

Regelungstechnisches Labor

Regelung eines inversen Pendels

SS 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Versuchsaufbau	3
2.1	Aufbau des Exponats	3
2.2	Kommunikation mittels CAN	4
2.3	Aktorik und Sensorik	5
2.4	Implementierung in Simulink/Matlab	5
3	Modellbildung	7
3.1	Modellgleichungen	7
3.2	Modellparameter	9
4	Reglerentwurf	10
4.1	Zustandsraummodell	10
4.2	Stabilität im Zustandsraum	11
4.3	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	12
4.4	Zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung	13
4.5	Zustandsregler mittels Polplatzierung	15
4.6	Optimaler Zustandsregler	17
4.7	Sliding Mode Regler	19
5	Aufgaben	23
5.1	Vorbereitung	23
5.2	Versuch I	24
5.3	Versuch II	25
6	Literaturverzeichnis	27
A	Lösungen	28

1 Einleitung

Segways sind elektrisch angetriebene Einpersonen-Transportmittel, die sich immer stärkeren Begeisterung erfreuen. Das Besondere an dieser Form des Bewegungsmittels ist, dass ein Segway aus nur zwei Rädern, die sich auf ein und derselben Achse befinden, besteht (siehe Abbildung 1.1). Trotzdem ist durch eine Regelung sichergestellt, dass ein Segway nicht umfallen kann. Wird der Schwerpunkt des Segways durch Vorbeugen nach vorne verlagert, verhindert die Regelung durch Vorwärtsfahren, dass der Segway kippen kann. Durch Gewichtsverlagerung kann der Segway also beschleunigt und abgebremst werden.

Eine einfache Art und Weise das Prinzip eines Segway nachzubilden ist das inverse Pendel, das an einem translatorisch verfahrbaren Schlitten angebracht ist. Ziel ist es nun das Pendel durch gezielte Manipulation der Schlittenbewegung im aufrecht stehenden Zustand zu balancieren. Zu diesem Zweck wird während des Versuchs zunächst ein geeignetes Modell des inversen Pendels aufgestellt und in SIMULINK implementiert. Im Anschluss werden wichtige Parameter anhand von Messwertreihen identifiziert, um das reale Systemverhalten im Modell abbilden zu können. Anhand des aufgestellten Modells erfolgt im weiteren Verlauf der Entwurf und die Implementierung eines Zustandsreglers mittels Polplatzierung bzw. LQR, eines Sliding Mode Reglers und einer Strategie zum Aufschwingen des Pendels. Schwerpunkt liegt dabei auf dem Reglerentwurf im Zustandsraum.



Abbildung 1.1: Handelsüblicher Segway.

2 Versuchsaufbau

2.1 Aufbau des Exponats

Das Inverse Pendel ist in Form eines Pendel-Schlitten-Systems, wie in Abbildung 2.2 dargestellt, realisiert. Die Hauptkomponenten und ihre Interaktion sind in Abbildung 2.1 schematisch illustriert. Die Komponenten des Inversen Pendels sind

- (1) Remote-Rechner mit Matlab/Simulink
- (2) Mikrocontroller
- (3) CAN-bus
- (4) Schrittmotor inkl. Positions- und Drehzahlsteuerung
- (5) Endlagenschalter
- (6) Riemengetriebe
- (7) Schlitten mit Pendel
- (8) Drehwinkelencoder.

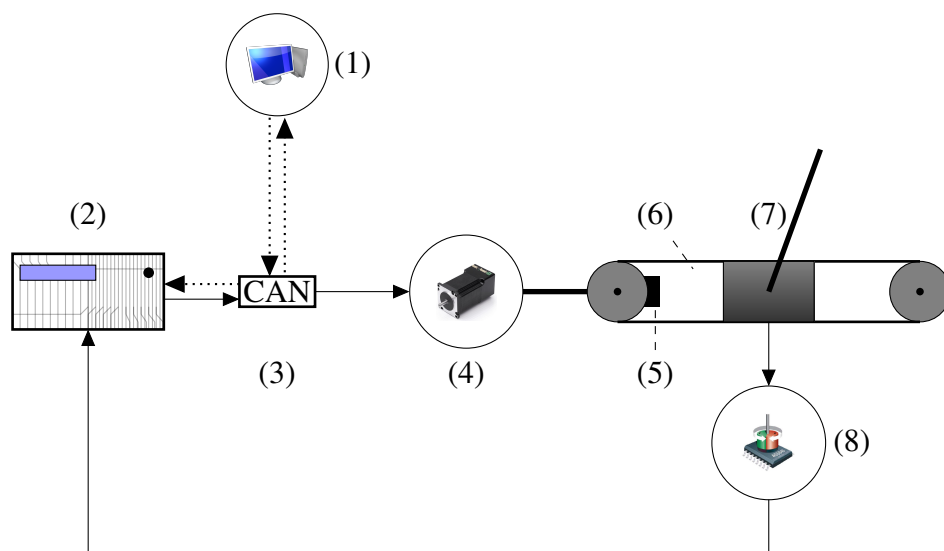


Abbildung 2.1: Schematischer Aufbau des Versuchsaufbaus

Die auf dem Remote-Rechner (1) installierte Software MATLAB/SIMULINK sendet Positions- und Drehzahlvorgaben als Stellsignale über den CAN-Bus (3) zum Mikrocontroller (2). Dieser leitet

das Signal ebenfalls mithilfe des CAN-Busses zum Schrittmotor (4), dem Stellglied, weiter. Der Motor besitzt eine vom Hersteller integrierte Regelung sowohl für die Position als auch für die Drehzahl. Diese nutzt er, um über das Riemengetriebe (6) auf das Pendel-Schlitten-System (7) als Regelstrecke einzuwirken.

Das Pendel-Schlitten-System besteht aus einer aus Aluminium hergestellten Pendelstange, die drehbar auf dem verfahrbaren Schlitten gelagert ist. Sie kann zu Versuchszwecken optional durch einen Aufsatz verlängert werden. Durch den Freiheitsgrad $f = 1$ ist eine rotatorische Pendelbewegung orthogonal zur Bewegungsachse des Schlittens möglich. Letzterer gleitet dagegen translatorisch auf einer Schiene. Da die aktuelle Position, die sich aus dem Drehwinkel des Schrittmotors ergibt, beim Einschalten des Systems unbekannt ist, muss der Schlitten zunächst bis zum Endpositionsschalter (5) bewegt werden.

Der auf dem Schlitten integrierte Drehzahlencodier (8) sendet den kontaktlos-gemessenen Drehwinkel zurück zum Mikrocontroller, der das Signal aufbereitet und mittels CAN-Bus zum Remote-Rechner sendet. Matlab/Simulink vergleicht nun die Soll- und Istwerte und gibt mithilfe des implementierten Regelungsalgorithmus entsprechende Stellsignale an den Mikrocontroller zurück.

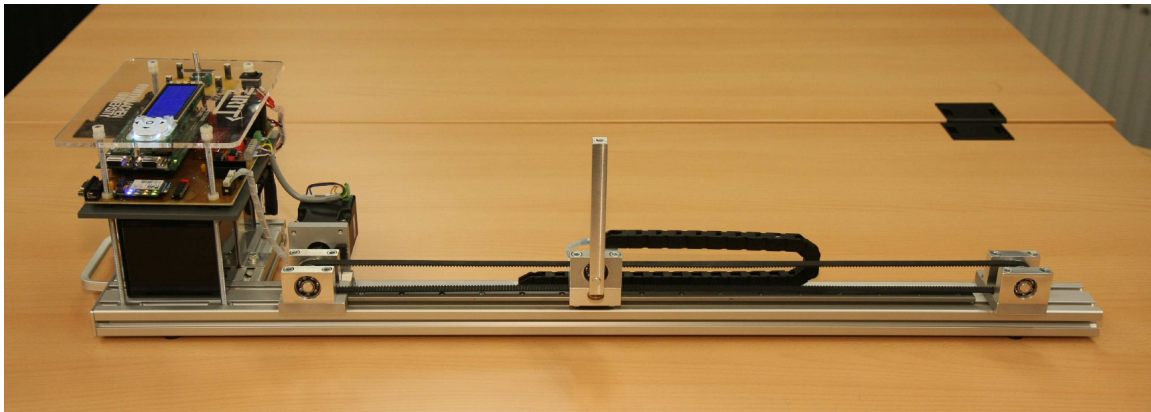


Abbildung 2.2: Versuchsaufbau des inversen Pendels.

2.2 Kommunikation mittels CAN

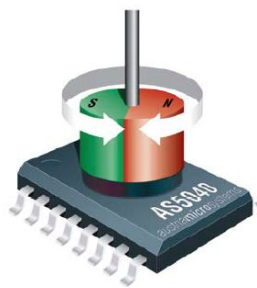
Die gesamte Kommunikation findet mittels CAN-Bus statt. Die CAN-Nachrichten werden durch sogenannte Identifier eindeutig gekennzeichnet und enthalten darüber hinaus Nutzdaten von maximal 8 byte. Die Komposition und Interpretation der Nutzdaten ist in sogenannten Mapping-Einträgen auf allen Netzwerkgeräten redundant gespeichert. Die Signale werden nicht adressiert, sondern an alle an den CAN-Bus angeschlossenen Geräte übermittelt. Diese werten die Informationen beim Empfangen anhand der Mapping-Einträge aus, soweit sie für Sie relevant sind.

Auf diese Weise sendet der Remote-Rechner die gewünschte Drehzahl zum Mikrocontroller, der diese an den Schrittmotor weiterleitet. Analog ist der Ablauf für die Übermittlung der Drehwinkelauslenkung der Pendelstange vom Mikrocontroller zum Remote-Rechner. Eine Ausnahme ist lediglich die Interaktion zwischen Mikrocontroller und Drehwinkelencodier, die durch Pulsweiten-Modulation (PWM) realisiert wird.

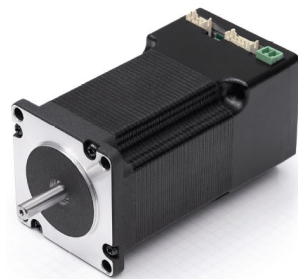
2.3 Aktorik und Sensorik

Wie in Abschnitt 2.1 erläutert, wird die Pendelauslenkung durch einen Drehencoder aufgenommen. Der Magnet-Sensor umfasst Hall-Elemente, die durch ein instationäres Magnetfeld eine kontaktlose Messung mit einer Auflösung von $0,35^\circ$ ermöglichen. Das dynamische Feld wird durch einen einfachen Magneten erzeugt, der im Pendel integriert ist und über dem Encoder rotiert, siehe Abbildung 2.3(a). Die maximal erfassbare Drehzahl beträgt 3010^3 r/min. Als System-on-Chip ist er des Weiteren in der Lage den Winkel als PWM-Signal an den Mikrocontroller zu senden.

