Capitolul 1

Şiruri şi serii numerice

1.1 Şiruri de numere reale

1.1.1 Breviar teoretic

Definiţia 1.1.1 Formal, un *şir* de numere reale este o funcţie $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărui număr natural n numărul real x_n, numit *termenul general* al şirului sau *termenul de rang n* al şirului. Notaţia utilizată frecvent pentru un şir este $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau $(x_n)_{n\geq 0}$.

În anumite situaţii, un şir de numere reale este considerat ca fiind o funcţie cu valori reale definită pe mulţimea

$$\mathbb{N}_{n_0} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\},$$

unde $n_0 \in \mathbb{N}$ este un număr natural fixat, de exemplu, $x_n = \frac{1}{n(n-1)}$, pentru $n \geq 2$, caz în care şirul va fi notat $(x_n)_{n\geq n_0}$.

Orice şir de numere reale $(x_n)_{n\geq n_0}$ poate fi prelungit la un şir $(x_n)_{n\geq 0}$, de aceea, în prezentarea teoretică a rezultatelor din acest subcapitol, vom considera şiruri de forma $(x_n)_{n\geq 0}$. Pentru a nu complica notaţiile, un şir va fi notat simplu (x_n). Prin abuz de notaţie, de multe ori, este convenabil ca în loc de "şirul cu termenul general x_n" să scriem "şirul x_n".

Definiţia 1.1.2 Un şir de numere reale (x_n) se numeşte *şir mărginit* dacă există un număr real pozitiv $M > 0$ astfel încât

$$|x_n| \leq M, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Un şir care nu este mărginit se numeşte *şir nemărginit.* Şirul (x_n) este nemărginit dacă şi numai dacă pentru orice $M > 0$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n| > M$.

Remarca 1.1.1 Pentru ca un şir (x_n) să fie mărginit este suficient ca relaţia (1.1) să fie verificată începând de la un anumit rang n_0, adică şirul (x_n) este mărginit dacă şi numai dacă există $M > 0$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_n| \leq M, \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

Exemplul 1.1.1 Şirul cu termenul general $x_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$, este mărginit, căci $|\sin n| \leq 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte, şirul definit prin $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, este nemărginit, căci pentru orice $M > 0$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n > M$, echivalent cu $|x_n| > M$.

Remarca 1.1.2 Şirul (x_n) este mărginit dacă şi numai dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a \leq b$ astfel încât

$$a \leq x_n \leq b, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

ceea ce este echivalent cu faptul că şirul (x_n) este atât *mărginit inferior* (există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \geq a$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$), cât şi *mărginit superior* (există $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \leq b$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$).

Exemplul 1.1.2 Şirul cu termenul general $x_n = \{\sqrt{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a unui număr real x, este mărginit, căci $0 \leq x_n < 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte, şirul definit prin $x_n = [\sqrt{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x, este mărginit inferior, căci $x_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dar nu este mărginit superior. Într-adevăr, pentru orice $b \in \mathbb{R}$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{n} \geq b + 1$, de unde $x_n = [\sqrt{n}] > \sqrt{n} - 1 \geq b$.

Definiţia 1.1.3 Spunem că un şir (x_n) este

- (*monoton*) *crescător* dacă $x_n \leq x_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- (*monoton*) *descrescător* dacă $x_n \geq x_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- *monoton* dacă (x_n) este fie crescător, fie descrescător;
- *strict crescător* dacă $x_n < x_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- *strict descrescător* dacă $x_n > x_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- *strict monoton* dacă (x_n) este fie strict crescător, fie strict descrescător.

Exemplul 1.1.3 Şirul cu termenul general $x_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, este strict crescător, căci

$$x_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2 = x_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Pe de altă parte, şirul definit prin $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$, nu este monoton, căci $x_1 = -1 < x_2 = \frac{1}{2} > x_3 = -\frac{1}{3}$.

Remarca 1.1.3 Pentru ca un şir (x_n) să fie crescător/descrescător este necesar ca toţi termenii săi să fie în ordine crescătoare/descrescătoare. De exemplu, dacă un şir este strict crescător pentru un număr finit de termeni şi apoi strict descrescător, nu rezultă că şirul dat este descrescător.

Definiţia 1.1.4 Fie (x_n) un şir de numere reale şi $(k_n) \subset \mathbb{N}$ un şir **strict crescător** de numere **naturale**, adică

$$0 \leq k_0 < k_1 < \cdots < k_n < \cdots \in \mathbb{N}.$$

Şirul (y_n), definit prin $y_n = x_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$, se numeşte *subşir* al şirului (x_n).

Remarca 1.1.4 Dacă (x_{k_n}) este un subşir al şirului (x_n), atunci

$$k_n \geq n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Exemplul 1.1.4 Şirurile (x_{2n}), (x_{2n+1}) sunt, de exemplu, două subşiruri ale şirului (x_n). Pe de altă parte, şirul cu termenul general

$$y_n = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

nu este un subşir al şirului $x_n = \cos n$, căci $k_n = n\pi \notin \mathbb{N}$ pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

Definiţia 1.1.5 Spunem că un şir de numere reale (x_n) are *limită finită* sau este *convergent* dacă există un număr real $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_n - x| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq n_0. \tag{1.3}$$

În cazul în care există, numărul real x din definiţia precedentă este unic şi se numeşte *limita* şirului (x_n). Vom spune, în acest caz, că şirul (x_n) *converge la* x şi vom nota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau $x_n \to x$. Un şir care nu este convergent se numeşte *divergent*.

Remarca 1.1.5 Pentru a demonstra că un şir (x_n) converge la x este suficient să arătăm că relaţia (1.3) are loc pentru orice ε pozitiv, **suficient de mic**, adică este suficient să demonstrăm că dacă pentru orice $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, unde ε_0 este o constantă reală pozitivă, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_0$, atunci $x_n \to x$.

Exemplul 1.1.5 Şirul cu termenul general $x_n = \frac{n}{3n+5}$ converge la $\frac{1}{3}$.

Soluţie. Folosind remarca precedentă, este suficient să considerăm $\varepsilon \in \left(0, \frac{5}{6}\right]$. Au loc următoarele echivalenţe:

$$\left| x_n - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon \iff \frac{5}{3(3n+5)} < \varepsilon \iff n > \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right).$$

Definim $n_0 = \left[\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)\right] + 1$. Cum $\varepsilon \in \left(0, \frac{5}{6}\right]$, rezultă că $\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right) \geq -1$, ceea ce implică $n_0 \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte, cum

$$[x] \leq x < [x] + 1,$$

pentru orice $n \geq n_0$ are loc $n > \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)$, de unde, pe baza echivalenţelor de mai sus, obţinem $\left| x_n - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$, adică ceea ce trebuia să demonstrăm.

□

Definiţia 1.1.6 Spunem că un şir (x_n) *are limita* $+\infty$ şi notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ sau $x_n \to +\infty$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_0$.

În mod analog, un şir (x_n) *are limita* $-\infty$ şi notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ sau $x_n \to -\infty$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n < -\varepsilon$, pentru orice $n \geq n_0$.

Spunem că un şir (x_n) *are limită* dacă (x_n) are limită finită (este convergent) sau (x_n) are limită infinită, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \{\pm\infty\}$.

Remarca 1.1.6 Un şir de numere reale (x_n) este divergent dacă fie are limită infinită, fie nu are limită.

Propoziţia 1.1.1 *Dacă şirul (x_n) are limită, atunci orice subşir al său are aceeaşi limită.*

Remarca 1.1.7 Dacă un şir admite două subşiruri care au limite diferite, atunci şirul dat nu are limită, deci este divergent. De exemplu, şirul $x_n = (-1)^n$ nu are limită, căci $x_{2n} = 1 \to 1$ şi $x_{2n+1} = -1 \to -1$.

Remarca 1.1.8 Atât limita unui şir, cât şi convergenţa sa nu sunt influenţate de un număr finit de termeni ai şirului respectiv. Cu alte cuvinte, dacă înlocuim sau eliminăm un număr finit de termeni ai unui şir, respectiv dacă adăugăm un număr finit de termeni şirului, atunci şirul astfel obţinut are aceeaşi natură din punct de vedere al convergenţei ca şirul iniţial şi aceeaşi limită, în cazul în care aceasta există.

Propoziţia 1.1.2 *Dacă un şir (x_n) are limită, atunci şirul modulelor termenilor săi, $(|x_n|)$, are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \left| \lim_{n\to\infty} x_n \right|.$$

În particular, are loc:

$$x_n \to 0 \iff |x_n| \to 0.$$

Remarca 1.1.9 În general, reciproca propoziţiei de mai sus nu este adevărată. De exemplu, şirul $x_n = (-1)^n$ nu are limită, dar şirul modulelor termenilor săi este convergent, căci $|x_n| = 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Propoziţia 1.1.3 (Operaţii cu şiruri convergente)

- *Dacă (x_n) este un şir convergent şi α este un număr real, atunci şirul $(\alpha\, x_n)$ este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha\, x_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n.$$

- *Dacă şirurile (x_n), (y_n) sunt convergente, atunci şirurile $(x_n + y_n)$, $(x_n\, y_n)$ sunt convergente şi au loc relaţiile:*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n, \quad \lim_{n\to\infty} (x_n\, y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right).$$

În plus, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, atunci şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Propoziţia 1.1.4 (Trecerea la limită în inegalităţi) *Fie (x_n) şi (y_n) două şiruri de numere reale care au limită.*

- *Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \leq y_n$ pentru orice $n \geq n_0$, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n;$$

- *Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n < y_n$ pentru orice $n \geq n_0$, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Reciproc, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$x_n < y_n, \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

Propoziţia 1.1.5 *Orice şir convergent este mărginit.*

Remarca 1.1.10 Reciproca propoziţiei de mai sus nu este adevărată, deoarece există şiruri mărginite care nu sunt convergente. De exemplu, şirul definit prin

$$x_n = (-1)^n, \; n \in \mathbb{N},$$

este mărginit, dar nu este convergent (nu are nici măcar limită).

