Javier Sáez
77448344F
franciscojavier.saez@estudiante.uam.es

Ejercicios Bootstrap
Métodos Avanzados en Estadística

2021-10-22

Problema 2
Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de n observaciones iid de una distribución F con μ y varianza σ^2, y sea $X_1^*, \ldots, X_n^*$ una muestra de n observaciones iid de la distribución empírica de la muestra irignial F_n. Calcula las siguientes cantidades:

1. $E_{F_n}(\bar{X}_n^*) := E(\bar{X}_n^* \,|X_1, \ldots, X_n)$
2. $E_F(\bar{X}_n^*)$
3. $Var_{F_n}\left(\bar{X}_n^*\right) := Var(\bar{X}_n^* \,|X_1, \ldots, X_n)$
4. $Var_F(\bar{X}_n^*)$

1. $E_{F_n}(\bar{X}_n^*) := E(\bar{X}_n^* \,|X_1, \ldots, X_n)$.

   Basta ver que, usando la definición y la linealidad de la esperanza,

$$E_{F_n}\left(\bar{X}_n^*\right) = E_{F_n}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^*\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{F_n}\left[X_i^*\right].$$

   Ahora, La esperanza bajo la función de distribución empírica de los X_i^* es la misma para todos los i, porlo que podemos decir que estamos decir que estamos sumando n veces la esperanza de X_i^* habiendo fijado un i. Tenemos por tanto:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{F_n}\left[X_i^*\right] = E_{F_n}\left[X_i^*\right] = \sum_{x \in (X_1, \ldots, X_n)} P(x)x = \sum_{x} \frac{1}{n}x = \bar{x}$$

2. $E_F(\bar{X}_n^*)$.

   Ahora no tenemos un condicionamiento como lo teníamos anteriormente, pero podemos usar la fórmula de la probabilidad total y ver que:

$$E_F(\bar{X}_n^*) = E_F\left[E_{F_n}\left(X_n^* | X_1, \ldots, X_n\right)\right]$$

3. $Var_{F_n}\left(\bar{X}_n^*\right) := Var(\bar{X}_n^* \,|X_1, \ldots, X_n)$

$$\begin{aligned}
&\overset{(1)}{=} E_F[\bar{V}ar_{F_n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^* \,|X_1, \ldots, X_n\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var_{F_n}(X_i^* | X_1, \ldots, X_n) \\
&= \frac{n}{n^2} Var_{F_n}(X_i^* | X_1, \ldots, X_n),
\end{aligned}$$

   donde, en la última igualdad usamos que para cada una de las X_i^* la varianza bajo F_n es la misma, así que la estamos sumando n varianzas iguales. Calculamos ahora la varianza que