КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Кафедра інтелектуальних та інформаційних систем

Лабораторна робота № 4
з дисципліни
“Методи синтезу та оптимізації”

Виконав студент
групи КН-31
Пашковський Павло Володимирович

Київ-2020

1. Алгоритми Гоморі 1 для розв’язання задачі дискретної оптимізації.

ax_1	$+\,bx_2$	$+\,cx_3$	$+\,dx_4$	$+\,ex_5$	Max	
ax_1	$+\,(a-d)x_2$	$+\,(a-2d)x_3$	$+\,(a-d)x_4$	$+\,(a-2d)x_5$	$=b$	1
$(b-e)x_1$	$+\,bx_2$	$+\,(b-2e)x_3$	$+\,(b-e)x_4$	$+\,(b-2e)x_5$	$=c$	2
$(c-2f)x_1$	$+\,(c-f)x_2$	$+\,cx_3$	$+\,(c-2f)x_4$	$+\,(c-f)x_5$	$=a$	3
x_1 - ціле число	x_2 - ціле	x_3 - ціле	x_4 - ціле	x_5 - ціле		
$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	x_3 - ціле	x_4 - ціле	x_5 - ціле		

,

де a=3, b=3, c=6, d=1, e=1, f=1.

Маємо:
3x1+3x2+6x3+x4+x5⟶max
3x1+2x2+x3+2x4+x5=3
2x1+3x2+x3+2x4+x5=6
4x1+5x2+6x3+4x4+5x5=3
x1, x2, x3, x4, x5 - цілі

<u>Метод Гоморі</u>

Алгоритм знаходження розв'язку методом Гоморі наступний:

1. Лінійна задача розв'язується класичним симплекс-методом, без врахування цілочисельності змінних x_j. В результаті отримують деякий оптимальний опорний план, який має наступний вигляд:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j = b_i;\ i = \overline{1,m} \quad (1)$$

$$F_0 + \sum_{j=m+1}^{n} a_{0j}x_j = b_0;$$

2. Якщо (1) містить рівняння для яких базисні змінні $x_i = b_i$ мають дробові значення, то серед них обирають таке рівняння, яке має найбільшу дробову частину. Дане рівняння перетворюють у додаткову нерівність:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j \geq \beta_i \quad (2)$$

де $\alpha_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}];\ \beta_i = b_i - [b_i];\ \alpha_{ij} \geq 0;\ \beta_i \geq 0$.

Для обрання чисел $[a_{ij}]$ та $[b_i]$ існують наступні правила:

1) якщо дробові числа a_{ij} або b_i є додатними числами, то $[a_{ij}]$ та $[b_i]$ є цілими додатними числами і дорівнюють цілій частині числа a_{ij} або b_i відповідно.

2) якщо дробові числа a_{ij} або b_i є від'ємними числами, то $[a_{ij}]$ та $[b_i]$ є від'ємними цілими числами, які по абсолютній величині на одиницю більші за абсолютну величину цілої частини числа a_{ij} або b_i .

3) якщо a_{ij} або b_i є цілими числами, то $\alpha_{ij} = 0$ і $\beta_i = 0$;

4) додаткова нерівність (2) повинна містити лише додатні коефіцієнти. Вона множенням на −1 спочатку приводиться до вигляду, який повинна мати нерівністьу симплекс-методі згідно із стандартною формою:

$$\sum_{j=1}^{n} -\alpha_{ij}x_j \le -\beta_i$$

а потім за допомогою додаткової змінної x_{n+1} перетворюється у наступне рівняння:

$$\sum_{j=1}^{n} -\alpha_{ij}x_j + x_{n+1} = -\beta_i$$

яке додається до оптимального опорного плану системи (1) і сумісно з ним створює псевдоплан, який містить одне від'ємне значення $b_i = -\beta_i$;

5) даний псевдоплан розв'язується двоїстим симплекс-методом. В результаті отримують новий оптимальний опорний план з додатними значеннями b_i та a_{0j} . Якщо в новому оптимальному опорному плані існують змінні $x_j = b_i$, значення яких містять дробову частину, то знову додають одне додаткове обмеження, і процес розрахунків повторюється до отримання цілочисельних значень базисних змінних.

Ознакою відсутності розв'язку задачі є наявність у таблиці хоча б одного рядка з цілими величинами a_{ij} та вільним членом b_i , значення якого містить дробову частину. Дана ознака вказує на відсутність розв'язку у цілих числах.

<u>Хід виконання</u>

Розширена матриця системи:

3	2	1	2	1	3
2	3	1	2	1	6
4	5	6	4	5	3

Приведемо систему до одиничної матриці шляхом жорданівських перетворень.

В якості базової змінної оберемо x3. Вирішальний елемент =1.

