Matematický software

Integrální počet funkce jedné proměnné

RNDr. Zbyšek Posel, Ph.D.

Katedra informatiky

Historie

- Egypt (1820 př. Kr.) - výpočet určitých ploch a objemů
- Babylon - Lichoběžníkové pravidlo při pozorování Jupiteru
- Eudoxus (Řecko 408 - 355 př. Kr) a Archimedes (Řecko 287 - 212 př. Kr.) - vyplnění plochy n-úhelníkem.
- Alhazen (Irák, 965 - 1040) - výpočet objemu paraboloidu
- Newton (Principia 1687), Leibniz (Nova Methodus pro Maximis et Minimis 1684)

- Určení plochy S vymezené grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.
- Určení funkce, pokud je známa její derivace.

Neurčitý integrál - primitivní funkce

- Určení funkce, pokud je známa její derivace.

Funkce $F(x)$ je *primitivní funkcí* k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, pokud pro všechna x platí

$$F'(x) = f(x).$$

Ke každé funkci $f(x)$, spojité na $\langle a, b\rangle$, existuje primitivní funkce (nekonečně mnoho) ve tvaru:

$$F(x) + C$$

kde C je libovolná konstanta. Poté lze zapsat

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Znak $\int$ má význam **souhrnu** všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ a nazývá se **neurčitým integrálem funkce** $f(x)$.
Více lze o neurčitém integrálu nalézt v [1], [2] nebo v [3].

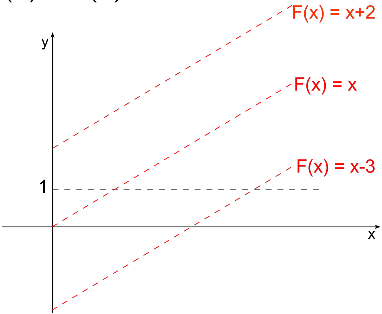
Příklad

- Vezměme jednoduchou funkci $f(x) = 1$.

Příklad

- Vezměme jednoduchou funkci $f(x) = 1$.
- Hledejme k ní primitivní funkci $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = x \to \begin{cases} x + 2 \\ x - 3 \\ F(x) + C \end{cases}$$



- Tabulky základních integrálů

$$f(x) = x^n, n \in \mathbf{R}, n \neq -1 \qquad f(x) = F'(x)$$

$$F(x) = x^{n+1} \qquad F'(x) = \frac{(n+1)x^n}{n+1}$$

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C \qquad \int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \cot x + C \quad (x \neq n\pi)$$

Metody integrace

- Metoda substituce

Metody integrace

- Metoda substituce

Funkce $f(x)$ má v intervalu (a, b) tvar $f(x) = g(h(x))h'(x)$. Poté, lze použít substituci ve tvaru $h(x) = t$ a získáme rovnost

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(h(x))h'(x)\mathrm{d}x = \int g(t)\mathrm{d}t$$

Metody integrace

- Metoda substituce

Funkce $f(x)$ má v intervalu (a, b) tvar $f(x) = g(h(x))h'(x)$. Poté, lze použít substituci ve tvaru $h(x) = t$ a získáme rovnost

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(h(x))h'(x)\mathrm{d}x = \int g(t)\mathrm{d}t$$

$$\int \sin^2 x \cos x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = sin(x) \\ \mathrm{d}t = cos(x)\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int t^2 \mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + C = \frac{sin^3 x}{3} + C$$

Metody integrace

- Metoda substituce

Metody integrace

- Metoda substituce

Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu (a, b). Funkce $x = \varphi(t)$ je spojitá na odpovídajícím intervalu a existuje k ní inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$. Poté lze použít substituci $x = \varphi(t)$ a získáme rovnost

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = H(t) + C$$

Zpětně musíme dosadit inverzní funkci $t = \varphi^{-1}(x)$.

