$$0 = P_x + P_{1x} + P_{2x}$$

$$(\omega' - \omega)m x_C = P_y + P_{1y} + P_{2y}$$

$$0 = P_z + P_{1z} + P_{2z}$$

$$-J_{xz} (\omega' - \omega) = y_A P_z - z_A P_y - h P_{2y} \quad (24.42)$$

$$-J_{yz}(\omega' - \omega) = z_A P_x - x_A P_z + h P_{2z}$$

$$J_z(\omega' - \omega) = x_A P_y - y_A P_x$$

Din ultima ecuație a sistemului (20.42) se obține

$$\omega' = \omega + \frac{x_A P_y - y_A P_x}{J_z}$$

iar din ultima ecuație

$$P_{2x} = \frac{x_A P_z - z_A P_x}{h} + \frac{J_{yz}(y_A P_x - x_A P_y)}{h J_z}$$

Din aceasta și din prima ecuație a sistemului (20.42), se deduce:

$$P_{1x} = -P_x + \frac{z_A P_x - x_A P_z}{h} + \frac{J_{yz}(x_A P_y - y_A P_x)}{h J_z}$$

Din a patra ecuație (20.42) rezultă:

$$P_{2y} = \frac{y_A P_z - z_A P_y}{h} + \frac{J_{xz}(x_A P_y - y_A P_x)}{h J_z}$$

iar din aceasta și a doua ecuație (20.42) se obține

$$P_{1y} = \frac{m x_C (x_A P_y - y_A P_x)}{J_z} + \frac{z_A P_y - y_A P_z}{h} + \frac{J_{xz}(y_A P_z - x_A P_y)}{h J_z} - P_y$$

A treia ecuație din (20.42) conduce la o ecuație cu două necunoscute:

$$P_{1z} + P_{2z} = -P_z$$

deci P_{1z} și P_{2z} rămân nedeterminate. Dacă articulația din O_1 (sau O_2) ar fi cilindrică, ultima ecuație se poate rezolva. De exemplu, dacă în O_2 este articulație cilindrică, atunci:

$$P_{2z} = 0 ; P_{1z} = -P_z$$

În continuare se vor determina condițiile care trebuie îndeplinite de percuția \bar{P} ca să nu existe percuții (smucituri) pe axă. Din condițiile

$$\bar{P}_1 = 0 ; \bar{P}_2 = 0$$

rezultă

$$P_x = 0 ; P_y \left(1 - \frac{m x_C x_A}{J_z} \right) = 0 ; P_z = 0 ; P_y \left(\frac{x_A J_{xz}}{J_z} - z_A \right) = 0 ; J_{yz} = 0 \quad (24.43)$$

Din relațiile (24.43), dacă $P_y = 0$ ar rezulta o situație care contravine ipotezei, deci se poate deduce:

$$x_A = \frac{J_z}{m x_C} ; z_A = \frac{J_{xz}}{m x_C}$$

În concluzie:

- a) Percuția \bar{P} trebuie aplicată perpendicular pe planul $O_1 xz$, deoarece $P_x = P_z = 0$.
- b) Condiția $J_{yz} = 0$ se referă la poziția axei de rotație în corp și anume: fie O punctul de intersecție al unui plan ce trece prin \bar{P} și este perpendicular pe $O_1 z$ cu axa Oz . Prin O

se duc axele $Ox''||Ox$, $Oy''||Oy$. Față de acest reper, coordonatele lui O sunt: $x_O=y_O=0$ și $z_O=z_A=\frac{J_{xz}}{mx_C}$ și deci momentele centrifugale de inerție față de reperul $Ox'y'z'$ au valorile:

$$J_{x'z'} = \sum_{i=1}^N m_i x_i' z_i' = \sum_{i=1}^N m_i x_i (z_i - z_A) = \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i - z_A \sum_{i=1}^N m_i x_i = J_{xz} - m z_A x_C = 0$$

$$J_{y'z'} = \sum_{i=1}^N m_i y_i' z_i' = \sum_{i=1}^N m_i y_i (z_i - z_A) = \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i - z_A \sum_{i=1}^N m_i y_i = J_{yz} - m z_A y_C = 0$$

