

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П.Королёва»  
(Самарский университет)

Институт информатики, математики и электроники  
Факультет информатики  
Кафедра технической кибернетики

**Отчет по курсовой работе**

Дисциплина «Численные методы математической физики»

Тема: **«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ  
РАЗНОСТЕЙ»**

Вариант № 40

Выполнил студент:

Белоусов А. А.

Группа:

6409-010302D

Проверил:

Дегтярев А. А.

Самара 2019

## ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

1. Осуществить математическую постановку краевой задачи для физического процесса, описанного в предложенном варианте курсовой работы.
2. Осуществить построение разностной схемы, приближающей полученную краевую задачу. При этом следует согласовать с преподавателем тип разностной схемы.
3. Провести теоретическое исследование схемы: показать, что схема аппроксимирует исходную краевую задачу, и найти порядки аппроксимации относительно шагов дискретизации; исследовать устойчивость схемы и сходимость сеточного решения к решению исходной задачи математической физики.
4. Разработать алгоритм численного решения разностной краевой задачи
5. Разработать компьютерную программу, реализующую созданный алгоритм, с интерфейсом, обеспечивающим следующие возможности: диалоговый режим ввода физических, геометрических и сеточных параметров задачи; графическую визуализацию численного решения задачи.
6. Используя разработанную программу и тестовый пример, согласованный с преподавателем, провести экспериментальное исследование фактической сходимости сеточного решения к точному (вычисленному с помощью ряда Фурье). Проводя измельчение сетки, сравнить экспериментальную скорость убывания погрешности сеточного решения со скоростью, полученной при теоретическом исследовании схемы.
7. Оформить отчет о проделанной работе.

### **ВАРИАНТ 40**

Разработать программу расчета на промежутке времени  $0 < t \leq T$  малых поперечных колебаний прямоугольной однородной мембраны шириной  $l_x$  и длиной  $l_y$ . Колебания мембраны возбуждаются начальным отклонением

$$u(x, y, t = 0) = \alpha(x, y), 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y.$$

Края мембраны  $x = 0, x = l_x, y = 0$  и  $y = l_y$  жестко закреплены, а реакция окружающей среды пренебрежимо мала. Начальные скорости точек мембраны равны нулю.

Поверхностная плотность мембраны и величина натяжения, возникающего в ней в процессе колебаний, равны  $\rho$  и  $\eta$  соответственно.

Для решения описанной задачи математической физики применить метод разделения переменных. Для расчетов использовать представление решения задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям оператора Лапласа, удовлетворяющим соответствующим краевым условиям.

При проведении расчетов использовать значения параметров  $l_x, l_y, T, \rho, \eta$ , а также выражение функции  $\alpha(x, y)$ , указанные преподавателем.

Для численного решения описанной задачи математической физики использовать следующие разностные схемы:

- простейшую явную конечно-разностную схему;

Значения параметров, указанные преподавателем:

$$l_x = 4,$$

$$l_y = 1,$$

$$T = 10,$$

$$\rho = 1,$$

$$\eta = 1,$$

$$\alpha(x, y) = p(x, y) \sin\left(\frac{\pi y}{l_y}\right)$$

$$p(x, y) = -\frac{x^2}{4} + x$$

## РЕФЕРАТ

Отчёт: 17 страниц, 3 рисунков, 1 таблица, 4 источника, 1 приложение.

*УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, УРАВНЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ, ЯВНАЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА, УСТОЙЧИВОСТЬ, АППРОКСИМАЦИЯ, СХОДИМОСТЬ*

Целью курсовой работы является построение и исследование разностных схем для решения краевой задачи колебаний прямоугольной мембраны.

Для решения задачи была использована явная конечно-разностная схема. Проведено теоретическое исследование аппроксимации и устойчивости разностной схемы. Сделан вывод о сходимости сеточного решения к точному решению исходной задачи.

Разработана компьютерная программа, обеспечивающая расчет и графическую визуализацию процесса колебаний мембраны.

Приведены графические результаты численного решения задачи колебаний мембраны.

Программа написана на языке Python в среде разработки PyCharm, операционная система Windows.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	6
1 Постановка краевой задачи .....	7
2 Решение краевой задачи с помощью простейшей явной схемы .....	8
2.1 Построение простейшей явной схемы .....	8
2.2 Получение расчетных формул .....	9
2.3 Исследование аппроксимации простейшей явной схемы .....	9
3 Результаты вычислительного эксперимента .....	12
Заключение .....	15
Список использованных источников.....	16
Приложение А Код программы.....	17

## ВВЕДЕНИЕ

Характеризуя метод конечных разностей, необходимо выделить его достоинства и недостатки в сравнении с другими методами.