Ne punem acum următoarea întrebare: *Ce proprietate suplimentară îi trebuie unui şir mărginit pentru a fi convergent?*

Răspunsul este dat în propoziţia de mai jos:

Propoziţia 1.1.6 *Orice şir monoton şi mărginit este convergent.*

Într-adevăr, se poate arăta că dacă $(x_n)_{n\geq n_0}$ este un şir crescător şi mărginit superior, atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\geq n_0} x_n,$$

iar dacă $(x_n)_{n\geq n_0}$ este un şir descrescător şi mărginit inferior, atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\geq n_0} x_n.$$

Remarca 1.1.11 Există şiruri convergente care nu sunt monotone. De exemplu, şirul $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$, este convergent, căci $|x_n| = \frac{1}{n} \to 0$, deci $x_n \to 0$, dar (x_n) nu este monoton.

Propoziţia 1.1.7 *Orice şir monoton are limită.*

Propoziţia 1.1.8 (Lema lui Newman) *Orice şir de numere reale conţine un subşir monoton.*

Teorema 1.1.1 (Teorema Bolzano-Weierstrass) *Orice şir mărginit conţine un subşir convergent.*

Definiţia 1.1.7 Un punct $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se numeşte *punct limită* al unui şir (x_n) dacă există un subşir (x_{k_n}) al şirului (x_n) astfel încât $x_{k_n} \to x$. Mulţimea punctelor limită ale şirului (x_n) se notează cu $\mathcal{L}(x_n)$.

Remarca 1.1.12 Din lema lui Newman şi Propoziţia 1.1.7 rezultă că orice şir de numere reale conţine un subşir care are limită, deci $\mathcal{L}(x_n)$ este o mulţime nevidă. Mai mult, dacă şirul (x_n) are limită, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, atunci $\mathcal{L}(x_n) = \{x\}$.

Definiţia 1.1.8 *Limita inferioară* a unui şir (x_n) se defineşte ca fiind $\inf \mathcal{L}(x_n)$ şi se notează cu $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$. În mod analog, limita superioară a şirului (x_n) este $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup \mathcal{L}(x_n)$.

Remarca 1.1.13 Spre deosebire de limita unui şir, care s-ar putea să nu existe, atât limita inferioară, cât şi cea superioară există tot timpul (de exemplu, limita inferioară a şirului $x_n = (-1)^n$ este -1, iar cea superioară este 1).

Propoziţia 1.1.9 *Un şir de numere reale (x_n) are limită dacă şi numai dacă $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, caz în care*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Propoziţia 1.1.10 (Criteriul cleştelui) Fie (x_n) un şir de numere reale. Dacă există două şiruri $(a_n)_{n\geq n_0}$ şi $(b_n)_{n\geq n_0}$ care au aceeaşi limită,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x,$$

astfel încât

$$a_n \leq x_n \leq b_n, \text{ pentru } n \geq n_0,$$

atunci şirul (x_n) are limită şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Propoziţia 1.1.11 (Criteriul majorării) Fie (x_n) un şir de numere reale.

(1) Dacă există un număr real $x \in \mathbb{R}$ şi există un şir de numere reale nenegative $(y_n)_{n \geq n_0} \subset \mathbb{R}_+$ cu $y_n \to 0$ astfel încât

$$|x_n - x| \leq y_n, \text{ pentru } n \geq n_0,$$

atunci $x_n \to x$.

(2) Dacă există un şir $(y_n)_{n \geq n_0}$ cu $y_n \to -\infty$ astfel încât

$$x_n \leq y_n, \text{ pentru } n \geq n_0,$$

atunci $x_n \to -\infty$.

(3) Dacă există un şir $(y_n)_{n \geq n_0}$ cu $y_n \to +\infty$ astfel încât

$$x_n \geq y_n, \text{ pentru } n \geq n_0,$$

atunci $x_n \to +\infty$.

Propoziţia 1.1.12 (Criteriul raportului) Fie (x_n) un şir de numere reale pozitive astfel încât există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, \infty].$$

a) Dacă $l < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

b) Dacă $l > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Dacă limita l din enunţul criteriului raportului este 1, atunci limita şirului (x_n) nu poate fi calculată cu ajutorul acestui criteriu, caz în care vom încerca să determinăm limita şirului (x_n) folosind criteriul raportului generalizat.

Propoziţia 1.1.13 (Criteriul raportului generalizat) Fie (x_n) un şir de numere reale pozitive astfel încât există

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n\right] = l \in [0,\infty].$$

a) Dacă $l < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

b) Dacă $l > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Propoziţia 1.1.14 (Lema Stolz-Cesàro) Fie $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ cu $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ şi $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dacă:

- (b_n) este un şir strict monoton,
- $b_n \to +\infty$ sau $a_n \to 0$, $b_n \to 0$,
- există
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = x \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\},$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Propoziţia 1.1.15 (Criteriul rădăcinii) Fie (x_n) un şir de numere reale pozitive. Dacă există

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = x \in [0,\infty],$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = x.$$

Propoziţia 1.1.16 *Pentru orice număr real $x \in \mathbb{R}$ există un şir $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ şi un şir $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel ca $x_n \to x$ şi $y_n \to x$.*

Definiţia 1.1.9 Un şir (x_n) se numeşte *şir Cauchy* sau *şir fundamental* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \text{ pentru orice } m, n \geq n_0.$$

Conceptul de şir Cauchy înseamnă, de fapt, că începând de la un moment dat diferenţa dintre oricare doi termeni ai şirului poate să fie oricât de mică.

Remarca 1.1.14 Un şir (x_n) este un şir Cauchy dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq n_0 \text{ şi } p \in \mathbb{N}^*.$$

Propoziţia 1.1.17 Dacă există un şir $(a_n)_{n \geq n_0}$ de numere reale nenegative cu $a_n \to 0$ astfel încât

$$|x_{n+p} - x_n| \leq a_n, \text{ pentru orice } n \geq n_0 \text{ şi } p \in \mathbb{N}^*,$$

atunci (x_n) este un şir Cauchy.

Propoziţia 1.1.18 *Orice şir Cauchy este mărginit.*

Teorema 1.1.2 (Criteriul general de convergenţă al lui Cauchy) *Un şir de numere reale (x_n) este convergent dacă şi numai dacă (x_n) este şir Cauchy.*

Demonstraţie. Presupunem mai întâi că (x_n) este un şir convergent, adică există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \to x$. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon/2,$ pentru orice $n \geq n_0$. Pentru $m, n \geq n_0$ are loc

$$|x_m - x_n| = |x_m - x + x - x_n| \leq |x_m - x| + |x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ceea ce arată că (x_n) este un şir Cauchy.

Reciproc, dacă presupunem că (x_n) este un şir Cauchy, din Propoziţia 1.1.18 rezultă că (x_n) este un şir mărginit. Aplicând teorema Bolzano-Weierstrass, se obţine că şirul (x_n) conţine un subşir convergent, de exemplu, presupunem că $x_{k_n} \to x \in \mathbb{R}$. Fie $\varepsilon > 0$. Cum (x_n) este un şir Cauchy, rezultă că există $n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_m - x_n| < \varepsilon/2, \text{ pentru orice } m, n \geq n_1. \tag{1.4}$$

Pe de altă parte, din $x_{k_n} \to x$, există $n_2 = n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_{k_n} - x| < \varepsilon/2, \text{ pentru orice } n \geq n_2. \tag{1.5}$$

Definim $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ şi considerăm $n \geq n_0$. Ţinând cont de faptul că dacă $n \geq n_0$, atunci $k_n \geq n \geq n_0$, şi, aplicând inegalităţile (1.4) şi (1.5), are loc

$$|x_n - x| = |x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - x| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ceea ce implică $x_n \to x$, deci (x_n) este un şir convergent.

□

În cele ce urmează, vom reaminti câteva limite de şiruri pe care le vom utiliza frecvent în studiul convergenţei unor serii:

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot n^p + a_{p-1} \cdot n^{p-1} + \cdots + a_0}{b \cdot n^q + b_{q-1} \cdot n^{q-1} + \cdots + b_0} \\ &= \begin{cases} \dfrac{a}{b} & \text{, dacă } p = q \\ 0 & \text{, dacă } p < q \\ \operatorname{sign}\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \infty & \text{, dacă } p > q \end{cases}\end{aligned}$$

unde P şi Q sunt polinoame cu coeficienţi reali, de grad p, respectiv q.

(2) $$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \text{nu există} & \text{, dacă } a \leq -1 \\ 0 & \text{, dacă } a \in (-1, 1) \\ 1 & \text{, dacă } a = 1 \\ +\infty & \text{, dacă } a > 1 \end{cases}$$

(3) $$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{, dacă } \alpha < 0 \\ 1 & \text{, dacă } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{, dacă } \alpha > 0 \end{cases}$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$
Mai mult, au loc dubla inegalitate:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \text{ pentru } n \in \mathbb{N}^*.$$

(6) Dacă (a_n) este un şir de numere reale nenule astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

(7) Dacă $(x_n) \subset \mathbb{R}^*$ este un şir de numere reale nenule astfel încât $x_n \to 0$, atunci:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\arcsin x_n}{x_n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a,\ a \in (0,1)\cup(1,\infty)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+x_n)^r-1}{x_n} = r,\ r \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e.$

Următoarele identităţi vor fi utile în studiul convergenţei unor serii:

$$\cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, \text{ dacă } x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, \text{ dacă } x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

1.1.2 Probleme rezolvate

Exerciţiul 1 Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+2n}\right\} = 1$, unde $\{x\}$ notează partea fracţionară a numărului real x.

Soluţie. Reamintim că $\{x\} = x - [x]$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x. Cum $n^2 \le n^2+2n < (n+1)^2$, rezultă $n \le \sqrt{n^2+2n} < n+1$, deci $\left[\sqrt{n^2+2n}\right] = n$. Atunci

$$\left\{\sqrt{n^2+2n}\right\} = \sqrt{n^2+2n} - n = \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} \to 1.$$

□

Exerciţiul 2 Să se arate că şirul

$$x_n = \sin n,\ n \in \mathbb{N},$$

nu are limită.