Aceste rezultate arată că axa de rotație trebuie să fie principală de inerție în raport cu O'.

c) Percuția \bar{P} trebuie aplicată în punctul A(x_A, y_A, z_A) numit centru de percuție și este situat pe dreapta (Δ) perpendiculară pe planul determinat de axa de rotație și centul de greutate C, unde

$$x_A = \frac{J_z}{mx_C} ; y_A = \text{arbitrar} ; z_A = \frac{J_{xz}}{mx_C} \quad (24.44)$$

Dreapta (Δ) se numește axă de percuție.

24.8. Percuția aplicată unui corp rigid liber

Se consideră un corp rigid liber asupra căruia acționează percuția \bar{P} într-un punct A. Alegând un sistem de referință Cxyz trecând prin centrul de greutate C al corpului, se presupun cunoscute viteza centrului de greutate \bar{v} a corpului și viteza sa unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul centrului de greutate înainte de aplicarea percuției. Se pune problema să se determine viteza \bar{v}' a centrului de greutate și viteza unghiulară $\bar{\omega}'$ a rigidului după aplicarea percuției. Se aplică teoremele generale (24.6) și (24.7) care proiectate pe axele sistemului de referință mobil ales conduc la ecuațiile:

$$\begin{aligned} m(v'_x - v_x) &= P_x ; m(v'_y - v_y) = P_y ; m(v'_z - v_z) = P_z \\ J_x(\omega'_x - \omega_x) - J_{xy}(\omega'_y - \omega_y) - J_{xz}(\omega'_z - \omega_z) &= y_A P_z - z_A P_y \\ J_y(\omega'_y - \omega_y) - J_{yz}(\omega'_z - \omega_z) - J_{yx}(\omega'_x - \omega_x) &= z_A P_x - x_A P_z \\ J_z(\omega'_z - \omega_z) - J_{zx}(\omega'_x - \omega_x) - J_{zy}(\omega'_y - \omega_y) &= x_A P_y - y_A P_x \end{aligned} \quad (24.45)$$

unde m este masa rigidului iar $J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_z, J_{yz}$ sunt momentele de inerție în raport cu axele sistemului de referință ales.

Se obține un sistem de șase ecuații cu șase necunoscute $v'_x, v'_y, v'_z, \omega'_x, \omega'_y, \omega'_z$ ceea ce conduce la determinarea vectorilor viteze \bar{v}' și $\bar{\omega}'$.

În particular, dacă sistemul de referință Cxyz se alege astfel ca axele să fie principale de inerție: $J_{xy}=J_{xz}=J_{yz}=0$, ultimele trei ecuații ale sistemului (24.45) se simplifică și devin:

$$\begin{aligned} J_x(\omega'_x - \omega_x) &= y_A P_z - z_A P_y \\ J_y(\omega'_y - \omega_y) &= z_A P_x - x_A P_z \\ J_z(\omega'_z - \omega_z) &= x_A P_y - y_A P_x \end{aligned} \quad (24.46)$$

Pentru o placă plană ce se mișcă în raport cu reperul Cxy, sistemul (24.45) devine:

$$m(v'_x - v_x)P_x ; m(v'_y - v_y) = P_y ; J_C(\omega' - \omega) = x_A P_y - y_A P_x$$

24.9. Percuția aplicată unui corp rigid cu un punct fix

În acest caz, corpul rigid este fixat în punctul O și asupra lui acționează în punctul A percuția \bar{P} . Dacă $\bar{\omega}$ este viteza unghiulară a rigidului înainte de aplicarea percuției, se pune problema să se determine viteza unghiulară $\bar{\omega}'$ a rigidului după aplicarea percuției, precum și percuțiile de legătură \bar{P}_i din O.