Der Mikrocontroller ist zusätzlich zum Empfang des PWM-Signals auch für die Ansteuerung des Schrittmotors zuständig, welcher in Abbildung 2.3(b) gezeigt ist. Anders als bei der direkten Kommunikation des Sensors durch PWM wird hier mithilfe des CAN-Busses kommuniziert. Dies ist durch einen motor-internen DSP Mikroprozessor möglich. Dieser dient ebenfalls der Closed-Loop-Regelung, eine Sinuskommutierung über einen Encoder mit feldorientierter Regelung. Der Encoder erfasst die Rotorlage, die zur Berechnung des Stellsignals in Form der sinusförmigen Phasenströme herangezogen wird. Dadurch kann sowohl die Position mit einer automatischen Fehlerkorrektur von $0,18^\circ$ als auch die Drehzahl intern geregelt werden. Im Allgemeinen verfügt der Motor über einen Schrittwinkel von $1,8^\circ$ mit einer maximalen Schrittauflösung von $0,014^\circ$.



(a) Drehwinkelencoder [1]



(b) Schrittmotor [3]

Abbildung 2.3: Aktoren und Sensoren des Inversen Pendels.

2.4 Implementierung in Simulink/Matlab

Die Reglersynthese und der Reglerentwurf werden mithilfe der Software MATLAB durchgeführt. Um die in MATLAB entworfenen Regler direkt testen zu können, wurde in einem SIMULINK-Modell die Ansteuerung und Kommunikation des Aufbaus implementiert. Das verwendete SIMULINK-Modell ist in Abbildung 2.4 angegeben.

Der grün markierte Block repräsentiert den realen Aufbau. In diesem Block (siehe Abbildung 2.5) ist die Kommunikation über CAN realisiert. Dazu werden zunächst die in SIMULINK berechneten Stellwerte in eine CAN-Nachricht gepackt. Diese Nachricht wird anschließend über den CAN-Bus an den Mikrocontroller des Pendels gesendet und verarbeitet. Darüber hinaus werden die Messwerte des Pendels über den CAN-Bus gesendet, im SIMULINK-Modell empfangen und entpackt. Diese Daten können im SIMULINK-Modell direkt verwendet werden, was eine einfache Implementierung der Regler (siehe oranger Block in Abbildung 2.4) ermöglicht.

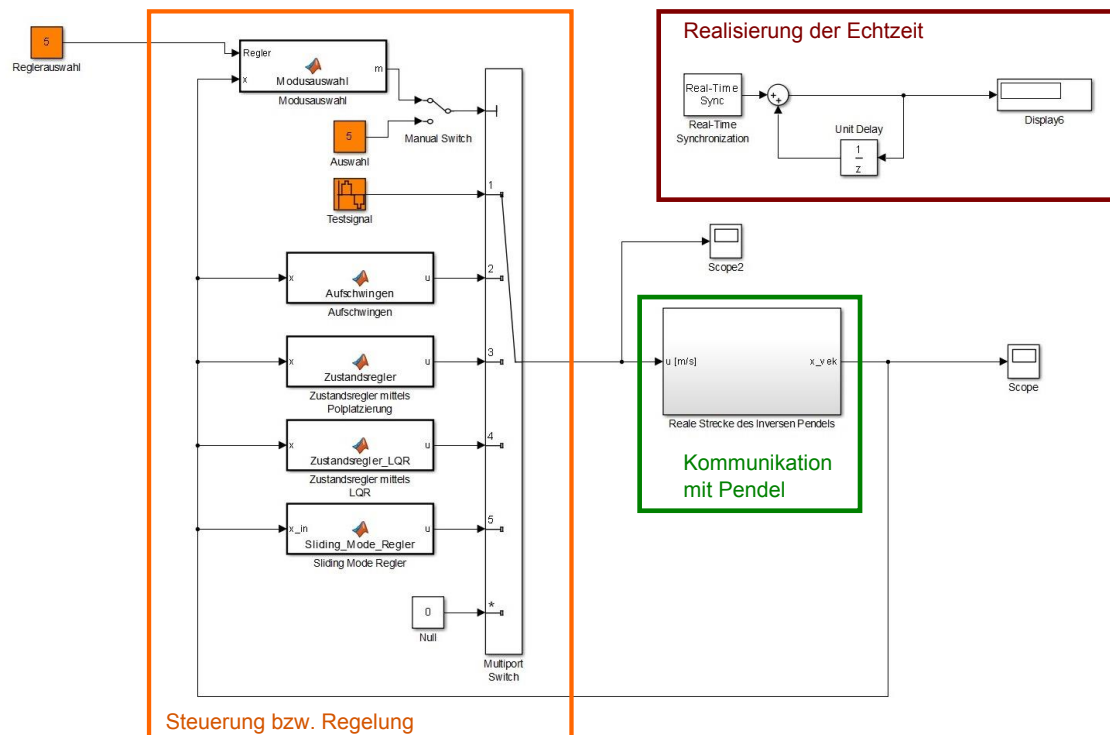


Abbildung 2.4: Simulink-Modell zur Ansteuerung und Regelung des inversen Pendels.

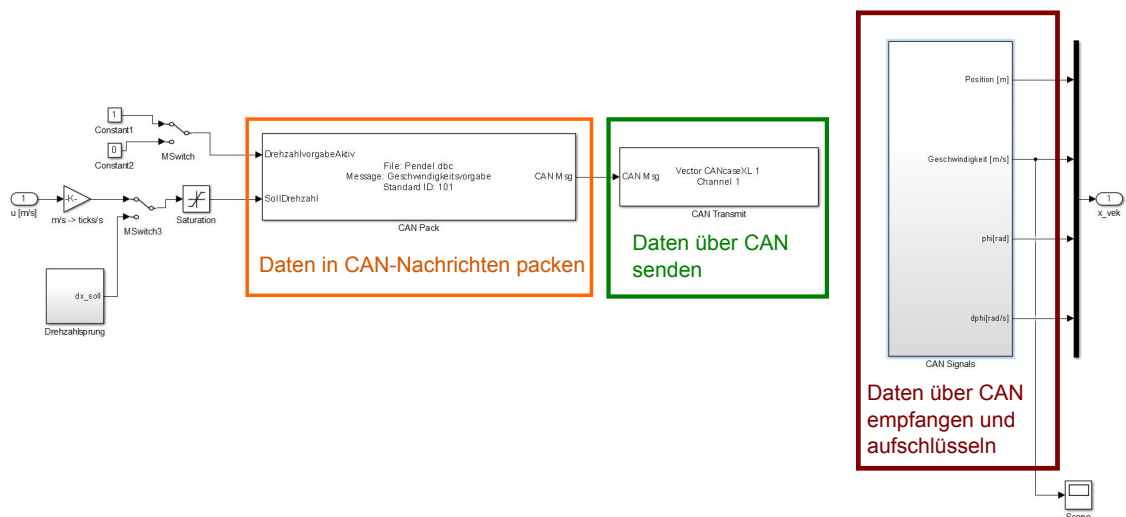


Abbildung 2.5: Block zur Kommunikation mit dem Pendel

3 Modellbildung

3.1 Modellgleichungen

Die Bewegungsgleichungen lassen sich für Mehrkörpersysteme, wie das Inverse Pendel eines ist, sowohl mithilfe der Newton'schen Gesetze und dem Drallsatz als auch mit dem LAGRANGE-Formalismus 2. Art herleiten. Nachfolgend soll der LAGRANGE-Formalismus 2. Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \dots, f) \quad (3.1)$$

mit dem Freiheitsgrad f verwendet werden. In diese Gleichung sind die LAGRANGE-Funktion

$$L = E_{kin} - E_{pot} \quad (3.2)$$

mit der kinetischen Energie E_{kin} und potenziellen Energie E_{pot} sowie die nicht-konservativen Kräfte Q_i des Systems, ausgedrückt durch die generalisierten Koordinaten q_i einzusetzen. Die generalisierten Koordinaten q_i , beschreiben dabei den kinematischen Zustand des Systems vollständig.

Wird von einem Aufbau nach Abbildung 3.1 ausgegangen, kann der kinematische Zustand des Inversen Pendels nur durch die Position x des Wagens und dem Winkel φ des Pendels verändert werden. Somit ist der Systemfreiheitsgrad $f = 2$ und es lassen sich die generalisierten Koordinaten

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T := (x, \varphi)^T \quad (3.3)$$

angeben.

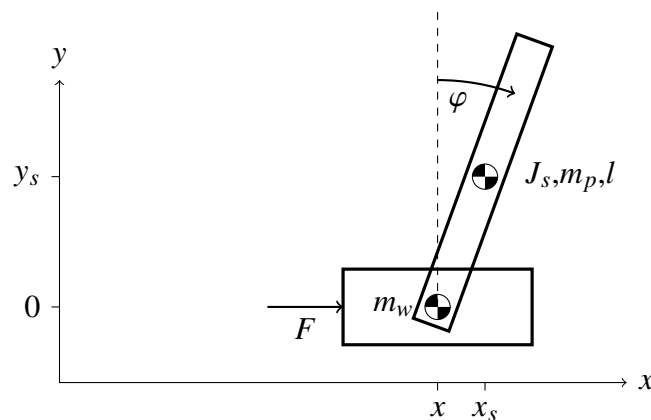


Abbildung 3.1: Schematischer Aufbau des Pendels mit allen wichtigen Systemgrößen.

