Se presentan a continuación las respuestas de los ejercicios propuestos en el apunte de Funciones, **corresponde al estudiante "justificar"** cada una de las respuestas de acuerdo a los conocimientos desarrollados.

Funciones

1) a) V **b)** F **c)** F **d)** V **e)** F **f)** F **g)** V **h)** V **i)** F

2) f no es función, al elemento 6 no le corresponde ningún valor de B.

g no es función, a un mismo elemento de A le corresponden dos elementos distintos de B. (1,0) (1,2)

h es función. $Df = A$ $Cf = B$ $Im\, f = \{1,2,3\}$

r es función. $Dr = A$ $Cr = B$ $\operatorname{Im} r = \{2\}$

3) $\boldsymbol{f_1, f_2, f_5 y\, f_6}$ son funciones pares $\boldsymbol{f_3, f_4, y\, f_7}$ no son pares ni impares.

5) $f(0) = 5$ $f(3) = 5$ $f(-3) = 23$

$f(2x) = 4x^2 - 6x + 5$ $f(1+h) = 3 - h + h^2$

6) $Df_1 = R$ $Df_2 = R$ $Df_3 = R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ $Df_4 = R$ $Df_5 = R - \{4,1\}$

$Df_6 = \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$ $Df_7 = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ $Df_8 = (2,+\infty)$ $Df_9 = R$ $Df_{10} = R$

$Df_{11} = R$ $Df_{12} = \left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$ $Df_{13} = R$ $Df_{14} = R$ $Df_{15} = R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

7) $Df_1 = R = \operatorname{Im} f_1$ $Df_2 = R = \operatorname{Im} f_2$ $Df_3 = R = \operatorname{Im} f_3$

$Df_4 = R$ $\operatorname{Im} f_4 = [-1,+\infty)$ $Df_5 = R$ $\operatorname{Im} f_5 = \left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$

$Df_6 = R$ $\operatorname{Im} f_6 = (-\infty, 3]$ $Df_7 = R - \{-5\}$ $\operatorname{Im} f_7 = R - \{-10\}$

$Df_8 = [0,3)$ $\operatorname{Im} f_8 = \{-1\} \cup (2,6)$

$Df_9 = (-\infty,-1] \cup \{0\} \cup [1,+\infty)$ $\operatorname{Im} f_9 = \{-5\} \cup [1,+\infty)$

$Df_{10} = R - \{0\}$ $\operatorname{Im} f_{10} = [-1,+\infty)$ $Df_{11} = R = \operatorname{Im} f_{11}$

$Df_{12} = [1,+\infty)$ $\operatorname{Im} f_{12} = R_0^+$ $Df_{13} = R - \{4,-4\}$ $\operatorname{Im} f_{13} = R - \left\{0, \frac{1}{8}\right\}$

$Df_{14} = R$ $\operatorname{Im} f_{14} = R_0^+$

8) a) $Df = R = Dg \qquad D_{f+g} = R = D_{f-g} = D_{f.g}$

$(f+g)(x) = 3x+2$

$(f-g)(x) = -x+4$

$(f.g)(x) = 2x^2+5x-3$

$D_{\frac{f}{g}} = R - \left\{\frac{1}{2}\right\} \qquad D_{\frac{g}{f}} = R - \{-3\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+3}{2x-1} \qquad \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

b) $Df = R \quad Dg = (2,+\infty) \qquad D_{f+g} = (2,+\infty) = D_{f-g} = D_{f.g}$

$(f+g)(x) = x^2+2+\ln(x-2)$

$(f-g)(x) = x^2+2-\ln(x-2)$

$(f.g)(x) = (x^2+2)(\ln(x-2))$

$D_{\frac{f}{g}} = (2,+\infty) - \{3\} \qquad D_{\frac{g}{f}} = (2,+\infty)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2+2}{\ln(x-2)} \qquad \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\ln(x-2)}{x^2+2}$

c) $Df = (-\infty,3] \qquad Dg = [-5,+\infty) \qquad D_{f+g} = [-5,3] = D_{f-g} = D_{f.g}$

