ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого президента России Б.Н.Ельцина»

Институт естественных наук и математики

Кафедра теоретической и математической физики

Анализ режимов модели сосуществования двух популяций с учетом конкуренции жертв и конкуренции хищников за отличные от жертвы ресурсы

Отчет по производственной практике

  студента 3 курса группы КН-301

Абрамовой Екатерины Павловны

Научный руководитель

к. ф. -м. н., доцент, доцент КТиМФ

Рязанова Татьяна Владимировна

Екатеринбург

2017

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Институт естественных наук и математики

Кафедра теоретической и математической физики

Оценка работы\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Руководитель от УрФУ Рязанова Татьяна Владимировна

Анализ режимов модели сосуществования двух популяций с учетом конкуренции жертв и конкуренции хищников за отличные от жертвы ресурсы

ОТЧЕТ

по производственной практике

Руководитель практики от предприятия Рязанова Татьяна Владимировна

Студент Абрамова Екатерина Павловна

Специальность (направление подготовки) Математика и компьютерные науки

Группа МЕН-340207

Екатеринбург 2017

**О модели**

В работе рассматривается следующая популяционная модель:

(1)

Здесь x – плотность популяции жертв, y – плотность популяции хищников, скорость размножения жертв в отсутствие хищников равна 1, > 0 – естественная смертность хищников, < 1 – коэффициент, характеризующий насыщение хищников. Следует помнить, что система имеет биологический смысл только если x и y неотрицательные.

Модель учитывает три фактора взаимодействия:

1. конкуренция хищников за отличные от жертвы ресурсы, описываемая слагаемым

-δy­2,

1. конкуренция жертв, описываемая слагаемым -εx2,
2. взаимодействие популяций, описываемая трофической функцией Холлинга второго типа .

Данная система является модификацией классической детерминированной модели Вольтера, и была предложена в статьях [1] и [2], частично, а затем и полностью исследована в [3] и [4].

Стохастический анализ этой модели в случаях, когда, либо отсутствует конкуренция жертв (), либо отсутствует конкуренция хищников () проводился в работах [5] и [6].

**Постановка задачи**

Данная работа посвящена исследованию системы (1) в детерминированном и стохастическом случаях. Анализ состоит из следующих этапов:

1. проведение детерминированного анализа:
2. нахождение равновесий,
3. анализ устойчивости равновесий,
4. построение бифуркационной диаграммы,
5. нахождение цикла с заданной степенью точности,
6. исследование параметрических зон сосуществования устойчивых аттракторов,
7. построение бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов

**Детерминированный анализ**

Рассмотрим сначала аттракторы и бифуркации детерминированной модели

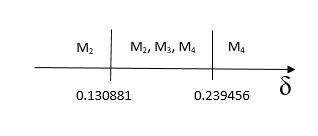
Зафиксируем значения параметров γ = 1, ε = 0.01 и α = 0.4. Будем проводить исследования динамики системы для δ > 0.

Данная система имеет 6 равновесий. Равновесие M0(0, 0) соответствует ситуации отсутствия и хищников, и жертв. Равновесие M1(100, 0) соответствует существованию жертв в равновесном состоянии при отсутствии хищников. Равновесие M5  при δ > 0 не имеет биологического смысла и далее не рассматривается. Координаты равновесий M2, M3 и M4 находятся по следующим формулам:

(2)

Как видно, уравнение (2) является кубическим и, в зависимости от , может иметь 1, 2 или 3 решения. На рис. 1 представлена диаграмма существования этих равновесий в зависимости от .

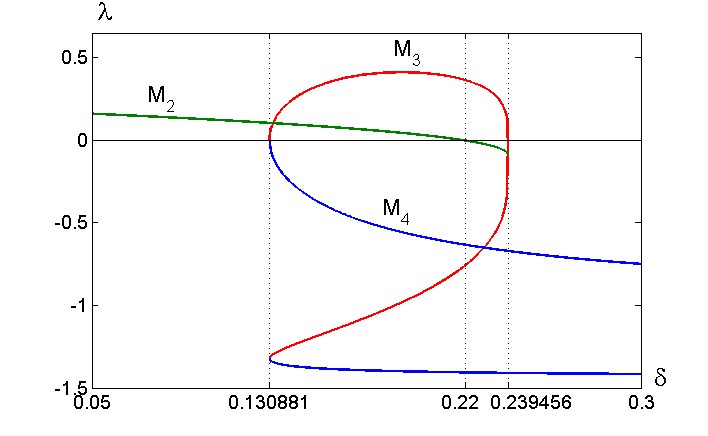
Рис. 1 Существование равновесий M2, M3 и M4



Равновесие M0­ имеет собственные значения λ1 = 1, λ2 = -1 и всегда является седлом. Аналогично для равновесия M1: λ1 = -1, λ2 = , оно также является седлом при любом .