Zum Aufstellen der LAGRANGE-Funktion (3.2) wird zunächst die kinetische Energie

$$E_{\text{kin,Pendel}} = \frac{m_p}{2} (\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) + \frac{J_s}{2} \dot{\varphi}^2 . \quad (3.4)$$

des Pendelstabs aufgestellt. Dabei gibt m_p die Masse des Pendelstabs, x_s und y_s die Position des Schwerpunktes und J_s das Trägheitsmoment des Pendelstabs um seine Symmetrieachse an. Mit der Position x des Schlittens sowie der Länge l des Pendelstabs berechnet sich die Position

$$x_s = x + \frac{l}{2} \sin(\varphi) \quad (3.5)$$

$$y_s = \frac{l}{2} \cos(\varphi) \quad (3.6)$$

des Pendelschwerpunktes. Für das Trägheitsmoment J_s wird der Pendelstab näherungsweise als ein um seine Querachse rotierender Vollzylinder mit dem Durchmesser d betrachtet, sodass

$$J_s := \frac{1}{12} m_p l^2 + \frac{1}{4} m_p \left(\frac{d}{2} \right)^2 \quad (3.7)$$

gilt. Mit diesen Gleichungen lässt sich die kinetische Energie des Pendelstabes (3.4) zu

$$E_{\text{kin,Pendel}} = \frac{1}{2} m_p \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_p l \dot{x} \dot{\varphi} \cos(\varphi) + \frac{1}{2} m_p \left(\frac{l}{2} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{J_s}{2} \dot{\varphi}^2 \quad (3.8)$$

notieren. Weiterhin lässt sich für den Wagen die kinetische Energie

$$E_{\text{kin,Wagen}} = \frac{1}{2} m_w \dot{x}^2 \quad (3.9)$$

mit der Schlittenmasse m_w angeben. Somit folgt die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} (m_w + m_p) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_p l \dot{x} \dot{\varphi} \cos(\varphi) + \frac{1}{2} m_p \left(\frac{l}{2} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{J_s}{2} \dot{\varphi}^2 \quad (3.10)$$

des gesamten Systems. Für die potenzielle Energie des Systems gilt

$$E_{\text{pot,ges}} = -m_p g \frac{l}{2} (1 - \cos(\varphi)) , \quad (3.11)$$

sodass sich die Lagrange-Funktion (3.2) zu

$$L = \frac{1}{2} (m_w + m_p) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_p l \dot{x} \dot{\varphi} \cos(\varphi) + \frac{1}{2} m_p \left(\frac{l}{2} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{J_s}{2} \dot{\varphi}^2 + m_p g \frac{l}{2} (1 - \cos(\varphi)) \quad (3.12)$$

ergibt. Damit lassen sich zwei LAGRANGE-Gleichungen aus (3.1) berechnen, aus denen sich die Bewegungsgleichungen des Pendels ergeben. Dazu wird die LAGRANGE-Funktion (3.12) jeweils nach x , \dot{x} , φ und $\dot{\varphi}$ abgeleitet. Die rechte Seite der LAGRANGE-Gleichungen (3.1) enthalten eventuell vorhandene nicht-konservative Kräfte Q_i , d. h. hier die vom Motor stammende Kraft F und die Reibungsverluste

$$M_R = \mu_p \dot{\varphi} \quad (3.13)$$

im Lager des Pendelstabs, die vom Lagerreibwert μ_p abhängig sind. Werden Gleichung (3.12) und die nicht-konservativen Kräfte Q_i in (3.1) eingesetzt und die Ableitungen berechnet, folgt

$$(m_w + m_p)\ddot{x} + \frac{1}{2}m_p l (\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)) = F \quad (3.14)$$

$$\underbrace{\left(m_p \left(\frac{l}{2} \right)^2 + J_s \right)}_{=: J_d} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} m_p l \ddot{x} \cos(\varphi) = \frac{m_p g l}{2} \sin(\varphi) - \mu_p \dot{\varphi} \quad (3.15)$$

mit dem Trägheitsmoment

$$J_d = m_p \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \underbrace{\frac{1}{12} m_p l^2 + \frac{1}{4} m_p \left(\frac{d}{2} \right)^2}_{=: J_s} \quad (3.16)$$

des Pendelstabs um die Drehachse. Durch Umformung dieser beiden Gleichungen ergeben sich die nichtlinearen Bewegungsgleichungen für den Wagen:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m_w + m_p} - \frac{1}{2} \frac{m_p l}{m_w + m_p} \cos(\varphi) \cdot \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{m_p l}{m_w + m_p} \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2 \quad (3.17)$$

und das Pendel:

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{m_p g l}{J_d} \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \frac{m_p l}{J_d} \cos(\varphi) \cdot \ddot{x} - \frac{\mu_p}{J_d} \dot{\varphi} \quad (3.18)$$

des Gesamtsystems.

3.2 Modellparameter

Für den realen Aufbau gelten die folgenden Modellparameter:

- Pendelmasse $m_p = 0,0804 \text{ kg}$
- Pendellänge $l_p = 0,147 \text{ m}$
- Trägheitsmoment $J_d = 0,5813 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$
- Reibwert $\mu_p = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ Nms}$
- Schienenlänge $l_s = 0,5 \text{ m}$.

4 Reglerentwurf

4.1 Zustandsraummodell

Der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen von Regelkreisgliedern kann durch einzelne Differenzialgleichungen meist höherer Ordnung beschrieben werden. Eine weitere Möglichkeit ist die Beschreibung des Übertragungsverhaltens mithilfe von Differenzialgleichungssystemen erster Ordnung. Die Variablen, die zusätzlich zu den Eingangs- und Ausgangsgrößen in solchen Differentialgleichungssystemen auftreten, werden als Zustandsvariablen x_i bezeichnet. Das Differenzialgleichungssystem wird so aufgebaut, dass die n Ableitungen \dot{x}_i der Zustandsgrößen x_i als Funktionen dieser Zustandsgrößen und der p Eingangsgrößen u_i ausgedrückt werden. Allgemein lässt sich

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

notieren. Die q Ausgangsgrößen y_i werden als Funktionen der Zustands- und der Eingangsgrößen dargestellt, sodass

$$\begin{aligned}y_1 &= g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \\ &\vdots \\ y_q &= g_q(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t)\end{aligned}\tag{4.2}$$

gilt. Abkürzend werden die Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsgrößen zu Vektoren zusammengefasst und man erhält die allgemeine Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) .\end{aligned}\tag{4.3}$$

Im Falle linearer, zeitinvarianter Systeme vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} ,\end{aligned}\tag{4.4}$$

mit den zeitunabhängigen Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} . Dieses Zustandsraummodell besteht im allgemeinen Fall mit n Zustands-, p Eingangs- und q Ausgangsgrößen aus

- $\dot{\mathbf{x}}$... n -reihiger Vektor der Ableitungen der Zustandsgrößen
- \mathbf{x} ... n -reihiger Vektor der Zustandsgrößen
- \mathbf{u} ... p -reihiger Vektor der Eingangsgrößen
- \mathbf{y} ... q -reihiger Vektor der Ausgangsgrößen
- \mathbf{A} ... $n \times n$ Systemmatrix
- \mathbf{B} ... $n \times p$ Eingangsmatrix
- \mathbf{C} ... $q \times n$ Ausgangsmatrix
- \mathbf{D} ... $q \times p$ Durchgangsmatrix

In Abbildung 4.1 ist der Wirkungsplan des Zustandsraummodells (4.4) angegeben. Darin stellen die Doppellinien Signalpfade mit mehreren Signalen dar, die durch Blöcke mit Mehrfachverknüpfungen und einen Block mit einer entsprechenden Anzahl von Integrierern miteinander verbunden werden. Man erkennt, dass die Systemmatrix **A** als Einzige in einem in sich geschlossenen Wirkungsablauf steht. Aus diesem Grund ist diese allein für Stabilität und die Dämpfungseigenschaften des Übertragungssystems maßgebend.

Bei Systemen mit nur einer Eingangsgröße ($p = 1$) entartet die Eingangsmatrix **B** zu einem Vektor. Entsprechendes gilt für die Ausgangsmatrix **C**, wenn das System nur eine einzige Ausgangsgröße ($q = 1$) aufweist. Für alle nicht sprungfähigen Systeme, wie beispielsweise Verzögerungsglieder, ist die Durchgangsmatrix **D** null.

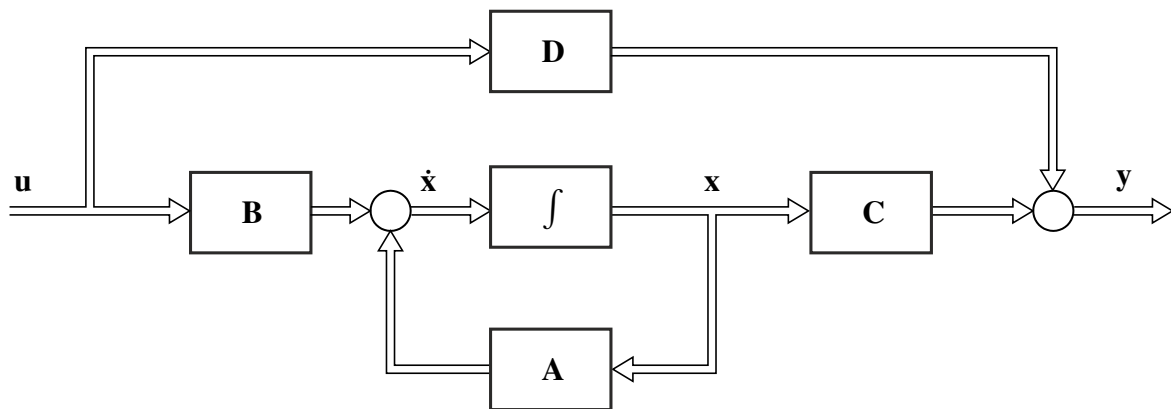


Abbildung 4.1: Übertragungssystem mit Zustandsvariablen.

Die Beschreibung dynamischer Systeme im Zustandsraum ist vorteilhaft beim Lösen zahlreicher Aufgaben in der regelungstechnischen Theorie aber auch in der Anwendungspraxis. Diese Beschreibungsform erlaubt es ohne weiteres, Systeme mit mehreren Eingangs- und Ausgangsgrößen zu beschreiben und zu behandeln und sie ist die Grundlage vieler Verfahren zur digitalen Simulation dynamischer Systeme. Weil es leistungsfähige Software zum Bearbeiten von Matrizen gibt, ist die auf Matrizen aufbauende Beschreibung eine gute Basis für weitere rechnerunterstützte Verfahren zur Analyse dynamischer Übertragungssysteme und zur Synthese von Rückführungen und Regelungen.

4.2 Stabilität im Zustandsraum

Die Pole einer Übertragungsfunktion bestimmen bekanntlich die dynamischen Eigenschaften des Systems, insbesondere seine Stabilität und Dämpfungseigenschaften. Um dies auf ein System (4.4) übertragen zu können wird die (q, p) -Übertragungsfunktionsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C} \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (4.5)$$

mit der Einheitsmatrix **I** untersucht. Die Elemente von **G**(*s*) sind gebrochen rational in *s* und beschreiben das Übertragungsverhalten vom Eingang *i* zum Ausgang *j*. Für die Elemente von

$\mathbf{G}(s)$ gilt

$$G_{ij} = \frac{\det \begin{pmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{b}_j \\ -\mathbf{c}_i & 0 \end{pmatrix}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + d_{ij}, \quad (4.6)$$

sodass die Wurzeln der Gleichung

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (4.7)$$

für das Verhalten des Systems wesentlich sind. Die Determinante ist ein Polynom n -ten Grades in s und entspricht dem charakteristischen Polynom. Die Wurzeln werden auch als Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} bezeichnet. Soll das System (4.4) also stabil sein, müssen die Wurzeln von (4.7) alle in der linken offenen komplexen Halbebene liegen.