Soluţie. Presupunem că (x_n) are limită. Cum $\sin n \in [-1,1]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că există $x \in [-1,1]$ astfel încât $x_n \to x$. Atunci

$$\cos(2n) = 1 - 2\sin^2 n \to 1 - 2x^2.$$

Făcând $n \to \infty$ în relaţia $\sin(4n) = 2\sin(2n)\cos(2n)$, obţinem

$$x = 2x(1-2x^2) \iff x(1-4x^2) = 0 \iff x = 0 \text{ sau } x^2 = \frac{1}{4}.$$

Din identitatea $\sin^2(2n) + \cos^2(2n) = 1$ rezultă $x^2 + (1-2x^2)^2 = 1$. Dacă $x^2 = \frac{1}{4}$, se obţine o contradicţie, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$, deci $x = 0$. În acest caz, $\cos(2n) \to 1$. Atunci

$$\begin{aligned}\sin(2n+2) - \sin(2n) &= 2\sin 1\ \cos(2n+1)\\ &= 2\sin 1\,[\cos(2n)\cos 1 - \sin(2n)\sin 1] \to 2\sin 1\cos 1,\end{aligned}$$

ceea ce este fals, căci $\sin(2n+2) - \sin(2n) \to 0 \neq 2\sin 1\cos 1$. Rezultă astfel că şirul (x_n) nu are limită, deci este divergent.

□

Exerciţiul 3 Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Soluţie. Deoarece $|\sin n| \leq 1$, avem

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0,$$

de unde, aplicând criteriul majorării, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

□

Exerciţiul 4 Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1.$$

Soluţie. Cum

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \text{ pentru } k = 1, 2, \ldots, n,$$

rezultă

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Ţinând cont de faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ şi folosind criteriul cleştelui obţinem limita cerută.

□

Exerciţiul 5 Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, unde

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \ n \geq 1.$$

Soluţie. *Metoda 1.* Cum

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} > 0, \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

rezultă că (x_n) este un şir strict crescător, iar din Propoziţia 1.1.7 se obţine că (x_n) are limită, pe care o notăm cu x. Cum $x_n \geq 1$ pentru orice $n \geq 1$, rezultă că $x \in [1, \infty]$. Presupunem că x este un număr real, adică presupunem că (x_n) are limită finită. Cum (x_{2n}) este un subşir al şirului (x_n), rezultă $x_{2n} \to x$, ceea ce implică

$$x_{2n} - x_n \to x - x = 0. \tag{1.6}$$

Pe de altă parte,

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

ceea ce contrazice relaţia (1.6). Am demonstrat că presupunerea făcută este falsă, deci $x = +\infty$.

Metoda 2. Fie $m = m(n) \in \mathbb{N}$ cel mai mare număr natural astfel încât $2^m \leq n$. Atunci

$$\begin{aligned} x_n &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2 \text{ termeni}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{2^2 \text{ termeni}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}}_{2^{m-1} \text{ termeni}} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2^2}{8} + \cdots + \frac{2^{m-1}}{2^m} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{\text{de } m \text{ ori}} = 1 + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Este evident că dacă $n \to \infty$, atunci $m = m(n) \to \infty$ şi, deci, $1 + \frac{m}{2} \to \infty$ dacă $n \to \infty$. Din Propoziţia 1.1.11 (3) şi inegalitatea precedentă rezultă $x_n \to +\infty$.

$\square$

Exerciţiul 6 Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \ a > 0.$$

Soluţie. Fie $x_n = \dfrac{a^n}{n!} > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Calculăm

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1.$$

Din criteriul raportului rezultă că $x_n \to 0$.

$\square$

Exerciţiul 7 Să se arate că

$$x_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \to 0.$$

Soluţie. Reamintim mai întâi că $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$, respectiv $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$.
Metoda 1. Calculăm

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1,$$

deci nu putem determina limita şirului (x_n) folosind criteriul raportului. Are loc

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n &= \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right)^n \\ &= \left[\left(1 + \frac{1}{-(2n+2)}\right)^{-(2n+2)}\right]^{\frac{n}{-(2n+2)}} \to e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1.\end{aligned}$$

Din criteriul raportului generalizat rezultă că $x_n \to 0$.
Metoda 2. Se observă că

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \dots, \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}, \text{ deci } x_n < \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

Cum $x_n > 0$, înmulţind inegalitatea precedentă cu x_n, se obţine

$$0 < x_n^2 < \frac{1}{2n+1}.$$

Din criteriul cleştelui rezultă că $x_n^2 \to 0$, ceea ce este echivalent cu $x_n \to 0$.

□

Exerciţiul 8 Să se determine limita şirului

$$x_n = \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, \text{ unde } p \in \mathbb{N}.$$

Soluţie. Pentru $p \in \mathbb{N}$ fixat, considerăm şirurile

$$a_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p \text{ şi } b_n = n^{p+1}.$$

Şirul (b_n) este strict crescător cu $b_n \to \infty$. Folosind binomul lui Newton, se obţine

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} &= \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}\\ &= \frac{C_p^0\, n^p + C_p^1\, n^{p-1} + \cdots + C_p^p\, n^0}{C_{p+1}^0\, n^{p+1} + C_{p+1}^1 n^p + \cdots + C_{p+1}^{p+1}\, n^0 - n^{p+1}}\\ &= \frac{n^p + p\, n^{p-1} + \cdots + 1}{n^{p+1} + (p+1)n^p + \cdots + 1 - n^{p+1}}\\ &= \frac{n^p + p\, n^{p-1} + \cdots + 1}{(p+1)n^p + \frac{p(p+1)}{2}\, n^{p-1} + \cdots + 1} \to \frac{1}{p+1}.\end{aligned}$$

Din lema Stolz-Cesàro rezultă că $x_n = \frac{a_n}{b_n} \to \frac{1}{p+1}$.

□

Exerciţiul 9 Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Soluţie. Are loc $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$. Considerând $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$, avem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}.$$

Din criteriul rădăcinii se obţine astfel că $\sqrt[n]{x_n} = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \dfrac{1}{e}$.

□

Exerciţiul 10 Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = 1.$$

Soluţie. Folosind exerciţiul precedent, se obţine

$$\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{n+1}{n} \to \frac{1}{e} \cdot e \cdot 1 = 1.$$

□

Exerciţiul 11 (Şirul lui Lalescu) Să se arate că şirul

$$L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\,,\ n \geq 2,$$

converge la $\frac{1}{e}$.

Această problemă a fost propusă de Traian Lalescu în Gazeta Matematică, Nr. 6 (1901) (problema 549). Demonstraţia dată de Lalescu în G.M. 7 (1902) a fost greşită, acesta utilizând reciproca lemei Stolz-Cesàro, care, în general, nu este adevărată.

Soluţie. Succesiv, se obţine

$$L_n = \sqrt[n]{n!}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} - 1\right) = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} - 1\right) n$$

$$= \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \cdot \frac{e^{\ln \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}} - 1}{\ln \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n \to \frac{1}{e} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{e}.$$

Într-adevăr, primul şir din produsul de mai sus are limita $\frac{1}{e}$ (vezi Exerciţiul 9). Al doilea şir converge la 1, căci $\frac{e^{x_n}-1}{x_n} \to 1$, dacă $x_n \to 0$. În cazul nostru,

$$x_n = \ln \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} \to 0,$$

deoarece $\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} \to 1$ (vezi Exerciţiul 10). Rămâne să calculăm limita celui de-al treilea şir din produs. Are loc

$$\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n = \left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n+1}}(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\right)^n = \left(\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{(n!)^{\frac{1}{n(n+1)}}}\right)^n = \sqrt[n+1]{\frac{(n+1)^n}{n!}}.$$

Considerând $a_n = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$, avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

Din criteriul rădăcinii se obţine astfel că $\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n \to e$, ceea ce implică $\ln\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n \to 1$.

$\square$

Exerciţiul 12 (Constanta Euler-Mascheroni) Să se arate că şirul al cărui termen general este

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n,\ n \geq 2,$$

este convergent.

Limita şirului (γ_n) se notează cu γ şi se numeşte constanta Euler-Mascheroni (aceasta a apărut pentru prima dată într-un articol din 1735 al matematicianului Leonhard Euler, fiind folosită mai apoi, în 1790, de către matematicianul italian Lorenzo Mascheroni). Notaţia γ pentru această constantă nu apare în notele lui Euler sau ale lui Mascheroni, fiind folosită mai târziu datorită conexiunii acesteia cu funcţia gamma. Din demonstraţia pe care o vom da mai jos va rezulta că $\gamma \in [0, 1)$ (nu s-a demonstrat până acum dacă γ este un număr algebric sau transcendent, de fapt nu se ştie nici măcar dacă această constantă este un număr iraţional).

Soluţie. Logaritmând relaţia $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$, se obţine

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}^*. \tag{1.7}$$

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Considerând $k = 1, 2, \ldots, n-1$ în relaţia (1.7) şi însumând după k, are loc

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1},$$

de unde rezultă

$$\gamma_n < 1, \text{ respectiv } \gamma_n > \frac{1}{n} > 0,$$

deci (γ_n) este un şir mărginit. Vom demonstra în cele ce urmează că acest şir este strict descrescător. Într-adevăr, avem

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0.$$

Ultima inegalitate rezultă din relaţia $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Am obţinut astfel că (γ_n) este un şir monoton şi mărginit, deci convergent.

$\square$

Exerciţiul 13 Să se arate că şirul

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2},\ n \geq 1,$$

este convergent.