Sistemul de referință Oxyz se alege astfel încât axele să fie principale de inerție. Aplicând teorema momentului cinetic (24.7) în raport cu punctul fix O, proiecțiile acestora pe axe conduc la sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} J_x(\omega'_x - \omega_x) &= y_A P_z - z_A P_y \\ J_y(\omega'_y - \omega_y) &= z_A P_x - x_A P_z \\ J_z(\omega'_z - \omega_z) &= x_A P_y - y_A P_x \end{aligned} \quad (24.48)$$

din care se determină necunoscutele $\bar{\omega}'_x, \bar{\omega}'_y, \bar{\omega}'_z$.

Percuția de legătură \bar{P}_i se poate determina folosind teorema de variație a impulsului (24.6).

25. ELEMENTE DE MECANICĂ ANALITICĂ

25.1. Generalități

În capitolele anterioare s-a studiat mișcarea mecanică a corpurilor folosind principiile enunțate de Newton, motiv pentru care mecanica teoretică se mai numește

și mecanică newtoniană sau clasică. Un rol important în studiul mișcării corpurilor îl au teoremele generale (teorema impulsului, teorema momentului cinetic și teorema energiei cinetice). În studiul echilibrului static sau dinamic intervin forțele de legătură interioare. Aceste forțe conduc la complicarea studiului și în multe situații nici nu interesează în studiul mișcărilor, din care cauză se încearcă eliminarea lor. Deosebirea dintre conceptele lui G.Galilei și I.Newton care stau la baza mecanicii newtoniene și concepția lui J.L.Lagrange care stă la baza mecanicii analitice, constă în special în aceea că primii doi considerau mecanica drept o știință fizică, legată de practică, pe când ultimul privea mecanica ca un capitol al analizei matematice.

Mecanica analitică în concepția întemeietorilor săi (J.L.Lagrange, J.Bernoulli, L.Euler, J.D'Alembert, P. de Maupertuis, W.R.Hamilton, K.F.Gauss, K.G.Jacobi, A.M.Liapunov etc.) studiază mișcarea mecanică a unor sisteme de corpuri între care există numai legături fără frecări, urmărind în principal să facă studiul mișcării evitând introducerea forțelor de legătură. Mecanica analitică stabilește ecuații și da metode cu un grad mare de generalitate, care permit să fie studiate sisteme cu mai multe grade de libertate.

În mecanica newtoniană s-a studiat mișcarea sistemelor materiale în diferite sisteme de coordonate: cartezian, polar etc. În mecanica analitică se generalizează noțiunea de coordonate, nefiind legate de un anumit sistem de coordonate. Aceste coordonate se vor numi coordonate generalizate (lagrangiene) și se vor nota cu q_1, q_2, \dots, q_n unde $n \in \mathbb{N}$, n finit. De exemplu, pentru un sistem de p puncte materiale, poziția fiecărui punct este dată prin coordonatele carteziene x_i, y_i, z_i , $i = \overline{1, p}$. Pentru tot sistemul sunt necesari $n=3p$ parametri:

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_p, y_p, z_p$$

care pot fi înlocuiți cu coordonatele generalizate q_1, q_2, \dots, q_{3p} .

Coordonatele generalizate sunt mărimi geometrice independente cu ajutorul cărora se determină poziția sistemului la un anumit moment. Ele pot fi lungimi sau unghiuri și permit să se studieze mișcarea într-un spațiu cu un număr oarecare, finit de dimensiuni.

Cu ajutorul coordonatelor generalizate se pot studia problemele cu mai multe grade de libertate. Corespunzător coordonatelor generalizate q_1, q_2, \dots, q_n există și viteze generalizate $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ sau accelerații generalizate $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n$.

25.2. Legături

Legătura este o restricție geometrică impusă unui sistem material, ceea ce presupune o limitare a pozițiilor sistemului. Un punct material obligat să se miște pe o curbă sau pe o suprafață este un exemplu de punct material supus la legături.

