

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. О. СУХОГО**

Факультет автоматизированных и информационных систем

Кафедра «Информационные технологии»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 2
по дисциплине «Компьютерные системы конечноэлементных расчётов»

на тему: «Виды конечных элементов и функций формы»

Выполнил: студент гр. ИТП-31
Трофимов Е.В.
Принял: преподаватель-стажёр
Васюкова В.О.

Гомель 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1 Назначением функций формы.....	4
2 Условия выбора функций формы.....	5
3 Одномерные конечные элементы и процесс получения различных функций формы для них.....	6
4 Двумерные конечные элементы и процесс получения различных функций формы для них.....	8
5 Трёхмерные конечные элементы и процесс получения различных функций формы для них.....	10
6 Получение функции формы для кубического треугольного элемента.....	11
Заключение.....	13

ВВЕДЕНИЕ

В данной лабораторной работе будет рассмотрена методика выбора функции формы в зависимости от типа решаемой задачи с помощью метода конечных элементов, где она применяется и при каких условиях.

Ознакомимся с назначением функции формы, изучили условия выбора функции формы, одномерные конечные элементы и процесс получения различных функций формы для них, двумерные конечные элементы и процесс получения различных функций формы для них, трехмерные конечные элементы и процесс получения различных функций формы для них. Так же будет получена формы для кубического треугольного элемента согласно варианту в лабораторной работе.

Метод конечных элементов является основным численным методом при решении задач механики твердого тела и может интерпретироваться как с физической, так и с математической точки зрения.

1 НАЗНАЧЕНИЕМ ФУНКЦИЙ ФОРМЫ

В методе конечных элементов исходная расчётная область дискретизируется конечными элементами. В силу размерности рассматриваемой области конечные элементы могут быть соответственно одномерными, двумерными и трёхмерными. Поведение искомой функции на конечном элементе выражается через известные базисные функции (функции формы):

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{S_i} \alpha_{ij} N_{ij}^*, \quad (1.1)$$

где F – искомая функция;

α_{ij} – неизвестные постоянные множители, подлежащие определению;

N_{ij}^* – базисные функции, n – общее число узлов элемента;

S_i – число степеней свободы в i -ом узле.

Неизвестные постоянные множители α_{ij} выражаются через значения в узлах искомой функции. Данные значения называются узловыми степенями свободы, или просто степенями свободы конечного элемента. В зависимости от того, содержат ли узловые степени свободы только значения функции или ещё дополнительно содержат и значения производных, различают соответственно лагранжевы и эрмитовы конечные элементы.

Таким образом, выражая постоянные множители α_{ij} через значения в узлах искомой функции, (1.1) можно переписать в виде:

$$F = \sum_{i=1}^e N_i F_i^e = (\{N\}, \{F^e\}), \quad (1.2)$$

где N_i – функция формы конечного элемента;

F_i^e – значение искомой функции в узле конечного элемента;

e – общее количество степеней свободы конечного элемента.

2 УСЛОВИЯ ВЫБОРА ФУНКЦИЙ ФОРМЫ

При выборе функций формы N_i необходимо руководствоваться следующим условиями:

1. Функции формы должны непрерывно дифференцируемы внутри конечного элемента столько раз, каков порядок производной, входящей в исходное дифференциальное уравнение или применяемый вариационный принцип (условие дифференцируемости или условие существования функционала вариационной задачи).

2. При переходе через границы смежных элементов должна обеспечиваться непрерывность искомой функции и существование её производных (условие межэлементной непрерывности).

3. При стремлении размера конечного элемента к нулю функции формы должны обеспечить возможность получения конечных значений искомой функции и её производных, входящих в вариационный функционал.

4. Кроме того, для существования решения, основанного на принципе минимума энергии, необходимо, чтобы реализовывалось состояние постоянной деформации. В частности, при перемещении тела как твёрдого целого должна обеспечиваться нулевая энергия деформации.

5. Из соотношений (1.2) следует, что $N_i = 1$ только в i -ом узле, и нулю – во всех остальных узлах.

