Анализ-2, специалност „Софтуерно инженерство“, Финален тест, 26.06.2015 година

Име:

група: **фак. номер:**

1. *(4 точки)* Формулирайте критерия на Абел-Дирихле за сходимост на несобствени интеграли от вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

2. *(12 точки)* Докажете, че интегралът $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$ е сходящ, но не е абсолютно сходящ.

3. *(4 точки)* Довършете дефиницията: R се нарича радиус на сходимост на степенния ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

ако за всяко $|x| < R$ редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

и за всяко $|x| > R$ редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

4. *(10 точки)* Нека $a_n \neq 0$ за $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и съществува границата $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \neq 0$. Докажете, че радиусът на сходимост на степенния ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е равен на $\dfrac{1}{L}$.

5. *(5 точки)* Развитието на функцията $g(x) = \dfrac{1}{(2+x^2)^2}$ в степенен ред около $x = 0$ е:

с радиус на сходимост $R =$ ....

6. *(20 точки)* Нека $f(x,y) = \dfrac{x^3 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ за $(x,y) \neq (0,0)$ и $f(0,0) = -1$.

а) Покажете, че съществуват и пресметнете $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) =$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) =$.

б) Пресметнете $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) =$.

в) Непрекъсната ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

г) Диференцируема ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

7. *(15 точки)* Формулирайте и докажете теоремата за равенство на смесените производни.

обърни

8. *(12 точки)* Нека $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е такава функция, че:
1) за всяко фиксирано x функцията $f(x, y)$ на y е намаляваща, и
2) за всяко фиксирано y функцията $f(x, y)$ на x е растяща.
Да се докаже, че $f(x, y)$ е интегруема върху квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$.

9. *(4+4 точки)* Довършете дефинициите:
Казваме, че множеството е $A \subset \mathbb{R}^2$ с мярка нула (в смисъл на Пеано-Жордан), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува ....

Казваме, че множеството $A \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо (в смисъл на Пеано-Жордан), ако ...

10. *(10 точки)* Докажете, че ако множеството ∂A от граничните точки на ограниченото множество A има мярка нула, то A е измеримо.

Анализ-2, специалност „Софтуерно инженерство“, Финален тест, 26.06.2015 година

Име:

група: **фак. номер:**

1. *(4 точки)* Формулирайте критерия на Абел-Дирихле за сходимост на несобствени интеграли от вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

2. *(12 точки)* Докажете, че интегралът $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$ е сходящ, но не е абсолютно сходящ.

3. *(4 точки)* Довършете дефиницията: R се нарича радиус на сходимост на степенния ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

ако за всяко $|x| < R$ редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

и за всяко $|x| > R$ редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

4. *(10 точки)* Нека съществува границата $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \neq 0$. Докажете, че радиусът на сходимост на степенния ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е равен на $\frac{1}{L}$.

5. *(5 точки)* Развитието на функцията $g(x) = \frac{1}{(2-x^2)^2}$ в степенен ред около $x = 0$ е:

с радиус на сходимост $R =$ ....

6. *(20 точки)* Нека $f(x,y) = \frac{y^3 + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$ за $(x,y) \neq (0,0)$ и $f(0,0) = 2$.

а) Покажете, че съществуват и пресметнете $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) =$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) =$.

б) Пресметнете $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) =$.

в) Непрекъсната ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

г) Диференцируема ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

7. *(15 точки)* Формулирайте и докажете правилото за пресмятане на частните производни на съставна функция.

обърни

8. *(12 точки)* Нека $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е такава функция, че:
1) за всяко фиксирано x функцията $f(x, y)$ на y е намаляваща, и
2) за всяко фиксирано y функцията $f(x, y)$ на x е намаляваща.
Да се докаже, че $f(x, y)$ е интегруема върху квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$.

9. *(4+4 точки)* Довършете дефинициите:
Казваме, че множеството е $A \subset \mathbb{R}^2$ с мярка нула (в смисъл на Пеано-Жордан), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува ....

Казваме, че множеството $A \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо (в смисъл на Пеано-Жордан), ако ...

10. *(10 точки)* Докажете, че ако множеството ∂A от граничните точки на ограниченото множество A има мярка нула, то A е измеримо.