Legăturile pot fi aspre (cu frecare) sau ideale (lucii, fără frecare). Legăturile fără frecare se exprimă în mecanica analitică prin relații matematice.

Legăturile, din alt punct de vedere, pot fi unilaterale și impun restricții geometrice într-un singur sens astfel că se exprimă matematic prin inegalități de forma

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) \leq 0$$

Un exemplu în acest caz este pendulul matematic - legătura fiind firul fixat într-un punct.

Legăturile bilaterale impun restricții geometrice în ambele sensuri și se exprimă prin ecuații de forma

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

Pendulul matematic - legătura fiind un tub circular în care se poate deplasa un punct material este un astfel de exemplu de legătură bilaterală. În cele ce urmează se vor studia numai legăturile bilaterale.

Se pot face și altfel de clasificări, după cum urmează. În funcție de timp legăturile pot fi:

a) Legături reonome, când timpul apare explicit (curbe și suprafețe mobile)

$$f(t, q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

b) Legături scleronome, când timpul nu apare explicit în ecuația legăturii (curbe și suprafețe fixe)

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

În funcție de apariția vitezelor și accelerațiilor în ecuația legăturii, acestea pot fi:

c) olonome - când derivatele nu apar explicit în ecuația legăturii

$$f(t, q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

Aceste legături reprezintă și forme integrabile.

d) neolonome - când apar explicit vitezele și/sau accelerațiile:

$$f(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) = 0$$

Aceste expresii nu pot fi integrate.

În cazul legăturilor neolonome, acestea pot fi de speța întâi (numai componentele vitezei apar explicit) sau de speța a doua (când apar explicit componentele vitezei și accelerației).

25.3. Ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a

Se consideră un sistem material și P o particulă a cărei poziție este dată de coordonatele generalizate q_1, q_2, \dots, q_n . O deplasare elementară virtuală $\delta \vec{r}$, transformă punctul P în P'. Poziția punctului P' este dată de $q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n$. Deci vectorul $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ este transformat în vectorul $\vec{r} + \delta \vec{r} = \overrightarrow{OP'}$. Rezultanta \vec{F} a forțelor date, de legătură și interioare aplicate în punctul P vor da lucrul mecanic elementar virtual $\delta L = \vec{F} \delta \vec{r}$. Pentru întreg sistemul considerat, lucrul mecanic virtual total va fi

$$\delta L = \sum \vec{F} \delta \vec{r}$$

Dacă legăturile sunt ideale, în δL nu apar forțele de legătură pentru că

deplasarea virtuală este compatibilă cu legăturile și lucrul mecanic virtual este nul. Dacă sistemul în mișcare este rigid, nu apare nici lucrul mecanic virtual al forțelor interioare. Pentru t considerat constant, deplasarea virtuală $\delta \vec{r}$ are aceleași proprietăți cu deplasarea reală $d\vec{r}$ și deci exprimând $\delta \vec{r}$ în funcție de $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ se obține:

$$\delta \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_n} \delta q_n \quad (25.1)$$

În relația (25.1) timpul t se consideră un parametru constant.

Lucrul mecanic virtual total devine:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \delta q_i \sum \bar{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

Dacă se consideră o schimbare de poziție a sistemului numai prin variația unui singur parametru cum ar fi de exemplu q_k , prin trecerea de la valoarea q_k la $q_k + \delta q_k$, lucrul mecanic elementar virtual devine

$$\delta L_k = \delta q_k \sum \bar{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = Q_k \delta q_k$$

unde

$$Q_k = \frac{\delta L_k}{\delta q_k} = \sum \bar{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial q_k} + Y \frac{\partial y}{\partial q_k} + Z \frac{\partial z}{\partial q_k} \right), \quad k = \overline{1, n} \quad (25.2)$$

Prin urmare, lucrul mecanic virtual total al forțelor date, de legătură și interioare este

$$\delta L = \sum_{k=1}^{nn} \delta L_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad (25.3)$$

Termenii Q_1, Q_2, \dots, Q_n se numesc forțe generalizate.

