ДИС-2 Изпит

1. Формулирайте критерия на Абел-Дирихле за сходимост на несобствени интеграли от вида

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\ dx$$

Ако $g(x)$ монотонно клони към 0 и $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ е сходящ, то $\int\limits_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ също е сходящ

2. Докажете, че интегралът $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\ dx$ е сходящ, но не е абсолютно сходящ

Сходимост (Бабев): $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\ dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2x \sin x^2}{2x}\ dx$

$\int 2x \sin x^2\ dx = -\cos x^2 + C \Rightarrow$ ограничена функция, $\frac{1}{2x}$ е монотонно клоняща към $0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ сходящ по Абел-Дирихле

Сходимост: Правим смяната $x^2 = t \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\ dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\ dt$

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} = 0 \Rightarrow \int\limits_0^{a} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\ dt$ е сходящ

$\int \sin t\ dt$ е ограничен, а $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ е монотонно намаляваща $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\ dt$ е сходящ по Абел-Дирихле

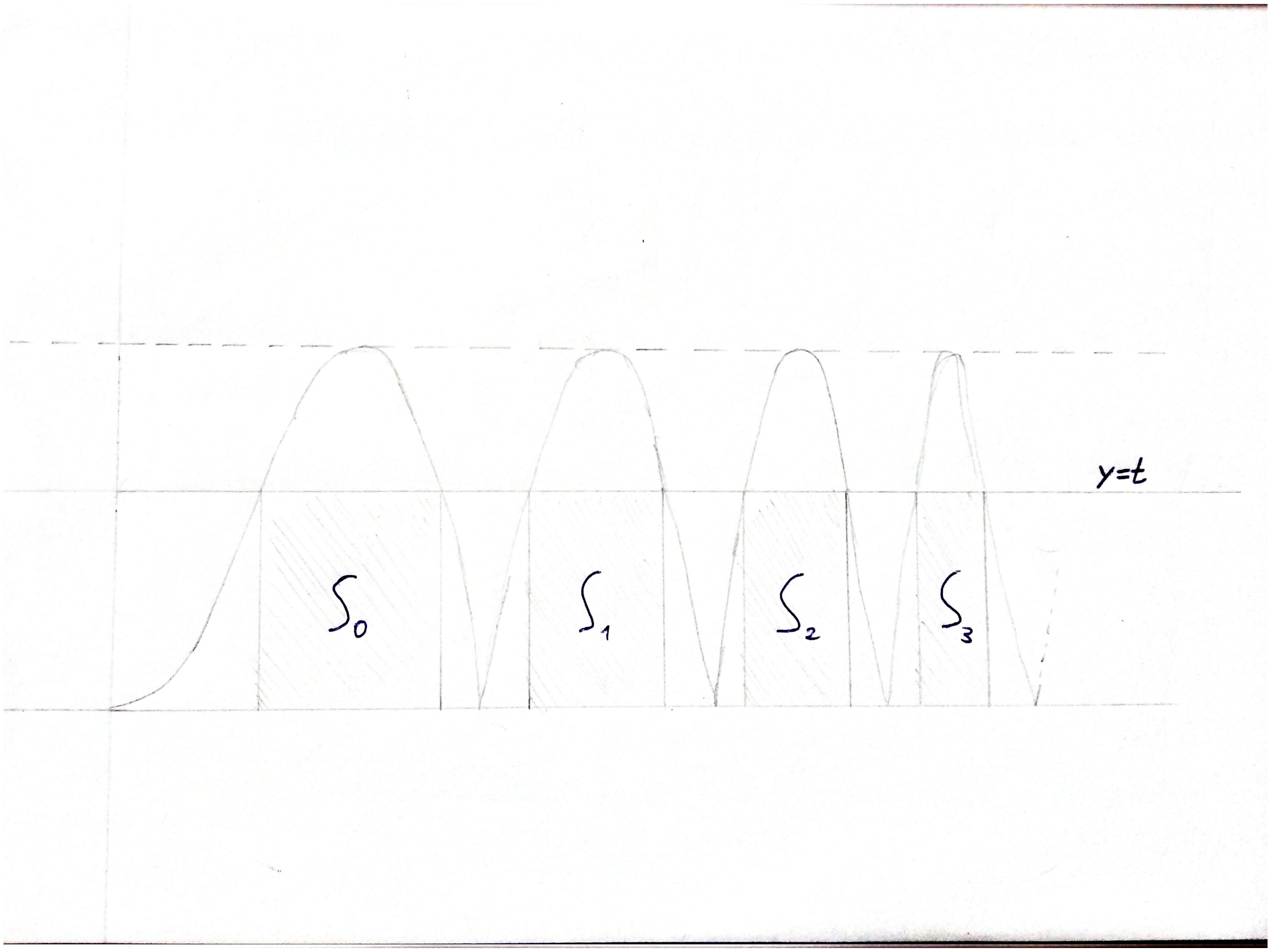
(Алтернативно) Можем да разглеждаме от 1 нататък, понеже <обяснения>