Gleichung (4.7) lässt sich am Beispiel eines Eingrößensystems mit der Systemmatrix \mathbf{A} in Jordanscher Normalform besonders gut veranschaulichen. Dazu wird die Systemmatrix der Jordanschen Normalform in Gleichung (4.7) eingesetzt, sodass

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & & & \mathbf{0} \\ & s & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & s - \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & s - \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

resultiert. Daraus folgt mit

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s - \lambda_1) \cdot (s - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (s - \lambda_n) \quad (4.9)$$

das charakteristische Polynom mit den Nullstellen λ_i , anhand derer eine Stabilitätsaussage getroffen werden kann.

4.3 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Ein zeitinvariantes System (4.4) mit p Eingangsgrößen und q Ausgangsgrößen heißt steuerbar, wenn sein Zustand \mathbf{x} durch eine geeignete Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$ in endlicher Zeit aus jedem beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 in den Endzustand \mathbf{x}_{end} überführt werden kann. Dies ist gewährleistet, wenn nach dem Kriterium von Kalman die $(n, n \cdot p)$ -Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{B}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{B}] \quad (4.10)$$

n linear unabhängige Spaltenvektoren hat. Es muss also

$$\text{rang } \mathbf{Q}_S = n \quad (4.11)$$

gelten. Für ein System mit nur einer Eingangsgröße u und einer Ausgangsgröße y vereinfacht sich die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S zu der (n, n) -Matrix

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{b}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{b}]. \quad (4.12)$$

In diesem Fall ist das System genau dann steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S regulär ist, also

$$\det \mathbf{Q}_S \neq 0 \quad (4.13)$$

gilt.

Beobachtbar heißt das System (4.4), wenn man bei bekannter Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$ aus der Messung von $\mathbf{y}(t)$ über ein endliches Zeitintervall den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ eindeutig bestimmen kann. Für beobachtbare Systeme kann man sog. Zustandsbeobachter konstruieren, die aus den Steuer- und den Ausgangsgrößen Schätzwerte der Zustandsgrößen bilden.

Das System (4.4) ist genau dann beobachtbar, wenn die $(n \times n)$ -Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

n linear unabhängige Zeilenvektoren besitzt, also

$$\text{rang } \mathbf{Q}_B = n \quad (4.15)$$

gilt. Für ein System mit nur einer Eingangsgröße u und einer Ausgangsgröße y vereinfacht sich die Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_B zu der (n, n) -Matrix

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Das System ist genau dann beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_B regulär ist, also

$$\det \mathbf{Q}_B \neq 0 \quad (4.17)$$

gilt.

4.4 Zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung

Analog zur Übertragung einer zeitkontinuierlichen Differentialgleichung in die Form einer zeitdiskreten Differenzengleichung, lässt sich eine zeitkontinuierliche Zustandsraumbeschreibung in eine zeitdiskrete Zustandsraumbeschreibung überführen. Die zeitdiskrete Form der Zustandsraumdarstellung wird vor allem bei der Abtastregelung kontinuierlicher Regelstrecken und zur digitalen Simulation kontinuierlicher Systeme eingesetzt. Ausgehend von der Lösung

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \cdot \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad t > t_0 \quad (4.18)$$

einer kontinuierlichen Zustandsdifferentialgleichung (4.4) lässt sich der Zustandsvektor \mathbf{x} zu den Abtastzeitpunkten berechnen. Dazu werden die Integrationsgrenzen zu $t = (k+1)T$ und $t_0 = kT$ mit der Abtastzeit T angenommen, sodass sich

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T} \cdot \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (4.19)$$

notieren lässt. Mit der Substitution $\theta = \tau - kT$ vereinfacht sich der Integralausdruck, und es folgt

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T} \cdot \mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}T} \int_0^T e^{-\mathbf{A}\theta} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(kT + \theta) d\theta . \quad (4.20)$$

Um das Integral berechnen zu können, muss der zeitliche Verlauf von $\mathbf{u}(t)$ bekannt sein. Es ist nahe liegend $\mathbf{u}(t)$ während eines Abtastschrittes als konstant anzusetzen, was bei Abtastsystemen häufig der Fall ist. Diese Annahme entspricht einem Halteglied 0. Ordnung im Wirkungsweg von \mathbf{u} und lässt sich formulieren als

$$\mathbf{u}(kT + \theta) = \mathbf{u}(kT) \quad \text{für} \quad 0 \leq \theta < T . \quad (4.21)$$

Damit kann das Integral berechnet werden und es folgt aus Gleichung (4.20):

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \underbrace{e^{\mathbf{A}T}}_{=: \mathbf{A}_D} \cdot \mathbf{x}(kT) + \underbrace{e^{\mathbf{A}T} \cdot (\mathbf{I} - e^{-\mathbf{A}T}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}}_{=: \mathbf{B}_D} \cdot \mathbf{u}(kT) . \quad (4.22)$$

Eine andere gebräuchliche Schreibweise ist

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_D \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_D \cdot \mathbf{u}_k \quad (4.23)$$

mit den von der Abtastzeit T abhängigen Matrizen der zeitdiskreten Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_D &= e^{\mathbf{A}T} \\ \mathbf{B}_D &= (e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Da die Ausgangsgleichung keine zeitabhängige Dynamik enthält, lässt sich die zeitdiskrete Ausgangsgleichung direkt aus der zeitkontinuierlichen Form ableiten zu

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_D \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_D \cdot \mathbf{u}_k \quad (4.25)$$

mit den Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_D &= \mathbf{C} \\ \mathbf{D}_D &= \mathbf{D} . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Die zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung ermöglicht durch ihre einfache Form eine rekursive Berechnung der Zustandsgrößen und Ausgangsgrößen für einen vorgegebenen Verlauf der Eingangsgrößen. In Abbildung 4.2 ist die zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung als Wirkungsplan dargestellt. Anstelle der Integration tritt hier die Multiplikation mit der komplexen Variable z^{-1} , die eine Verschiebung des Zustandsvektors um einen Abtastschritt verursacht.

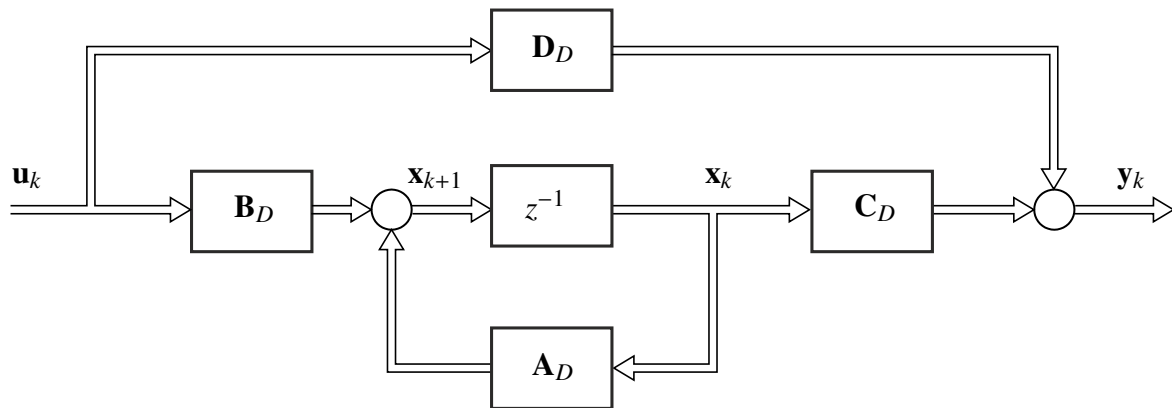


Abbildung 4.2: Wirkungsplan der zeitdiskreten Zustandsraumdarstellung.

4.5 Zustandsregler mittels Polplatzierung

Die charakterisierenden Eigenwerte eines Systems kann man beeinflussen, indem man durch eine proportional wirkende Rückführung den Eingangsgrößenvektor \mathbf{u} mit dem Zustandsgrößenvektor \mathbf{x} verbindet (siehe Abbildung 4.3). Die Übertragungsfaktoren dieser Verbindung sind in der $(p \times n)$ -Matrix \mathbf{K} zusammengefasst, die als (Zustands-)Reglermatrix bezeichnet wird. Das System wird also durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}\end{aligned}\tag{4.27}$$

beschrieben. Setzt man diese Beziehungen ineinander ein, folgt

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}) \cdot \mathbf{x}\tag{4.28}$$

als ein System ohne Eingangsgrößen mit der Systemmatrix

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} .\tag{4.29}$$

Eine Möglichkeit des Reglerentwurfs besteht nun darin, die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A}_K vorzugeben und damit aus den bekannten Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} die Regler- bzw. Rückführmatrix \mathbf{K} zu bestimmen. Als Beispiel soll für ein Übertragungssystem mit einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße eine Zustandsrückführung nach dem erwähnten Verfahren der Polvorgabe bestimmt werden. Abbildung 4.4 zeigt den dazugehörigen Wirkungsplan. Das Übertragungssystem sei in Regelungsnormform gegeben, sodass sich die Systemmatrix

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{A} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0-k_1 & -a_1-k_2 & -a_2-k_3 & \cdots & -a_{n-1}-k_n \end{bmatrix}\tag{4.30}$$

des Übertragungssystems mit Rückführung angeben lässt. Die resultierende Systemmatrix \mathbf{A}_K ist ebenfalls in Regelungsnormform, sodass die Koeffizienten des charakteristischen Poly-

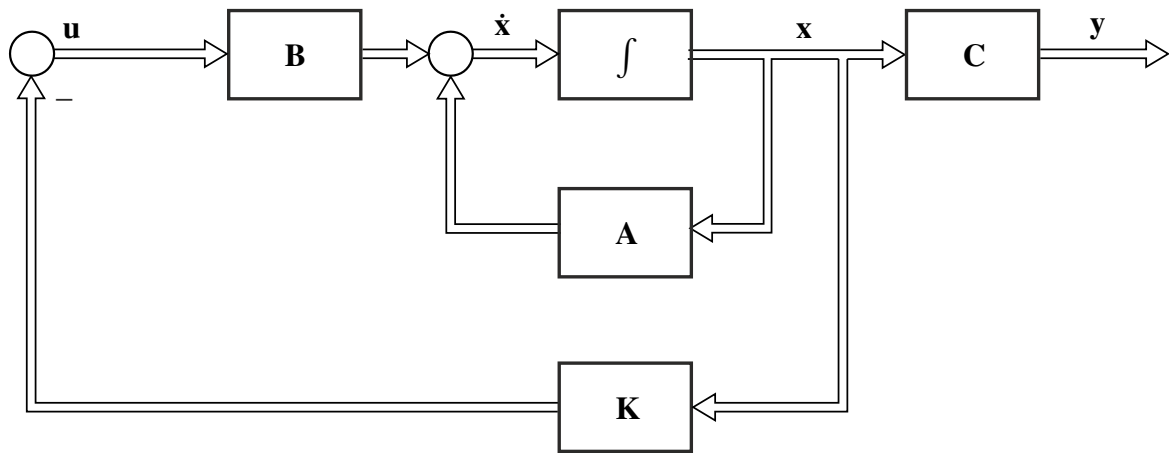


Abbildung 4.3: Zustandsraummodell mit Zustandsrückführung.

noms direkt aus der letzten Zeile der Systemmatrix \mathbf{A}_K abgelesen werden können. Das charakteristische Polynom lautet

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_K) = s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + \dots + (a_0 + k_1). \quad (4.31)$$

Wenn die Polstellen s_1, \dots, s_n vorgegeben sind, muss für das charakteristische Polynom

$$(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdots (s - s_n) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_0 \quad (4.32)$$

gelten. Mit den so bestimmten Koeffizienten p_i ergibt sich durch Koeffizientenvergleich der Rückführvektor

$$\mathbf{k}^T = [p_0 - a_0, p_1 - a_1, \dots, p_{n-1} - a_{n-1}]. \quad (4.33)$$

Der Übertragungsfaktor S des Vorfilters wird oft aus der Forderung bestimmt, dass im eingeschwungenen Zustand $y = w$ ist. Im eingeschwungenen Zustand gilt

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_K \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot S \cdot w = \mathbf{0} \quad (4.34)$$

woraus

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}_K^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot S \cdot w \quad (4.35)$$

folgt. Für die Ausgangsgröße gilt

$$y = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{A}_K^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot S \cdot w = w, \quad (4.36)$$

sodass sich der Vorfilter mit

$$S = -(\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{A}_K^{-1} \cdot \mathbf{b})^{-1} \quad (4.37)$$

berechnen lässt.