К достоинствам метода конечных разностей следует отнести его высокую универсальность, например, значительно более высокую, чем у аналитических методов. Применение этого метода нередко характеризуется относительной простотой построения решающего алгоритма и его программной реализации. Зачастую удастся осуществить распараллеливание решающего алгоритма.

К числу недостатков метода следует отнести: проблематичность его использования на нерегулярных сетках; очень быстрый рост вычислительной трудоемкости при увеличении размерности задачи (увеличении числа неизвестных переменных); сложность аналитического исследования свойств разностной схемы.

Суть метода конечных разностей состоит в замене исходной(непрерывной) задачи математической физики ее дискретным аналогом (разностной схемой), а также последующим применением специальных алгоритмов решения дискретной задачи.

В настоящей работе метод конечных разностей применен для численного решения задачи диффузии. Проведены теоретические исследования аппроксимации и устойчивости разностных схем. Сделан вывод о сходимости сеточного решения к точному решению исходной задачи. Разработана компьютерная программа, реализующая алгоритм скалярной прогонки. Приведены графические результаты численного решения задачи.

## 1 Постановка краевой задачи

Построим математическую модель поперечных колебаний тонкой однородной мембраны. Уравнение свободных поперечных колебаний мембраны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (1)$$

В условии задачи указано, что края мембраны жестко закреплены. Отсюда следуют граничные условия:

$$u|_{x=0}, \quad u|_{y=0}, \quad u|_{x=l_x}, \quad u|_{y=l_y} = 0. \quad (2)$$

По условию, в начальный момент времени отклонение мембраны задано функцией  $\alpha(x, y)$ , а начальная скорость точек мембраны равна нулю. Отсюда получаем начальные условия:

$$u|_{t=0} = p(x, y) \sin\left(\frac{\pi y}{l_y}\right);$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

Производим следующую замену:

$$u(x, y, t) = \nu(x, t) \sin\left(\frac{\pi y}{l_y}\right). \quad (3)$$

Подставляем в исходное уравнение, переходим к виду:

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} = \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{\pi^2}{l_y^2} \nu(x, t) \right). \quad (4)$$

Пересчитываем начальные условия для  $\nu(x, y)$ :

$$\nu|_{t=0} = p(x, y);$$
$$\frac{\partial \nu}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

Таким образом, имея уравнение, набор граничных и начальных условий, получим математическую модель, описывающую нашу задачу:

$$u(x, y, t) = \nu(x, t) \sin\left(\frac{\pi y}{l_y}\right); \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} = \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \left( \frac{\pi}{l_y} \right)^2 \nu(x, t) \right), & 0 \leq x \leq l_x; \\ \nu|_{x=0}, \quad \nu|_{x=l_x} = 0; \\ \nu|_{t=0} = p(x); \\ \frac{\partial \nu}{\partial t}|_{t=0} = 0; \end{cases} \quad (6)$$

## 2 Решение краевой задачи с помощью простейшей явной схемы

### 2.1 Построение простейшей явной схемы

Для построения простейшей неявной разностной схемы для задачи (6) заменим все непрерывные соотношения их сеточными аналогами. В данном случае будем использовать равномерную сетку, определяемую как следующее множество узлов  $(x_i, t_k)$ :

$$\begin{aligned} x_i &= ih_x; i = \overline{0, I}; h_x = \frac{L}{I}, \\ t_k &= kh_t; k = \overline{0, K}; h_t = \frac{T}{K}. \end{aligned} \quad (7)$$

Заменим частные производные, входящие в состав (6) следующими разностными соотношениями:

$$\frac{\partial \nu(x_i, t_k)}{\partial t} \approx \frac{\nu(x_i, t_k) - \nu(x_i, t_{k-1})}{h_t}, k = \overline{1, I}, i = \overline{0, I}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \nu(x_i, t_k)}{\partial t^2} \approx \frac{\nu(x_i, t_{k-1}) - 2\nu(x_i, t_k) + \nu(x_i, t_{k+1}))}{h_t^2}, i = \overline{1, I-1}, k = \overline{0, K}. \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \nu(x_i, t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{\nu(x_{i-1}, t_k) - 2\nu(x_i, t_k) + \nu(x_{i+1}, t_k))}{h_x^2}, i = \overline{1, I-1}, k = \overline{0, K}. \quad (10)$$