Абсолютна сходимост: Нека $t \in (0, 1)$. Ще разгледаме всички правоъгълници, ограничени от правите $y = 0, y = t$ и функцията $\left|\sin x^2\right|$. Нека с A_k означаваме правоъгълника, който се намира между k-тото и $k+1$-то място, където $\left|\sin x^2\right| = 0$, като считаме, че $k = 0$ съотвества на $x = 0$
Нека лявата и дясната страна на A_k имат уравнения $y = x_1, y = x_2$
$\Rightarrow x_1 = \sqrt{k\pi + \arcsin t}, x_2 = \sqrt{(k+1)\pi - \arcsin t}$
Нека S_k е лицето на $A_k \Rightarrow S_k = (x_2 - x_1)t = t\frac{(k+1)\pi - \arcsin t - k\pi - \arcsin t}{\sqrt{k\pi + \arcsin t} + \sqrt{(k+1)\pi - \arcsin t}} =$

$$= \frac{t(\pi - 2\arcsin t)}{\sqrt{k}\left(\sqrt{\pi + \frac{\arcsin t}{k}} + \sqrt{\pi + \frac{1}{k} - \frac{\arcsin t}{k}}\right)}$$

$\Rightarrow$ редът $\sum\limits_{k=0}^{\infty} S_k$ има същата сходимост като $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} S_k = \infty$

от друга страна $\int\limits_0^{\infty} \left|\sin x^2\right| dx \geq \sum\limits_{k=0}^{\infty} S_k \Rightarrow \int\limits_0^{\infty} \sin x^2 dx$ не е абсолютно сходящ



3. Формулирайте и докажете критерия на Раабе за сходимост на редове

Нека $a_n > 0$ и $b_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$

Достатъчно условие редът да е сходящ е да има $q > 1$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow b_n > q)$

за разходимост: $b_n < 1$

Доказателство (сходимост): $b_n > q \Leftrightarrow n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > q \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{q}{n} \overset{\text{Бернули}}{>} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^q \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{\frac{1}{n^q}}{\frac{1}{(n+1)^q}}$$

$\Rightarrow$ членовете на реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ намаляват по-бързо от членовете на $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^q}$, $q > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ е сходящ

Доказателство (разходимост): $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1 \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$

$\Rightarrow$ Редът намалява по-бавно от хармоничения, следователно разходящ

4. Нека редът $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ е условно сходящ

За кои стойности на x $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{6^n(n+1)} \cdot x^{2n}$ е сходящ?

Ще ползваме критерия на Абел. Трябва само да проверим кога $\left\{\frac{x^{2n}}{6^n(n+1)}\right\}$ е ограничена,

което очевидно става при $x \in \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right]$. Възможно е и редът да е сходящ и за $x \notin \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right]$, но това зависи от a_n

5. Функцията $F(x, y)$ се нарича диференцируема в точката (x_0, y_0) ако

6. Нека $g(x) = \sqrt{2x^2 + y^2 + xy}$ и $f(x, y) = g(x, y) \sin g(x, y)$

а) Покажете, че $g(x)$ НЯМА частни производни в $(0, 0)$

$g(x, 0) = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}|x| \Rightarrow$ няма производна в 0

$g(0, y) = \sqrt{y^2} = |y| \Rightarrow$ няма производна в $0 \Rightarrow g(x, y)$ няма частни производни в $(0, 0)$

б) Покажете, че $f(x)$ ИМА частни производни в $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$f(x, 0) = \sqrt{2}|x| \sin\left(\sqrt{2}|x|\right), \quad f'_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2}|x| \sin\left(\sqrt{2}|x|\right) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$

(отляво и отдясно става 0) Аналогично за $f(0, y)$

в) Непрекъснати ли са f'_x, f'_y в $(0, 0)$?

