МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П.Королёва»
(Самарский университет)

Институт информатики, математики и электроники
Факультет информатики
Кафедра технической кибернетики

Отчет по курсовой работе

Дисциплина «Численные методы математической физики»

Тема: «**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ**»

Вариант № 40

Выполнил студент: Белоусов А. А.

Группа: 6409-010302D

Проверил: Дегтярев А. А.

Самара 2019

ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

1. Осуществить математическую постановку краевой задачи для физического процесса, описанного в предложенном варианте курсовой работы.

2. Осуществить построение разностной схемы, приближающей полученную краевую задачу. При этом следует согласовать с преподавателем тип разностной схемы.

3. Провести теоретическое исследование схемы: показать, что схема аппроксимирует исходную краевую задачу, и найти порядки аппроксимации относительно шагов дискретизации; исследовать устойчивость схемы и сходимость сеточного решения к решению исходной задачи математической физики.

4. Разработать алгоритм численного решения разностной краевой задачи

5. Разработать компьютерную программу, реализующую созданный алгоритм, с интерфейсом, обеспечивающим следующие возможности: диалоговый режим ввода физических, геометрических и сеточных параметров задачи; графическую визуализацию численного решения задачи.

6. Используя разработанную программу и тестовый пример, согласованный с преподавателем, провести экспериментальное исследование фактической сходимости сеточного решения к точному (вычисленному с помощью ряда Фурье). Проводя измельчение сетки, сравнить экспериментальную скорость убывания погрешности сеточного решения со скоростью, полученной при теоретическом исследовании схемы.

7. Оформить отчет о проделанной работе.

ВАРИАНТ 40

Разработать программу расчета на промежутке времени $0 < t \leq T$ малых поперечных колебаний прямоугольной однородной мембраны шириной l_x и длиной l_y. Колебания мембраны возбуждаются начальным отклонением

$$u(x, y, t = 0) = \alpha(x, y), 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y.$$

Края мембраны $x = 0, x = l_x, y = 0$ и $y = l_y$ жестко закреплены, а реакция окружающей среды пренебрежимо мала. Начальные скорости точек мембраны равны нулю.

Поверхностная плотность мембраны и величина натяжения, возникающего в ней в процессе колебаний, равны ρ и η соответственно.

Для решения описанной задачи математической физики применить метод разделения переменных. Для расчетов использовать представление решения задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям оператора Лапласа, удовлетворяющим соответствующим краевым условиям.

При проведении расчетов использовать значения параметров l_x, l_y, T, ρ, η, а также выражение функции $\alpha(x, y)$, указанные преподавателем.

Для численного решения описанной задачи математической физики использовать следующие разностные схемы:

- простейшую явную конечно-разностную схему;

Значения параметров, указанные преподавателем:

$$\begin{aligned}
l_x &= 4, \\
l_y &= 1, \\
T &= 10, \\
\rho &= 1, \\
\eta &= 1, \\
\alpha(x, y) &= p(x, y) \sin(\frac{\pi y}{l_y}) \\
p(x, y) &= \frac{x^2}{4} + x
\end{aligned}$$

РЕФЕРАТ

Отчёт: 14 страниц, 0 рисунков, 0 таблица, 4 источника, 1 приложение.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, УРАВНЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ, ЯВНАЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА, УСТОЙЧИВОСТЬ, АППРОКСИМАЦИЯ, СХОДИМОСТЬ

Целью курсовой работы является построение и исследование разностных схем для решения краевой задачи колебаний прямоугольной мембраны.

Для решения задачи были использованы явная конечно-разностная схема и схема Кранка-Николсона. Проведено теоретическое исследование аппроксимации и устойчивости разностных схем. Сделан вывод о сходимости сеточного решения к точному решению исходной задачи.

Разработана компьютерная программа, обеспечивающая расчет и графическую визуализацию процесса колебаний мембраны.

Приведены графические результаты численного решения задачи колебаний мембраны.