Устойчивость равновесий M2, M3 и M4 показана на рис. 2. Здесь представлена действительная часть собственных значений λ1 и λ2 (зеленый) равновесия M2, при   
0 < < 0.22 значение Re λ > 0 и M­2 – неустойчивый фокус, при 0.22 < < 0.239456 значение Re λ < 0 и M2 – устойчивый фокус. Красным цветом на рис. 2 представлены собственные значения равновесия M­­3. Видно, что λ1 > 0 и λ2­ < 0 для любых ∈ (0.130881; 0.239456). Таким образом, M­3 является седловой точкой. Синие графики соответствуют собственным числам равновесия M4, которые отрицательны при > 0.130881, то есть M4 при этих значениях параметра всегда является устойчивым узлом.

Рис. 2 Устойчивость равновесий M2, M3 и M4



При < 0.130881 в системе (1) помимо одного нетривиального равновесия M­2 наблюдается предельный цикл Г­1, описывающий большеамплитудные колебания численности двух популяций (см. рис. 3a).

При = 0.130881 на цикле рождается седло-узел и разрывает устойчивый цикл. В системе (1) происходит седло-узловая бифуркация (см. рис. 3b). При увеличении параметра седло M­3 и узел M4 расходятся друг от друга.

При ∈ (0.130881; 0.196565) система (1) имеет только один устойчивый аттрактор – узел M­4, все траектории сходятся на него (см. рис. 3c), то есть для популяции не зависимо от начальной их плотности возможен только один равновесный режим сосуществования.

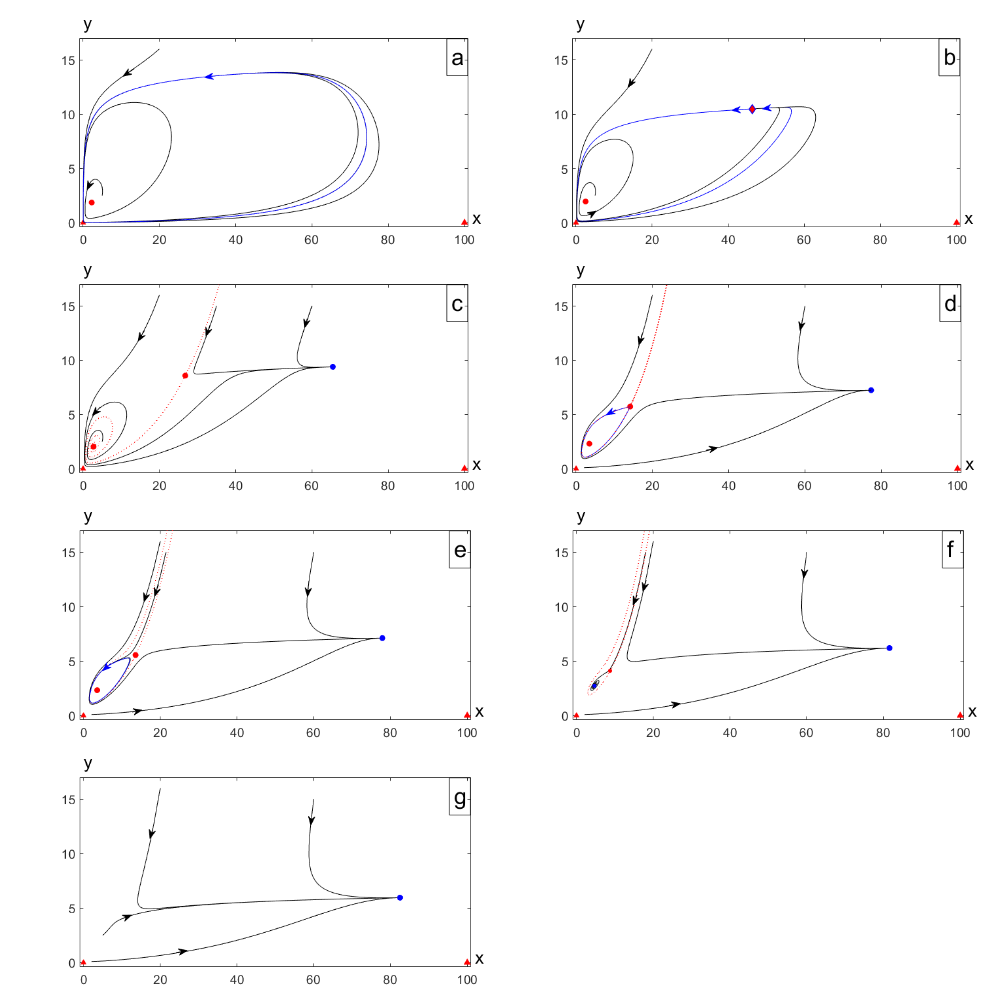
При = 0.196565 из петли сепаратрисы седла M­3 рождается предельный цикл Г2 с малой амплитудой колебаний (см. рис. 3d). Данный предельный цикл существует вокруг неустойчивого равновесия M2 при ∈ (0.196565; 0.22), таким образом, в этой зоне параметров в зависимости от начальной плотности популяций x и y возможны два режима их сосуществования: равновесный, соответствующий M4 и периодический, соответствующий циклу Г2. Границей разделения бассейнов притяжения M4 и Г2 является устойчивое многообразие седловой точки M3 (см. рис. 3e).