Când coordonata generalizată este o lungime, forța generalizată Q_i este de natura unei forțe iar dacă coordonata generalizată este un unghi, forța generalizată este de natura unui cuplu de forțe. De exemplu, dacă forța \bar{F} are o deplasare δx pe aceeași direcție, atunci:

$$\delta L = F \delta x; \quad Q = \frac{\delta L}{\delta x} = F$$

Dacă un cuplu de mărime M rotește un rigid cu unghiul $\delta \theta$ în jurul unei axe paralele cu momentul cuplului, atunci

$$\delta L = M \delta \theta; \quad Q = \frac{\delta L}{\delta \theta} = M$$

Dacă în locul forței \bar{F} se consideră forța de inerție $\bar{F}_i = -m_i \bar{a}_i$ atunci lucrul mecanic virtual al forțelor de inerție pentru o singură variație δq_k a coordonatei generalizate q_k va fi

$$\delta L_k = \delta q_k \sum (-m_i \bar{a}_i) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (25.4)$$

În relația (25.4), ultimul termen se mai scrie:

$$-m_i \bar{a}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = -m_i \dot{\bar{v}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{d}{dt} \left(m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) + m_i \bar{v}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) \quad (25.5)$$

Pe de altă parte:

$$\bar{v}_i = \dot{\bar{r}}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n$$

și deci

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$$

Ținând seama de relația:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k}$$

relația (25.5) devine:

$$-m_i \bar{a}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{d}{dt} \left(m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) + m_i \bar{v}_i \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

care se mai scrie:

$$-m_i \bar{a}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)}{\partial \dot{q}_k} \right] + \frac{\partial \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)}{\partial q_k} \quad (25.6)$$

Dar:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = E_C \quad (25.7)$$

Cu ajutorul relațiilor (25.6) și (25.7), relația (25.4) devine:

$$\delta L_k = \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial E_C}{\partial q_k} \right] \delta q_k \quad (25.8)$$

Conform principiului deplasărilor virtuale, suma lucrurilor mecanice virtuale ale tuturor forțelor date, de legătură, interioare și de inerție, obținute prin variația unei singure coordonate generalizate trebuie să fie nulă:

$$\delta L + \delta L_k = 0$$

Se obține:

$$\left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial E_C}{\partial q_k} + Q_k \right] \delta q_k = 0 \quad ; \quad k = \overline{1, n}$$

Deoarece deplasările δq_k sunt arbitrare, se obține:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_k} = Q_k \quad ; \quad k = \overline{1, n} \quad (25.9)$$

Relațiile (25.9) reprezintă ecuațiile lui Lagrange de speța a doua corespunzătoare

celor n coordonate generalizate. Ele formează un sistem de n ecuații diferențiale cu n necunoscute: q_1, q_2, \dots, q_n prin integrarea căruia se obțin

$$q_k = q_k(t, C_1, C_2, \dots, C_{2n})$$

unde $C_i, i = \overline{1, 2n}$ sunt constante de integrare. Acestea se determină din condițiile inițiale. La momentul $t=0$ se cunosc:

$$q_k(0, C_1, C_2, \dots, C_{2n}) = q_{k0}$$

$$\dot{q}_k(0, C_1, C_2, \dots, C_{2n}) = v_{k0}, \quad k = \overline{1, n}$$

Deci pentru a forma ecuațiile lui Lagrange de speța a doua, se aleg parametrii independenți q_1, q_2, \dots, q_n , se calculează energia cinetică E_C și apoi forțele generalizate $Q_k, k = \overline{1, n}$. Un caz particular, frecvent întâlnit în practică este atunci când toate forțele care acționează asupra sistemului material sunt conservative, adică există o funcție numită funcție de forță generalizată

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

astfel încât:

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}; \quad k = \overline{1, n}$$

În acest caz, ecuațiile lui Lagrange de speța a doua, devin:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k}; \quad k = \overline{1, n} \quad (25.10)$$