Metody integrace

- Metoda substituce

Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu (a, b). Funkce $x = \varphi(t)$ je spojitá na odpovídajícím intervalu a existuje k ní inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$. Poté lze použít substituci $x = \varphi(t)$ a získáme rovnost

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = H(t) + C$$

Zpětně musíme dosadit inverzní funkci $t = \varphi^{-1}(x)$.

$$\int \sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = 2\sin(t) \\ \mathrm{d}x = 2\cos(t)\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sqrt{4 - 4\sin^2(t)}\; 2\cos(t)\mathrm{d}t$$

$$= 4\int \sqrt{\cos^2(t)}\; \cos(t)\mathrm{d}t = 4\int \cos^2(t)\mathrm{d}t = \ldots$$

$$= 2(t + \sin(t)\cos(t)) = \left| \; t = \varphi^{-1}(x) \; \right| = \ldots$$

Metody integrace

- Metoda per-partes

Metody integrace

- Metoda per-partes

Metody integrace

- Metoda per-partes

Funkce $u(x)$ a $v(x)$ jsou spojitě diferencovatelné na určeném intervalu J.

Metody integrace

- Metoda per-partes

Funkce $u(x)$ a $v(x)$ jsou spojitě diferencovatelné na určeném intervalu J.

$$
\begin{aligned}
(uv)' &= u'v + uv' \\
\int (uv)\mathrm{d}x &= \int u'v\mathrm{d}x + \int uv'\mathrm{d}x \\
\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x &= u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Metody integrace

- Metoda per-partes

Funkce $u(x)$ a $v(x)$ jsou spojitě diferencovatelné na určeném intervalu J.

$$\begin{aligned}(uv)' &= u'v + uv' \\ \int (uv)\mathrm{d}x &= \int u'v\mathrm{d}x + \int uv'\mathrm{d}x \\ \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x &= u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x)\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{c} u'(x) = e^x \\ v(x) = \sin(x) \end{array} \right| = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\mathrm{d}x \\ &= \left| \begin{array}{c} u'(x) = e^x \\ v(x) = \cos(x) \end{array} \right| = e^x \sin(x) - \left(e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\mathrm{d}x \right) \\ &= e^x (\sin(x) - \cos(x)) - \int e^x \sin(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Určitý integrál

- Určení plochy S vymezené grafem funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$.
  - Newtonův integrál

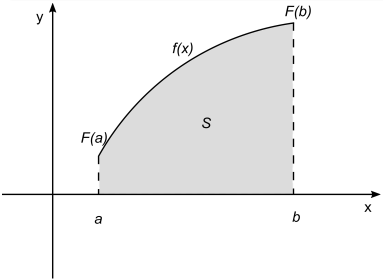
$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Více lze o určitém integrálu nalézt v [1], [2] nebo v [3].

Určitý integrál

- Určení plochy S vymezené grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.
  - Newtonův integrál

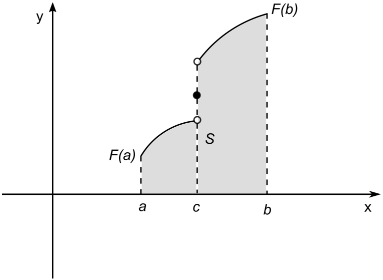
$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$



- Lze počítat délky křivek, objemy, povrchy, atd..
- Nutná znalost primitivních funkcí.
- Nelze počítat funkce, které mají nespojitosti 1. druhu na intervalu (a, b)

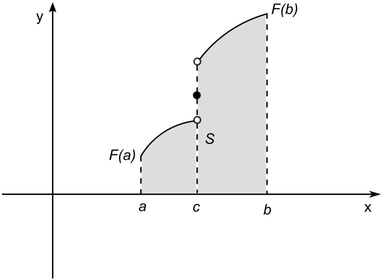
Více lze o určitém integrálu nalézt v [1], [2] nebo v [3].

Určitý integrál



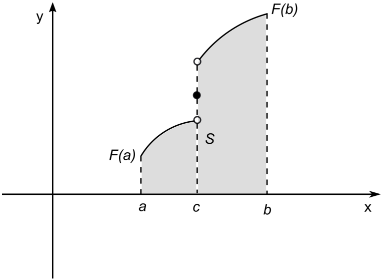
- Bod c je bodem nespojitosti 1. druhu.

