Matematický software

Řešení nelineárních rovnic

RNDr. Zbyšek Posel, Ph.D.

Katedra informatiky

Úvod

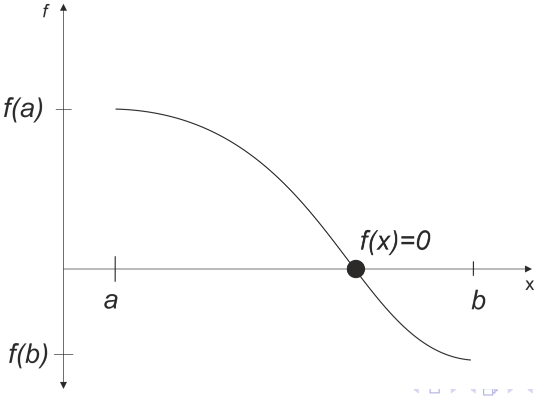
1. Omezíme se na hledání kořenů rovnice $f(x) = 0$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $f(x)$ je „rozumná“ funkce ve smyslu spojitosti atp.
2. Nebudeme probírat metody pro řešení algebraických rovnic $P_n(x) = 0$, kde P_n je polynom stupně n.
3. Většinou půjde o řešení jedné rovnice, některé metody (Newtonova) lze ale využít i pro řešení soustavy rovnic.
4. Nelineární rovnice: kvadratické, kubické, atp.
5. Hledáme přibližné řešení pomocí (pouze) iteračních metod a dbáme na
   - konvergenci k přesnému řešení,
   - rychlost konvergence k přesnmu řešení.
6. Standardní metody pro řešení nelineárních rovnic jsou metoda
   - bisekce,
   - prosté iterace,
   - regula falsi
   - sečen
   - Newtonova

Úvod

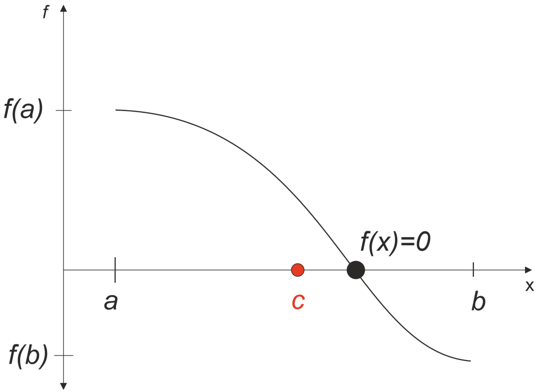
Hledáme řešení, tj **kořeny**, $x \in \mathbb{R}$ rovnice $f(x) = 0$ definované a spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$, kde platí

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

Poté existuje alespoň jeden bod x, náležející do intervalu $\langle a, b \rangle$, který splňuje rovnici $f(x) = 0$.



Odhad první iterace



Pro iterační metody potřebujeme „správný“ odhad první iterace x^0.

- Grafická metoda uvažuje možnost rozepsat funkci $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ a najít jejich průsečík
- Odhad pomocí pomocných přístupů jakými je například půlení intervalu $c = \frac{a+b}{2}$ atp.

Odhad první iterace

Pro iterační metody potřebujeme „správný“ odhad první iterace x^0.

- Grafická metoda uvažuje možnost rozepsat funkci $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ a najít jejich průsečík.
- Odhad pomocí pomocných přístupů jakými je například půlení intervalu $c = \frac{a+b}{2}$ atp.

Odhadněte hodnotu první iterace x_0 pomocí grafické metody u následujících funkcí.

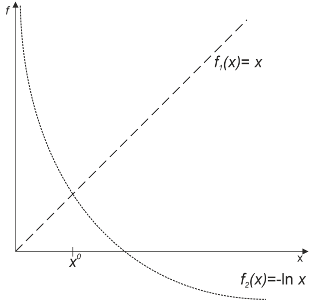
$$\begin{aligned} 0 &= x + \ln x \\ 0 &= \sin x - \frac{1}{2}x \\ 0 &= e^x + x^2 - 3 \end{aligned}$$

Odhad první iterace

Odhadněte hodnotu první iterace x^0 funkce $0 = x + \ln x$.

Funkci $f(x)$ hledáme ve tvaru $f_1(x) = x$ a $f_2(x) = \ln x$ a z toho vyplývá, že hledáme průsečík rovnice ve tvaru

$$x = -\ln x$$



- Průsečík obou funkcí je hledanou první iterací x^0.
- Funkce $f_1(x) = 0$ a $f_2(x) = 0$ nám udávají interval, které pro řešení budeme uvažovat.
- Pro zpřesnění řešení použijeme jednu z iteračních metod.