Se definește funcția lui Lagrange, care este:

$$L = E_C + U$$

astfel că ecuațiile lui Lagrange se pot scrie sub forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0; \quad k = \overline{1, n} \quad (25.11)$$

deoarece U nu depinde de \dot{q}_k și au loc relațiile

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_k}; \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial E_C}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

Ținând seama de expresia energiei potențiale:

$$E_p = -U$$

se obține funcția lui Lagrange ca diferență dintre energia cinetică totală a sistemului și energia sa potențială:

$$L = E_C - E_p$$

25.4. Ecuațiile lui Lagrange de speța a I-a

Se consideră un sistem material supus la legături ideale. Se presupune că există N_1 legături olonome, adică relații de forma:

$$f_m(t, q_1, q_2, \dots, q_n) = 0, \quad m = \overline{1, N_1} \quad (25.12)$$

și N_2 legături neolonome care în majoritatea cazurilor sunt expresii liniare în vitezele generalizate:

$$\sum_{i=1}^n g_{ji} \dot{q}_i + g_{j0} = 0, \quad j = \overline{1, N_2} \quad (25.13)$$

Dacă P_k este un punct arbitrar din sistem, având vectorul de poziție $\bar{r}_k = \overline{OP_k}$ și \bar{F}_k este rezultanta tuturor forțelor ce acționează asupra acestuia, atunci dându-i o deplasare virtuală arbitrară $\delta \bar{r}_k$, principiul deplasărilor virtuale pentru tot sistemul este de forma:

$$\sum (\bar{F}_k - m_k \bar{a}_k) \delta \bar{r}_k = 0$$

sau ținând seama de relația (25.1), se obține:

$$\sum_{i=1}^n \delta q_i \sum (\bar{F}_k - m_k \bar{a}_k) \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = 0 \quad (25.14)$$

Cu notațiile:

$$Q_i = \sum \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}; \quad E_i = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial E_C}{\partial q_i}$$

și procedând ca la paragraful anterior, se obține:

$$\sum_{i=1}^n (Q_i + E_i) \delta q_i = 0 \quad (25.15)$$

Dacă deplasările sunt compatibile cu legăturile sistemului, atunci în Q apar numai forțele date, iar variațiile elementare δq_i trebuie să verifice condițiile de legătură date de relațiile (25.2) și (25.3), adică:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial q_i} \delta q_i = 0; \quad m = \overline{0, N_1}; \quad \sum_{i=1}^n g_{ji} \delta q_i = 0, \quad j = \overline{1, N_2} \quad (25.16)$$

Deci din cele n variații elementare virtuale δq_i ce determină deplasarea elementară virtuală compatibilă cu legăturile, numai $n - (N_1 + N_2)$ din acestea sunt independente.

Primele N_1 ecuații din relația (25.16) se înmulțesc, fiecare cu multiplicatorul (parametrul) λ_m iar ultimele N_2 ecuații, fiecare cu μ_j , se adună cu ecuația (25.15) și se obține:

$$\sum_{i=1}^n \left(Q_i + E_i + \sum_{m=1}^{N_1} \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{N_2} \mu_j g_{ji} \right) \delta q_i = 0 \quad (25.17)$$

Variațiile elementare δq_i în relația (25.17) nu sunt toate independente. Astfel, multiplicatorii λ_m și μ_j se vor considera astfel încât parantezele corespunzătoare celor $N_1 + N_2$ variații elementare δq_i în (25.17) să se anuleze. Celelalte $n - (N_1 + N_2)$ paranteze trebuie să fie nule pentru că acestea corespund variațiilor independente δq_i . Astfel

$$Q_i + E_i + \sum_{m=1}^{N_1} \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{N_2} \mu_j g_{ji} = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

sau echivalent:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{m=1}^{N_1} \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{N_2} \mu_j g_{ji}; \quad i = \overline{1, n} \quad (25.18)$$

Ecuatiile (25.18) sunt numite ecuațiile lui Lagrange de speța întâia sau ecuațiile lui Lagrange cu multiplicatori. Ecuatiile (25.12), (25.13) și (25.18) formează un sistem de $n+N_1+N_2$ necunoscute: q_i , λ_m și μ_j .