Заменим правую часть начального условия следующей сеточной функцией:

$$p(x_i) = \psi_i, i = \overline{1, I}. \quad (11)$$

После произведенных преобразований запишем общий вид простейшей явной разностной схемы для задачи (6):

$$\begin{cases} \frac{\nu_i^{k-1} - 2\nu_i^k + \nu_i^{k+1}}{h_t^2} = \alpha^2 \left( \frac{\nu_{i-1}^k - 2\nu_i^k + \nu_{i+1}^k}{h_x^2} - \left( \frac{\pi}{l_y} \right)^2 \nu_i^k \right), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K-1} \\ \frac{\nu_i^1 - \nu_i^0}{h_t} = 0, i = \overline{1, I-1} \\ \nu_i^0 = \psi_i, i = \overline{1, I-1} \\ \nu_0^k = 0, k = \overline{1, K} \\ \nu_I^k = 0, k = \overline{1, K} \end{cases} \quad (12)$$

Система соотношений (12) представляет собой конечный вид разностной схемы, используемой в рамках данной курсовой работы.



## 2.2 Получение расчетных формул

Выразим из (12) явные расчетные формулы для численного решения задачи (6):

Расчетная формула для  $i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K-1}$ :

$$\gamma = \left( \frac{\alpha h_t}{h_x} \right)^2$$

$$\nu_i^{k+1} = \gamma \nu_{i-1}^k + \left( -2\gamma + 2 - \left( \frac{\alpha \pi h_t}{l_y} \right)^2 \right) \nu_i^k + \gamma \nu_{i+1}^k - \nu_i^{k-1} \quad (13)$$

Расчетная формула для  $i = \overline{1, I-1}, k = 0$ :

$$\nu_i^1 = -\frac{i h_x^2}{l_x} + i h_x \quad (14)$$

Расчетная формула для  $i = 0, k = \overline{1, K-1}$ :

$$\nu_0^k = 0 \quad (15)$$

Расчетная формула для  $i = I, k = \overline{1, K-1}$ :

$$\nu_I^k = 0 \quad (16)$$

## 2.3 Исследование аппроксимации простейшей явной схемы

Запишем разностную схему (12) в операторной форме:

$$L_h \nu_h = f_h$$

$$L_h \nu_h = \begin{pmatrix} L_h^1 \nu_h \\ L_h^2 \nu_h \\ L_h^3 \nu_h \\ L_h^4 \nu_h \\ L_h^5 \nu_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\nu_i^{k-1} - 2\nu_i^k + \nu_i^{k+1}}{h_t^2} - \alpha^2 \left( \frac{\nu_{i-1}^k - 2\nu_i^k + \nu_{i+1}^k}{h_x^2} - \left( \frac{\pi}{l_y} \right)^2 \nu_i^k \right) \\ \frac{\nu_i^1 - \nu_i^0}{h_t} \\ \nu_i^0 \\ \nu_0^k \\ \nu_I^k \end{pmatrix}$$

$$f_h = \begin{pmatrix} f_h^1 \\ f_h^2 \\ f_h^3 \\ f_h^4 \\ f_h^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(17)

Невязка запишется следующим образом:

$$\delta f_h = \begin{pmatrix} \delta f_h^1 \\ \delta f_h^2 \\ \delta f_h^3 \\ \delta f_h^4 \\ \delta f_h^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [L_h^1[\nu]_h - f_h^1] \\ [L_h^2[\nu]_h - f_h^2] \\ [L_h^3[\nu]_h - f_h^3] \\ [L_h^4[\nu]_h - f_h^4] \\ [L_h^5[\nu]_h - f_h^5] \end{pmatrix} \quad (18)$$

Определим порядок невязки, выбрав максимальный из всех элементов вектора. Зафиксируем узел сетки и разложим все функции, входящие в состав каждого оператора (17) в ряд Тейлора в окрестности выбранного узла.