Metoda bisekce

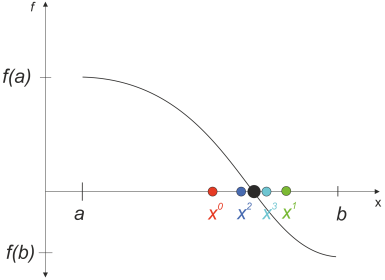
Metoda je založena na postupném půlení intervalu $\langle a, b \rangle$, a konstrukci posloupnosti nových intervalů vyhovujících podmínce $f(a^i) \cdot f(x^i)$ nebo $f(x^i) \cdot f(b^i)$, kdy posloupnost intervalů konverguje k hledanému kořenu rovnice x. První aproximace kořene rovnice je dána vztahem $x^0 = \frac{a+b}{2}$.

- Metoda konverguje vždy
- Rychlost konvergence je závislá na vhodné volbě první aproximace x^0
- Využívá se zejména pro zúžení intervalu, kd ehledáme kořen rovnice, poté se pokračuje s rychlejší metodou.

Metoda bisekce

Postup metody bisekce je následující (krok i)

- Rozpůlíme interval $\langle a^i, b^i \rangle$, tak že $x^i = \frac{a^i + b^i}{2}$.
- Dostaneme subintervaly $\langle a^i, x^i \rangle$ $\langle x^i, b^i \rangle$.
- Posoudíme podmínku $f(a^i) \cdot f(x^i) < 0$ a $f(x^i) \cdot f(b^i) < 0$.
- Vybereme interval vyhovující podmínce a dostaneme nový interval $\langle a^{i+1}, b^{i+1} \rangle$.
- Celý postup opakujeme.



- $i = 0$: $\langle a, b \rangle \to \langle a, x^0 \rangle, \langle x^0, b \rangle$
- $i = 1$: $\langle x^0, b \rangle \to \langle x^0, x^1 \rangle, \langle x^1, b \rangle$
- $i = 2$: $\langle x^0, x^1 \rangle \to \langle x^0, x^2 \rangle, \langle x^2, x^1 \rangle$
- $i = 3$: $\langle x^2, x^1 \rangle \to \langle x^2, x^3 \rangle, \langle x^3, x^1 \rangle$
- $i = 4$: ...
- $i = n$: STOP

Metoda bisekce

Iterační proces končí STOP podmínkou, kdy

- nalezneme kořen rovnice,
- je splněna konvergenční podmínka

$$b^k - a^k < 2\epsilon$$

- ϵ je požadovaná přesnost

Kořen rovnice je poté určen jako

$$x = \frac{a^k + b^k}{2}$$

Metoda regula falsi

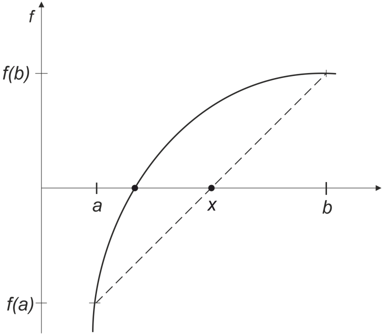
Jde o jednu z prvotních metod pro hledání kořenů rovnice, kde

- dělící bod intervalu x^i není volen půlením intervalu, ale
- je dán průsečíkem sečny funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a^i, b^i \rangle$ a osy x a
- stále platí podmínka $f(a^i)f(b^i) < 0$.
- Metoda je velice podobná metodě sečen, někdy se také nazývá metoda tětiv nebo false position method.

Metoda regula falsi

Mějme definovanou a spojitou funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom lze sečnu funkce $f(x)$ vyjádřit pomocí funkce přímky $y = kx + q$, kde $q = f(a)$, $x = x - a$ a $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ a ve tvaru

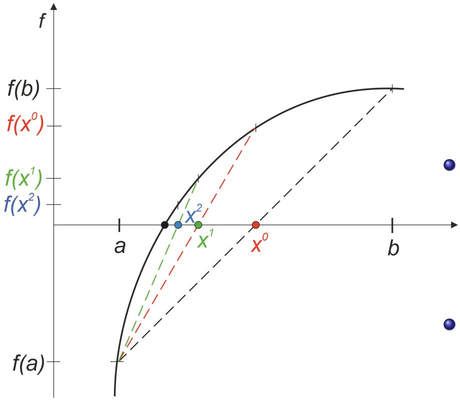
$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Průsečík s osou x lze tedy z výše uvedené rovnice spočítat jako

$$x = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

Metoda regula falsi



- Na intervalu $\langle a^i, b^i \rangle$ určíme průsečík jako

$$x^i = a^i - f(a^i)\frac{b^i - a^i}{f(b^i) - f(a^i)}$$

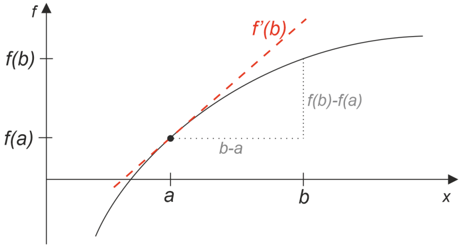
- Dle podmínky $f(a) \cdot f(b) < 0$ určíme, který z intervalů $\langle a^i, x^i \rangle$ nebo $\langle x^i, b^i \rangle$ budeme dále používat a označíme
  - $f(a^i) \cdot f(x^i) < 0 \rightarrow b^i = x^i$
  - $f(x^i) \cdot f(b^i) < 0 \rightarrow a^i = x^i$
- Celý postup opakujeme až do splnění STOP podmínky
  - $f(a^i) \cdot f(b^i) \leq \delta$
  - $|x^{i+1} - x^i| \leq \delta$

