ДИС 1 2017/2018

Владимир Бабев

15.11.2017

Съдържание

Нерез

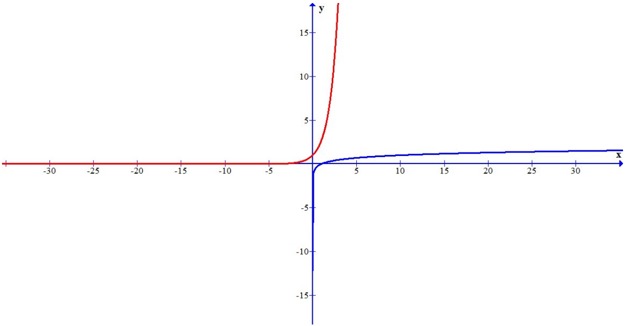

ЛЮБИМАТА ПАРТИЯ НИ ОСИГУРИ
ПЪРВОКАЧЕСТВЕН НЕРЕЗ
ЗА ОБЩО ПОЛЗВАНЕ.
КОЙТО ЖЕЛАЕ - ДА СЕ ЗАПИШЕ
В КМЕТСТВОТО.

Софтуерен инженер

Експонента I

- Дефиниция: $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
- Мотивация
- Основно равенство: $e^{x+y} = e^x e^y$
- Свойства:
  - $e^x > 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$
  - $e^x \geq 1 + x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$
  - $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$ за всяко $x < 1$
  - e^x е строго растяща, следователно обратима.
  - за всяко $y > 0$ съществува $x \in \mathbb{R}$, за което $e^x = y$.

Експонента II



- Натурален логаритъм – обратната на експонентата (единственото решение на уравнението $e^x = y$ за $y > 0$.
- Свойства:

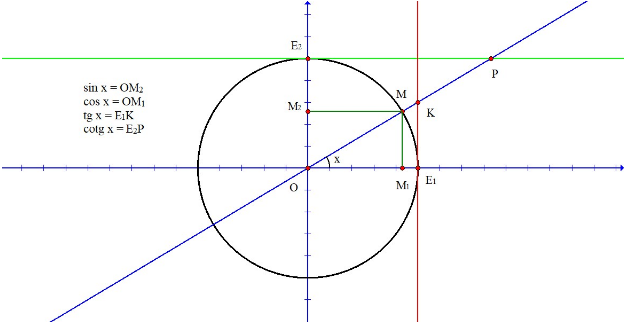
Експонента III

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ за всяко $x > 0$ и всяко $y > 0$
- $\ln(x+1) \leq x$ за всяко $x > -1$
- $\ln(x+1) \geq \dfrac{x}{x+1}$ за всяко $x > -1$
- $\ln x$ е строго растяща

- Степен с положителна основа – $a^b = e^{b \ln a}$ за $a > 0$.
- Свойства:
  - $a^{b+c} = a^b a^c$
  - $(ab)^c = a^c b^c$
  - $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$
  - a^x е обратима за $a \neq 1$.
- Логаритъм с положителна основа $a \neq 1$ – обратната на a^x.
- $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