Невязка для первого оператора имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta f_h^1|_{(x_i, t_k)} &= [L_h^1[\nu]_h - f_h^1]_{(x_i, t_k)} = \frac{\nu(x_i, t_{k-1}) - 2\nu(x_i, t_k) + \nu(x_i, t_{k+1}))}{h_t^2} \\ &- \alpha^2 \left( \frac{\nu(x_{i-1}, t_k) - 2\nu(x_i, t_k) + \nu(x_{i+1}, t_k)}{h_x^2} - \left( \frac{\pi}{ly} \right)^2 \nu(x_i, t_k) \right) = \\ &(\nu_t - h_t \nu'_t + \frac{h_t^2 \nu''_{tt}}{2} - \frac{h_t^3 \nu'''_{ttt}}{6} + \frac{h_t^4 \nu^{IV}_{tttt}}{24} - 2\nu_t \\ &+ \nu_t + h_t \nu'_t + \frac{h_t^2 \nu''_{tt}}{2} + \frac{h_t^3 \nu'''_{ttt}}{6} + \frac{h_t^4 \nu^{IV}_{tttt}}{24} + O(h_t^5)) \frac{1}{h_t^2} \\ &- \alpha((\nu_x - h_x \nu'_x + \frac{h_x^2 \nu''_{xx}}{2} - \frac{h_x^3 \nu'''_{xxx}}{6} + \frac{h_x^4 \nu^{IV}_{xxxx}}{24} - 2\nu_x \\ &+ \nu_x + h_x \nu'_x + \frac{h_x^2 \nu''_{xx}}{2} + \frac{h_x^3 \nu'''_{xxx}}{6} + \frac{h_x^4 \nu^{IV}_{xxxx}}{24} + O(h_x^5)) \frac{1}{h_x^2} - \left( \frac{\pi}{ly} \right)^2 \nu) \\ &= \nu''_t + \frac{h_t^2 \nu^{IV}_{tttt}}{12} + O(h_t^3) - \alpha^2 \left( \nu''_x + \frac{h_x^2 \nu^{IV}_{xxxx}}{12} + O(h_x^3) - \left( \frac{\pi}{ly} \right)^2 \nu \right) \\ &= O(h_t^2, h_x^2) \end{aligned} \quad (19)$$

Для второго оператора невязка равна:

$$\begin{aligned} \delta f_h^2|_{(x_i, t_0)} &= [L^2[u]_h - f_h^2]_{(x_i, t_0)} = \\ &\frac{\nu(x_i, 1) - \nu(x_i, 0)}{h_t} - 0 = \left( \nu_t(0) + h_t \nu'_t(0) + \frac{h_t^2 \nu''_{tt}(0)}{2} + O(h_t^3) \right) \frac{1}{h_t} = \\ &\frac{\nu''_t(0)}{2h_t} + O(h_t^2) = O(h_t) \end{aligned}$$

Невязка для третьего оператора:

$$\delta f_h^3|_{(x_i, t_0)} = [L^3[u]_h - f_h^3]_{(x_i, t_0)} = \nu(x_i, 0) - \psi_i = \psi_i - \psi_i = 0.$$

Невязка для четвертого оператора:

$$\delta f_h^4|_{(x_0, t_k)} = [L^4[u]_h - f_h^4]_{(x_0, t_k)} = \nu(0, t_k) - 0 = 0.$$

Невязка для пятого оператора:

$$\delta f_h^5|_{(x_I, t_k)} = [L^5[u]_h - f_h^5]_{(x_I, t_k)} = \nu(l_x, t_k) - 0 = 0.$$

После нахождения всех необходимых величин, определим порядок аппроксимации неявной схемы, применив равномерную норму к порядкам аппроксимации всех выражений, входящих в состав схемы:

$$||\delta f_h||_{F_h} = \max_{\substack{i=\overline{1, I-1} \\ k=\overline{0, K-1}}} |\delta f_h^1| + \max_{i=\overline{0, I}} |\delta f_h^2| + \max_{k=\overline{1, K}} |\delta f_h^3| + \max_{k=\overline{1, K}} |\delta f_h^4| + \max_{k=\overline{1, K}} |\delta f_h^5| = O(h_t, h_x^2). \quad (20)$$

В ходе исследования было установлено, что простейшая явная схема аппроксимирует исходную задачу линейно относительно шага по времени  $h_t$  и квадратично относительно шага по пространственной переменной  $h_x$ .

### 3 Результаты вычислительного эксперимента

В ходе курсовой работы была реализована программа, осуществляющая численное решение задачи колебаний прямоугольной мембраны в промежутке времени от 0 до  $T$ , на основе простейшей явной разностной схемы.

На рисунках 1-3 приведены графики зависимости положения точек поверхности мембраны от пространственной переменной  $x$  в момент времени  $t = 0.75$ , полученные с помощью простейшей явной схемы.