На практике с целью упрощения расчётов при выборе функций формы могут нарушаться одно или несколько из приведённых условий. В этом случае нельзя гарантировать сходимость процесса к точному решению. Однако полученные результаты могут обеспечивать достаточную для практического применения адекватность.

3 ОДНОМЕРНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ПРОЦЕСС ПОЛУЧЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ФОРМЫ ДЛЯ НИХ

Одномерные элементы представляют собой отрезки, содержащие две, три и более узловых точек. Простейшим одномерным элементом является линейный лагранжевый элемент (рисунок 3.1):

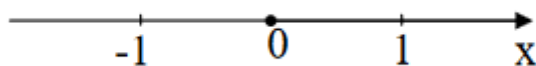


Рисунок 3.1 – Линейный лагранжевый элемент

Данный элемент имеет два узла: один в точке x_1 координатой -1, другой в точке x_2 с координатой 1. Каждый узел имеет по одной степени свободы. Соотношения (1.2) примут вид:

$$F(x) = N_1(x)F_1(x_1) + N_2(x)F_2(x_2). \quad (2.1)$$

Воспользуемся условиями получения функции формы:

$$N_1(x) = \frac{1}{2}(1 - x), N_2(x) = \frac{1}{2}(1 + x). \quad (2.2)$$

Откуда:

$$F(x) = \frac{1}{2}(1 - x)F_1(x_1) + \frac{1}{2}(1 + x)F_2(x_2) = c + bx, \quad (2.3)$$

$$\text{где } c = \frac{1}{2}(F_1(x_1) + F_2(x_2)), b = \frac{1}{2}(F_2(x_2) - F_1(x_1)).$$

То есть искомая функция на конечном элементе аппроксимируется линейным полиномом (полиномом первого порядка).

В случае, если элемент, представленный на рисунке 3.1 будет иметь ещё промежуточную точку $x_3 = 0$, то можно получить квадратичный лагранжевый элемент. Аналогично, как и для линейного элемента, можно найти функции формы, которые будут иметь вид:

$$N_1(x) = \frac{1}{2}x(1-x), \quad N_2(x) = \frac{1}{2}x(1+x), \quad N_3(x) = 1-x^2.$$

Тогда (1.2) будет иметь вид:

$$F(x) = \frac{1}{2}x(1-x)F(x_1) + \frac{1}{2}x(1+x)F(x_2) + (1-x^2)F(x_3) = c + bx + ax^2$$

Т.е. искомая функция на конечном элементе аппроксимируется квадратичным полиномом. Как ни сложно заметить, это и определяет название (порядок) элемента. Линейный элемент обеспечивает существование только первой производной, квадратичный – первой и второй. Аналогично рассуждая можно построить одномерный элемент и более высокого порядка.

Данные функции формы соответствуют эрмитовой полиномиальной интерполяции и поэтому элементы такого типа называются эрмитовыми. Найденные функции формы соответствуют кубическому эрмитову элементу.

Априорный выбор функций формы возможен только для самых простейших элементов. На практике для нахождения функций формы используют два подхода. Первый основан на выборе аппроксимации искомой функции в виде полинома. Степень полинома определяется количеством степеней свободы конечного элемента.

4 ДВУМЕРНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ПРОЦЕСС ПОЛУЧЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ФОРМЫ ДЛЯ НИХ

Простейшим двумерным конечным элементом является треугольный (рис. 4.1).

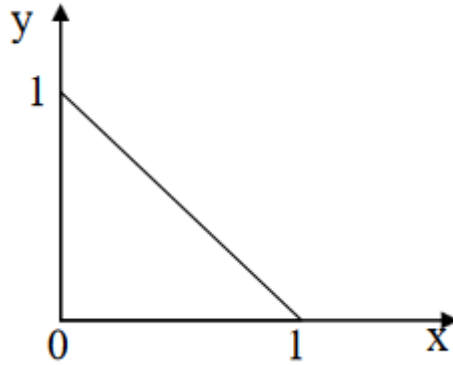


Рисунок 4.1 – Треугольный конечный элемент

В каждом узле такого элемента будет по 2 степени свободы и три функции формы. Соотношения (1.2) примут вид:

$$F(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \left([E] \{N_i\} \begin{Bmatrix} u(x_i, y_i) \\ v(x_i, y_i) \end{Bmatrix} \right), \quad (4.1)$$

где $[E]$ – единичная матрица размерности 2 на 2;

i – номер узла конечного элемента;

x_i, y_i – координаты i -го узла.