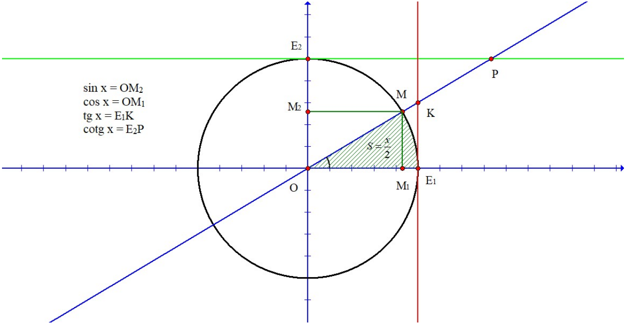
Тригонометрични функции I

- Радиан
- Тригонометрична окръжност



Тригонометрични функции II

- Аргументът като лице

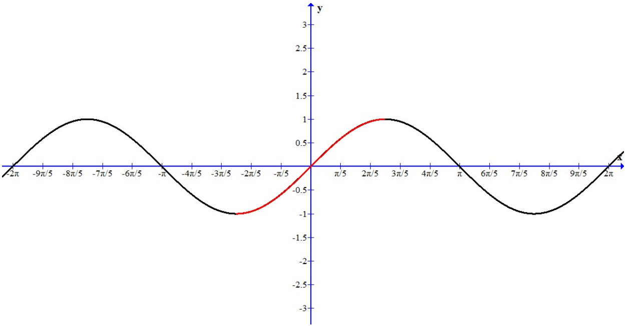


Тригонометрични функции III

- Основни равенства
  - $\sin 0 = 0\,,\ \cos 0 = 1\,,\ \sin \dfrac{\pi}{2} = 1\,,\ \cos \dfrac{\pi}{2} = 0$
  - $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
  - $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
  - $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
  - $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
  - Питагорова теорема $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

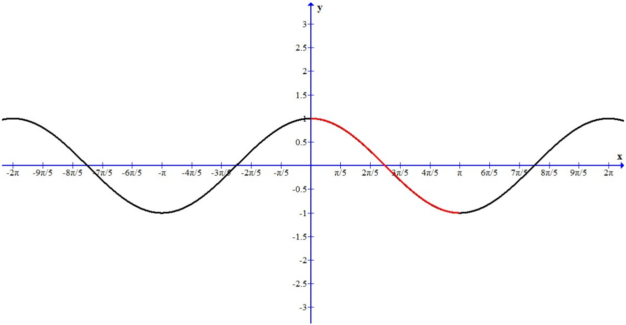
Тригонометрични функции IV

- $\sin x$ – периодична с период 2π, нечетна, обратима в $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (строго растяща)



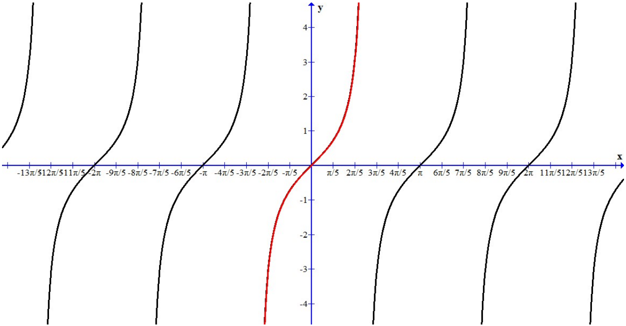
Тригонометрични функции V

- $\cos x$ – периодична с период 2π, четна, обратима в $[0\,,\ \pi]$ (строго намаляваща)



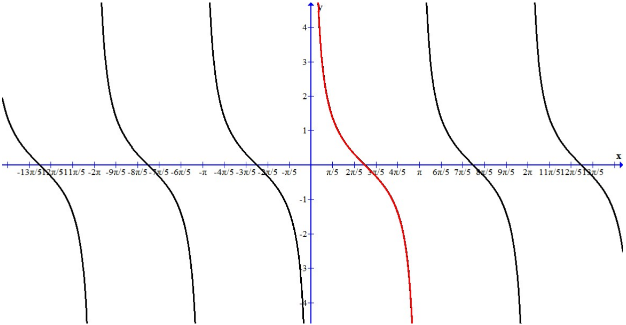
Тригонометрични функции VI

- $tg\,x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ – периодична с период π, нечетна, обратима в $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (строго растяща)



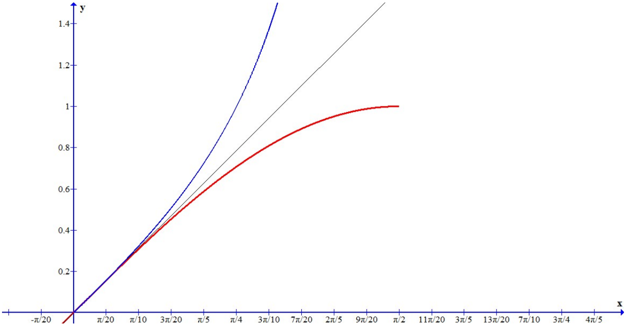
Тригонометрични функции VII

- $ctg\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ – периодична с период π, нечетна, обратима в $(0\,,\,\pi)$ (строго намаляваща)