Soluţie. *Metoda 1.* Are loc $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, pentru orice $n \geq 1$, deci (x_n) este un şir strict crescător. Prin inducţie matematică vom demonstra că

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \tag{1.8}$$

pentru orice $n \geq 1$. Într-adevăr, este evident că inegalitatea de mai sus este adevărată pentru $n = 1$. Presupunem acum că (1.8) are loc pentru $k \in \mathbb{N}^*$ fixat, adică

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{k}.$$

Atunci

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} = 2 - \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2}\right].$$

Cum $\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2} \geq \frac{1}{k+1}$, avem

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}.$$

Folosind metoda inducţiei matematice, deducem că relaţia (1.8) este adevărată pentru orice $n \geq 1$, ceea ce implică $x_n < 2$, pentru $n \geq 1$, deci (x_n) este un şir mărginit superior. Din Propoziţia 1.1.6 rezultă că (x_n) este convergent.
Metoda 2. Fie $n, p \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&\leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Cum $\frac{1}{n} \to 0$, din Propoziţia 1.1.17 rezultă că (x_n) este un şir Cauchy, iar din Teorema 1.1.2 se obţine că (x_n) este un şir convergent.

□

Remarca 1.1.15 Se poate arăta că şirul definit mai sus converge la $\frac{\pi^2}{6}$, adică

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Exerciţiul 14 Să se arate că şirul

$$x_n=\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin(2x)}{2^2}+\cdots+\frac{\sin(nx)}{2^n},\ n\geq 1,$$

este convergent pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Soluţie. Fie $x\in\mathbb{R}$. Pentru orice $n,p\in\mathbb{N}^*$ are loc:

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \\ &\leq \frac{|\sin(n+1)x|}{2^{n+1}}+\frac{|\sin(n+2)x|}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{|\sin(n+p)x|}{2^{n+p}} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)\leq\frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Cum $\frac{1}{2^n}\to 0$, rezultă că (x_n) este un şir Cauchy, deci convergent.

□

1.1.3 Probleme propuse

Exerciţiul 1 Să se calculeze limita şirului

$$x_n=\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3},\ n\in\mathbb{N}.$$

Exerciţiul 2 Să se determine parametrul real p astfel încât şirul

$$x_n=n^p\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}\right),\ n\geq 1,$$

să fie convergent şi apoi să se calculeze limita sa.

Exerciţiul 3 Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0.$$

Indicaţie: Se poate utiliza, eventual, lemma Stolz-Cesàro.

Exerciţiul 4 Să se determine limita următoarelor şiruri:

a) $x_n = \dfrac{n\cos(n\pi x)}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$ b) $x_n = \dfrac{[nx]}{n}$, $x \in \mathbb{R}$

c) $x_n = \dfrac{n^{n+1}}{(n!)^2}$ d) $x_n = \dfrac{(2n)^n}{(2n)!}$

e) $x_n = \sqrt[n]{5^n+6^n}$ f) $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}}$

g) $x_n = \left(1 + \dfrac{\sqrt[n]{n^{2n+1}}}{n!}\right)^{\frac{n!}{e^n}}$ h) $x_n = n^2\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}\right)$, $a > 0$

i) $x_n = \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+3n+4}\right)$ j) $x_n = \sqrt{n}\arcsin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

Exerciţiul 5 Folosind *criteriul cleştelui* sau *criteriul majorării*, să se determine limita următoarelor şiruri:

a) $x_n = \dfrac{\cos 1}{n^2+1} + \dfrac{\cos 2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{\cos n}{n^2+n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

c) $x_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}}\right)$, $n \geq 2$;

d) $x_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n^2+1)} + \dfrac{\ln(n+2)}{\ln(n^2+2)} + \cdots + \dfrac{\ln(n+n)}{\ln(n^2+n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Indicaţie: d) Se foloseşte inegalitatea

$$(n+k)^2 \geq n^2 + k, \text{ pentru } k = 1, 2, \ldots, n, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Exerciţiul 6 Folosind *lema Stolz-Cesàro*, să se determine limita următoarelor şiruri:

$$\text{a) } x_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n},\ n \geq 2;$$

$$\text{b) } x_n = \frac{2 \sin 1 + 2^2 \sin 2 + \cdots + 2^n \sin n}{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n},\ n \geq 1.$$

Exerciţiul 7 Utilizând *constanta Euler-Mascheroni*, să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

Exerciţiul 8 Să se studieze convergenţa şirului

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n},\ n \geq 1.$$

Indicaţie: Se demonstrează că şirul (x_n) este strict descrescător şi mărginit cu $x_n \in (-2, -1)$ pentru $n \geq 2$. Se ţine cont de relaţia

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}},\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Exerciţiul 9 Folosind *criteriul general de convergenţă al lui Cauchy*, să se arate că şirul

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p},\ n \in \mathbb{N}^*,$$

este convergent pentru orice $p \geq 2$.

Exerciţiul 10 Folosind *criteriul general de convergenţă al lui Cauchy*, să se arate că şirul

$$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},\ n \in \mathbb{N},$$

este convergent.
Indicaţie: Se foloseşte inegalitatea

$$n! \geq 2^n,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Observaţie: Se poate arăta că şirul (E_n) converge la e.

1.2 Serii de numere reale

1.2.1 Breviar teoretic

Conceptul de serie a fost introdus pentru a da sens sumelor cu o infinitate de termeni. Oricărui şir $(x_n)_{n\geq n_0}$ i se poate asocia un şir $(S_n)_{n\geq n_0}$, definit prin

$$S_n = x_{n_0} + x_{n_0+1} + \cdots + x_n,\ n \geq n_0.$$

Perechea de şiruri $((x_n), (S_n))$ se numeşte *serie* de numere reale cu termenul general x_n şi se notează prin $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$. Şirul $(S_n)_{n\geq n_0}$ se numeşte *şirul sumelor parţiale* asociat seriei $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$. În cazul în care nu contează alegerea lui n_0, o serie va fi notată simplu prin $\sum\limits_n x_n$.

Definiţia 1.2.1 O serie $\sum\limits_n x_n$ se spune *convergentă* dacă şirul sumelor parţiale (S_n) este convergent, adică dacă există un număr real $S \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Dacă o serie nu este convergentă, atunci ea se numeşte *divergentă.*

În cazul în care există, limita şirului $(S_n)_{n\geq n_0}$ se numeşte *suma seriei* $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$ şi se notează cu $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} x_n$.

Remarca 1.2.1 Dacă schimbăm ordinea unui număr finit de termeni ai unei serii sau dacă adăugăm/înlăturăm un număt finit de termeni, aceasta îşi păstrează natura (dacă este convergentă, rămâne convergentă, iar dacă este divergentă, rămâne divergentă), adică un număr finit de termeni nu influenţează convergenţa unei serii.

Exemplul 1.2.1 (Seria geometrică) Fie r un număr real fixat. Seria

$$\sum_{n\geq 0} r^n$$

este convergentă dacă şi numai dacă $r \in (-1, 1)$. În caz de convergenţă, suma seriei este

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}. \tag{1.9}$$

Numărul r se numeşte *raţia* seriei geometrice.

Soluţie. Dacă $r = 1$, atunci

$$S_n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\text{de } n+1 \text{ ori}} = n + 1 \to +\infty,$$

iar dacă $r \neq 1$, atunci

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

este suma unei progresii geometrice de raţie r, deci

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \begin{cases} \text{nu există} & , \text{ dacă } r \leq -1 \\ \dfrac{1}{1-r} & , \text{ dacă } r \in (-1, 1) \\ +\infty & , \text{ dacă } r > 1 \end{cases}.$$

Singura situaţie în care şirul (S_n) este convergent este cea în care $r \in (-1, 1)$, caz în care $S_n \to \dfrac{1}{1-r}$, ceea ce trebuia să arătăm.

□

Propoziţia 1.2.1 *Dacă seria* $\sum\limits_n x_n$ *este convergentă, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Demonstraţie. Dacă presupunem că seria $\sum\limits_n x_n$ este convergentă, atunci şirul sumelor parţiale (S_n) este convergent. Notăm cu $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, S fiind un număr real. Avem

$$x_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0,$$

ceea ce încheie demonstraţia.

□

O consecinţă imediată, dar importantă a propoziţiei precedente este:

Propoziţia 1.2.2 (Criteriul de divergenţă) Dacă şirul (x_n) are limită nenulă sau nu are limită, ceea ce vom nota prin $x_n \nrightarrow 0$, atunci seria $\sum\limits_n x_n$ este divergentă.

Remarca 1.2.2 Reciproca Propoziţiei 1.2.1 nu este adevărată, adică dacă şirul (x_n) are limita zero, nu rezultă că seria $\sum\limits_n x_n$ este convergentă, ceea ce se poate observa din exemplul următor.

Exemplul 1.2.2 (Seria armonică) Seria

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

nu este convergentă, cu toate că şirul $x_n = \frac{1}{n}$ converge la zero.

Soluţie. Dacă presupunem că seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este convergentă, atunci şirul sumelor parţiale asociat, (S_n), este convergent, adică există $S \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_n \to S$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S,$$

de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$. Pe de altă parte, avem

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

ceea ce este fals, căci $\lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$. Presupunerea făcută fiind falsă, rezultă că seria armonică nu este convergentă.

□

Aplicând criteriul general de convergenţă al lui Cauchy şirului sumelor parţiale asociat unei serii, se poate deduce următorul criteriu de convergenţă a unei serii:

Teorema 1.2.1 (Criteriul de convergenţă al lui Cauchy) *O serie* $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un număr natural* $N = N(\varepsilon) \geq n_0$ *astfel încât*

$$|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq N \text{ şi orice } p \in \mathbb{N}^*. \tag{1.10}$$

Definiţia 1.2.2 O serie $\sum\limits_n x_n$ se numeşte *absolut convergentă* dacă seria $\sum\limits_n |x_n|$ este convergentă.

Propoziţia 1.2.3 *Orice serie absolut convergentă este convergentă.*

Demonstraţie. Presupunem că seria $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$ este absolut convergentă, adică seria $\sum\limits_{n\geq n_0} |x_n|$ este convergentă. Din criteriul de convergenţă al lui Cauchy rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \geq n_0$ astfel încât

$$\big|\, |x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p}| \,\big| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq N \text{ şi } p \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci

$$|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p}| = \big|\, |x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p}| \,\big| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq N$ şi $p \in \mathbb{N}^*$. Folosind din nou criteriul de convergenţă al lui Cauchy rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$ este convergentă.