Полагаме $t = 2x^2 + y^2 + xy$

$f'_x = \frac{4x + y}{2\sqrt{t}} \sin\sqrt{t} + \cos\sqrt{t} \cdot \frac{4x + y}{2\sqrt{t}} \cdot \sqrt{t}$

$\lim_{x \to 0} f'_x(x, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{4x}{2\sqrt{t}} \sin\sqrt{t} + 2x \cos\sqrt{t} = 0 = f'_x(0, 0)$

г) Диференцируема ли е $f(x)$ в $(0,0)$?

Да, защото има непрекъснати частни производни там.

7. Формулирайте и докажете теоремата за равенството на смесените производни

8. Нека $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е такава функция, че

1) за фиксирано x фунцкията $f(x,y)$ на y е намаляваща

2) за фиксирано y фунцкията $f(x,y)$ на x е растяща

Да се докаже, че $f(x,y)$ е интегруема върху квадрата $[0,1] \times [0,1]$

Нека $x_i = \dfrac{i}{n},\ \ y_j = \dfrac{j}{n}$. Тогава $M_{ij} = f(x_i, y_{j-1})$ и $m_{ij} = f(x_{i-1}, y_j)$

са съответно НГС и НМС в квадрата ij. Нека $S = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} M_{ij},\ \ s = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} m_{ij}$

Нека $M \geq |f(x,y)|$ за $(x,y) \in [0,1]^2$. Разликата $S - s$ съдържа $4n-2$ различни стойности

$\Rightarrow |S-s| \leq \dfrac{4n-2}{n^2}M \Rightarrow$ можем да направим $|S-s|$ произволно малко $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y)$ е интегруема в квадрата $[0,1]^2$

9. Казваме, че множеството $A \subset \mathbb{R}^2$ е с мярка нула (Пеано-Жордан), ако за всяко $\varepsilon > 0$

съществува число $n \in \mathbb{N}\ :\ \exists\, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ - правоъгълници, такива че $A \subset \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n$

и $\sum\limits_{i=1}^{n} S\left(\Delta_i\right) < \varepsilon$, където $S(\Delta_i)$ е лицето на правоъгълника Δ_i

Казваме, че множеството $A \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо (Пеано-Жордан), ако

съществува правоъгълник Δ, за който $A \subset \Delta$ и χ_A (хар. функция) е интегруема върху Δ

Полагаме $S(A) = \iint\limits_{\Delta} \chi_A(x,y)dxdy$

(пояснение) $\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) \notin A \end{cases}$

10. Докажете, че ако множеството ∂A от граничените точки на ограниченото множество

A има мярка нула, то A е измеримо

Нека (x_0, y_0) е вътрешна точка за $A \Rightarrow$ по дефиниция има

$\delta > 0 \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow (x,y) \text{ е вътрешна} \right) \Rightarrow \chi_A = 1$ за тези $(x,y) \Rightarrow$ непрекъсната

Аналогично $\chi_A = 0$ и е непрекъсната за всички външни точки

По условие имаме и че ∂A е с мярка 0 $\Rightarrow \chi_A$ е интегруема там $\Rightarrow$ цялата χ_A е интегруема

$\Rightarrow A$ е измеримо по горната дефиниция

Не знам кой номер още. Частни производни на съставна функция

$G(y_1, \ldots, y_n)$ има непрекъснати ч. п. в $y_0(y_{10}, \ldots, y_{n0})$

$F_i(x_1, \ldots, x_k)$ има ч. п. в $x_0(x_{10}, \ldots, x_{k0})$

$\Phi(x) = G(F(x)),\ \ y_{i0} = F_i(x_0)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial y_i}(y_0) \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0)$$