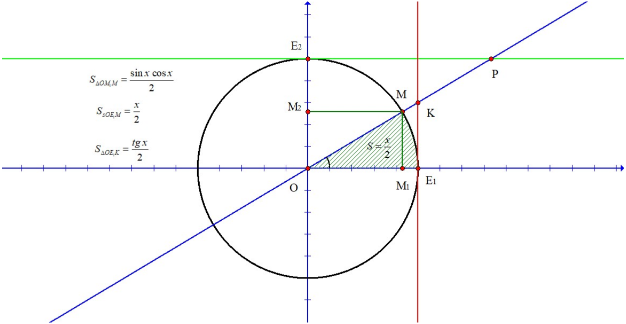


Тригонометрични функции VIII

- $0 < \sin x < x < tg\, x$ – за всяко $x \in \left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$

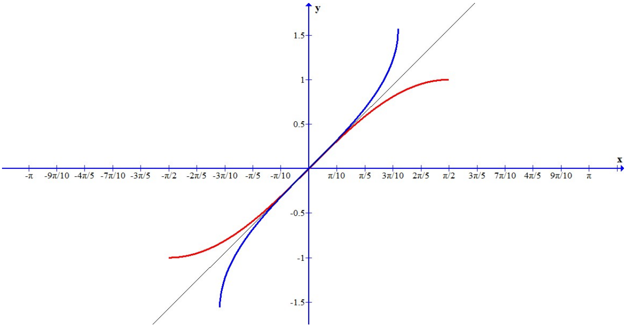


Тригонометрични функции IX



Тригонометрични функции X

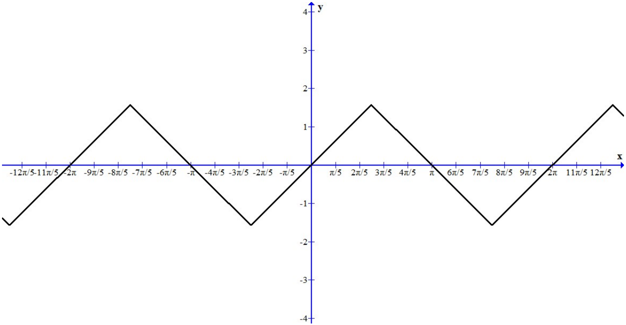
- $\arcsin x$ – дефинирана в $[-1\,,\,1]$, стойности $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, строго растяща, нечетна



Тригонометрични функции XI

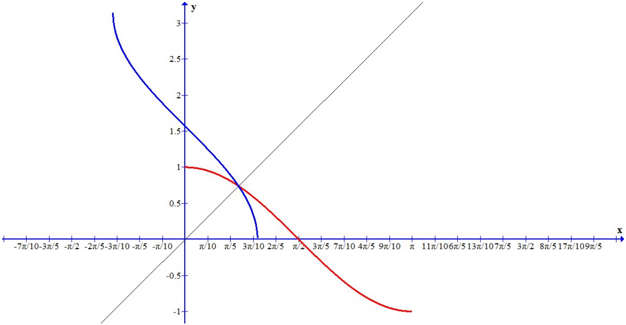
$\sin(\arcsin x) = x$ за $x \in [-1\,,\,1]$

$\arcsin(\sin x) = x$ за $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$



Тригонометрични функции XII

- $\arccos x$ – дефинирана в $[-1\,,\,1]$, стойности $[0\,,\,\pi]$, строго намаляваща, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$



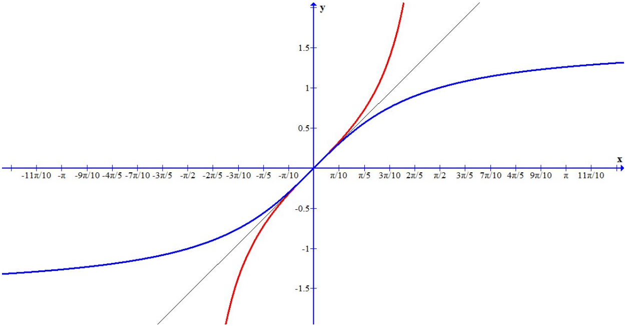
Тригонометрични функции XIII

$\cos(\arccos x) = x$ за $x \in [-1\,,\,1]$
$\arccos(\cos x) = x$ за $x \in [-0\,,\,\pi]$

- $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ за $x \in [-1\,,\,1]$
  $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ за $x \in [-1\,,\,1]$
  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ за $x \in [-1\,,\,1]$