Termenii din dreapta ecuațiilor (25.18) ce se adaugă forțelor generalizate Q_i sunt forțe generalizate corespunzătoare legăturilor (25.12) și (25.13).

În particular, dacă legăturile (25.12) și (25.13) nu există, atunci coordonatele generalizate q_i sunt independente iar ecuațiile lui Lagrange de speța întâia (25.18) devin ecuațiile lui Lagrange de speța a doua (25.9).

25.5. Ecuatiile canonice ale lui Hamilton

Un sistem material în mișcare care are n grade de libertate, deci parametrii q_1, q_2, \dots, q_n sunt independenți, acționat numai de forțe conservative are funcția lui Lagrange $L = E_C + U$ iar ecuațiile de mișcare

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0; \quad i = \overline{1, n} \quad (25.19)$$

Ecuatiile (25.19) reprezintă un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul doi cu necunoscutele q_1, q_2, \dots, q_n . M.R. Hamilton a transformat sistemul (25.19) într-un alt sistem de $2n$ ecuații diferențiale de ordinul întâi. Necunoscutele sunt cei n parametri q_1, q_2, \dots, q_n dar și impulsurile generalizate p_1, p_2, \dots, p_n date de formulele:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (25.20)$$

Înlocuind expresiile (25.20) în (25.19) se obține sistemul de ecuații

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (25.21)$$

Sistemul de ecuații (25.20), (25.21) este echivalent cu sistemul (25.19) dar analitic nu este convenabil de rezolvat. Pentru a simplifica sistemul (25.20), (25.21), coordonatelor generalizate q_1, q_2, \dots, q_n li se vor da mici variații. Implicit vor rezulta variații corespunzătoare și pentru vitezele generalizate $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ și pentru impulsurile generalizate p_1, p_2, \dots, p_n .

Funcția lui Lagrange:

$$L = L(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

i se dă o variație virtuală și deci:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t$$

Ținând seama că timpul t se consideră drept parametru și deci $\delta t = 0$, din relațiile (25.20) și (25.21) și din ultima, se obține:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta q_i + \sum_{i=1}^n p_i \delta \dot{q}_i$$

Pe de altă parte, din identitatea

$$\delta(p_i \dot{q}_i) = p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i$$

rezultă:

$$\dot{p}_i \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i = \delta(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i \delta p_i + \dot{p}_i \delta q_i$$

Prin urmare

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \delta(p_i \dot{q}_i) - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \delta p_i + \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta q_i$$

sau echivalent

$$\delta \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \right) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \delta p_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta q_i \quad (25.22)$$

Se definește funcția lui Hamilton ca fiind termenul din paranteza ultimei relații:

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L$$

În expresiile (25.20), funcția $L = E_c - E_p$ este de gradul doi în \dot{q}_i și de aici se obține necunoscutele \dot{q}_i în funcție de t , q_i și p_i , deci $H = H(t, q_i, p_i)$. Relația (25.22) devine:

$$\delta H = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \delta p_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta q_i \quad (25.23)$$

Pe de altă parte se obține:

$$\delta H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial t} \delta t \quad (25.24)$$

Ținând seama că $\delta t = 0$ și că variațiile δq_i , δp_i , $i = \overline{1, n}$ sunt arbitrare, din (25.23) și (25.24) prin identificare, se obțin relațiile:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} ; \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} , \quad i = \overline{1, n} \quad (25.25)$$

Sistemul (25.25) formează ecuațiile canonice ale lui Hamilton, deci un sistem de $2n$ ecuații diferențiale de ordinul întâi cu necunoscutele $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$.