Určitý integrál



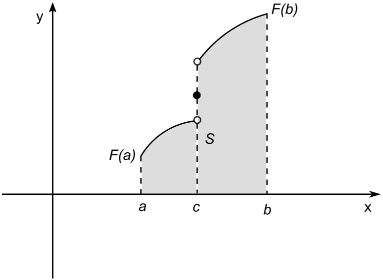
- Bod c je bodem nespojitosti 1. druhu.
  - Fourierova analýza

Určitý integrál



- Bod c je bodem nespojitosti 1. druhu.
  - Fourierova analýza
  - Teorie pravděpodobnosti

Určitý integrál



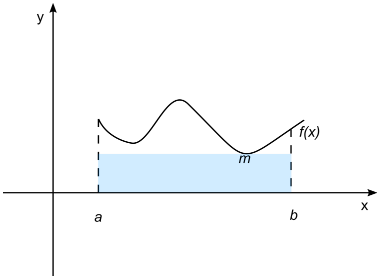
- Bod c je bodem nespojitosti 1. druhu.
  - Fourierova analýza
  - Teorie pravděpodobnosti
- I když $F(c)$ neexistuje, tak obsah lze vypočítat.

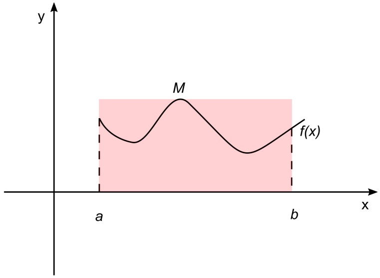
Riemannův integrál

Na uzavřeném interval $\langle a, b\rangle$ mějme funkci $f(x)$. Potom m nazveme infimum funkce a M supremum funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Číslo $L(f(x)) = m(b-a)$ nazveme dolním odhadem a číslo $U(f(x)) = M(b-a)$ horním odhadem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Riemannův integrál

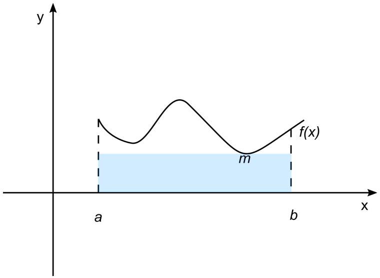
Na uzavřeném interval $\langle a, b\rangle$ mějme funkci $f(x)$. Potom m nazveme infimum funkce a M supremum funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Číslo $L(f(x)) = m(b-a)$ nazveme dolním odhadem a číslo $U(f(x)) = M(b-a)$ horním odhadem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$.





Riemannův integrál

Na uzavřeném interval $\langle a, b \rangle$ mějme funkci $f(x)$. Potom m nazveme infimum funkce a M supremum funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Číslo $L(f(x)) = m(b - a)$ nazveme dolním odhadem a číslo $U(f(x)) = M(b - a)$ horním odhadem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.



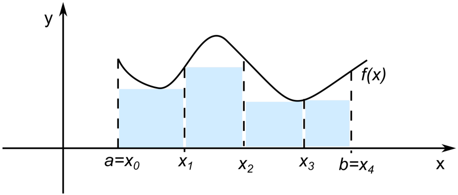
Cílem je získat obsah plochy vymezenou funkcí $f(x)$ a osou x.

Riemannův integrál

Zavedeme dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ $D(n) = (x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b)$. Potom m_i a M_i jsou infima a suprema na příslušných podintervalech $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$.

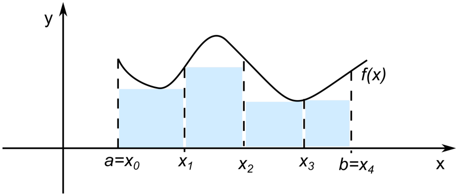
Riemannův integrál

Zavedeme dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ $D(n) = (x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b)$. Potom m_i a M_i jsou infima a suprema na příslušných podintervalech $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$.



Riemannův integrál

Zavedeme dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ $D(n) = (x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b)$. Potom m_i a M_i jsou infima a suprema na příslušných podintervalech $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$.



Poté, číslo $L(f(x), D(n))$ a $U(f(x), D(n))$ nazveme dolním a horním součtem funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ při dělení $D(n)$.

$$L(f(x), D(n)) = \sum_i m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad U(f(x), D(n)) = \sum_i M_i(x_i - x_{i-1})$$

Riemannův integrál

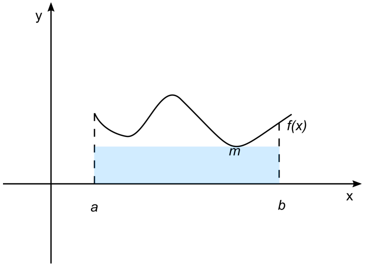
Pro libovolné dělení platí

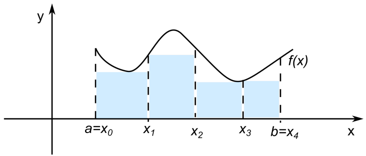
$$m(b-a) \le L(f(x), D(n)) \le U(f(x), D(n)) \le M(b-a)$$

Jestliže platí

$$\sup L(f(x), D(n)) = \inf U(f(x), D(n))$$

řekneme o funkci $f(x)$, že je tzv. Riemannovsky integrovatelná.