При = 0.22 предельный цикл Г2 сливается с неустойчивым равновесием M2, в результате чего равновесие M2 становится устойчивым. В системе (1) при этом значении параметра происходит суперкритическая бифуркация.

При ∈ (0.22; 0.239456) в системе существуют два устойчивых равновесия M2 и M4, таким образом, в зависимости от начальных значений x и y возможны два совершенно различных равновесных режима сосуществования популяций (см. рис. 3f).

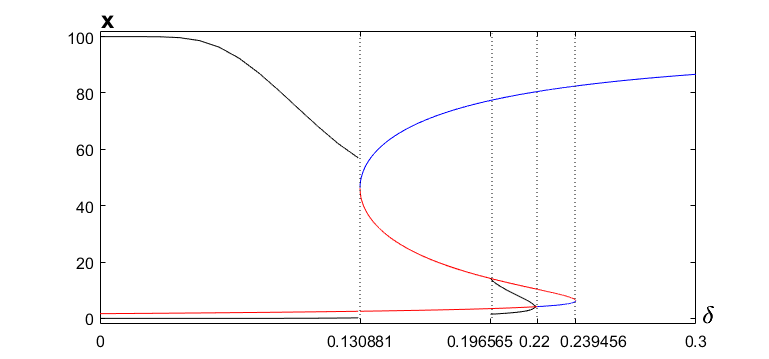
При = 0.239456 равновесие M2 сливается с равновесием M3, и они исчезают, в системе остается только одно устойчивое равновесие M4 при увеличении параметра (см. рис. 3g), и, каким бы ни были начальные значения x и y, возможен только один режим сосуществования популяций – равновесный.

Рис. 3 Фазовые портреты системы (1) при a) = 0.1, b) = 0.130880839, c) = 0.15, d) = 0.196565, e) = 0.2, f) = 0.23, g) = 0.2395



На рис. 4 представлены экстремумы x-координат аттракторов системы (1) при изменении параметра . На этом рисунке можно отследить все описанные выше бифуркации. Черным цветом здесь представлены устойчивые циклы, красным – неустойчивые равновесия, синим – устойчивые равновесия.

Рис. 4 Экстремумы аттракторов системы (1)



Таким образом, в работе проведен анализ детерминированной системы (1) при = 1, 0.01, = 0.4 и > 0, исследованы аттракторы модели и описаны бифуркации.

**Литература**

1. Алексеев В.В. Влияние фактора насыщения на динамику системы хищник-жертва // Биофизика, 1973, т. 18, вып. 5, с. 922-926.
2. Базыкин А.Д. Система Вольтерра и уравнение Михаэлиса-Ментен // Вопросы математической генетики. Новосибирск, 1974, с. 103-143.
3. Bazykin A.D. Structural and dynamic stability of model predator-prey systems. Laxenburg, 1976. 44 p.(Intern. Inst. Appl. Syst. Anal.; RM-76 8).
4. Базыкин А. Д., Березовская Ф.С, Буриев Т.Э. Динамика системы хищник-жертва с учетом насыщения и конкуренции // Фактор разнообразия в математической экологии и популяционной генетике. Пущино: ОНТ НЦБ А СССР, 1980, с. 6-33.
5. Башкирцева И.А., Бояршинова П.В., Рязанова Т.В., Ряшко Л.Б. Анализ индуцированного шумом разрушения режимов сосуществования в популяционной системе «хищник–жертва» // Компьютерные исследования и моделирование 2016 Т. 8 № 4 с. 647–660.
6. Башкирцева И.А., Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б. Анализ аттракторов стохастически возмущенной модели «хищник-жертва» // Изв. вузов «ПНД», т. 17, №2, 2009 с. 37-53.
7. проведение стохастического анализа:
8. аналитическое нахождение матрицы стохастической чувствительности для равновесий,
9. построение чувствительности для цикла численными методами,
10. проведение анализа чувствительности аттракторов стохастической системы и наблюдаемых эффектов,
11. построение доверительных интервалов: эллипсов для равновесий, полос – для цикла.