Соотношения (4.1) можно переписать в явном виде:

$$u(x, y) = N_1(x, y)u(x_1, y_1) + N_2(x, y)u(x_2, y_2) + N_3(x, y)u(x_3, y_3);$$

$$\vartheta(x, y) = N_1(x, y)\vartheta(x_1, y_1) + N_2(x, y)\vartheta(x_2, y_2) + N_3(x, y)\vartheta(x_3, y_3).$$

Для треугольника, изображённого на рисунке 4.1, как ни сложно проверить, функции формы примут вид:

$$N_1(x, y) = 1 - x - y; \quad N_2(x, y) = x; \quad N_3(x, y) = y.$$

Аппроксимация исходных функций будет выполняться следующими полиномами:

$$u(x, y) = u(x_1, y_1) + (u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1))x + (u(x_3, y_3) - u(x_1, y_1))y;$$

$$\vartheta(x, y) = \vartheta(x_1, y_1) + (\vartheta(x_2, y_2) - \vartheta(x_1, y_1))x + (\vartheta(x_3, y_3) - \vartheta(x_1, y_1))y.$$

В случае произвольно ориентированного треугольника функции формы могут быть найдены с помощью обращения координатной матрицы или интерполирования. Кроме того, можно воспользоваться преобразованием координат и произвольный треугольник привести к треугольнику, изображённому на рисунке 4.1. Однако подобные преобразования сопряжены с вычислением значений функций \sin и \cos , которые в общем случае вычисляются приближённо, что вносит определённый вклад в погрешность найденного решения.

Нахождение функции формы для произвольного треугольника с использованием координатной матрицы. Аппроксимация искомых функций будет выполняться полиномом вида:

$$\begin{cases} u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases}$$

Функции формы для произвольного линейного треугольного элемента будут иметь вид:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{2S} ((x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y); \\ N_2(x, y) &= \frac{1}{2S} ((x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y); \\ N_3(x, y) &= \frac{1}{2S} ((x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y), \end{aligned}$$

где S – площадь конечного элемента.

Очевидно, что функции формы для треугольного элемента, представленного на рисунке 4.1, могут быть легко найдены из общей формулы.

5 ТРЕХМЕРНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ПРОЦЕСС ПОЛУЧЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ФОРМЫ ДЛЯ НИХ

Для исследования объёмных тел используют трёхмерные конечные элементы, простейшим из которых является линейный элемент в форме тетраэдра (рисунок 5.1).

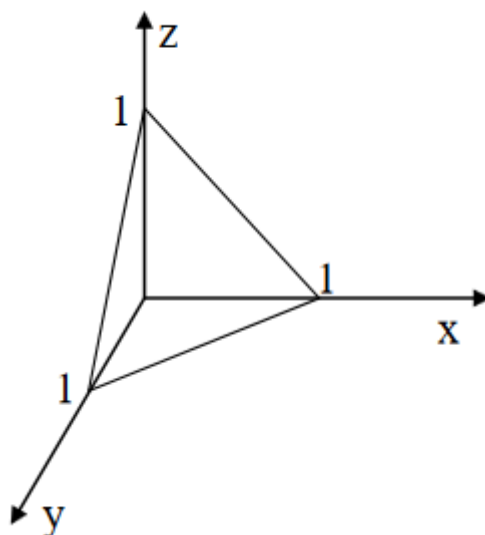


Рисунок 5.1 – Линейный элемент в форме тетраэдра

Функции формы для данного элемента будут иметь вид:

$$N_1(x, y, z) = 1 - x - y - z; \quad N_2(x, y, z) = x; \quad N_3(x, y, z) = y; \quad N_4(x, y, z) = z.$$

В этом случае аппроксимация искомых функций будет осуществляться выражениями:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\ \vartheta(x, y, z) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z; \\ \omega(x, y, z) &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z, \end{aligned}$$

Аналогично, как и в случае с линейным тетраэдральным элементом, можно найти функции формы для произвольно ориентированного элемента.