Abschließend sei noch erwähnt, dass sich dieses Vorgehen in einfacher Weise auf die zeitdiskrete Form der Zustandsraumdarstellung übertragen lässt. Bei der Reglerauslegung mithilfe der Polvorgabe ergibt sich die Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises zu

$$\mathbf{A}_{DK} = \mathbf{A}_D - \mathbf{B}_D \cdot \mathbf{K}_D. \quad (4.38)$$

Die Pole des geschlossenen Regelkreises können nun in der z -Ebene durch entsprechendes Belegen der Rückführmatrix \mathbf{K}_D vorgegeben werden.

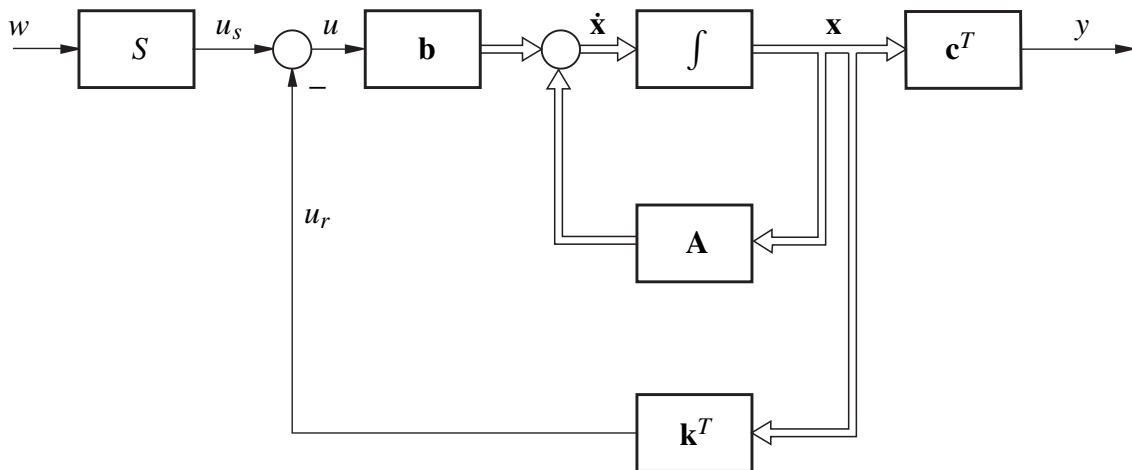


Abbildung 4.4: Zustandsregelung mit Vorfilter S für ein SISO-System.

4.6 Optimaler Zustandsregler

Eine andere Möglichkeit des Reglerentwurfs im Zustandsraum ist die optimale Zustandsregelung. Dabei wird das Regelkreisverhalten im Sinne eines Gütekriteriums optimiert. Ausgangspunkt ist die lineare zeitinvariante Zustandsraumbeschreibung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}\end{aligned}\tag{4.39}$$

mit mehreren Eingangs-, Ausgangsgrößen und der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$. Das System ist nicht sprungfähig ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$). Alle Zustände seien messbar und können deshalb mit einer vollständigen Zustandsrückführung

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}\tag{4.40}$$

auf die Eingänge \mathbf{u} zurückgeführt werden.

Ziel der Regelung ist es, die Systemzustände in geeigneter Weise auf den Eingang zurückzuführen, sodass ein selbstgewähltes positives Gütemaß minimiert wird. Für die Reglerauslegung geht man davon aus, dass der Regler in der Lage sein soll, das System aus jedem beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 in den Nullzustand (alle $x_i = 0$) zurückzuführen. Je schneller und mit je weniger Stellenergie dieses Ziel erreicht werden kann, desto besser ist die Regelung. Deshalb wird als Gütemaß, häufig auch Kostenfunktion genannt, meistens ein Zeitintegral der quadrierten Verläufe der Zustandsgrößen \mathbf{x} und der Eingangsgrößen \mathbf{u} verwendet:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}) dt.\tag{4.41}$$

Die allgemeine Form der skalaren Kostenfunktion J enthält die symmetrischen Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} . Die Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} müssen so gewählt werden, dass beide

Terme immer positiv werden, damit auch die Kosten positiv bleiben. Solche Matrizen, für die der quadratische Term mit jedem beliebigen Vektor \mathbf{x} immer positiv ist, (z. B. $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$) heißen positiv definit. Häufig sind \mathbf{Q} und \mathbf{R} nur auf der Hauptdiagonalen mit positiven Werten besetzt, so dass lediglich die gewichteten Quadrate der x_i und der u_i übrig bleiben. Dann bewertet der erste Term von J die gewichteten Flächen unter den quadrierten Zustandsgrößen und bietet damit ein Maß für die Abweichung der Zustandsgrößen vom Arbeitspunkt. Der zweite Term enthält ein Maß für die Stellenergien der einzelnen Eingänge. Gesucht ist nun diejenige Funktion $\mathbf{u}_{\text{opt}}(t)$, aus der Menge aller möglichen Funktionen $\mathbf{u}(t)$, die diese Kostenfunktion J minimiert. Hierzu muss J nach \mathbf{u} abgeleitet und zu null gesetzt werden, unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Zustandsdifferentialgleichung. Es lässt sich zeigen, dass die minimale Kostenfunktion

$$J_{\text{opt}} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}_{\text{opt}}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}_{\text{opt}}) dt = \mathbf{x}_0^T \cdot \mathbf{P}_{\text{opt}} \cdot \mathbf{x}_0 \quad (4.42)$$

mit einer konstanten Matrix \mathbf{P}_{opt} und der Anfangsbedingung \mathbf{x}_0 berechnet werden kann. Die noch unbestimmte Matrix \mathbf{P}_{opt} ist die Lösung der sogenannten stationären Riccati-Gleichung

$$\mathbf{0} = -\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{P} - \mathbf{Q}, \quad (4.43)$$

die bei dem Minimierungsproblem entsteht. Die Matrix \mathbf{P}_{opt} muss numerisch ermittelt werden, da keine geschlossene Lösung existiert. Dies braucht jedoch nur einmal bei jeder Reglerauslegung zu geschehen. Für die Berechnung der Riccati-Gleichung gibt es eine Reihe von numerischen Lösungsverfahren, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll. Die stationäre Riccati-Gleichung ist unabhängig von der gewählten Anfangsbedingung \mathbf{x}_0 . Die tatsächlich auftretenden Kosten sind dagegen abhängig von den Anfangsbedingungen, haben aber eine untergeordnete Bedeutung für die Regelung und müssen meist nicht explizit berechnet werden. Mithilfe der Lösung der Riccati-Gleichung \mathbf{P}_{opt} kann aber das optimale Stellgesetz direkt angegeben werden mit

$$\mathbf{u}_{\text{opt}} = -\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{P}_{\text{opt}} \cdot \mathbf{x} \quad (4.44)$$

und die Rückführmatrix lässt sich direkt angeben als

$$\mathbf{K}_{\text{opt}} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{P}_{\text{opt}}. \quad (4.45)$$

Der durch \mathbf{K}_{opt} eindeutig beschriebene Zustandsregler wird dieses lineare System optimal in Bezug auf die gewählte Kostenfunktion J regeln. Es bleibt die Wahl der Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} . Von besonderem Interesse ist dabei das Verhältnis der beiden Terme unter dem Integral zueinander. Wird die Abweichung der Zustandsgrößen vom Arbeitspunkt stark gewichtet, so erhält man eine schnelle Regelung mit großen Stellauschlägen. Wird dagegen der zweite Term, der als Maß für die Stellenergie gilt, höher bewertet, so wird es länger dauern bis Störungen ausgeglichen sind, dafür wird aber auch weniger Stellaufwand nötig sein. Die Stabilität eines derartig ausgelegten Reglers ist theoretisch garantiert. Hiermit ist aber noch keine Aussage über die praktische Brauchbarkeit der Regelung verbunden.

Das Verfahren der Reglerauslegung mit quadratischer Gütefunktion führt zu der gleichen Regelkreisstruktur, der vollständigen Zustandsrückführung, wie das zuvor behandelte Verfahren mit Polvorgabe. Deshalb ist jeder so entworfene Zustandsregler auch mit dem Polvorgabeverfahren

synthetisierbar. Die Unterschiede liegen in der Form, in der die gewünschten Systemeigenschaften angegeben werden. Bei der Polvorgabe können direkt Parameter des Zeitverhaltens, wie Abklingkonstante oder Dämpfungsgrad einzelner Pole oder Polpaare vorgewählt werden, jedoch ist der Einfluss der Nullstellen nur schwierig vorherzusagen. Dagegen kann mit einer Gütefunktion der gesamte Einschwingvorgang gezielt bewertet werden. Praktisch ist man bei der Wahl der Gewichtungsmatrizen, wie bei der Wahl der Pole, auf Erfahrungen und auf Simulationen angewiesen.

4.7 Sliding Mode Regler

Der *Sliding Mode Regler* ist eine Regelungsmethode, die sowohl für nichtlineare Regelungssysteme als auch lineare Systeme mit Modellunsicherheiten angewendet werden kann. Im Folgenden wird das Verfahren lediglich für Systeme mit einer Stellgröße u beschrieben. Das Prinzip des *Sliding Mode Reglers* lässt sich aber auch auf Systeme mit mehreren Eingangsgrößen übertragen (siehe [2]).