Программа написана на языке Python в среде разработки PyCharm, операционная система Windows.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Характеризуя метод конечных разностей, необходимо выделить его достоинства и недостатки в сравнении с другими методами.

К достоинствам метода конечных разностей следует отнести его высокую универсальность, например, значительно более высокую, чем у аналитических методов. Применение этого метода нередко характеризуется относительной простотой построения решающего алгоритма и его программной реализации. Зачастую удается осуществить распараллеливание решающего алгоритма.

К числу недостатков метода следует отнести: проблематичность его использования на нерегулярных сетках; очень быстрый рост вычислительной трудоемкости при увеличении размерности задачи (увеличении числа неизвестных переменных); сложность аналитического исследования свойств разностной схемы.

Суть метода конечных разностей состоит в замене исходной(непрерывной) задачи математической физики ее дискретным аналогом (разностной схемой), а также последующим применением специальных алгоритмов решения дискретной задачи.

В настоящей работе метод конечных разностей применен для численного решения задачи диффузии. Проведены теоретические исследования аппроксимации и устойчивости разностных схем. Сделан вывод о сходимости сеточного решения к точному решению исходной задачи. Разработана компьютерная программа, реализующая алгоритм скалярной прогонки. Приведены графические результаты численного решения задачи.

1 Постановка краевой задачи

Построим математическую модель поперечных колебаний тонкой однородной мембраны. Уравнение свободных поперечных колебаний мембраны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}). \tag{1}$$

В условии задачи указано, что края мембраны жестко закреплены. Отсюда следуют граничные условия:

$$u|_{x=0}, \quad u|_{y=0}, \quad u|_{x=l_x}, \quad u|_{y=l_y} = 0. \tag{2}$$

По условию, в начальный момент времени отклонение мембраны задано функцией $\alpha(x, y)$, а начальная скорость точек мембраны равна нулю. Отсюда получаем начальные условия:

$$u|_{t=0} = p(x, y) \sin(\frac{\pi y}{l_y});$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

Производим следующую замену:

$$u(x, y, t) = \nu(x, t) \sin(\frac{\pi y}{l_y}). \tag{3}$$

Подставляем в исходное уравнение, переходим к виду:

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} = \alpha^2 (\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{\pi^2}{l_y} \nu(x, t)). \tag{4}$$

Пересчитываем начальные условия для $\nu(x, y)$:

$$\nu|_{t=0} = p(x, y);$$
$$\frac{\partial \nu}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

Таким образом, имея уравнение, набор граничных и начальных условий, получим математическую модель, описывающую нашу задачу:

$$u(x, y, t) = \nu(x, t) \sin(\frac{\pi y}{l_y}); \tag{5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \left(\dfrac{\pi}{l_y} \right)^2 \nu(x, t) \right), \quad 0 \le x \le l_x; \\ \nu|_{x=0}, \quad \nu|_{x=l_x} = 0; \\ \nu|_{t=0} = p(x); \\ \dfrac{\partial \nu}{\partial t}|_{t=0} = 0; \end{cases} \tag{6}$$

2 Решение краевой задачи с помощью простейшей явной схемы

2.1 Построение простейшей явной схемы

Для построения простейшей неявной разностной схемы для задачи (6) заменим все непрерывные соотношения их сеточными аналогами. В данном случае будем использовать равномерную сетку, определяемую как следующее множество узлов (x_i, t_k):

$$x_i = ih_x; i = \overline{0, I}; h_x = \frac{L}{I},$$
$$t_k = kh_t; k = \overline{0, K}; h_t = \frac{T}{K}. \tag{7}$$