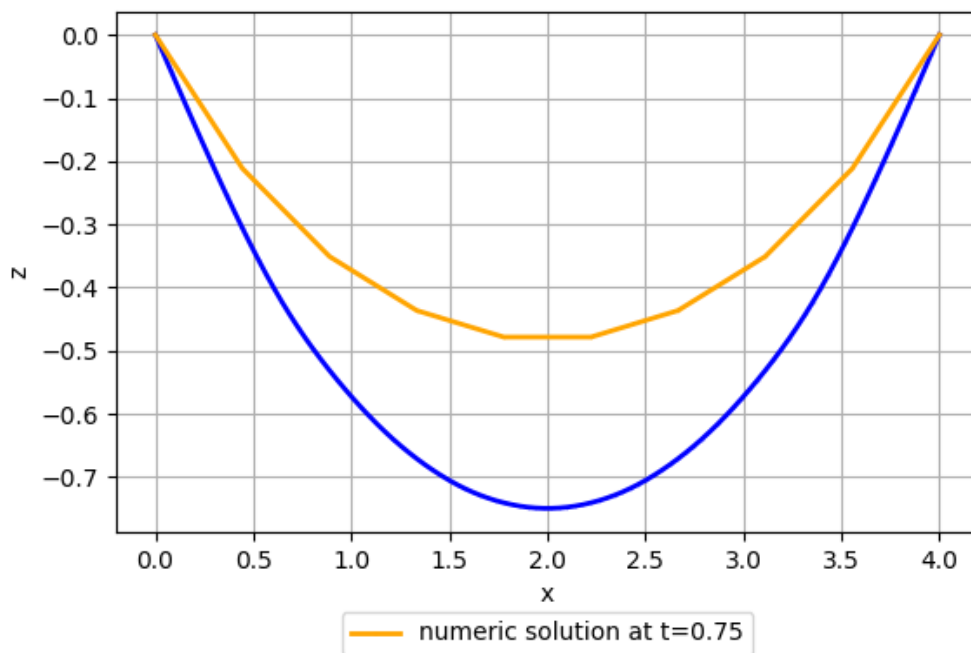
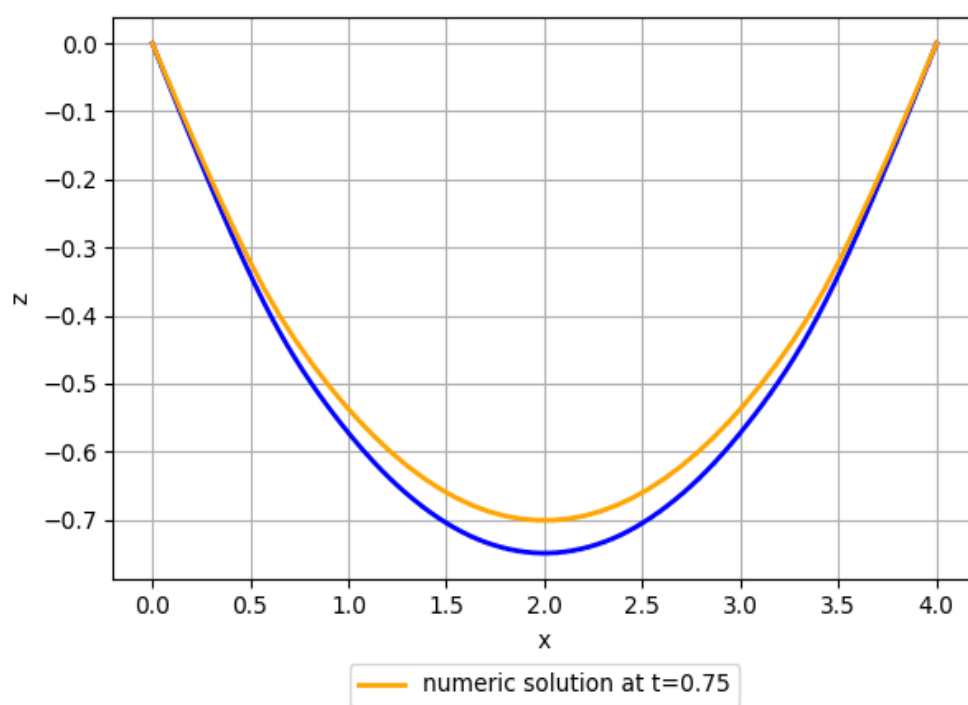
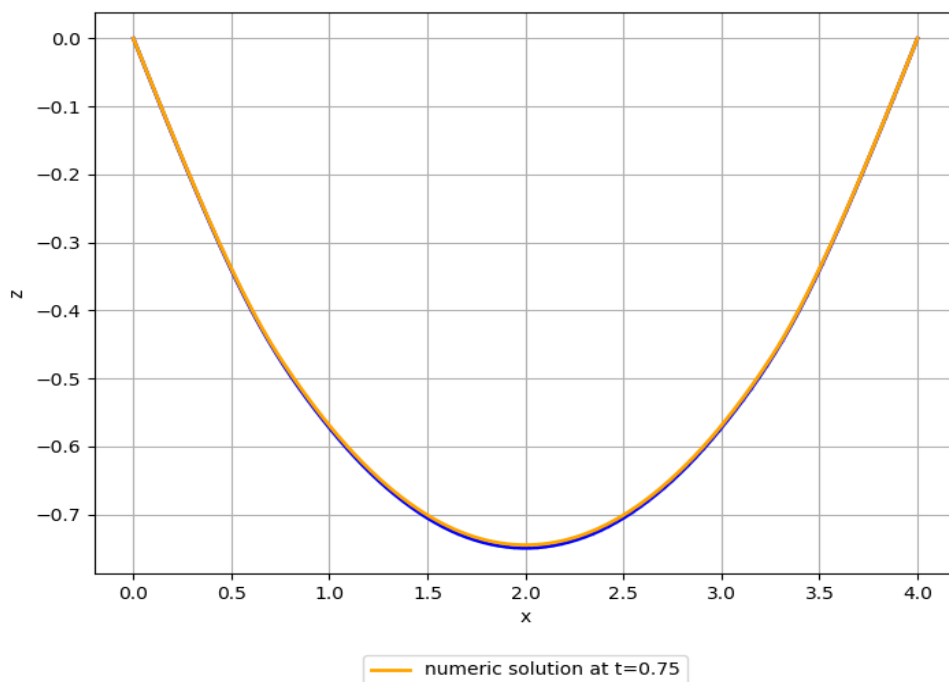