$\square$

Reciproca propoziţiei anterioare nu este adevărată, după cum va rezulta din Exemplul 1.2.4. O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numeşte serie *semiconvergentă*.

Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi

Remarca 1.2.3 Dacă (x_n) este un şir de numere reale nenegative, adică $x_n \geq 0$, atunci şirul sumelor parţiale (S_n) asociat seriei $\sum\limits_n x_n$ este crescător, deci $\sum\limits_n x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul (S_n) este mărginit superior.

Din remarca precedentă se poate trage concluzia că o serie $\sum\limits_n x_n$ pentru care $x_n \geq 0$ (în literatura de specialitate o astfel de serie se numeşte *serie cu termeni pozitivi*) are întotdeauna o sumă, care este fie finită, dacă (S_n) este mărginit superior, fie este egală cu $+\infty$, dacă (S_n) este nemărginit superior.

Teorema 1.2.2 (Criteriul comparaţiei) Considerăm (x_n) şi (y_n) două şiruri de numere reale nenegative cu proprietatea că există $c > 0$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$x_n \leq c\, y_n, \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

a) Dacă seria $\sum\limits_n y_n$ este convergentă, atunci $\sum\limits_n x_n$ este convergentă.

b) Dacă seria $\sum\limits_n x_n$ este divergentă, atunci $\sum\limits_n y_n$ este divergentă.

Demonstraţie. Pentru a nu complica notaţiile, vom presupune, dacă nu se precizează explicit, că seriile ce intervin în demonstraţie sunt de forma $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

a) Presupunem că seria $\sum\limits_n y_n$ este convergentă. Din criteriul de convergenţă al lui Cauchy rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|y_{n+1} + \cdots + y_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{c}, \text{ pentru orice } n \geq N_0,\, p \in \mathbb{N}^*.$$

Fie $\varepsilon > 0$ şi $N = \max\{n_0, N_0\}$. Cum $x_n, y_n \geq 0$, avem

$$\begin{aligned}|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| &= x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}\\ &\leq c\,(y_{n+1} + \cdots + y_{n+p})\\ &= c\,|y_{n+1} + \cdots + y_{n+p}|\\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

pentru orice $n \geq N$ şi $p \in \mathbb{N}^*$. Aplicând din nou criteriul de convergenţă al lui Cauchy, rezultă că seria $\sum\limits_n x_n$ este convergentă.

b) Presupunem că seria $\sum\limits_n x_n$ nu este convergentă, de unde rezultă că şirul sumelor parţiale asociat este nemărginit superior, adică

$$S_n^x = x_0 + x_1 + \cdots + x_n \to +\infty.$$

Fie

$$S_n^y = y_{n_0} + y_{n_0+1} + \cdots + y_n.$$

Atunci

$$S_n^y \geq \frac{1}{c}\,(x_{n_0} + x_{n_0+1} + \cdots + x_n) = \frac{1}{c}(S_n^x - S_{n_0-1}^x) \to +\infty,$$

ceea ce implică faptul că $\sum\limits_{n\geq n_0} y_n$ nu este convergentă, deci nici seria $\sum\limits_{n\geq 0} y_n$ nu este convergentă.

□

Fără a restrânge generalizarea, constanta c din enunţul criteriului comparaţiei poate fi luată $c = 1$.

Remarcăm faptul că pentru a demonstra convergenţa/divergenţa unei serii folosind criteriul comparaţiei este nevoie să ne dăm seama, în prealabil, de natura seriei studiate. Astfel, pentru a demonstra că seria $\sum\limits_n x_n$ este convergentă trebuie să găsim un şir (y_n) cu $x_n \leq y_n$ şi seria $\sum\limits_n y_n$ să fie convergentă, în timp ce pentru a arăta că seria $\sum\limits_n x_n$ este divergentă trebuie să determinăm un şir (y_n) cu $x_n \geq y_n$ şi seria $\sum\limits_n y_n$ să fie divergentă.

Teorema 1.2.3 (Criteriul comparaţiei: forma la limită) Considerăm (x_n) şi (y_n) două şiruri de numere reale pozitive cu proprietatea că există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, \infty].$$

a) Dacă $l \in (0, \infty)$, atunci $\sum\limits_n x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $\sum\limits_n y_n$ este convergentă, adică cele două serii au aceeaşi natură şi notăm $\sum\limits_n x_n \sim \sum\limits_n y_n$.

b) Dacă $l = 0$ şi $\sum\limits_n y_n$ este convergentă, atunci $\sum\limits_n x_n$ este convergentă.

c) Dacă $l = \infty$ şi $\sum\limits_n y_n$ este divergentă, atunci $\sum\limits_n x_n$ este divergentă.

Teorema 1.2.4 (Criteriul raportului al lui D´Alembert) Fie (x_n) un şir de numere reale pozitive astfel încât există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, \infty].$$

a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum\limits_n x_n$ este convergentă.

b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum\limits_n x_n$ este divergentă.

Dacă şirul $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ are limita 1, atunci nu putem trage nici o concluzie asupra convergenţei seriei $\sum\limits_n x_n$ folosind criteriul raportului.

Teorema 1.2.5 (Criteriul Raabe-Duhamel) Fie (x_n) un şir de numere reale pozitive astfel încât există

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum\limits_n x_n$ este divergentă.

b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum\limits_n x_n$ este convergentă.

Criteriul Raabe-Duhamel este mai puternic decât criteriul raportului, acesta aplicându-se de obicei când limita şirului $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ este 1.

Teorema 1.2.6 (Criteriul rădăcinii) Fie (x_n) un şir de numere reale nenegative astfel încât există

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in [0, \infty].$$

a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum\limits_n x_n$ este convergentă.

b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum\limits_n x_n$ este divergentă.

Teorema 1.2.7 (Criteriul de condensare al lui Cauchy) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir descrescător de numere reale nenegative. Atunci seriile $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ şi $\sum\limits_{n\geq 0} 2^n x_{2^n}$ au aceeaşi natură, adică seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă seria $\sum\limits_{n\geq 0} 2^n x_{2^n}$ este convergentă.

O aplicaţie importantă a criteriului de condensare al lui Cauchy este:

Exemplul 1.2.3 (Seria armonică generalizată) Fie $p \in \mathbb{R}$. Seria numerică

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$$

este convergentă dacă şi numai dacă $p > 1$.

Soluţie. Dacă $p \leq 0$, atunci $x_n \nrightarrow 0$, iar din criteriul de divergenţă rezultă că seria $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$ este divergentă. Dacă $p > 0$, atunci şirul $x_n = \frac{1}{n^p} > 0$ este descrescător. Din criteriul de condensare al lui Cauchy rezultă că seria $\sum\limits_{n \geq 1} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă seria $\sum\limits_{n \geq 0} 2^n x_{2^n}$ este convergentă. Calculăm

$$\sum_{n \geq 0} 2^n x_{2^n} = \sum_{n \geq 0} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^n,$$

care este seria geometrică de raţie $r = \dfrac{1}{2^{p-1}}$. Aceasta este convergentă dacă şi numai dacă $r \in (-1, 1)$, ceea ce este echivalent cu $p > 1$.

□

Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni oarecare

Teorema 1.2.8 (Criteriul raportului) Fie (x_n) un şir de numere reale nenule astfel încât există

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = l \in [0, \infty].$$

a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum\limits_n x_n$ este absolut convergentă.

b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum\limits_n x_n$ este divergentă.

Teorema 1.2.9 (Criteriul rădăcinii) Fie (x_n) un şir de numere reale cu proprietatea că există

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = l \in [0,\infty].$$

a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n x_n$ este absolut convergentă.

b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n x_n$ este divergentă.

Teorema 1.2.10 (Criteriul lui Dirichlet) Considerăm o serie de forma $\sum_n \alpha_n u_n$. Dacă:

- (α_n) este un şir descrescător de numere reale nenegative,
- $\alpha_n \to 0$,
- (u_n) este un şir de numere reale cu proprietatea că şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_n u_n$ este mărginit,

atunci seria $\sum_n \alpha_n u_n$ este convergentă.

Teorema 1.2.11 (Criteriul lui Abel) Considerăm seria $\sum_n \alpha_n u_n$.
Dacă:

- (α_n) este un şir de numere reale monoton şi mărginit,
- (u_n) este un şir cu proprietatea că $\sum_n u_n$ este o serie convergentă,

atunci seria $\sum_n \alpha_n u_n$ este convergentă.

Serii alternante

Definiţia 1.2.3 O *serie alternantă* este o serie numerică ce verifică proprietatea că produsul oricăror doi termeni consecutivi ai săi este negativ. Pentru a pune mai bine în evidenţă semnele termenilor, o serie alternantă poate să fie scrisă sub forma

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\alpha_n = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + (-1)^n\alpha_n + \cdots$$

sau

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\alpha_n = -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots + (-1)^{n+1}\alpha_n + \cdots ,$$

unde $\alpha_n > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2.12 (Criteriul lui Leibniz) Dacă (α_n) este un şir de numere reale pozitive descrescător şi convergent la zero, atunci seria $\sum\limits_n (-1)^n\alpha_n$ este convergentă.

Exemplul 1.2.4 (Seria armonică alternantă) Seria alternantă

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{n+1}$$

este convergentă.

Seria armonică alternantă este un exemplu de serie semiconvergentă, căci este convergentă, dar nu este absolut convergentă, seria modulelor termenilor săi $\sum\limits_{n\geq 1}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ este divergentă, fiind seria armonică.