Заменим частные производные, входящие в состав (6) следующими разностными соотношениями:

$$\frac{\partial \nu(x_i, t_k)}{\partial t} \approx \frac{\nu(x_i, t_k) - \nu(x_i, t_{k-1})}{h_t}, k = \overline{1, I}, i = \overline{0, I}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \nu(x_i, t_k)}{\partial t^2} \approx \frac{\nu(x_i, t_{k-1}) - 2\nu(x_i, t_k) + \nu(x_i, t_{k+1})}{h_t^2}, i = \overline{1, I-1}, k = \overline{0, K}. \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 \nu(x_i, t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{\nu(x_{i-1}, t_k) - 2\nu(x_i, t_k) + u(x_{i+1}, t_k)}{h_x^2}, i = \overline{1, I-1}, k = \overline{0, K}. \tag{10}$$

Заменим правую часть начального условия следующей сеточной функцией:

$$p(x_i) = \psi_i, i = \overline{1, I}. \tag{11}$$

После произведенных преобразований запишем общий вид разностной схемы для задачи (6):

$$\begin{cases} \dfrac{\nu_i^{k-1} - 2\nu_i^k + \nu_i^{k+1}}{h_t^2} = \alpha^2 \left(\dfrac{\nu_{i-1}^k - 2\nu_i^k + \nu_{i+1}^k}{h_x^2} - \left(\dfrac{\pi}{l_y}\right)^2 \nu_i^k \right), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K-1} \\ \dfrac{\nu_i^1 - \nu_i^0}{h_t} = 0, i = \overline{1, I-1} \\ \nu_i^0 = \psi_i, i = \overline{1, I-1} \\ \nu_0^k = 0, k = \overline{1, K} \\ \nu_I^k = 0, k = \overline{1, K} \end{cases} \tag{12}$$

Система соотношений (12) представляет собой конечный вид разностной схемы, используемой в рамках данной курсовой работы.

2.2 Исследование аппроксимации простейшей явной схемы

Запишем разностную схему (12) в операторной форме:

$$L_h \nu_h = f_h$$

$$L_h \nu_h = \begin{pmatrix} L_h^1 \nu_h \\ L_h^2 \nu_h \\ L_h^3 \nu_h \\ L_h^4 \nu_h \\ L_h^5 \nu_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\nu_i^{k-1} - 2\nu_i^k + \nu_i^{k+1}}{h_t^2} - \alpha^2 \left(\dfrac{\nu_{i-1}^k - 2\nu_i^k + \nu_{i+1}^k}{h_x^2} - \left(\dfrac{\pi}{l_y}\right)^2 \nu_i^k \right) \\ \dfrac{\nu_i^1 - \nu_i^0}{h_t} \\ \nu_i^0 \\ \nu_0^0 \\ \nu_I^k \end{pmatrix}$$

$$f_h = \begin{pmatrix} f_h^1 \\ f_h^2 \\ f_h^3 \\ f_h^4 \\ f_h^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Невязка запишется следующим образом:

$$\delta f_h = \begin{pmatrix} \delta f_h^1 \\ \delta f_h^2 \\ \delta f_h^3 \\ \delta f_h^4 \\ \delta f_h^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_h^1[\nu]_h - f_h^1 \\ L_h^1[\nu]_h - f_h^1 \\ L_h^1[\nu]_h - f_h^1 \\ L_h^1[\nu]_h - f_h^1 \\ L_h^1[\nu]_h - f_h^1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Зафиксируем узел сетки и распишем все функции, входящие в состав каждого оператора (13) в ряд Тейлора в окрестности выбранного узла.

Распишем вспомогательные разложения:

$$\begin{aligned} &\frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\tau} = \frac{1}{\tau}(u_t^{'}\tau - \frac{u_{tt}^{''}\tau^2}{2} + O(\tau^3)), \\ &\frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)}{h^2} = \frac{1}{h^2}(u_{xx}^{''}h^2 - \frac{u_{xxxx}^{IV}h^4}{12} + O(h^5)). \end{aligned} \tag{15}$$