Metoda regula falsi

- Metoda konverguje vždy, ale v okolí kořene rovnice konverguje pomalu. Proto ji lze, stejně jako metodu bisekce, použít pro prvotní zúžení intervalu $\langle a, b \rangle$ a kořen najít metodou, která konverguje rychleji.
- Metoda je velice podobná metodě sečen s jedním podstatnáým rozdílem a to, že při metodě sečen nedochází k úpravě intervalu dle průsečíku x^i, ale ihned k výpočtu nového odhadu kořene. Metoda sečem proto nemusí konvergovat vždy, ale pokud konverguje, tak rychleji, než metoda regula falsi.

Newtonova metoda

- 1669 - formulovována a použita pro řešení kubické rovnice
- Použita pro aproximaci řešení k´Keplerových rovnic (transcendentní) pro pohyb planet.
- Pro stanovení odhadu kořene používá derivaci funkce $f(x)$ - metoda tečen.



$$f'(x) = \lim_{(b-a)\to\infty} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Newtonova metoda

Z Taylorova rozvoje funkce $f(x)$ kolem bodu x_0, kde $x = x_0 + a$, dostaneme řadu ve tvaru

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \underbrace{+ \ldots\ldots}_{O((x-x_0)^2)}$$

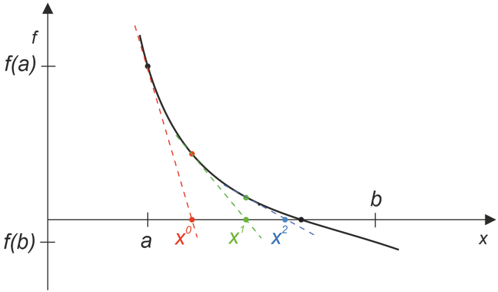
Pokud nahradíme $x^{i+1} = x$, $x^i = x_0$ a hledáme-li řešení ve tvaru $f(x) = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} f(x^{i+1}) &= f(x^i) + f'(x^i)(x^{i+1} - x^i) \\ x^{i+1} &= x^i - \frac{f(x^i)}{f'(x^i)} \end{aligned}$$

kde x^{i+1} je odhad kořene rovnice $f(x)$ pomocí Newtonovy metody

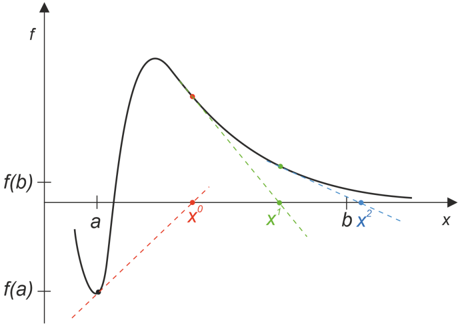
Newtonova metoda

$$x^{i+1} = x^i - \frac{f(x^i)}{f'(x^i)}$$



- Provedeme odhad kořene x^{i+1} pomocí derivace fukce $f'(x)$
- iterujeme až do splnění STOP podmínky $|x^{i+1} - x^i| < \delta$
- δ je přesnost se kterou chceme kořen rovnice najít

Newtonova metoda



- Metoda nekonverguje vždy, ale pokud konverguje jde o jednu z nejrychleji konvergujících metod
- Konveregnce je zaručena při splnění Fourierovy podmínky

Newtonova metoda

Mějme funkci $f(x)$ definovanou a spojitou na intervalu $\langle a, b \rangle$ tak, že existují derivace f' a f'', které nemění znaménko. Zvolíme-li počáteční aproximaci $x^0 \in \langle a, b, \rangle$ tak, aby buyla splněna podmínka

$$f(x^0) \cdot f''(x^0) > 0$$

bude Newtonova metoda konvergovat.

- Pokud $f'(x)$ nemění znaménko tak funkce na celém intervalu $\langle a, b, \rangle$ klesá nebo roste.
- Pokud $f''(x)$ nemění znaménko tak je funkce na celém intervalu $\langle a, b, \rangle$ konvexní nebo konkávní.

Cvičení

Pomocí výše uvedených metod najděte kořeny následujících rovnic.

$$
\begin{aligned}
0 =& x + \ln x \\
0 =& \sin x - \frac{1}{2}x \\
0 =& e^x + x^2 - 3 \\
0 =& x - e^{-x} \\
0 =& x \arctan x - 1
\end{aligned}
$$

Literatura I