Лабораторная работа №3 "Метод Монте-Карло"
Вариант 2
Часть 1

Задаём начальные значения:

$K := 11^{11}$ - большое число

$n := 100$ общее количество чисел, которые будут сгенерированны

$m_0 := 1$ - целое

$i := 1, 2 .. n - 1$

$M := 3^{33}$ - целое, взаимно простое с K

$\gcd(K, M) = 1$

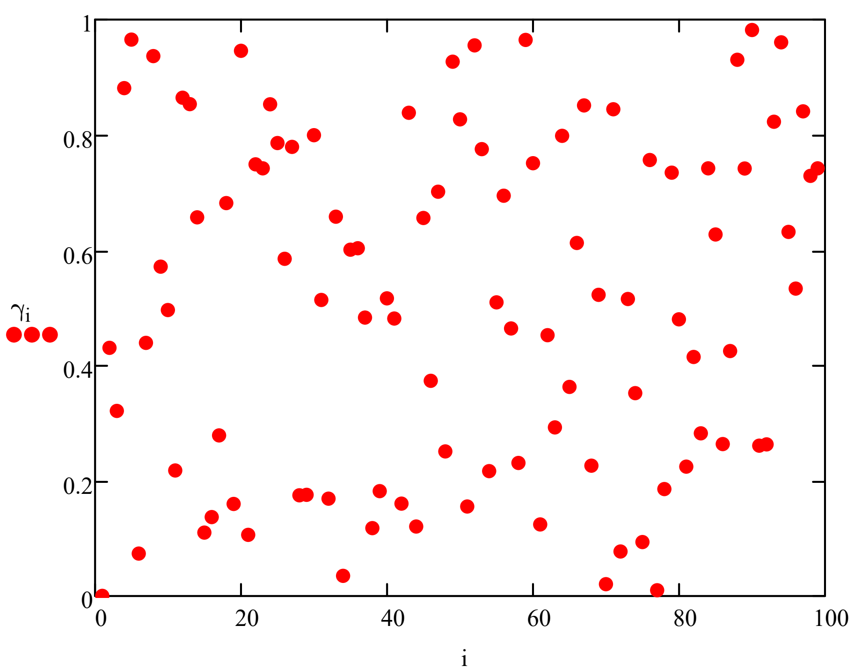
Вычисляем первое число $\gamma_0 := \dfrac{m_0}{M} = 0$

$m_i := \mathrm{mod}\left(K \cdot m_{i-1}, M\right) = ...$

$\gamma_i := \dfrac{m_i}{M}$

$\gamma =$

	0
0	0
1	$5.132 \cdot 10^{-5}$
2	0.43
3	0.321
4	0.881
5	0.965
6	0.073
7	0.439
8	0.936
9	0.571
10	0.496
11	0.218
12	0.864
13	0.853
14	0.657
15	...



По визуальному отображению нельзя сказать однозначно о виде распределения

$\gamma sr := \mathrm{mean}(\gamma) = 0.504$ - среднее арифметическое

$$D := \frac{\left[\sum_i (\gamma_i - \gamma sr)^2\right]}{n} = 0.083$$ - дисперсия

$sko := \sqrt{D} = 0.289$ среднеквадратическое отклонение

Параметры, полученные по сгенерированным числам близки к параметрам равномерного распределения.