Operaţii cu serii convergente

Propoziţia 1.2.4 *Dacă* $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$ *este o serie convergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n\geq n_0}(\alpha x_n)$ *este convergentă pentru orice* $\alpha \in \mathbb{R}$ *şi*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}(\alpha x_n) = \alpha\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n.$$

Propoziţia 1.2.5 *Dacă* $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\geq n_0} y_n$ *sunt două serii convergente, atunci seria* $\sum\limits_{n\geq n_0} (x_n + y_n)$ *este convergentă. În plus, are loc*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} y_n.$$

Definiţia 1.2.4 Fie $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ şi $\sum\limits_{n\geq 0} y_n$ două serii convergente. Seria $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$, unde şirul (z_n) este definit prin

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k},\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.11}$$

se numeşte *produsul seriilor* $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ şi $\sum\limits_{n\geq 0} y_n$ (sub forma lui Cauchy). Pentru serii de forma $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$, respectiv $\sum\limits_{n\geq n_0} y_n$, şirul (z_n) se defineşte astfel:

$$z_n = \sum_{k=n_0}^{n} x_k y_{n+n_0-k},\ n \geq n_0. \tag{1.12}$$

Remarca 1.2.4 Produsul a două serii convergente nu este, în general, o serie convergentă.

Exemplul 1.2.5 Seria $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ este convergentă (rezultă din criteriul lui Leibniz). Vom arăta că produsul acestei serii cu ea însăşi este o serie divergentă.

Notăm $x_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Vom determina mai întâi termenul general al seriei produs. Aplicând formula (1.12), avem

$$\begin{aligned} z_n &= x_1 x_n + x_2 x_{n-1} + \cdots + x_k x_{n+1-k} + \cdots + x_n x_1 \\ &= (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1}} \right). \end{aligned}$$

Cum $\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}} > \frac{1}{n}$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$, rezultă că $|z_n| > 1$, deci $z_n \nrightarrow 0$. Din criteriul de divergenţă se obţine că seria $\sum\limits_{n\geq 1} z_n$ nu este convergentă.

$\square$

Teorema 1.2.13 (Teorema lui Mertens) *Dacă* $\sum_n x_n$ *şi* $\sum_n y_n$ *sunt două serii convergente şi cel puţin una dintre ele este absolut convergentă, atunci produsul celor două serii este o serie convergentă a cărei sumă este egală cu produsul sumelor celor două serii.*

Determinarea aproximativă a sumei unei serii convergente

Dacă un număr real necunoscut S (în general, un număr iraţional sau chiar transcendent) este suma unei serii convergente,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} x_k,$$

unde x_k, $k \in \mathbb{N}$, sunt numere reale uşor de calculat (de obicei, raţionale), atunci S se poate aproxima cu $S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ (şi scriem $S \simeq S_n$) pentru n suficient de mare. În plus, dacă n este destul de mare, atunci eroarea de aproximare,

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k,$$

devine suficient de mică. Rezultă astfel că este important să găsim metode de evaluare a erorii r_n prin care S_n va aproxima pe S cu orice precizie a priori fixată.

Teorema 1.2.14 Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale pozitive. Dacă există $c \in (0,1)$ astfel încât

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c, \; n \in \mathbb{N},$$

atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă, iar suma sa se poate aproxima astfel:

$$S \simeq S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n, \tag{1.13}$$

eroarea $r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$ satisfăcând inegalitatea

$$r_n \leq \frac{x_{n+1}}{1-c}, \; n \in \mathbb{N}. \tag{1.14}$$

Exemplul 1.2.6 Să se arate că seria

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)2^n}$$

este convergentă şi apoi să se aproximeze suma sa cu două zecimale exacte.

Soluţie. Fie $x_n = \frac{1}{(n+1)2^n}$. Avem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2(n+2)} \leq \frac{1}{2} = c \in (0,1).$$

Din teorema precedentă rezultă că seria dată este convergentă şi are loc

$$r_n \leq \frac{x_{n+1}}{1-c} = \frac{1}{(n+2)2^n}.$$

Impunem condiţia

$$\frac{1}{(n+2)2^n} < \frac{1}{10^2} \iff (n+2)2^n > 100.$$

Cel mai mic număr natural care verifică inegalitatea precedentă este $n = 5$, deci suma seriei poate fi aproximată prin

$$S \simeq x_0 + x_1 + \cdots + x_5 \simeq 1,38.$$

$\square$

Teorema 1.2.15 Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Dacă există $c \in (0,1)$ astfel încât

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq c,\ n \in \mathbb{N},$$

atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ este convergentă şi suma sa poate fi aproximată utilizând formula (1.13), eroarea satisfăcând relaţia

$$|r_n| \leq \frac{c^{n+1}}{1-c},\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.15}$$

Teorema 1.2.16 Se consideră seria $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\alpha_n$, unde (α_n) este un şir de numere reale pozitive descrescător care converge la 0. Suma seriei poate fi aproximată prin

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\alpha_k \simeq \alpha_0 - \alpha_1 + \cdots + (-1)^n\alpha_n,$$

cu eroarea satisfăcând relaţia $|r_n| \leq \alpha_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$.

1.2.2 Probleme rezolvate

Exerciţiul 1 Folosind *definiţia convergenţei unei serii*, să se stabilească natura următoarelor serii, calculându-se suma acestora:

$$\text{a)} \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{b)} \sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Soluţie. a) Avem

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

deci

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

De aici rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă şi suma ei este $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$.
b) Folosind proprietăţile logaritmului, obţinem

$$x_n = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n,$$

ceea ce implică

$$S_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1) \to +\infty.$$

Deci, $\sum\limits_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ este divergentă şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$.

□

Exerciţiul 2 Folosind *criteriul de convergenţă al lui Cauchy*, să se studieze convergenţa seriei

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

Soluţie. Considerăm $x_n = \frac{1}{n^2}$. Pentru orice $n, p \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&\leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Cum $\frac{1}{n} \to 0$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{n} < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_0$, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq n_0 \text{ şi orice } p \in \mathbb{N}^*.$$

Din criteriul de convergenţă al lui Cauchy rezultă că seria dată este convergentă.

□

Remarca 1.2.5 Analizând raţionamentul de mai sus, se observă că pentru a demonstra convergenţa seriei $\sum\limits_n x_n$ cu ajutorul criteriului de convergenţă al lui Cauchy este suficient să arătăm că există un şir $(a_n)_{n\geq n_0} \subset \mathbb{R}_+$ cu $a_n \to 0$ astfel încât

$$|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| \leq a_n, \text{ pentru orice } n \geq n_0 \text{ şi orice } p \in \mathbb{N}^*.$$

Exerciţiul 3 Să se studieze prin mai multe metode convergenţa seriei

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(nx)}{2^n}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Pentru $x \in \mathbb{R}$ fixat, considerăm şirul $x_n = \frac{\cos(nx)}{2^n}$, $n \geq 0$.
Metoda 1: *Criteriul de convergenţă al lui Cauchy.* Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $p \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\
&\leq \frac{|\cos(n+1)x|}{2^{n+1}} + \frac{|\cos(n+2)x|}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{|\cos(n+p)x|}{2^{n+p}} \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^p - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\
&= \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \leq \frac{1}{2^n} \to 0.
\end{aligned}$$

Din Remarca 1.2.5 rezultă că seria $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ este convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
Metoda 2: *Criteriul lui Dirichlet.* Fie $\alpha_n = \frac{1}{2^n} \searrow 0$ (este un şir de numere reale nenegative descrescător la zero) şi $u_n = \cos(nx)$. Succesiv, se obţine

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
&= 1 + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) \\
&= 1 + \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \text{ dacă } x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Cazul 1. Pentru $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, are loc

$$\begin{aligned}
|S_n| &= \left| 1 + \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq 1 + \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \\
&= 1 + \frac{\left|\sin \frac{nx}{2}\right| \left|\cos \frac{(n+1)x}{2}\right|}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \\
&\leq 1 + \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

ceea ce implică faptul că (S_n) este un şir mărginit. Din criteriul lui Dirichlet rezultă că seria $\sum\limits_n x_n = \sum\limits_n \alpha_n u_n$ este convergentă.
Cazul 2. Dacă $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci $x_n = \frac{1}{2^n}$, caz în care seria $\sum\limits_n x_n = \sum\limits_n \frac{1}{2^n}$ este seria geometrică de raţie $r = \frac{1}{2} \in (-1, 1)$, care este convergentă.

Metoda 3: *Legătura cu seriile absolut convergente.* Are loc

$$|x_n| = \frac{|\cos(nx)|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} = y_n.$$

Seria $\sum\limits_n y_n = \sum\limits_n \frac{1}{2^n}$ este convergentă, fiind seria geometrică de raţie $\frac{1}{2} \in (-1, 1)$. Din criteriul comparaţiei rezultă că seria $\sum\limits_n |x_n|$ este şi ea convergentă, adică $\sum\limits_n x_n$ este absolut convergentă. Cum orice serie absolut convergentă este convergentă, se obţine că seria $\sum\limits_n x_n$ este convergentă.