Принимая в расчет (15) невязка для первого оператора примет вид:

$$\delta f_h^1|_{(x_i,t_k)} = [L_h^1[u]_h - f_h^1]_{(x_i,t_k)} = \frac{1}{\tau}(u_t^{'}\tau - \frac{u_{tt}^{''}\tau^2}{2} + O(\tau^3))$$
$$-\frac{\alpha}{h^2C}(u_{xx}^{''}h^2 - \frac{u_{xxxx}^{IV}h^4}{12} + O(h^5)) + \frac{Du}{C} =$$
$$(\frac{-u_{tt}^{''}\tau}{2} - \frac{\alpha}{C}\frac{u_{xxxx}^{IV}h^2}{12} + \frac{Du}{C} + O(\tau^2) + O(h^3)) = O(h^2,\tau).$$

Для второго оператора невязка равна:

$$\delta f_h^2|_{(x_i,t_0)} = [L^2[u]_h - f_h^2]_{(x_i,t_0)} = u(x_i,0) - 0 = 0.$$

Невязка для третьего оператора:

$$\delta f_h^3|_{(x_0,t_k)} = [L^3[u]_h - f_h^3]_{(x_0,t_k)} = u(0,t_k) - \gamma^k = \gamma(t_k) - \gamma(t_k) = 0.$$

Невязка для последнего оператора будет выглядеть следующим образом:

$$\delta f_h^4|_{(x_I,t_k)} = [L^4[u]_h - f_h^4]_{(x_I,t_k)} = u(l,t_k) - \gamma^k = \gamma(t_k) - \gamma(t_k) = 0.$$

После нахождения всех необходимых величин, определим порядок аппроксимации неявной схемы, применив равномерную норму к порядкам аппроксимации всех выражений, входящих в состав схемы:

$$||\delta f_h||_{F_h} = \max_{\substack{i=\overline{1,I-1}\\ k=\overline{0,K-1}}} |\delta f_h^1| + \max_{i=\overline{0,I}} |\delta f_h^2| + \max_{k=\overline{1,K}} |\delta f_h^3| + \max_{k=\overline{1,K}} |\delta f_h^4| = O(h^2,\tau). \quad (16)$$

В ходе исследования было установлено, что простейшая неявная схема аппроксимирует исходную задачу линейно относительно τ и квадратично относительно h.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения работы осуществлена постановка краевой задачи для уравнения теплопроводности в оптическом элементе. Для численного решения краевой задачи построены две разностные схемы: простейшая неявная схема и схема Кранка-Николсона. Проведено теоретическое исследование разностных схем, в результате которого установлено, что неявная схема имеет линейный порядок аппроксимации для временной переменной и квадратичный для пространственной переменной, а схема Кранка-Николсона – квадратичный порядок для каждой переменной. Также в результате исследования установлено, что неявная схема является абсолютно устойчивой, а схема Кранка-Николсона обладает условной устойчивостью. С помощью вычислительных экспериментов было показано, что фактическая погрешность обладает первым порядком для временной переменной и вторым порядком для пространственной переменной для простейшей неявной схемы и вторым порядком сходимости для каждой переменной в схеме Кранка-Николсона, что вполне согласуется с теоретическими результатами. В результате серии вычислительных экспериментов заметна визуальная сходимость разностного решения, вычисляемого с помощью схем, при увеличении количества шагов, т.е. с измельчением сетки решение дискретной задачи приближается к решению исходной задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Дегтярев А.А. Примеры построения и исследования разностных схем. – Электронное учебное пособие [Электронный ресурс] / А.А Дегтярев, 2011.- 54с.

2 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики (5-е изд.) [Текст] / Тихонов А.Н., Самарский А.А. М.: Наука, 1977.- 742 с.

3 Numpy and Scipy Documentation [Электронный ресурс]: Официальный сайт документации библиотек Numpy и Scipy. - URL: https://docs.scipy.org/doc/

4 Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике [Текст] / Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. М.: МГУ, 1993. - 352 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Код программы

А.1 Неявная схема

А.2 Схема Кранка-Николсона