Es wird davon ausgegangen, dass die Strecke in der allgemeinen nichtlinearen eingangs-affinen Form

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \cdot u ,\end{aligned}\tag{4.46}$$

mit dem Systemgrad n gegeben ist. Das System besteht somit aus $(n - 1)$ Integratoren und der Systemdynamik, die in der letzten Zustandsgleichung angegeben ist. Im Falle von Modellunsicherheiten ergeben sich die Terme $f(\mathbf{x})$ und $g(\mathbf{x})$ zu

$$f(\mathbf{x}) = \bar{f} + \Delta f \quad \text{mit } |\Delta f| \leq \alpha \tag{4.47}$$

$$g(\mathbf{x}) = \bar{g} \cdot \Delta g \quad \text{mit } \beta_{\min} \leq |\Delta g| \leq \beta_{\max} , \tag{4.48}$$

wobei mit \bar{f} und \bar{g} die Mittelwerte der mit Unsicherheiten behafteten Systemparameter angegeben sind. Ziel der nun betrachteten Regelung ist es, die Regelabweichung mit einer vorgegebenen Fehlerdynamik trotz Nichtlinearität der Strecke bzw. Modellunsicherheiten zu eliminieren. Zu diesem Zweck wird beim *Sliding Mode Regler* ein schaltendes Regelgesetz, beispielsweise

$$u = \begin{cases} -x & \text{für } s(x) > 0 \\ +x & \text{für } s(x) < 0 \end{cases} \tag{4.49}$$

aufgestellt. Durch das Schaltgesetz ergibt sich eine Gleitfläche s im Phasenraum (siehe Abbildung 4.5). Das Regelgesetz sorgt nun dafür, dass sich das System aus einem beliebigen Anfangszustand in Richtung der Gleitfläche strebt ($s \rightarrow 0$). Nach Erreichen der Gleitfläche sorgt das Stellgesetz dafür, dass das System die Gleitfläche nicht mehr verlässt und gegen die Ruhelage strebt.

Für den Reglerentwurf ist nun von Bedeutung, ob der *Sliding Mode Regler* zur Überführung des Systems in eine Ruhelage \mathbf{x}_0 oder zur Folgeregelung einer vorgegebenen Trajektorie \mathbf{x}_t dienen

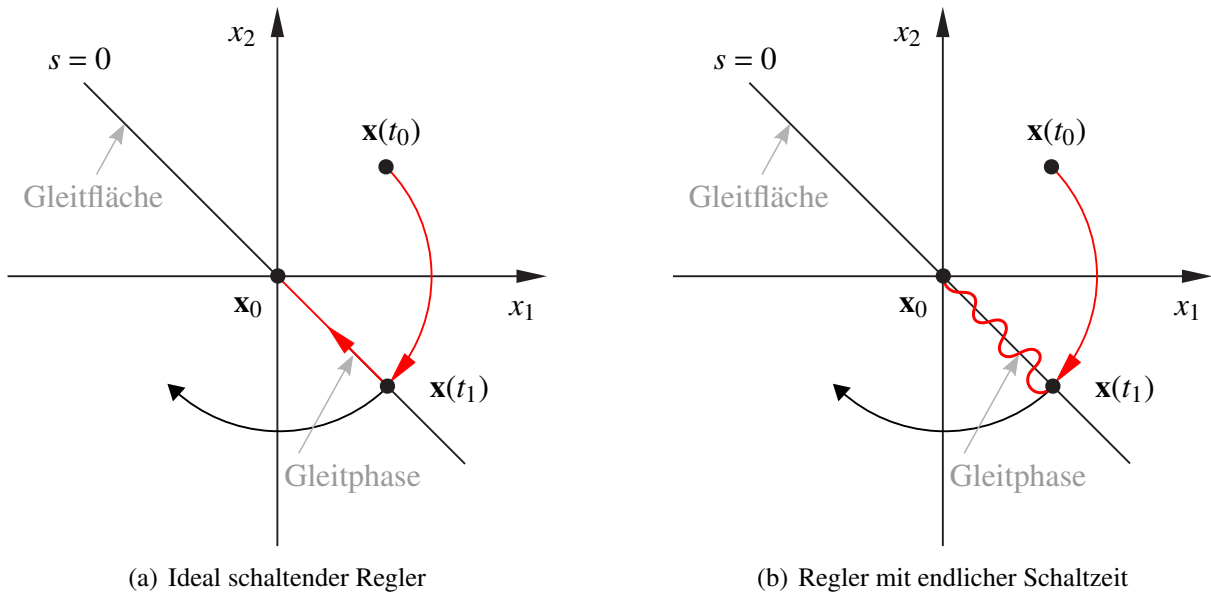


Abbildung 4.5: Verlauf der Systemzustände \mathbf{x} unter Verwendung eines ideal schaltenden Reglers und eines Reglers mit endlicher Schaltzeit für den Fall eines Systems mit der Ordnung $n = 2$. Zum Zeitpunkt t_0 befindet sich das System in dem Anfangszustand $\mathbf{x}(t_0)$. Das Regelgesetz $u(\mathbf{x}, \eta, \lambda)$ sorgt dafür, dass sich das System in Richtung Gleitfläche s bewegt. Nach Erreichen der Gleitfläche ($t = t_1$) sorgt Bedingung (4.52) dafür, dass die Zustände gegen die Ruhelage \mathbf{x}_0 streben, während das Regelgesetz $u(\mathbf{x}, \eta, \lambda)$ sicherstellt, dass $s = 0$ gilt.

soll. In letzteren Fall erfolgt der Reglerentwurf anhand der Regelabweichung

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n]^T = \mathbf{x} - \mathbf{x}_t, \quad (4.50)$$

sodass im Folgenden mit der Regelabweichung $\tilde{\mathbf{x}}$ zu rechnen wäre. An dieser Stelle wird jedoch der Fall betrachtet, dass das System in die Ruhelage $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ überführt werden soll. Somit gilt

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}, \quad (4.51)$$

sodass mit den Zuständen \mathbf{x} weiter gerechnet wird. Für den Reglerentwurf muss nun zunächst die Gleitfläche

$$s(\mathbf{x}, t) = x_1 \cdot \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{(n-1)} = 0 \quad (4.52)$$

in Abhängigkeit des Systemgrades n definiert werden. Um sicherzustellen, dass die Gleitfläche eine global asymptotische Ruhelage hat, also die Gleitfläche das System in seine Ruhelage \mathbf{x}_0 überführen kann, muss die Gleitbedingung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = s \cdot \dot{s}(\mathbf{x}, u, \lambda) \leq -\eta |s| < 0 \quad \text{mit } \eta > 0, \forall s \neq 0 \quad (4.53)$$

erfüllt sein. Dies lässt sich mit der direkten Methode von Ljapunov beweisen. An dieser Stelle wird jedoch auf einen Beweis verzichtet und auf einschlägige Literatur verwiesen.

Auflösen der Gleitbedingung (4.53) und Umstellen nach der Stellgröße u führt auf das Regelgesetz $u(x, \eta, \lambda)$. Mithilfe des Reglerparameters λ wird die Orientierung der Gleitfläche und mit dem Parameter η die Dynamik der Regelung eingestellt.

In Abbildung 4.6 (a) ist die Dynamik bei Verwendung eines ideal schaltenden Reglers angegeben. Geht man zu einem realen Regler mit endlicher Schaltzeit über, erhält man während der Gleitphase ein Hin- und Herschalten des Reglers, das häufig als *Klappern* bzw. *Chatter* bezeichnet wird. Ursache ist der nicht stetige Anteil (sign-Funktion) des Regelgesetzes $u(x, \eta, \lambda)$, der aus der Gleitbedingung (4.53) folgt. In Folge dessen entsteht ein Schwingen um die Gleitfläche s (siehe Abbildung 4.5 (b)). Der Effekt des Klapperns lässt sich verringern und somit die Stellgröße glätten, indem der nicht stetige sign-Term durch eine stetige Funktionen angenähert wird. Dies kann z. B. mit einer Begrenzung (siehe Abbildung 4.6) getan werden. Damit definiert man einen Schlauch ϕ um die Gleitfläche $s = 0$, in dem der Regeleingriff proportional zur Abweichung ist. Außerhalb des Schlauches ϕ gilt die bisher betrachtete Stabilitätsuntersuchung. Zwar wird dadurch der Stellverlauf geglättet, jedoch verschlechtert sich das Stellverhalten durch Auftreten einer bleibende Regelabweichung innerhalb des Schlauches. Insofern muss eine Abwägung zwischen hochfrequenten Regeleingriffen und bleibender Regelabweichung getroffen werden. In jedem Fall lässt sich aber eine Stabilisierung trotz Modellunsicherheiten oder nichtlinearer Strecke erreichen. Für eine weitere Betrachtung zur Annäherung des schaltenden Reglers durch stetige Funktionen wird auf [2] verwiesen.

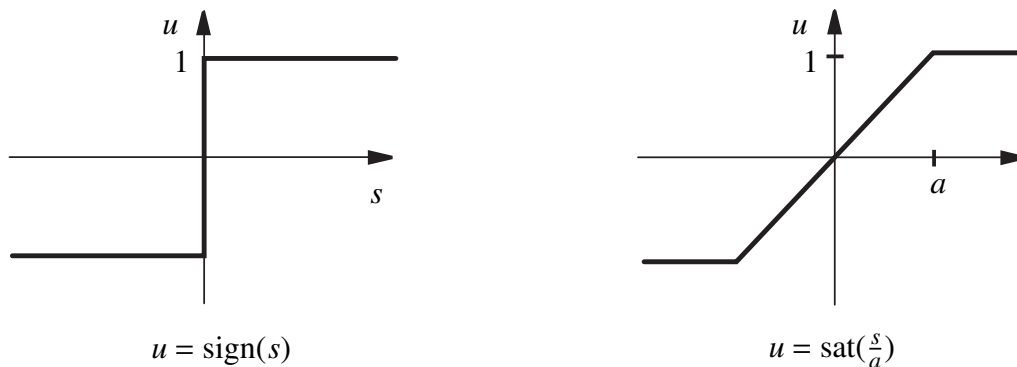


Abbildung 4.6: Beschreibung der Stellgröße u durch eine Signum-Funktion (links) bzw. eine Begrenzung (rechts).