Построение гистограммы

$k := 10$ - количество интервалов

$i := 0 .. k$

$d := \frac{1-0}{k} = 0.1$ - шаг интервала

$interval_i := i \cdot d$ - границы интервалов

$ch := hist(interval, \gamma)$

interval =

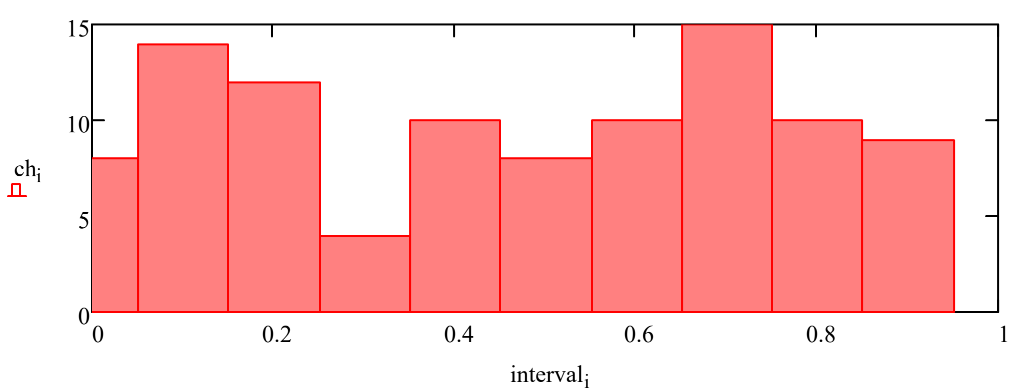
	0
0	0
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.4
5	0.5
6	0.6
7	0.7
8	0.8
9	0.9
10	1

ch =

	0
0	8
1	14
2	12
3	4
4	10
5	8
6	10
7	15
8	10
9	9

частоты попадания в интервалы

Гистограмма



Проверка по критерию Пирсона

H0: СВ подчиняется равномерному распределению
H1: СВ не подчиняется равномерному распределению

$p := \frac{1}{k} = 0.1$ - вероятность попадания в интервал

$$Knabl := \sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{(ch_i - n \cdot p)^2}{n \cdot p} \right] = 9$$

$\alpha := 0.05$ - уровень значимости $r := 0$ - количество степеней свободы распределения

$Kkrit := qchisq(1 - \alpha, k - r - 1) = 16.919$

Критерий Пирсона имеет правостороннюю критическую область. Knabl < Kkrit.
=> Нет оснований отвергать основную гипотезу, т. е. СВ подчиняется равномерному нормальному распределению.

№ опыта	Начальные значения(m_0,M,K)	Визуальная оценка	Кнабл	Ккрит	Вывод
1	1, 2^{36},5^{15}	Нельзя сказать однозначно	7,4	16,919	X~R(0,1)
2	1, 9^{16},4^{18}	Нельзя сказать однозначно	12,6	16,919	X~R(0,1)
3	1, 3^{33},11^{11}	Нельзя сказать однозначно	9	16,919	X~R(0,1)

Часть 2 Вариант 2

$\int_1^3 \sqrt{x^3 + 8}\,dx$ интеграл

$\beta := 0.94$ оценка погрешности

$\varepsilon := 0.02$ доверительная вероятность

$a := 1 \qquad b := 3$

Плотность равномерного распределения X~R(1,3)

$max := 3$

$min := 1$

$f(x) := \frac{1}{b - a} \qquad f(1) = 0.5$

После необходимых математических манипуляций получаем

$h(x) := 2\sqrt{x^3 + 8}$

$hmax := h(max) = 11.832$

$hmin := h(min) = 6$

$I := \int_a^b h(x)\cdot f(x)\,dx = 8.308$

Вычисляем количество испытаний, необходимое для вычисления интеграла с заданной доверительной точностью и заданной доверительной вероятностью

$R := hmax - hmin = 5.832$ - размах

$\sigma := \frac{R}{6} = 0.972$

β = 2Φ((ε*n^(0.5))/σ)

$t := qnorm\left(\frac{\beta}{2} + 0.5, 0, 1\right) = 1.881$ значение аргумента функции Лапласа, равной β/2

$n := \left(\frac{t\cdot\sigma}{\varepsilon}\right)^2 = 8.356 \times 10^3$

$n := round(n, 0) = 8.356 \times 10^3$

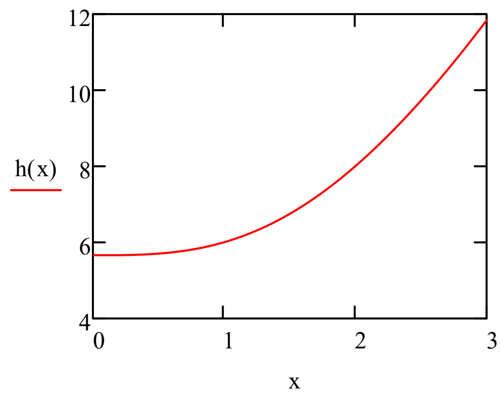
С помощью стандартного датчика rnd генерируем n случайных чисел

$i := 1 .. n$

$\gamma_i := \mathrm{rnd}(1)$

$\gamma =$

	0
0	0
1	$1.268\cdot10^{-3}$
2	0.193
3	0.585
4	0.35
5	0.823
6	0.174
7	0.71
8	0.304
9	...