Рисунок 1 – График численного и аналитического решений при параметрах

$$K = 10, I = 10, t = 0.75$$



*Рисунок 2 – График численного и аналитического решений при параметрах  
 $K = 50, I = 50, t = 0.75$*



*Рисунок 3 – График численного и аналитического решений при параметрах*

$$K = 500, I = 500, t = 0.75$$

Как видно из рисунков 1-3 с увеличением числа узлов сетки наблюдается визуальная сходимость, иными словами численное решение приближается к точному решению исходной задачи.

Исследуем экспериментально скорость сходимости неявной схемы. Для этого выберем некоторую достаточно крупную сетку и будем ее последовательно измельчать, каждый раз определяя величину абсолютной погрешности.

Результаты экспериментального исследования сходимости разностной схемы представлены в таблице 1:

*Таблица 1 – Погрешность простейшей явной схемы*

K	I	$h_t$	$h_x$	$\epsilon_{(h,\tau)}$	$\delta_{(h,\tau)}$
101	31	1	1	$5.04 \times 10^{-4}$	-
401	61	0.25	0.5	$1.27 \times 10^{-4}$	3.97
1601	121	0.0625	0.25	$3.17 \times 10^{-5}$	3.99

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В результате выполнения работы осуществлена постановка краевой задачи для уравнения поперечных колебаний тонкой прямоугольной мембраны. Для численного решения краевой задачи построена простейшая явная разностная схема.

Проведено теоретическое исследование разностной схемы, в результате которого установлено, что явная схема имеет линейный порядок аппроксимации для временной переменной и квадратичный для пространственной переменной.

В результате серии вычислительных экспериментов заметна визуальная сходимость разностного решения, вычисляемого с помощью схем, при увеличении количества шагов, т.е. с измельчением сетки решение дискретной задачи приближается к решению исходной задачи.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Дегтярев А.А. Примеры построения и исследования разностных схем. – Электронное учебное пособие [Электронный ресурс] / А.А Дегтярев, 2011.- 54с.
- 2 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики (5-е изд.) [Текст] / Тихонов А.Н., Самарский А.А. М.: Наука, 1977.- 742 с.
- 3 Numpy and Scipy Documentation [Электронный ресурс]: Официальный сайт документации библиотек Numpy и Scipy. - URL: <https://docs.scipy.org/doc/>
- 4 Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике [Текст] / Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. М.: МГУ, 1993. - 352 с.



## **ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**Код программы**