Анализ-2, специалност „Софтуерно инженерство“, Финален тест, 26.06.2015 година

Име:

група: **фак. номер:**

1. *(4 точки)* Формулирайте критерия на Абел-Дирихле за сходимост на несобствени интеграли от вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

2. *(12 точки)* Докажете, че интегралът $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$ е сходящ, но не е абсолютно сходящ.

3. *(4 точки)* Довършете дефиницията: R се нарича радиус на сходимост на степенния ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

ако за всяко $|x| < R$ редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

и за всяко $|x| > R$ редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

4. *(10 точки)* Нека $a_n \neq 0$ за $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и съществува границата $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \neq 0$. Докажете, че радиусът на сходимост на степенния ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е равен на $\dfrac{1}{L}$.

5. *(5 точки)* Развитието на функцията $g(x) = \dfrac{1}{(3-x^2)^2}$ в степенен ред около $x = 0$ е:

с радиус на сходимост $R =$ ....

6. *(20 точки)* Нека $f(x,y) = \dfrac{x^4 + 3x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}$ за $(x,y) \neq (0,0)$ и $f(0,0) = 3$.

а) Покажете, че съществуват и пресметнете $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) =$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) =$.

б) Пресметнете $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) =$.

в) Непрекъсната ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

г) Диференцируема ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

7. *(15 точки)* Формулирайте и докажете теоремата за равенство на смесените производни.

обърни

8. *(12 точки)* Нека $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е такава функция, че:
1) за всяко фиксирано x функцията $f(x, y)$ на y е растяща, и
2) за всяко фиксирано y функцията $f(x, y)$ на x е намаляваща.
Да се докаже, че $f(x, y)$ е интегруема върху квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$.

9. *(4+4 точки)* Довършете дефинициите:
Казваме, че множеството е $A \subset \mathbb{R}^2$ с мярка нула (в смисъл на Пеано-Жордан), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува ....

Казваме, че множеството $A \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо (в смисъл на Пеано-Жордан), ако ...

10. *(10 точки)* Докажете, че ако ограниченото множество A е измеримо, то множеството ∂A от граничните точки на A има мярка нула.

Анализ-2, специалност „Софтуерно инженерство“, Финален тест, 26.06.2015 година

Име:

група: **фак. номер:**

1. *(4 точки)* Формулирайте критерия на Абел-Дирихле за сходимост на несобствени интеграли от вида $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

2. *(12 точки)* Докажете, че интегралът $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$ е сходящ, но не е абсолютно сходящ.

3. *(4 точки)* Довършете дефиницията: R се нарича радиус на сходимост на степенния ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

ако за всяко $|x| < R$ редът $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

и за всяко $|x| > R$ редът $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ....

4. *(10 точки)* Нека съществува границата $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \neq 0$. Докажете, че радиусът на сходимост на степенния ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е равен на $\dfrac{1}{L}$.

5. *(5 точки)* Развитието на функцията $g(x) = \dfrac{1}{(3+x^2)^2}$ в степенен ред около $x = 0$ е:

с радиус на сходимост $R =$ ....

6. *(20 точки)* Нека $f(x,y) = \dfrac{y^4 - 4x^2 - 4y^2}{x^2 + y^2}$ за $(x,y) \neq (0,0)$ и $f(0,0) = -4$.

а) Покажете, че съществуват и пресметнете $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) =$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) =$.

б) Пресметнете $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) =$.

в) Непрекъсната ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

г) Диференцируема ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

7. *(15 точки)* Формулирайте и докажете правилото за пресмятане на частните производни на съставна функция.

обърни

8. *(12 точки)* Нека $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е такава функция, че:
1) за всяко фиксирано x функцията $f(x, y)$ на y е растяща, и
2) за всяко фиксирано y функцията $f(x, y)$ на x е растяща.
Да се докаже, че $f(x, y)$ е интегруема върху квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$.

9. *(4+4 точки)* Довършете дефинициите:
Казваме, че множеството е $A \subset \mathbb{R}^2$ с мярка нула (в смисъл на Пеано-Жордан), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува ....

Казваме, че множеството $A \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо (в смисъл на Пеано-Жордан), ако ...

10. *(10 точки)* Докажете, че ако ограниченото множество A е измеримо, то множеството ∂A от граничните точки на A има мярка нула.