

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА» С УЧЕТОМ КОНКУРЕНЦИИ ДВУХ ТИПОВ

Абрамова Е.П.

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
cat.epa.69@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается популяционная модель типа «хищник–жертва» с учетом конкуренции жертв и конкуренции хищников за отличные от жертв ресурсы. Проводится анализ существования и устойчивости аттракторов модели, строятся бифуркационная диаграмма и типичные фазовые портреты. Для стохастической модели исследуется чувствительность аттракторов на основе теории функции стохастической чувствительности. С использованием аппарата доверительных областей (эллипсов для равновесий и полос – для цикла), изучаются стохастические феномены: переходы типа «равновесие \rightarrow равновесие», «цикл \rightarrow равновесие», генерация большеамплитудных колебаний и вымирание популяций. Анализируются вероятностные механизмы вымирания популяций.

Ключевые слова: модель «хищник-жертва», стохастические возмущения, функция стохастической чувствительности, индуцированные шумом феномены, вымирание популяций.

PARAMETRIC ANALYSIS OF THE STOCHASTIC «PREY- PREDATOR» MODEL WITH TWO TYPES OF COMPETITION

Abramova E.

Ural Federal University
named after the first President of Russia B.N.Yeltsin, Ekaterinburg, Russia
cat.epa.69@gmail.com

Abstract. A population «prey-predator» type model with competitions of preys and predators for resources that are different from the prey is considered. Existence

and stability of attractors are analyzed, the bifurcation diagram and typical phase portraits are constructed. For the stochastic model, the sensitivity of attractors is analyzed on the basis of the stochastic sensitivity function. Using the confidence domain method (ellipses for equilibria and bands for cycles) stochastic phenomena are studied: transitions of the type «equilibrium \rightarrow equilibrium», «cycle \rightarrow equilibrium», generation of large-amplitude oscillations and extinction of populations. Probabilistic mechanisms of extinction of populations are studied.

Key words: «prey-predator» model, stochastic disturbances, stochastic sensitivity function, noise-induced phenomena, population extinction.

В работе представлены результаты исследования популяционной модели «хищник-жертва» с учетом двух видов конкуренции в детерминированном ($\sigma = 0$) и стохастическом случаях ($\sigma \neq 0$):

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{xy}{1+\alpha x} - \varepsilon x^2 + \sigma \dot{w}_1, \\ \dot{y} = -\gamma y + \frac{xy}{1+\alpha x} - \delta y^2 + \sigma \dot{w}_2. \end{cases} \quad (1)$$

Детерминированная модель была предложена в работах [1] и [2], а затем исследована в [3] и [4]. Стохастический анализ этой модели в случаях, когда $\varepsilon = 0$, либо $\delta = 0$ проводился в работах [5] и [6].

На основе анализа существования и чувствительности аттракторов была построена бифуркационная диаграмма детерминированной модели. Для параметрических зон, где реализуются различные динамические режимы, построены фазовые портреты и проанализировано их взаимное расположение. Найдены приближенные значения параметра, в которых происходят бифуркации: седло-узловая равновесия, рождение цикла из петли сепаратрисы и суперкритическая. Проведено описание этих бифуркаций и определены зоны параметра, где у системы сосуществуют два устойчивых аттрактора. Выборочно фазовые портреты представлены на рис.1. Сплошными черными линиями обозначены детерминированные циклы, сплошными серыми линиями – траектории, пунктирными черными – сепаратриса, черным треугольником – неустойчивое равновесие, черной точкой – устойчивое равновесие.