BIBLIOGRAFIE

1. BACRIA V., Mecanică. Statică, Editura Politehnica Timișoara, 2003
2. BISCARI P., POGGI C, VIRGA EG - Mechanics Notebook, Liguari Editore, Napoli 1999
3. BRÎNDEU L., Mecanică. Statică, Litografia I. P. Traian Vuia Timișoara, 1980
4. BRINDEU L - Mecanica.Dinamica, Inst. Polit. "Traian Vuia" Timișoara (lito) 1975
5. CONSTANTINESCU I, BOLOG C , Mecanică, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1978
6. CORINALDESI E., Classical Mechanics, World Scientific, Singapore, N.Jersey, London, Hong Kong 1998
7. DARABONT A., MUNTEANU M., VĂITEANU D., Mecanică tehnică. Culegere de probleme, Ed. Scrisul Românesc, Craiova, 1983
8. DRĂGULESCU D., TOTH-TĂSCĂU M., Mecanica, Ed. Orizonturi universitare, Timișoara, 2002
9. GLIGOR T., BACRIA V., Mecanică. Statica, Curs și culegere de probleme, Lito Univ. Tehnică Timișoara, 1992
10. GANTMACHER G., Lectures in Analytical Mechanics, Mir Publishers, Moscow 1971
11. GROȘANU I., BECHERESCU D., Mecanică tehnică. Curs pentru subingineri, Lito I.P. Traian Vuia Timișoara, 1975
12. GROȘANU I., DĂNOIU A., Mecanica. Cinematica și Dinamica, lito Inst. Polit. "Traian Vuia" Timișoara 1976
13. IACOB C., Mecanică teoreticăEd. Didactică și Pedagogică București 1971
14. KLEPP H., Curs de Mecanică. Statica. Cinematica punctului material, Lito I.P Traian Vuia Timișoara, 1980
15. KLEPP H., Curs de mecanică, vol.II Dinamică -(lito) Inst. Polit. "Traian Vuia" Timișoara 1980
16. KNUDSEN JM, HJORTH PG., Elements of Newtonian Mechanics, Springer 1995
17. LEVINSON L., Fundamentals of Engineering Mechanics, Mir Publishers, Moscow 1970
18. LYNCH S., Dynamical Systems with Applications using MAPLE Birkhauser 2001
19. MANGERON O., IRIMICIUC N, Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie. Mecanica rigidului, vol.1, Ed. Tehnică, București, 1978
20. MARINCA V., Statica, Lito I.P Traian Vuia Timișoara, 1994
21. McCAULEY J - Classical Mechanics, Cambridge University Press 1998
22. PANDIT A., Mechanics, Narosa Publ. House, New Delhi, Calcutta 2001

23. RIPIANU A., POPESCU P., BĂLAN B., Mecanică tehnică, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982
24. RĂDOI M., DECIU E., Mecanica, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
25. SILAȘ Gh., GROȘANU I., Mecanica, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
26. SIMA P., OLARIU V., MACOVEI M., Mecanica tehnică. Aplicații. Statica, Ed. Tehnică, București, 1990
27. STAN A., GRUMĂZEZCU M., Probleme de mecanică, Ed. Didactică și Pedagogică București 1973
28. STOENESCU Al., SILAȘ Gh., Mecanica teoretică, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1975
29. TOADER M., Mecanica, Lito I.P. Traian Vuia, Timișoara, 1980
30. TOCACI E., Mecanica. Curs și culegere de probleme, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1985
31. UROȘU D., Mecanica. Statica și cinematica, Editura Politehnica Timișoara, 1999
32. VÂLCOVICI V., BĂLAN St., VOINEA R., Mecanică teoretică, Editura Tehnică București, 1968
33. VOINEA R., VOICULESCU D., CEAUȘU V., Mecanică. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975
34. WELLS D., Lagrangian Dynamics, N.York, St.Louis, S.Francisco, Toronto 1964
35. WILLIAMS D., Elements of Mechanics, Oxford University Press 1997