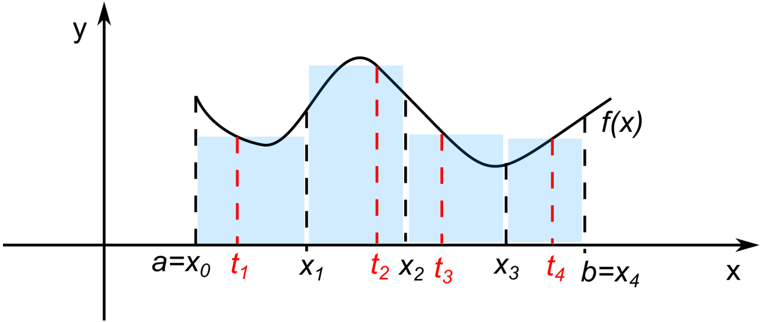


Integrální součet

Uvažujeme posloupnost $T(D(n)) = (t_1, t_2, ..., t_n)$ reálných čísel takových, že platí $t_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Potom číslo

$$S(f(x), D(n), T(D(n))) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazveme integrálním součtem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.

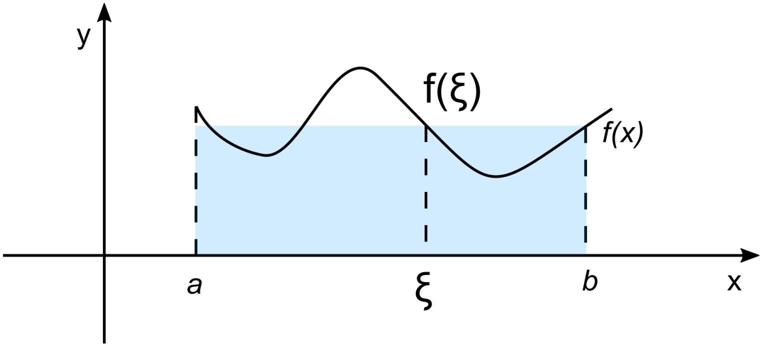


Integrální součet

Věta o střední hodnotě

Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje číslo ξ takové, že platí

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$



Integrální součet

Zvolme posloupnost dělení $D_1, D_2, ..., D_k$ a každé posloupnosti přiřadíme posloupnost bodů T_1, $T_2, .., T_k$. Získáme tak posloupnosti $S_1, S_2, ..., S_k$. Jestliže, je funkce $f(x)$ tzv. Riemannovsky integrovatelná, potom každá posloupnost S_i konverguje a platí

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Čím se liší jednotlivé členy posloupnosti $D_1, D2, ..., D_k$?

Integrální součet

Zvolme posloupnost dělení $D_1, D_2, ..., D_k$ a každé posloupnosti přiřadíme posloupnost bodů $T_1, T_2, .., T_k$. Získáme tak posloupnosti $S_1, S_2, ..., S_k$. Jestliže, je funkce $f(x)$ tzv. Riemannovsky integrovatelná, potom každá posloupnost S_i konverguje a platí

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Čím se liší jednotlivé členy posloupnosti $D_1, D2, ..., D_k$?
- Proč nelze jednoduše použít pouze Větu o střední hodnotě?

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

Numerická integrace

Riemannova integrace pracuje s nekonečně malými intervaly.

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right]$$

Věta o střední hodnotě vyžaduje znalost primitivní funkce k funkci $f(x)$.

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \to f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

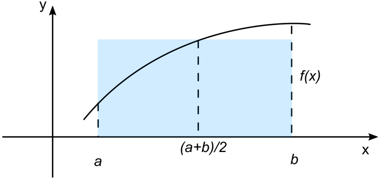
V numerické matematice pracujeme s konečně malými intervaly a snažíme se funkci $f(x)$ **aproximovat** na intervalu $\langle a, b\rangle$ funkcí jednodušší. Získáme tak odhad integrálu S.

$$S \approx \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Více lze o numerických metodách nalézt např. v [4] nebo v [5].