Beispiel

Der beschriebene Entwurf eines *Sliding Mode Reglers* soll nun exemplarisch für das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u\end{aligned}\tag{4.54}$$

durchgeführt werden, um dieses System aus jeden beliebigen Anfangszustand in die Ruhelage

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0)^T\tag{4.55}$$

zu überführen. Der Reglerentwurf kann folglich mit den Zustandsgrößen \mathbf{x} durchgeführt werden. Außerdem gilt der Systemfreiheitsgrad $n = 2$, sodass die Gleitfläche (4.52) mit

$$s(\mathbf{x}, t) = x_1 \cdot \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) = \dot{x}_1 + \lambda x_1 = x_2 + \lambda x_1 = 0 \quad (4.56)$$

angegeben werden kann. Ableiten dieser Gleichung führt auf

$$\dot{s}(\mathbf{x}, t) = \dot{x}_2 + \lambda \dot{x}_1 = x_1 + u + \lambda x_2 \quad (4.57)$$

und Einsetzen in die Gleitbedingung (4.53) auf

$$s(x_1 + u + \lambda x_2) \leq -\eta |s| . \quad (4.58)$$

Durch Kürzen von s lässt sich

$$x_1 + u + \lambda x_2 \begin{cases} \leq -\eta & \text{für } s > 0 \\ \geq +\eta & \text{für } s < 0 \end{cases} \quad (4.59)$$

notieren, sodass sich nach Auflösen nach der Stellgröße das Regelgesetz

$$\begin{aligned} u &= -x_1 - \lambda x_2 - \eta \cdot \text{sign}(s) \\ &= -x_1 - \lambda x_2 - \eta \cdot \text{sign}(x_2 + \lambda x_1) \end{aligned} \quad (4.60)$$

angeben lässt.

5 Aufgaben

5.1 Vorbereitung

Aufgabe 1

Im Folgenden soll als Stellsignal nicht, wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, die Kraft F betrachtet werden, sondern die Geschwindigkeit v_{soll} . Zu diesem Zweck wird der Wagen mit PT1-Verhalten

$$G_{Wagen}(s) := \frac{V(s)}{V_{soll}(s)} = \frac{K}{1 + sT_1}, \quad (5.1)$$

mit $v = \dot{x}$ modelliert. Passen Sie die Modellgleichungen (3.17), (3.18) dementsprechend an.

Hinweis: Aus Übertragungsfunktion (5.1) lässt sich eine lineare Differenzialgleichung aufstellen, die die Modellgleichung (3.17) ersetzt.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Systemgrößen $\ddot{x}, \dot{x}, x, \ddot{\varphi}, \dot{\varphi}, \varphi, v_{soll}$ für die obere Ruhelage des Pendels. Linearisieren Sie anschließend das nichtlineare Modell aus Aufgabe 1 um diese Ruhelage und überführen Sie das System in die lineare zeitinvariante Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (5.2)$$

für den Fall, dass die Wagenposition x und der Winkel φ als Ausgangsgröße aufgefasst werden.

Aufgabe 3

Überlegen Sie sich zunächst, ob das System aus Aufgabe 2 stabil, steuerbar und beobachtbar ist. Untersuchen Sie anschließend das linearisierte Zustandsraummodell aus Aufgabe 2 analytisch hinsichtlich Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit. Entsprechen die Ergebnisse Ihren anfänglichen Überlegungen?

Aufgabe 4

Entwerfen Sie eine Zustandsregelung für das System aus Aufgabe 2 derart, dass der geschlossene Regelkreis die Pole

$$s_1 = -2 \quad s_2 = -10 \quad s_{3,4} = -5 \pm j6,5$$

aufweist. Nehmen Sie an, dass für das Übertragungsverhalten des Wagens

$$K = 1 \quad T_1 = 0.02 \text{ s}$$

gilt.

5.2 Versuch I

Aufgabe 5

Setzen Sie die Modellgleichungen aus Aufgabe 1 in einem Simulink-Modell um. Verwenden Sie dazu die Vorlage *Aufgabe_5_Vorlage.mdl*. Erweitern Sie das Modell um die realen Systembegrenzungen

- Schienenlänge,
- maximale Geschwindigkeit $v_{max} = \pm 0,73 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ des Wagens.

Der Nullpunkt der Wagenposition befindet sich in der Mitte der Schiene. Prüfen Sie anschließend Ihr Modell auf Richtigkeit, indem Sie wie folgt vorgehen:

- Verwenden Sie für das Übertragungsverhalten des Wagens: $K = 1$, $T_1 = 0.02 \text{ s}$.
- Sie sollten nur Änderungen innerhalb des Blockes *Inverses Pendel* vorgenommen haben.
- Stellen Sie sicher, dass Sie die Anfangsbedingungen $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, $\varphi = \pi$, $\dot{\varphi} = 0$ gewählt haben.
- Klicken Sie doppelt auf den Block *Auswahl* und wählen Sie den Eintrag *Mit Lösung vergleichen*. Bestätigen Sie anschließend Ihre Eingabe.
- Starten Sie die Simulation. Nach Beenden der Simulation wird Ihnen das Ergebnis ausgegeben.

Aufgabe 6

Identifizieren Sie die Parameter K und T_1 des Pendelwagens mithilfe der *System Identification Toolbox* für die folgenden Fälle:

1. ohne Berücksichtigung einer Totzeit ($T_t \equiv 0$),
2. unter Berücksichtigung einer Totzeit T_t . Wie groß ist die Totzeit T_t ?

Nutzen Sie dazu die Vorlage *Aufgabe_6_Vorlage.m*, in der das *System Identification Tool* gestartet wird. Übertragen Sie anschließend die Werte K und T_1 für den Fall $T_t \equiv 0$ in Ihr Simulink-Modell.

Hinweis: Zum Einlesen der Messdaten des Sprungversuchs wählen Sie zunächst unter *Import data* den Punkt *Time domain data...* In der Eingabemaske müssen nun die Eingangsverläufe u und die Ausgangsverläufe y sowie unter *Data Information* die Startzeit und die Abtastzeit $T_s = 0,005 \text{ s}$ angegeben werden. Anschließend kann über das Auswahlménü *Estimate* \rightarrow der Punkt *Transfer Function Models...* ausgewählt werden, um eine Übertragungsfunktion zu schätzen.

Aufgabe 7

Linearisieren Sie die Modellgleichungen aus Aufgabe 1 mit dem Matlab-Befehl `linmod`. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der analytischen Linearisierung (siehe Aufgabe 2).

Hinweis: Zum Linearisieren mit dem `linmod`-Befehl muss sich das SIMULINK-Modell in einer eigenen mdl-Datei befinden und die Ein- bzw. Ausgänge mit dem Input- bzw. Output-Block verbunden sein.

Aufgabe 8

Untersuchen Sie mithilfe von MATLAB die Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des linearisierten Modells aus Aufgabe 2. Nutzen Sie dazu die folgenden Funktionen:

- Stabilität: pzmap bzw. pole und zero
- Steuerbarkeit: ctrb und rank
- Beobachtbarkeit: obsv und rank.

Decken sich die Ergebnisse mit den Ergebnissen aus Aufgabe 3? Begründen Sie ggf. auftretende Unterschiede.

5.3 Versuch II

Aufgabe 9

Entwerfen Sie mithilfe des Modells aus Aufgabe 2 und der MATLAB-Funktion place einen Zustandsregler \mathbf{k}^T zur Stabilisierung der oberen Ruhelage. Überlegen Sie sich geeignete Polvorgaben und testen Sie den Zustandsregler \mathbf{k}^T mithilfe des SIMULINK-Modells aus Aufgabe 5.

Hinweis: Beachten Sie die Begrenzungen der Anlage.

Aufgabe 10

Führen Sie eine Diskretisierung des Modells aus Aufgabe 2 mit der Abtastzeit $T_s = 0,005\text{ s}$ durch. Nutzen Sie dazu den MATLAB-Befehl c2d. Wie würde sich das resultierende zeitdiskrete Modell verändern, wenn die Totzeit am Systemeingang berücksichtigt wird? Integrieren Sie die Abtastung auch in Ihr Simulationsmodell.

Aufgabe 11

Integrieren Sie eine diskrete Zustandsregelung in der Simulation. Legen Sie den Regler mithilfe eines Ricatti-Entwurfes (Befehl: lqrd) aus. Bestimmen Sie die nötigen Gewichte \mathbf{Q} und \mathbf{R} durch Probieren des resultierenden Zustandsreglers in der nichtlinearen Systemsimulation. Beachten Sie die realen Begrenzungen der Anlage.

Aufgabe 12

Entwerfen Sie anhand des linearisierten Modells aus Aufgabe 2 einen Sliding Mode Regler, der das Pendel um die obere Ruhelage stabilisiert. Verändern Sie die Reglerparameter λ , η und vergleichen Sie die resultierenden Systemverläufe miteinander.

Hinweis: Beachten Sie, dass für den Reglerentwurf ein Modell in der Form (4.46) benötigt wird. Für lineare Modelle entspricht dies der Regelungsnormalform, die mit der Funktion transformation_RNF (siehe Vorlagen) berechnet werden kann.

Aufgabe 13

Vergleichen Sie die entworfenen Regelungen miteinander hinsichtlich der Eignung und Performance. Welcher Regler ist zu bevorzugen und warum? Wiederholen Sie den Vergleich anschließend für den Fall, dass der Pendelwagen als Verzögerungsglied 1. Ordnung mit Totzeit beschrieben wird. Verwenden Sie dazu die ermittelten Parameter K , T_1 , T_t aus Aufgabe 6.

Aufgabe 14

(optional)

Überlegen Sie sich eine Möglichkeit zum Aufschwingen des Pendels und implementieren Sie diese in Ihrer Simulation. Beachten Sie dabei die Begrenzungen des realen Aufbaus. Verwenden Sie einen verringerten Reibwert von $\mu_{p,2} = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ Nms}$.

Hinweis: Wählen Sie einen energiebasierten Ansatz, bei dem die Energie des Pendels herangezogen wird.

6 Literaturverzeichnis

- [1] *Data Sheet AS5040*. 2.10. austriamicrosystems AG. A-8141 Schloss Premstaetten, Austria, 2009.
- [2] W. Slotine J.-J. and Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall New York, 1994.
- [3] *Technisches Handbuch Plug & Drive Motoren PD4-N*. 1.5. NANOTEC ELECTRONIC GmbH & Co. KG. 2013.

Anhang A: Lösungen

Lösung zur Aufgabe 1

Für den Wagen soll das Übertragungsverhalten

$$G_{Wagen}(s) := \frac{V(s)}{V_{soll}(s)} = \frac{K}{1 + sT_1} \quad (\text{A.1})$$

gelten. Somit ergibt sich nach Rücktransformation die Differenzialgleichung

$$v + \dot{v}T_1 = Kv_{soll} . \quad (\text{A.2})$$

Mit $v = \dot{x}$ und nach Umstellen nach der höchsten Ableitung folgt die Modellgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{1}{T_1}\dot{x} + \frac{K}{T_1}v_{soll} \quad (\text{A.3})$$

für den Wagen. Nach Einsetzen dieser Beziehung in die Modellgleichung (3.18) lässt sich die Modellgleichung

$$\ddot{\varphi} = \frac{m_p g l}{2J_D} \sin(\varphi) - \frac{m_p l}{2J_D T_1} (-\dot{x} + Kv_{soll}) \cos(\varphi) - \frac{\mu_p}{J_D} \dot{\varphi} \quad (\text{A.4})$$

für das Pendel angeben.