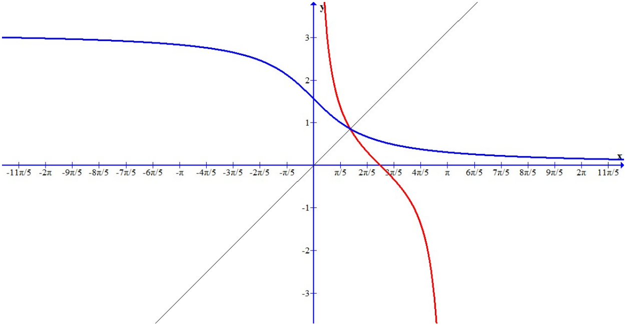
Тригонометрични функции XIV

- $\operatorname{arctg} x$ – дефинирана в $\mathbb{R}$, стойности $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, строго растяща, нечетна



Тригонометрични функции XV

- $\operatorname{arcctg} x$ – дефинирана в $\mathbb{R}$, стойности $(0\,,\,\pi)$, строго намаляваща, $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$



Тригонометрични функции XVI

- $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$ за $x \in \mathbb{R}$

  $tg\,(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{x}$ за $x \neq 0$

  $ctg\,(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{x}$ за $x \neq 0$
- $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ за $x \in \mathbb{R}$

  $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ за $x \in \mathbb{R}$
- $\sin(2\operatorname{arctg} x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ за $x \in \mathbb{R}$

  $\cos(2\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ за $x \in \mathbb{R}$

Граница на функция I

- Точка на сгъстяване на множество
  - Дефиниция 1 (Хайне) a се нарича точка на сгъстяване на множеството $A \subset \mathbb{R}$, ако съществува редица $\{x_n\}_1^\infty$, за която 1) $x_n \in A$; 2) $x_n \neq a$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
  - Дефиниция 2 (Коши) a се нарича точка на сгъстяване на множеството $A \subset \mathbb{R}$, ако за всяко $\delta > 0$ има $x \in A$, за което $0 < |x - a| < \delta$
  - Двете дефиниции са еквивалентни
  - Пример: точките на сгъстяване на дефиниционната област на функцията $\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-1}}$ са $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; 0 не е точка на сгъстяване, въпреки че в нея функцията е дефинирана.

Граница на функция II

- Граница на функция – нека a е точка на сгъстяване за D_f.
- Дефиниция 1 (Хайне)
  Казваме, че f има граница в a, ако за всяка редица $\{x_n\}_1^\infty$, за която 1) $x_n \in D_f$; 2) $x_n \neq a$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, редицата $\{f(x_n)\}_1^\infty$ е сходяща.
- Всички такива редици имат една и съща граница.
- Дефиниция 1 (Хайне) – уточнение
  Казваме, че f има граница l в a, ако за всяка редица $\{x_n\}_1^\infty$, за която 1) $x_n \in D_f$; 2) $x_n \neq a$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.
- Означение: $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Граница на функция III

- Примери:
  - $\chi_{\mathbb{Q}}$ няма граница в никоя точка
  - $[x]$ няма граница в никоя точка в целите числа, а в нецелите има граница
  - $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$
- Аритметични действия
- Граница на съставна функция
  Нека $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to b} g(x) = L$. Тогава $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = L$,
  където $\varphi(x) = g(f(x))$

  Пример: $\lim\limits_{x\to 0} e^{\sin x} = L$

Граница на функция IV

- Граница на съставна функция – точна формулировка
  Нека: 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (a е точка на сгъстяване на D_f)
  2.1) b е точка на сгъстяване на D_g
  2.2) $\lim\limits_{x\to b} g(x) = L$ и, когато $b \in D_g$, е изпълнено $L = g(b)$
  3) a е точка на сгъстяване на $\{x \in D_f \ : \ f(x) \in D_g\}$
  Тогава $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = L$, където $\varphi(x) = g(f(x))$
- Дефиниция 2 (Коши)
  Казваме, че f има граница L в a, ако за всяко $\varepsilon > 0$ има $\delta > 0$ такова, че за всяко $x \in D_f$ с $0 < |x - a| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- Еквивалентност на двете дефиниции
- Допълнителни основни свойства – ограниченост, постоянност на знака, граничен преход в неравенства