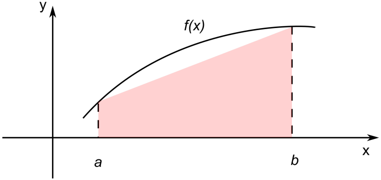
- Obdélníkové pravidlo

$$S = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



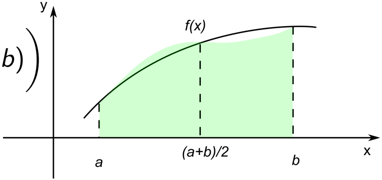
- Lichoběžníkové pravidlo

$$S = \frac{(b-a)}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$



- Simpsonovo pravidlo

$$S = \frac{(b-a)}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) f(b)\right)$$



Numerická integrace

Zvýšení přesnosti odhadu S v Newtonových-Cotesových vzorcích lze dosáhnout dělením intervalu $\langle a, b \rangle$ na n podintervalů.

- Lichoběžníkové pravidlo

Numerická integrace

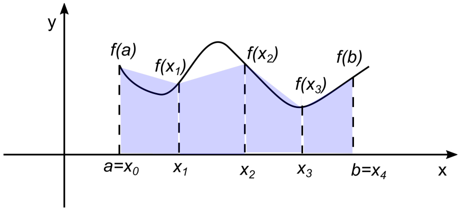
Zvýšení přesnosti odhadu S v Newtonových-Cotesových vzorcích lze dosáhnout dělením intervalu $\langle a, b \rangle$ na n podintervalů.

- Lichoběžníkové pravidlo
- Dělení intervalu $h = \frac{b-a}{n}$

Numerická integrace

Zvýšení přesnosti odhadu S v Newtonových-Cotesových vzorcích lze dosáhnout dělením intervalu $\langle a, b \rangle$ na n podintervalů.

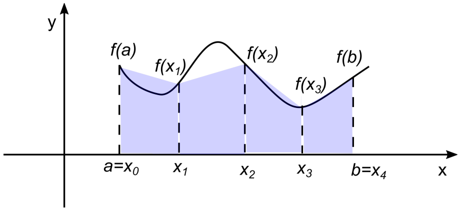
- Lichoběžníkové pravidlo
- Dělení intervalu $h = \frac{b-a}{n}$



Numerická integrace

Zvýšení přesnosti odhadu S v Newtonových-Cotesových vzorcích lze dosáhnout dělením intervalu $\langle a, b \rangle$ na n podintervalů.

- Lichoběžníkové pravidlo
- Dělení intervalu $h = \frac{b-a}{n}$



$$S = \frac{b-a}{2n}\left[\frac{f(a)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2} + \frac{f(x_3)+f(b)}{2}\right]$$

$$= h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

Integrace v Matlabu - cvičení

Pomocí symbolické matematiky vypočítejte následující integrály.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x$$

$$F(x) = \int x^a \mathrm{d}x$$

$$F(x) = \int \arccos(\sin x) \mathrm{d}x$$

$$F(x) = \int \ln(\sin x) \mathrm{d}x$$

Zkuste předem odhadnout podmínky integrace a existence primitivní funkce.

Numerická integrace v Matlabu - cvičení

Pomocí built-in funkcí nebo metod numerické matematiky vypočítejte následující určité integrály. Metody porovnejte mezi sebou z hlediska přesnosti výpočtu.

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{1} \left[x^2 - 2x + 6\right] \mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin(2x)\mathrm{d}x$$

Literatura I

Jura Charvát Bruno Budínský.
Matematika I - část 2.
Vydavatelství ČVUT, 2000.

Zdeněk Šibrava Jura Charvát, Martin Hála.
Příklady k matematice I.
Vydavatelství ČVUT, 2000.

Karel Rektorys a kol.
Přehled užité matematiky I.
SNTL, 1988.

William H. Press; Saul A. Teukolsky; William T. Vetterling; Brian P. Flannery.
Numerical Recipes in C - The art of scientific computing.
Cambridge university press, 2002.

Literatura II

Miroslav Vicher.
Numerická matematika.
Ediční středisko PF UJEP, 2003.

Mathworks: makers of matlab and simulink.
www.mathworks.com/help/.
Online [2017-20-12].

Adrian B. Biran.
What should every engineer know about Matlab and Simulink.
CRC Press, 2010.