Francisco Javier Sáez Maldonado
77448344F
franciscojavier.saez@estudiante.uam.es

Take Home Exam 1
Optimización

2022-03-05

1 Cuestiones

Problema 1
¿Cuáles son los criterios de parada del algoritmo simplex algebraico? Expón todas las alternativas posibles y las soluciones a que dan lugar.

Para dar respuesta a este problema, recurrimos al document PDF en el que se detalla la versión algebraica del algoritmo simplex para problemas de minimización.

Como repaso muy breve de notación para entender la respuesta, recordamos que el problema debe estar expresado en forma estándar (restricciones de igualdad) y que se puede expresar como encontrar el mínimo de una función $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ sujeto a unas restricciones que se escriben matricialmente como $Ax = b$, siendo A una matriz y b un vector. Además, descompondremos $A = (B\ N)$ siendo B la matriz básica y N la no básica. Llamaremos I_N al conjunto de índices de las variables **no básicas**. Encontramos dos puntos en los que puede terminar este algoritmo.

1. Tras calcular para todas las variables no básicas los valores
$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j \quad \forall j \in I_N,$$
y considerar $z_k - c_k$ como el máximo de estos valores, el algoritmo **termina si** $z_j - c_j \leq 0$, verificándose el **criterio de optimalidad simplex**, siendo la Solución Básica Factible (SBF) **óptima**. En esta parada, pueden darse dos posibles alternativas para las soluciones:
   (a) Si se verifica que $z_j - c_j = 0$, entonces se tiene que tenemos **infinitas soluciones óptimas**.
   (b) Si, por el contrario, tenemos que $z_j - c_j < 0$, entonces tenemos una solución **única** óptima.
2. El algoritmo también para si, tras realizar el *criterio de la razón mínima*, es decir, calcular
$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1\leq i\leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{rk}} \ :\ y_{ik} > 0 \right\}$$
nos damos cuenta de que dicho valor mínimo $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$ **no existe**. Entonces, el algoritmo termina y el problema tiene **solución no acotada**.

Problema 2
Una forma alternativa de definición de problemas de programación lineal viene dada por el modelo dual. En esta cuestión se pide que definas cuál es el Problema Dual de un Problema Primal.

1. ¿Qué relación existe entre ambos en términos de las soluciones posibles?
2. ¿Ofrece alguna ventaja la formulación dual respecto de la primal?

Para cada problema de programación lineal, P (Primal), existe otro problema de programación lineal asociado a este, D, llamado el problema dual. Según si nuestro problema primal P está en forma estándar o canónica, tenemos un problema dual asociado, aunque las formulaciones duales son equivalentes entre sí, independientemente de cómo esté formulado nuestro problema primal P. Asumiremos que nuestro problema primal está escrito en forma canónica.

Si nuestro **problema primal** P es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{P : Minimize } & cx \\ \text{subject to } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

entonces, su **problema dual** D asociado es

$$\begin{aligned} \text{D : Maximize } & wb \\ \text{subject to } & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

Como el problema dual es también un problema de programación lineal, se tiene además el siguiente lema:

Lema 1. *El problema dual D' del problema dual D, es el problema primal P del problema dual D. (*Propiedad involutiva.*)*

Vamos a comentar las **relaciones más importantes** en términos de las soluciones posibles. El primer resultado que debemos comentar es el siguiente

Teorema 2 (Teorema de dualidad débil.)**.** *Para cualquier posible solución factible del problema primal P, el valor de la función objetivo es siempre mayor o igual que el valor de la función objetivo en el problema dual D.*

Además, introducimos un lema que nos llevará al teorema final que relacionará las soluciones de ambos problemas:

Lema 3. *Si uno de los problemas posee una solucion óptima, entonces **ambos problemas poseen** soluciones óptimas y los valores de la función objetivo óptimos son iguales.*

Gracias a este lema y a otra serie de resultados, llegamos al siguiente teorema:

Teorema 4 (Teorema de dualidad fuerte.)**.** *En relación a las soluciones del problema primal P y su dual D, se cumple **exactamente uno** de los siguientes:*

1. *Ambos poseen soluciones óptimas $\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*$ con $\mathbf{cx}^* = \mathbf{w}^*\mathbf{b}$.*
2. *Un problema tiene solución óptima no acotada, por lo que el otro problema no tiene solución factible.*
3. *Ninguno tiene solución factible.*

Podemos hablar por último de las **posibles ventajas** que ofrece usar la formulación dual respecto del problema original.

- Una primera clara ventaja que podría darnos se da cuando tenemos muchas variables x_i y pocas restricciones a_i, pues en ese caso al obtener el problema dual conseguimos un problema sencillo (con menos variables objetivo w_i)que quizá podamos resolver geométricamente.
- Otra ventaja que podría ser útil es que las variables y restricciones del problema dual D tiene una **interpretación en el campo de la economía** que puede ser de útil para resolver problemas que tengan relación con este campo.
- Por último, utilizar la dualidad en problemas de programación lineal (PL) es útil cuando queremos investigar cómo afectan los cambios en los parámetros de un problema PL a las soluciones del problema (*sensitivity analysis*).
  [Información extraída de estas notas del Instituto Nacional de Tecnología en la India]

[La referencia principal consultada para realizar esta cuestión ha sido:Bazaraa, Mokhtar S, Jarvis, John J, and Sherali, Hanif D. (2011). Linear programming and network flows (4th ed.). Chapter 6:Duality and Sensitivity Analysis.]

2 Ejercicios

Problema 1
Demostrar que, dada $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$, S no vacío y convexo, entonces f es cuasiconvexa si, y solo si, el conjunto

$$S_\alpha = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$$

es convexo para cada $\alpha \in \mathbb{R}$

Problema 2
Haciendo uso de la cuestión 2, demostrar que el siguiente problema:

$$\begin{gathered} max\ x_3 \\ \text{subject to} \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq -1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{gathered}$$

carece de solución.