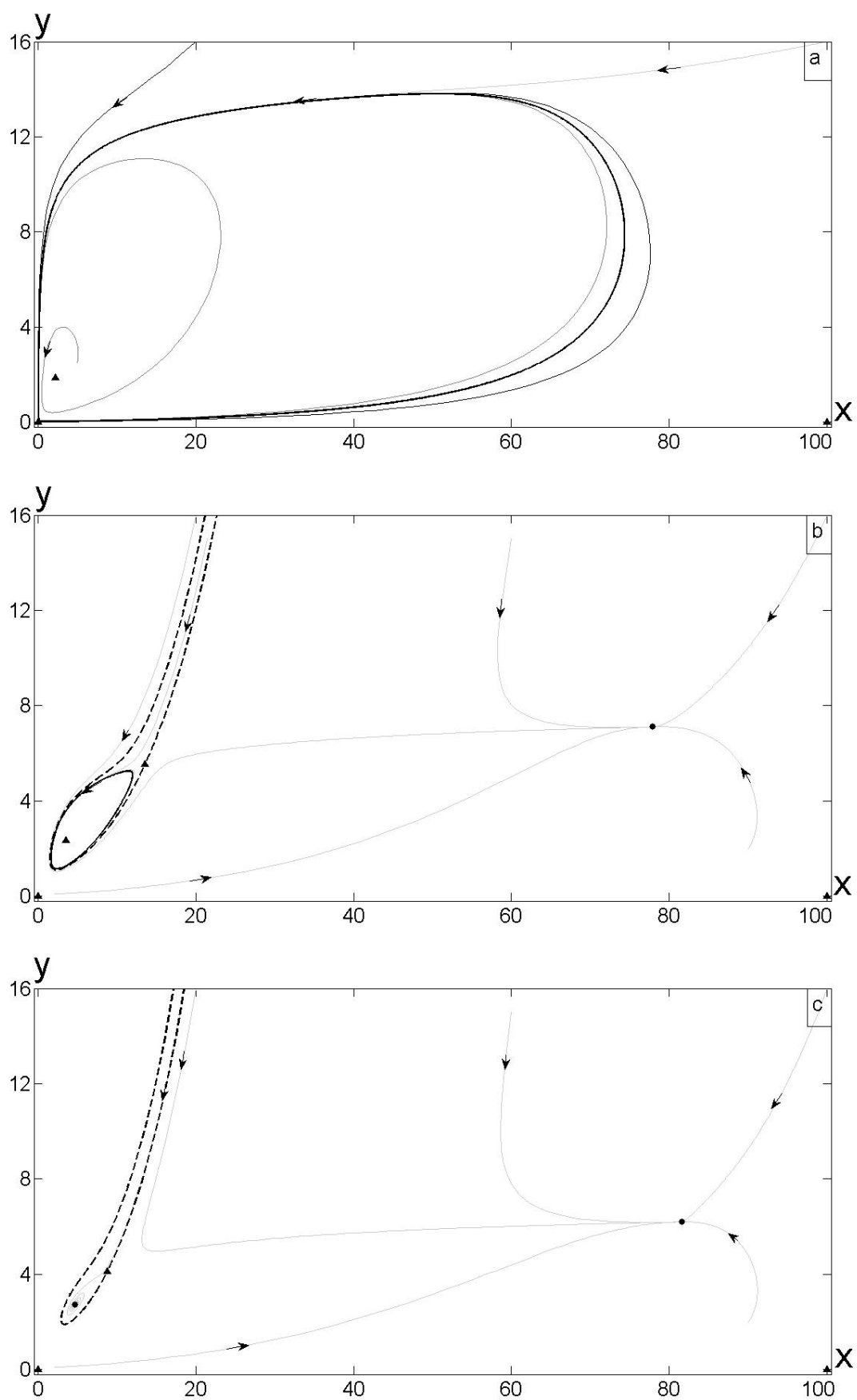


Рис. 1: Фазовые портреты системы (1) для $\sigma = 0$ при а) $\delta = 0.1$, б) $\delta = 0.2$, в) $\delta = 0.23$

Далее в работе изучена чувствительность аттракторов модели к внешнему (аддитивному) возмущению. Найдены зависимости коэффициентов стохастической чувствительности от параметра δ модели. Построены доверительные области, описывающие разброс случайных состояний вокруг детерминированного аттрактора — равновесия или цикла.

Используя метод доверительных областей (см. [5], [6], [7]) изучены индуцированные шумом феномены, такие как: переходы между аттракторами (типов «равновесие \rightarrow равновесие» и «цикл \rightarrow равновесие»), генерация большеамплитудных колебаний и вымирание популяций (обнаружены и описаны вымирания двух типов). Найдены критические интенсивности возникновения этих феноменов и описаны вероятностные механизмы вымирания популяций, подверженных случайному внешнему воздействию.

На рис. 2 на примерах сосуществования двух равновесий и равновесия с циклом, представлены индуцированные шумом переходы. Черной сплошной линией на рис. 2a представлен эллипс рассеивания, на рис. 2b внешняя граница полосы рассеивания, черной штрих-пунктирной — детерминированный цикл, черной пунктирной линией — сепаратриса, серыми точками — случайные траектории, черными треугольниками — неустойчивые равновесия.