Lösung zur Aufgabe 2

Voraussetzung für eine Ruhelage ist, dass die Ableitungen aller Systemgrößen null sind. Somit gilt

$$\ddot{x}_{AP} \equiv \dot{x}_{AP} \equiv \ddot{\varphi}_{AP} \equiv \dot{\varphi}_{AP} \equiv 0 . \quad (\text{A.5})$$

Setzt man diese Beziehungen in die Modellgleichungen (A.3), (A.4) ein, folgt für die Stellgröße

$$v_{soll,AP} \equiv 0 \quad (\text{A.6})$$

und für den Winkel des Pendels

$$\varphi = k \cdot \pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}^* . \quad (\text{A.7})$$

Definiert man für den Pendelwinkel

$$\varphi \in [0, 2\pi) \quad (\text{A.8})$$

und betrachtet nur die obere Ruhelage, folgt

$$\varphi_{AP} \equiv 0. \quad (\text{A.9})$$

Die Wagenposition x_{AP} ist im Arbeitspunkt beliebig wählbar. Linearisiert man die Modellgleichungen (A.3), (A.4) um diesen Arbeitspunkt, ergibt sich das lineare zeitinvariante Zustandsraummodell

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m_p l}{2J_D T_1} & \frac{m_p g l}{2J_D} & -\frac{\mu_p}{J_D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{T_1} \\ 0 \\ -\frac{m_p l K}{2J_D T_1} \end{pmatrix} v_{soll} \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Lösung zur Aufgabe 3

Stabilität

Zur Untersuchung der Stabilität wird die charakteristische Gleichung

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^4 + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{\mu_p}{J_D}\right)s^3 + \left(\frac{\mu_p}{J_D T_1} - \frac{g l m_p}{2J_D}\right)s^2 - \frac{g l m_p}{2J_D T_1}s = 0 \quad (\text{A.11})$$

der Zustandsraumdarstellung untersucht. Es folgen die Nullstellen

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 \\ s_2 &= -\frac{1}{T_1} \\ s_{3,4} &= -\frac{\mu}{2J_D} \pm \frac{1}{2 \cdot J_d} \sqrt{\mu^2 + 2J_D g l m_p} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

der charakteristischen Gleichung. Damit liegt eine Nullstelle der charakteristischen Gleichung auf der imaginären Achse und eine Nullstelle in der rechten s-Halbebene. Die Strecke ist somit instabil.

Steuerbarkeit

Die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S ist quadratisch und hat vollen Rang, wenn

$$\det(\mathbf{Q}_S) = \frac{K^4 g^2 l_p^4 m_p^4}{16 J_d^4 T_1^4} \neq 0 \quad (\text{A.13})$$

ist. Da $K \neq 0$ gilt, ist auch die Determinante von \mathbf{Q}_S ungleich null und das System steuerbar.

Beobachtbarkeit

Die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_p m_p}{2J_d T_1} & \frac{g l_p m_p}{2J_d} & -\frac{\mu}{J_d} \\ 0 & \frac{1}{T_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l_p m_p}{2J_d T_1^2} - \frac{l_p m_p \mu}{2J_d^2 T_1} & -\frac{g l_p m_p \mu}{2J_d^2} & \frac{\mu^2}{J_d^2} + \frac{g l_p m_p}{2J_d} \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

ist nicht quadratisch. Damit die Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_B den Rang n hat, muss diese n -linear unabhängige Zeilen besitzen. Betrachtet man dazu die ersten vier Zeilen, ergibt sich die Determinante zu -1 , sodass

$$\text{rank } \mathbf{Q}_B = 4 \quad (\text{A.15})$$

folgt. Somit ist das System mit den gewählten Ausgangsgrößen beobachtbar.

Lösung zur Aufgabe 4

Das System hat vier Zustandsgrößen und eine Eingangsgröße, weshalb für den Zustandsregler

$$\mathbf{k}^T = [k_1, k_2, k_3, k_4]^T \quad (\text{A.16})$$

gelten muss. Damit lässt sich die Systemmatrix

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{k}^T \quad (\text{A.17})$$

aufstellen. Damit folgt die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_K) = & \frac{1}{2J_d T_1} \left[2J_d T_1 s^4 + (2J_d + 2T_1 \mu + 2J_d K k_2 - K k_4 l_p m_p) s^3 \right. \\ & + (2\mu + 2J_d K k_1 + 2K k_2 \mu - K k_3 l_p m_p - T_1 g l_p m_p) s^2 \\ & \left. + (2K k_1 \mu - g l_p m_p - K g k_2 l_p m_p) s - K g k_1 l_p m_p \right], \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

die gemäß den vorgegebenen Nullstellen die Form

$$\begin{aligned} CLCP(s) &:= (s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdots (s - s_4) = s^4 + p_3 s^3 + \cdots + p_0 \\ &= s^4 + 22s^3 + 207,25s^2 + 1007s + 1345 \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

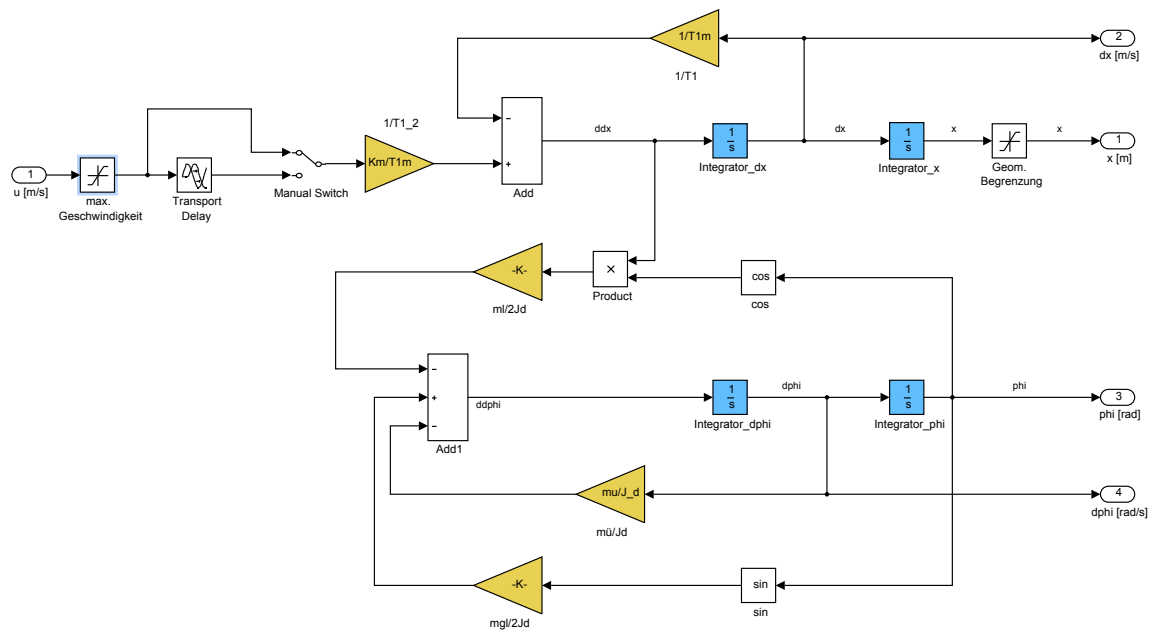
haben soll. Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich die Reglerparameter

$$\mathbf{k}^T = [-0,27, -1,21, -0,71, -0,06] \quad (\text{A.20})$$

der Zustandsrückführung.

Lösung zur Aufgabe 5

siehe *Aufgabe_5_Loesung.mdl*



Lösung zur Aufgabe 6

Für den Fall ohne Totzeit ($T_t \equiv 0$) ergibt sich

$$K = 1, \quad T_1 = 0,043 \text{ s}$$

und für den Fall mit Totzeit $T_t = 0,03 \text{ s}$

$$K = 1, \quad T_1 = 0,014 \text{ s} .$$

Lösung zur Aufgabe 7

```
%% Modellparameter laden

[...]
```

%% Analytisch linearisierte Zustandsraummodell aufstellen

```
A = [0 1 0 0;
      0 -1/T1 0 0;
      0 0 0 1;
      0 m_p*l_p/(2*J_d*T1) m_p*g*l_p/(2*J_d) -mu/J_d;
      ];

b = [0 K/T1 0 -m_p*l_p*K/(2*J_d*T1)]';

C = [1 0 0 0;
      0 0 1 0;
      ];

d = 0;

sys = ss(A,b,C,d)
```

%% Zum Vergleich: Linearisierung mit Linmod

% Anfangswerte für die Systemgrößen definieren

```
x0 = 0;
dx0 = 0;
phi0 = 0;
dphi0 = 0;
```

```
[A2,B2,C2,D2,Daten] = linmod('Aufgabe_7_Pendel_Loesung',[x0, dx0, phi0, dphi0],0)
```

% Achtung: Das resultierende Modell ist abhängig davon, ob für den Wagen
% ein PT1 oder PT1Tt mit den entsprechenden Parametern gewählt wird

Lösung zur Aufgabe 8

```
%% Modellparameter laden

[...]
```

%% Analytisch linearisierte Zustandsraummodell aufstellen

```
A = [0 1 0 0;
      0 -1/T1 0 0;
      0 0 0 1;
      0 m_p*l_p/(2*J_d*T1) m_p*g*l_p/(2*J_d) -mu/J_d;
      ];

b = [0 K/T1 0 -m_p*l_p*K/(2*J_d*T1)]';

C = [1 0 0 0;
      0 0 1 0;
      ];
```

```
d = 0;

sys = ss(A,b,C,d)

%% Untersuchung wichtiger Systemeigenschaften des linearisierten Modells

% Stabilität mittels Pol-Nullstellen Plan
figure('name','Pol-Nullstellenplan')
pzmap(sys)

% Stabilität mittels Pol-Nullstellenberechnung
nullstellen = zero(sys)
polstellen = pole(sys)

% Steuerbarkeit: Rang der Steuerbarkeitsmatrix muss gleich der
% Systemordnung sein.
Q_S = ctrb(sys);
Q_S_rank = rank(Q_S)

% Beobachtbarkeit: Rang der Beobachtbarkeitsmatrix muss gleich der
% Systemordnung sein.
Q_B = obsv(sys);
Q_B_rank = rank(Q_B)

% Fazit: Da eine Polstelle auf der imaginären Achse und eine Polstelle
% rechts der imaginären Achse liegt, ist das System instabil. Darüber
% hinaus ist das System steuer- und beobachtbar.
```