□

Exerciţiul 4 Folosind *criteriile comparaţiei*, să se studieze convergenţa seriilor:

$$\text{a)} \sum_{n\geq 1} \frac{2n-1}{3n^4-2n+1} \quad \text{b)} \sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}} \quad \text{c)} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+3^n} \quad \text{d)} \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(1+2^n)}{n^2}.$$

Soluţie. a) Definim $x_n = \frac{2n-1}{3n^4-2n+1}$ şi $y_n = \frac{1}{n^3}$. Avem

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{2n-1}{3n^4-2n+1}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{2n^4-n^3}{3n^4-2n+1} \to \frac{2}{3} \in (0, \infty).$$

Din *criteriul comparaţiei: forma la limită* rezultă că $\sum\limits_n x_n \sim \sum\limits_n y_n$. Cum $\sum\limits_n y_n$ este convergentă (este seria armonică generalizată cu $p = 3 > 1$), rezultă că $\sum\limits_n x_n$ este convergentă.

b) Considerăm $x_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}}$ şi $y_n = \frac{1}{n^{1/2-1/3}} = \frac{1}{n^{1/6}}$. Atunci

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{n^{1/3}}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}}}{\frac{1}{n^{1/6}}} = \frac{n^{1/3+1/6}}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}} \to 1 \in (0, \infty),$$

deci $\sum\limits_n x_n \sim \sum\limits_n y_n$. Cum $\sum\limits_n y_n$ este divergentă (este seria armonică generalizată cu $p = \frac{1}{6} < 1$), obţinem că şi seria $\sum\limits_n x_n$ este divergentă.

c) Cum $n + 3^n \geq 3^n$, rezultă

$$x_n = \frac{1}{n+3^n} \leq \frac{1}{3^n} = y_n.$$

Seria $\sum_n y_n$ este convergentă, căci este seria geometrică de raţie $r = 1/3 \in (-1, 1)$. Din *criteriul comparaţiei* rezultă că şi seria $\sum_n x_n$ este convergentă.

d) Avem

$$x_n = \frac{\ln(1+2^n)}{n^2} \geq \frac{\ln(2^n)}{n^2} = \frac{\ln 2}{n} = (\ln 2)\, y_n.$$

Dar cum seria $\sum_{n\geq 1} y_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă, din *criteriul comparaţiei* rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

□

Exerciţiul 5 Folosind *criteriul raportului* sau *criteriul Raabe-Duhamel*, să se studieze convergenţa următoarelor serii:

$$\text{a)} \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!},\ a > 0 \quad \text{b)} \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} \quad \text{c)} \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)},\ a > -1.$$

Soluţie. a) Fie $x_n = \frac{a^n}{n!}$. Atunci

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1.$$

Din criteriul raportului rezultă că seria $\sum_n x_n$ este convergentă pentru orice $a > 0$.

b) Pentru $x_n = \frac{n!}{n^n}$ obţinem

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{n}{-(n+1)}} \to e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{-n-1}} = e^{-1} < 1.\end{aligned}$$

Din criteriul raportului rezultă că seria $\sum_n x_n$ este convergentă.

c) Considerăm $x_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$. Atunci

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)(a+n+1)} \cdot \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{n!} \\ &= \frac{n+1}{a+n+1} \to 1.\end{aligned}$$

Cum criteriul raportului nu stabileşte natura seriei date, vom aplica criteriul Raabe-Duhamel. Avem

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{a+n+1}{n+1}-1\right)=\frac{an}{n+1}\to a.$$

Dacă $a\in(-1,1)$, atunci $\sum\limits_n x_n$ este divergentă, iar dacă $a>1$, atunci $\sum\limits_n x_n$ este convergentă. Rămâne să studiem cazul $a=1$. Pentru $a=1$ obţinem $x_n=\frac{1}{n+1}$, deci seria $\sum\limits_n x_n$ este divergentă (are aceeaşi natură ca şi seria armonică; de fapt, este seria armonică indexată după $n\geq 2$).

□

Exerciţiul 6 Folosind *criteriul rădăcinii*, să se studieze dacă următoarele serii sunt convergente:

$$\text{a)}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n \qquad \text{b)}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin^n a}{n},\ a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Soluţie. a) Fie $x_n=\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$. Atunci

$$\sqrt[n]{x_n}=\frac{n}{2n-1}\to\frac{1}{2}<1,$$

de unde rezultă că seria dată este convergentă.
b) Considerăm şirul $x_n=\frac{\sin^n a}{n}$. Atunci

$$\sqrt[n]{x_n}=\frac{\sin a}{\sqrt[n]{n}}\to\sin a<1,$$

căci $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Din criteriul rădăcinii rezultă că seria $\sum\limits_n x_n$ este convergentă.

□

Exerciţiul 7 Să se studieze în funcţie de parametrul real $a>0$ convergenţa seriilor:

$$\text{a)}\sum_{n\geq 2}\frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \qquad \text{b)}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}a^n \qquad \text{c)}\sum_{n\geq 1}a^{\ln n}.$$

Soluţie. a) Fie $a > 0$. Considerăm şirul

$$x_n = \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}},\ n \geq 2.$$

Pentru a studia convergenţa seriei $\sum\limits_{n\geq 2} x_n$ vom încerca, pentru început, să aplicăm criteriul raportului ($x_n > 0$). Avem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt[n]{n!}}{a^n} = a \cdot \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \to a,$$

căci $\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \to 1$. Din criteriul raportului obţinem că dacă $a \in (0,1)$, seria $\sum\limits_{n\geq 2} x_n$ este convergentă, iar dacă $a > 1$, atunci $\sum\limits_{n\geq 2} x_n$ este divergentă. Criteriul raportului nu se poate utiliza pentru $a = 1$, caz în care şirul $(x_n)_{n\geq 2}$ devine $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$. Pentru a studia în acest caz convergenţa seriei date vom aplica criteriul comparaţiei: forma la limită. Considerăm şirul $y_n = \frac{1}{n}$. Cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e},$$

obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} = e \in (0,\infty),$$

deci seria $\sum\limits_{n\geq 2} x_n$ are aceeaşi natură ca şi seria $\sum\limits_{n\geq 2} y_n$. Cum seria $\sum\limits_{n\geq 2} y_n$ este divergentă, rezultă că şi seria $\sum\limits_{n\geq 2} x_n$ este divergentă. În concluzie, seria $\sum\limits_{n\geq 2} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $a \in (0,1)$.
b) Pentru $a > 0$ (fixat) definim şirul

$$x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} a^n,\ n \geq 1.$$

Pentru a studia convergenţa seriei date vom încerca să aplicăm criteriul rădăcinii ($x_n > 0$). Avem

$$\sqrt[n]{x_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n a \to \frac{a}{e},$$

căci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}\cdot \tag{1.16}$$

Dacă $\frac{a}{e} < 1$, adică $a \in (0, e)$, atunci seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă, iar dacă $a > e$, atunci aceasta este divergentă. Dacă $a = e$, se obţine

$$x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} e^n = \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n e\right]^n = \left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^n.$$

Din inegalitatea

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e, \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

deducem că $x_n > 1$, ceea ce implică $x_n \nrightarrow 0$ şi, deci, din criteriul de divergenţă rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ nu este convergentă.

c) Fie $a > 0$. Considerăm şirul $x_n = a^{\ln n}$, $n \geq 1$.

Metoda 1. Are loc

$$x_n = a^{\ln n} = n^{\ln a} = \frac{1}{n^{-\ln a}},$$

deci $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este seria armonică generalizată cu $p = -\ln a$, care este convergentă dacă şi numai dacă $p > 1$, adică

$$-\ln a > 1 \iff \ln a < \ln\left(e^{-1}\right) \iff a \in \left(0, \frac{1}{e}\right).$$

Metoda 2. Pentru $a \in (0,1)$ şirul (x_n) este descrescător (la zero), deci putem aplica criteriul de condensare al lui Cauchy, din care rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ are aceeaşi natură ca şi seria $\sum\limits_{n\geq 0} 2^n x_{2^n}$. Calculăm

$$\sum_{n\geq 0} 2^n x_{2^n} = \sum_{n\geq 0} 2^n a^{\ln(2^n)} = \sum_{n\geq 0} 2^n a^{n\ln 2} = \sum_{n\geq 0}\left(2\,a^{\ln 2}\right)^n.$$

Cea din urmă serie este seria geometrică de raţie $r = 2\,a^{\ln 2}$, care este convergentă dacă şi numai dacă $r \in (-1, 1)$. Dar cum în cazul nostru avem $r > 0$, pentru ca seria de mai sus să fie convergentă este suficient să punem condiţia $2\,a^{\ln 2} < 1$. Au loc următoarele echivalenţe:

$$2\,a^{\ln 2} < 1 \Leftrightarrow a^{\ln 2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln 2\cdot\ln a < -\ln 2 \Leftrightarrow \ln a < -1 \Leftrightarrow a < e^{-1} = \frac{1}{e}\cdot$$

Deci, dacă $a \in (0,1)$, atunci seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $a \in (0, 1/e)$. Dacă $a = 1$, atunci $x_n = 1 \nrightarrow 0$, ceea ce implică faptul că seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ nu este convergentă. Pe de altă parte, dacă $a > 1$, atunci $x_n \to +\infty \neq 0$, deci şi în acest caz seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ nu este convergentă.

Metoda 3. Vom încerca pentru început să studiem convergenţa seriei date folosind criteriul raportului. Avem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{\ln(n+1)}}{a^{\ln n}} = a^{\ln \frac{n+1}{n}} \to 1.$$

Deci, criteriul raportului nu ne ajută. Calculăm

$$\begin{aligned} R_n &= n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n\left(a^{\ln \frac{n}{n+1}} - 1\right) \\ &= \frac{a^{\ln \frac{n}{n+1}} - 1}{\ln \frac{n}{n+1}} \cdot n \cdot \ln \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{a^{\ln \frac{n}{n+1}} - 1}{\ln \frac{n}{n+1}} \cdot \ln \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to -\ln a = \ln \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Am folosit relaţia (1.16) şi următoarea limită remarcabilă ($x(n) = \ln \frac{n}{n+1} \to 0$ pentru $n \to +\infty$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Din criteriul Raabe-Duhamel rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ nu este convergentă pentru $\ln \frac{1}{a} < 1$, adică pentru $a > \frac{1}{e}$, şi este convergentă dacă $\ln \frac{1}{a} > 1$, adică dacă $a \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$. Criteriul Raabe-Duhamel nu stabileşte natura seriei dacă $a = \frac{1}{e}$. În acest caz şirul (x_n) devine

$$x_n = e^{-\ln n} = e^{\ln\left(n^{-1}\right)} = \frac{1}{n},$$

caz în care seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este seria armonică, care nu este convergentă.

□

Exerciţiul 8 Fie $x_0 \in [0, 1]$. Se consideră şirul (x_n), definit prin

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2,\ n \geq 0.$$

Să se studieze convergenţa şirului (x_n) şi a seriei $\sum\limits_{n} x_n$.