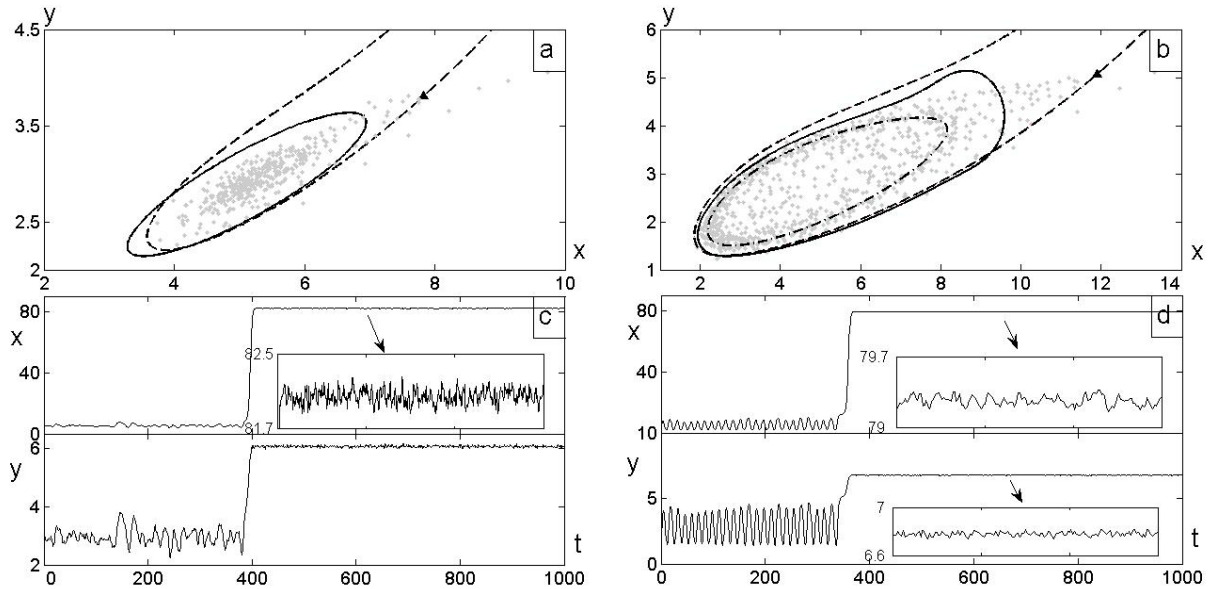


Рис. 2: Индуцированные шумом переходы при $\sigma = 0.05$ для а,с) $\delta = 0.235$ (цикл \rightarrow равновесие) и b,d) $\delta = 0.21$ (равновесие \rightarrow равновесие)

Видно, что при данном уровне интенсивности шума ($\sigma = 0.05$) амплитуда колебаний вокруг детерминированных аттракторов существенно увеличивается, а затем практически одним скачком траектории переходят в коле-

бательный режим вокруг сосуществующего равновесия. При этом амплитуда колебаний заметно уменьшается, что объясняется различиями в найденных значениях чувствительности этих аттракторов. Стоит отметить, что обратный переход практически не реализуем.

Таким образом, под действием шума как на равновесный, так и на периодический режимы сосуществования двух популяций система переходит в более благоприятное для обеих популяций состояние:

- численность обеих популяций увеличивается,
- амплитуда случайных колебаний уменьшается.

Литература

- [1] Базыкин А.Д. Система Вольтерра и уравнение Михаэлиса-Ментен // Вопросы математической генетики. Новосибирск, 1974, с. 103-143.
- [2] Алексеев В.В. Влияние фактора насыщения на динамику системы хищник-жертва // Биофизика, 1973, т. 18, вып. 5, с. 922-926
- [3] Bazykin A.D. Structural and dynamic stability of model predator-prey systems. Laxenburg, 1976. 44 p.(Intern. Inst. Appl. Syst. Anal.; RM-76 8).
- [4] Базыкин А. Д., Березовская Ф.С, Буриев Т.Э. Динамика системы хищник-жертва с учетом насыщения и конкуренции // Фактор разнообразия в математической экологии и популяционной генетике. Пущино: ОНТ НЦБ А СССР, 1980, с. 6-33.
- [5] Башкирцева И.А., Бояршинова П.В., Рязанова Т.В., Ряшко Л.Б. Анализ индуцированного шумом разрушения режимов сосуществования в популяционной системе «хищник–жертва» // Компьютерные исследования и моделирование 2016 Т. 8 № 4 с. 647–660.
- [6] Башкирцева И.А., Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б. Анализ аттракторов стохастически возмущенной модели «хищник-жертва» // Изв. вузов «ПНД», т. 17, №2, 2009 с. 37-53.
- [7] Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б. Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным возмущениям. // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика, 2001 Т. 9. № 6. С. 104-114.