$(f+g)(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+5}$

$(f-g)(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{x+5}$

$(f.g)(x) = \sqrt{3-x}.\sqrt{x+5}$

$D_{\frac{f}{g}} = (-5,3] \qquad D_{\frac{g}{f}} = [-5,3)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+5}} \qquad \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{3-x}}$

9) **a)** $g(x) = x^2+3 \qquad h(x) = \sqrt{x} \qquad f(x) = (h \circ g)(x)$

b) $g(x) = -2x^3 \qquad h(x) = \cos(x) \qquad g(x) = (h \circ f)(x)$

c) $r(x) = \sqrt{x} \qquad h(x) = (r \circ r)(x)$

10) a) $(f \circ g)(x) = x+2 \quad Df \circ g = \{x \in [-1,+\infty) / \sqrt{x+1} \in R\} = [-1,+\infty)$

b) $(f\circ g)(x)=x^2 \quad Df\circ g=\left\{x\in R-\{0\}/\dfrac{1}{x}\in R-\{0\}\right\}=R-\{0\}$

c) $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{x} \quad Df\circ g=\left\{x\in R_0^+/\sqrt{x}\in R-\{0\}\right\}=R^+$

d) $(f\circ g)(x)=\ln x^2 \quad D_{f\circ g}=\left\{x\in R/x^2+2\in(2,+\infty)\right\}=R-\{0\}$

11) a) i) No es uno a uno ya que existen dos valores diferentes del dominio que tienen la misma imagen, $f(2)=f\left(\frac{-5}{2}\right)=5$

ii) $f(1)=1$. Las preimágenes de 5 son $x=2, \quad x=\dfrac{-5}{2}$.

iii) f_9 *es creciente en* $(1,+\infty)$. f_9 *es decreciente en* $(-\infty,-1)$

iv) f_9 no es par ni impar, ya que su gráfica no es simétrica respecto del eje y ni respecto del origen.

b) i) Sí, toda recta paralela al eje x corta a la gráfica de la función una sola vez.

$f_{11}(x_1)=f_{11}(x_2)\Rightarrow x_1^3-1=x_2^3-1\Rightarrow x_1^3=x_2^3\Rightarrow x_1=x_2 \quad \forall x_1,x_2\in Df_{11}$

ii) $f_{11}(-2)=-9 \quad , \qquad x^3-1=7\Rightarrow x=2$

iii) f_{11} crece en R, nunca decrece.

iv) f_{11} no es par ni impar, ya que su gráfica no es simétrica respecto del eje y ni respecto del origen.

$f_{11}(-x)=-x^3-1, \quad -x^3-1\neq f_{11}(x) \quad f_{11}\ \textit{no es par},$

$-x^3-1\neq -f_{11}(x) \quad f_{11}\ \textit{no es impar}$

12) f es una función lineal por lo tanto es uno a uno ya que:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1-1=2x_2-1\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2 \quad \forall x_1,x_2\in Df$

g no es uno a uno, $g(-1)=g(1)=2$.

$g_1(x)=x^2+1, \quad x\in R_0^+$

13) $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{2} \qquad g^{-1}(x)=x^2-5 \qquad h^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+2}$

$Df=R=\operatorname{Im} f=Df^{-1}=\operatorname{Im} f^{-1} \qquad Dg=[-5,+\infty)=\operatorname{Im} g^{-1} \qquad Dg^{-1}=R_0^+=\operatorname{Im} g$

$Dh=[0,+\infty)=\operatorname{Im} h^{-1} \qquad Dh^{-1}=[-2,+\infty)=\operatorname{Im} h$

Sucesiones

14) a) Divergente. $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ **b)** Convergente. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

c) Convergente. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ **d)** Divergente $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$.

15) a) ∞ **b)** 12 **c)** ∞

d) Indeterminado **e)** ∞ **f)** Indeterminado

g) ∞ **h)** 0 **i)** ∞

16) a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** -3

e) ∞ **f)** 0 **g)** 2 **h)** ∞

i) ∞ **j)** $\frac{11}{3}$ **k)** ∞ **l)** 0

Series

17) a) $\frac{4}{15}$ **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** $\frac{1}{6}$