Преобразуем γ_i в $x_i=a+(b-a)*\gamma_i$

$x_i := a + (b - a)\cdot\gamma_i$

$x =$

	0
0	0
1	1.003
2	1.387
3	2.17
4	1.701
5	2.646
6	1.348
7	2.421
8	1.608
9	...

Вычислим оценку I` для интеграла I

$$I' := \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} h(x_i) = 8.337$$

Вычислим оценку дисперсии D`

$$D' := \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\left(h(x_i)\right)^2 - I'^2\right] = 3.026$$

Найдём точность, с которой вычислен этот интеграл по формуле
$\beta = 2\Phi((\varepsilon * n^{0.5})/D`^{0.5})$

$$\varepsilon 1 := t\cdot\sqrt{\frac{D'}{n}} = 0.036$$

Найдём доверительный интервал

$left := I - \varepsilon 1 = 8.273$ $\quad I = 8.308 \quad$ $right := I + \varepsilon 1 = 8.344$

Точность оказалась недостаточной, так что увеличиваем количество опытов и повторяем оценки

$n := n \cdot 2 = 1.671 \times 10^4$

$i := 1 .. n$

$\gamma_i := \mathrm{rnd}(1)$

$\gamma =$

	0
0	0
1	0.094
2	0.152
3	0.98
4	0.527
5	...

$= a + (b - a) \cdot \gamma_i$

$x =$

	0
0	0
1	1.188
2	1.305
3	2.959
4	2.054
5	...

$$I' := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} h(x_i) = 8.307 \qquad D' := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[\left(h(x_i) \right)^2 - I'^2 \right] = 2.969$$

$$\varepsilon 1 := t \cdot \sqrt{\frac{D'}{n}} = 0.025$$

$left := I - \varepsilon 1 = 8.283$ $\quad I = 8.308$ $\quad right := I + \varepsilon 1 = 8.334$

Точность оказалась недостаточной, так что увеличиваем количество опытов и повторяем оценки

$n := n \cdot 2 = 3.342 \times 10^4$

$i := 1 .. n$

$\gamma_i := \mathrm{rnd}(1)$

$\gamma =$

	0
0	0
1	0.667
2	0.669
3	0.682
4	0.334
5	...

$= a + (b - a) \cdot \gamma_i$

$x =$

	0
0	0
1	2.333
2	2.339
3	2.364
4	1.669
5	...

$$I' := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} h(x_i) = 8.314 \qquad D' := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[\left(h(x_i)\right)^2 - I'^2 \right] = 2.974$$

$$\varepsilon 1 := t \cdot \sqrt{\frac{D'}{n}} = 0.018$$

$$left := I' - \varepsilon 1 = 8.296 \qquad I = 8.308 \qquad right := I' + \varepsilon 1 = 8.332$$

Мы достигли необходимой точности, теперь записываем доверительный интервал

$left := round(left, 2) = 8.3$

$rigth := round(right, 2) = 8.33$

$I := round(I, 2) = 8.31$

$\varepsilon = 0.02 \qquad n = 3.342 \times 10^4$

Ответ: (8.29 - 0,018; 8.33 + 0.18)

№ опыта	Оценка интеграла	Оценка дисперсии	Оценка точности	Вывод
1	8.296	2.952	0.035	Входит в доверительный интервал
2	8.311	2.94	0.025	Входит в доверительный интервал
3	8.305	2.966	0.018	Входит в доверительный интервал

Доверительный интервал накрывает