Soluţie. Dacă $x_0 = 0$, se observă că $x_n = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $x_n \to 0$ şi $\sum_n x_n$ este o serie convergentă. Dacă $x_0 = 1$, atunci $x_1 = 0$ şi, deci, $x_n = 0$ pentru orice $n \geq 1$. Şi în acest caz $x_n \to 0$ şi seria asociată este convergentă. Rămâne să studiem cazul $x_0 \in (0,1)$. Cum $x_1 = x_0(1 - x_0)$ şi $x_0, 1 - x_0 \in (0,1)$, rezultă că $x_1 \in (0,1)$. Inductiv, ţinând cont de relaţia de recurenţă care poate fi scrisă sub forma $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, se arată că $x_n \in (0,1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci (x_n) este un şir mărginit. Pe de altă parte,

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^2 < 0, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

ceea ce implică faptul că (x_n) este un şir strict descrescător. Din cele de mai sus rezultă astfel că (x_n) este convergent. Atunci există $x \in [0,1)$ astfel încât $x_n \to x$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, se obţine

$$x = x - x^2 \iff x = 0.$$

În continuare vom studia convergenţa seriei $\sum_n x_n$. Calculăm

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n - x_n^2}{x_n} = 1 - x_n \to 1,$$

deci criteriul raportului nu poate stabili natura seriei studiate. Vom încerca să aplicăm criteriul Raabe-Duhamel. Avem

$$R_n = n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{1}{1 - x_n} - 1\right) = \frac{n\,x_n}{1 - x_n} = \frac{n}{\frac{1 - x_n}{x_n}} = \frac{n}{\frac{1}{x_n} - 1}.$$

Pentru a studia convergenţa şirului (R_n) vom utiliza lema Stolz-Cesàro. Fie $a_n = n$ şi $b_n = \frac{1}{x_n} - 1 \to +\infty$ (strict crescător). Succesiv, se obţine

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \frac{x_n\,x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \frac{x_n(x_n - x_n^2)}{x_n - x_n + x_n^2} = 1 - x_n \to 1,$$

ceea ce implică $R_n \to 1$. Astfel, nici criteriul Raabe-Duhamel nu stabileşte natura seriei $\sum_n x_n$. Vom încerca acum să studiem convergenţa seriei folosind criteriul comparaţiei: forma la limită. Considerând $y_n = \frac{1}{n}$, are loc $\frac{x_n}{y_n} = n\,x_n = \frac{n}{\frac{1}{x_n}}$. Cum

$$\frac{n + 1 - n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = 1 - x_n \to 1,$$

rezultă $\frac{x_n}{y_n} \to 1 \in (0, \infty)$. Din criteriul comparaţiei: forma la limită deducem că $\sum\limits_n x_n \sim \sum\limits_n y_n$, dar cum seria $\sum\limits_n y_n$ este divergentă (este seria armonică), se obţine că şi seria $\sum\limits_n x_n$ este divergentă.

$\square$

1.2.3 Probleme propuse

Exerciţiul 1 Folosind *definiţia* convergenţei unei serii numerice, să se stabilească natura următoarelor serii, calculându-se suma acestora:

a) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{(n-1)(n+1)}$ b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{9n^2-3n-2}$ c) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

d) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ e) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{2^{n-1}(n-1)}{(n+1)!}$ f) $\sum\limits_{n\geq 1} \operatorname{arctg}\frac{a}{1+n(n+1)a^2}$, $a > 0$.

Indicaţie: Se folosesc următoarele relaţii:

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{9n^2-3n-2} = \frac{1}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\frac{2^{n-1}(n-1)}{(n+1)!} = \frac{2^{n-1}(n+1-2)}{(n+1)!} = \frac{2^{n-1}}{n!} - \frac{2^n}{(n+1)!}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{a}{1+n(n+1)a^2} = \operatorname{arctg}\frac{(n+1)a-na}{1+((n+1)a)\,(na)} = \operatorname{arctg}(n+1)a - \operatorname{arctg}(na).$$

Exerciţiul 2 Folosind *criteriul de divergenţă*, să se arate că următoarele serii sunt divergente:

$$\text{a)} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{n}{n+1} \qquad \text{b)} \sum_{n\geq 2} \frac{n}{\sqrt[n]{n}} \qquad \text{c)} \sum_{n\geq 0} \cos(n\pi).$$

Exerciţiul 3 Folosind natura seriei geometrice sau a celei armonice generalizate, să se precizeze care din următoarelor serii sunt convergente:

$$\text{a)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{b)} \sum_{n\geq 0} (-2)^n \quad \text{c)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} \quad \text{d)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} \quad \text{e)} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{5^n}.$$

Exerciţiul 4 Folosind *criteriul de convergenţă al lui Cauchy*, să se studieze convergenţa următoarelor serii:

$$\text{a)} \sum_{n\geq 0} \frac{\sin(n\pi x)}{5^n}, \ x \in \mathbb{R} \qquad \text{b)} \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n(n+1)}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Exerciţiul 5 Folosind *criteriul raportului* sau *criteriul Raabe-Duhamel*, să se studieze convergenţa următoarelor serii:

$$\text{a)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\,2^n} \qquad \text{b)} \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{5^n} \qquad \text{c)} \sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}.$$

Exerciţiul 6 Folosind, eventual, *criteriul rădăcinii*, să se studieze convergenţa următoarelor serii:

$$\text{a)} \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2n+\sqrt{n}}{2n+1}\right)^{n\sqrt{n}} \quad \text{b)} \sum_{n\geq 1} \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n^2}, \ a \in \mathbb{R} \quad \text{c)} \sum_{n\geq 1} \left(\frac{an}{bn+1}\right)^n, \ a, b > 0.$$

Exerciţiul 7 Folosind *criteriile comparaţiei*, să se studieze convergenţa seriilor:

$$\text{a)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} \quad \text{b)} \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}+1} \quad \text{c)} \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n}}{n} \quad \text{d)} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n+\sqrt{n}}$$

$$\text{e)} \sum_{n\geq 2} \left(\sqrt[n]{n}-1\right) \quad \text{f)} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad \text{g)} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \quad \text{h)} \sum_{n\geq 2} \sin\frac{\pi}{n^2}.$$

Indicaţie: e) Are loc $\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n}} - 1$; f) Se foloseşte, eventual, relaţia $(\ln n)^{\ln n} = n^{\ln(\ln n)} \geq n^2$, pentru n suficient de mare.

Exerciţiul 8 Folosind *criteriul de condensare al lui Cauchy*, să se studieze dacă următoarele serii sunt convergente:

$$a) \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n} \quad b) \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n} \quad c) \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n\ln(\ln n)} \quad d) \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln^p(n)},\ p>0.$$

Exerciţiul 9 Folosind *criteriul lui Dirichlet*, să se arate că seriile

$$a) \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n(n+1)}} \quad b) \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n} \quad c) \sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{\ln 2} + \cdots + \frac{1}{\ln n}\right) \frac{\sin(nx)}{n-1}$$

sunt convergente pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 10 Folosind *criteriul lui Leibniz*, să se arate că următoarele serii sunt convergente:

$$a) \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{n^2+1} \qquad b) \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n\sqrt{n}} \qquad c) \sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Exerciţiul 11 Să se studieze în funcţie de parametrul real $a > 0$ convergenţa următoarelor serii:

$$a) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+a^n} \quad b) \sum_{n\geq 1} \frac{a^n\, n!}{n^n} \quad c) \sum_{n\geq 1} a^{\sqrt{n}} \quad d) \sum_{n\geq 1} a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} \quad e) \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(1+a^n)}{n^2}.$$

Exerciţiul 12 Câţi termeni trebuie însumaţi pentru ca suma seriei

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{n!}$$

să poată fi calculată cu patru zecimale exacte?

Exerciţiul 13 Să se studieze dacă există funcţii injective $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel încât seria

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^2}$$

să fie convergentă.

Indicaţie: Se arată că dacă există o funcţie f care să verifice proprietăţile din enunţ, atunci $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{4n^2}(1+2+\cdots+n) \geq \frac{1}{8}$.

Exerciţiul 14 Fie $x_0 \in (0,1)$. Se consideră şirul (x_n), definit prin:

$$\text{a) } x_{n+1} = x_n - \ x_n^3, \text{ pentru } n \geq 0;$$

$$\text{b) } x_{n+1} = x_n - nx_n^2, \text{ pentru } n \geq 0.$$

Să se studieze convergenţa şirului (x_n) şi a seriei $\sum\limits_{n \geq 0} x_n$.

Indicaţie: a) Se arată că $x_n \to 0$ şi apoi, din criteriul Raabe-Duhamel, rezultă că seria asociată nu este convergentă ; b) Se arată inductiv că $x_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$, pentru $n \geq 1$, deci $x_n \to 0$. Convergenţa seriei rezultă din criteriul comparaţiei: forma la limită, ţinând cont de limita $n^2 x_n \to 2$ (se aplică lema Stolz-Cesàro).

Exerciţiul 15 Să se studieze convergenţa şirului (x_n) şi a seriei $\sum\limits_{n} x_n$, unde:

$$\text{a) } x_{n+1} = 2x_n - x_n^2, \text{ pentru } n \geq 0, \ x_0 \in \mathbb{R};$$

$$\text{b) } x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2}, \text{ pentru } n \geq 1, \ x_1 > 0;$$

$$\text{c) } x_{n+1} + e^{x_{n+1}} = 1 + x_n, \text{ pentru } n \geq 0, \ x_0 \in \mathbb{R}.$$

Indicaţie: a) Se arată că şirul (x_n) este convergent pentru $x_0 \in [0,2]$, iar seria asociată este convergentă pentru $x_0 \in \{0,2\}$; b) Se arată că $x_n \to 0$ (strict descrescător) şi $n\,x_n \to 1$; c) Dacă $x_0 = 0$, atunci $x_n = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$, iar dacă $x_0 \neq 0$, se arată că $x_n \to 0$ şi apoi $\frac{x_n}{x_{n+1}} \to 2$.