6 ПОЛУЧЕНИЕ ФУНКЦИИ ФОРМЫ ДЛЯ КУБИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

В общем случае кубическая функция содержит десять произвольных параметров, при определении которых потребуется выбрать для элемента такое же число неизвестных узловых величин. Условно совместности будут выполнены, если закон изменения функции вдоль рассматриваемой стороны элемента зависит только от узловых величин на этой же стороне. Для кубической функции требуется четыре узловые величины, для того что бы определить значения функции вдоль (одной) стороны.

Определение функции формы для треугольных элементов высокого порядка упрощается тем, что имеется возможность проводить линии, перпендикулярные L-координатам, каждая из которых пересекает ряд узлов.



Рисунок 6.1 – Перпендикулярные L_1 линии, которые проходят через все узлы

Эта особенность сохраняется независимо от числа узлов, которые содержит треугольник. Если рассматривается уравнение прямой $L_1 = c$, то $F_\delta = L_1 - c$.

Интерполяционный полином для кубического элемента представляется следующим образом:

$$\varphi = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9y^2 + a_{10}y^3.$$

Общая формула для вычисления функции формы имеет вид:

$$N_\beta = \prod_{\delta=1}^n \frac{F_\delta}{F_\delta|_{L_1, L_2, L_3}}$$

Где n – порядок треугольника (число узлов на стороне); F_δ – функции от

L_1, L_2 и L_3 , которые определяются из уравнений n линий, которые проходят через все узлы, за исключением узла, для которого определяется функция формы. Порядок треугольника определяется как величина, на

единицу меньшая числа узлов на стороне треугольника. Кубичный элемент имеет четыре узла на стороне поэтому является элементом третьего порядка.

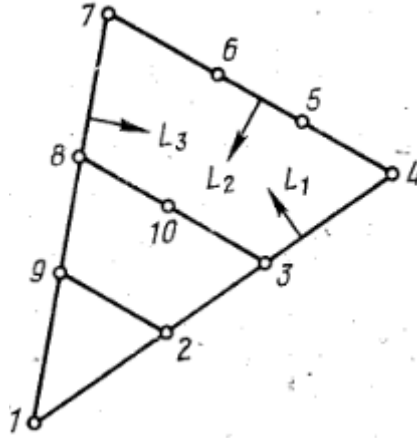


Рисунок 6.2 – Кубичный треугольный элемент

Расположение и нумерация узлов рассматриваемого элемента показаны на Рисунке 6.2. Порядок элемента равен $n = 4 - 1 = 3$ (на стороне элемента имеются три узла).

Функции формы для кубичного треугольного элемента:

$$N_1 = \frac{1}{2}L_1(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)$$

$$N_2 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1)$$

$$N_3 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_2 - 1)$$

$$N_4 = \frac{1}{2}L_2(3L_2 - 1)(3L_2 - 2)$$

$$N_5 = \frac{9}{2}L_2L_3(3L_2 - 1)$$

$$N_6 = \frac{9}{2}L_2L_3(3L_3 - 1)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}L_3(3L_3 - 1)(3L_3 - 2)$$

$$N_8 = \frac{9}{2}L_3L_1(3L_3 - 1)$$

$$N_9 = \frac{9}{2}L_3L_1(3L_1 - 1)$$

$$N_{10} = 27L_1L_2L_3$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной лабораторной работе была рассмотрена методика выбора функции формы в зависимости от типа решаемой задачи с помощью метода конечных элементов, где она применяется и при каких условиях.

Ознакомились с назначением функции формы, изучили условия выбора функции формы, одномерные конечные элементы и процесс получения различных функций формы для них, двумерные конечные элементы и процесс получения различных функций формы для них, трехмерные конечные элементы и процесс получения различных функций формы для них. Так же была получена формы для кубического треугольного элемента согласно варианту в лабораторной работе. Были получены теоретические навыки, которые в дальнейшем будут необходимы для практических задач.