Отримаємо:

3	2	1	2	1	3
-1	1	0	0	0	3
-14	-7	0	-8	-1	-15

В якості базової змінної оберемо x4. Вирішальний елемент =-8.
Отримаємо:

$-1/2$	$1/4$	1	0	$3/4$	$-3/4$
-1	1	0	0	0	3
$7/4$	$7/8$	0	1	$1/8$	$15/8$

В якості базової змінної оберемо x2. Вирішальний елемент =1.
Отримаємо:

$-1/4$	0	1	0	$3/4$	$-3/2$
-1	1	0	0	0	3
$21/8$	0	0	1	$1/8$	$-3/4$

Оскільки в системі є одинична матриця, то в якості базисних змінних обираємо x2, x3, x4.
Виразимо базисні змінні через інші. Маємо:
x3 = 1/4x1-3/4x5-11/2
x2 = x1+3
x4 = -21/8x1-1/8x5-¾
Підставимо їх в цільову функцію:
F(X) = 39/8x1-29/8x5-3/4
Серед вільних членів є від'ємні, а отже отриманий план не є опорним.
Замість x3 введемо x1.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	6	1	0	-4	0	-3
x_2	9	0	1	-4	0	-3
x_4	$-33/2$	0	0	$21/2$	1	8
F(X0)	-30	0	0	$39/2$	0	11

Виразимо базисні змінні через інші. Маємо:
x1 = 4x3+3x5+6
x2 = 4x3+3x5+9

x4 = -21/2x3-8x5-16.5
Підставимо їх в цільову функцію:
F(X) = 39/2x3+11x5+28.5
Матриця коефіцієнтів системи:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 21/2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Базисне рішення:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	6	1	0	-4	0	-3
x_2	9	0	1	-4	0	-3
x_4	$-33/2$	0	0	$21/2$	1	8
F(X0)	0	0	0	$-39/2$	0	-11

Останній рядок містить від’ємні елементи. Рішення відсутнє.
2. Метод віток та меж для розв’язання задачі дискретної оптимізації.

ax_1	$+bx_2$	$+cx_3$	$+dx_4$	$+ex_5$	Max	
ax_1	$+(a-d)x_2$	$+(a-2d)x_3$	$+(a-d)x_4$	$+(a-2d)x_5$	$=b$	1
$(b-e)x_1$	$+bx_2$	$+(b-2e)x_3$	$+(b-e)x_4$	$+(b-2e)x_5$	$=c$	2
$(c-2f)x_1$	$+(c-f)x_2$	$+cx_3$	$+(c-2f)x_4$	$+(c-f)x_5$	$=a$	3
x_1 - ціле число	x_2 - ціле	x_3 - ціле	x_4 - ціле	x_5 - ціле		
$x_1 \ge 0$	$x_2 \ge 0$	x_3 - ціле	x_4 - ціле	x_5 - ціле		

,

де a=3, b=3, c=6, d=1, e=1, f=1.
Маємо:
3x1+3x2+6x3+x4+x5⟶max
3x1+2x2+x3+2x4+x5=3
2x1+3x2+x3+2x4+x5=6
4x1+5x2+6x3+4x4+5x5=3
x1, x2, x3, x4, x5 - цілі

Метод гілок та меж

В основі методу гілок та меж лежить ідея послідовного розбиття множини допустимих рішень на підмножини. На кожному кроці методу елементи розбиття піддаються перевірці для з'ясування, містить дане підмножина оптимальне рішення чи ні. Перевірка здійснюється за допомогою обчислення оцінки знизу для цільової функції на даному підмножині. Якщо оцінка знизу не менше рекорду - найкращого з знайдених рішень, то підмножина може бути відкинуто. Проверяемое підмножина може бути відкинуто ще і в тому випадку, коли в ньому вдається знайти найкраще рішення. Якщо значення цільової функції на знайденому рішенні менше рекорду, то відбувається зміна рекорду. По закінченню роботи алгоритму рекорд є результатом його роботи.

Хід виконання

Введемо штучні змінні:

$3x1 + 2x2 + 1x3 + 2x4 + 1x5 + 1x6 + 0x7 + 0x8 = 3$

$2x1 + 3x2 + 1x3 + 2x4 + 1x5 + 0x6 + 1x7 + 0x8 = 6$

$4x1 + 5x2 + 6x3 + 4x4 + 5x5 + 0x6 + 0x7 + 1x8 = 3$

Цільова функція:

$F(X) = 3x1+3x2+6x3+x4+x5 - Mx6 - Mx7 - Mx8 \rightarrow max$

Виразимо з рівнянь штучні змінні:

$x6 = 3-3x1-2x2-x3-2x4-x5$

$x7 = 6-2x1-3x2-x3-2x4-x5$

$x8 = 3-4x1-5x2-6x3-4x4-5x5$

Підставимо їх в цільову функцію:

$F(X) = (3+9M)x1+(3+10M)x2+(6+8M)x3+(1+8M)x4+(1+7M)x5+(-12M) \rightarrow max$

Вводимо нову змінну x0:

$x0 = 9x1+10x2+8x3+8x4+7x5$

Виразимо базисні змінні через небазисні:

$x0 = -12+9x1+10x2+8x3+8x4+7x5$

$x6 = 3-3x1-2x2-x3-2x4-x5$

$x7 = 6-2x1-3x2-x3-2x4-x5$

$x8 = 3-4x1-5x2-6x3-4x4-5x5$

$max(9,10,8,8,7,0,0,0) = 10$

$x0 = -12+9x1+10x2+8x3+8x4+7x5$

$x6 = 3-3x1-2x2-x3-2x4-x5$

$x7 = 6-2x1-3x2-x3-2x4-x5$

$x8 = 3-4x1-5x2-6x3-4x4-5x5$

Поточний план не є оптимальним. В якості нової змінної оберемо x2. Обчислимо значення Di по всім рівнянням для цієї змінної bi / ai2 та оберемо з них найменше:

$$min(\frac{3}{2},\frac{6}{3},\frac{3}{5}) = 0.6$$

Замість змінної x8 в план ввійде змінна x2.

Виразимо змінну x2 через x8.

$x2 = 0.6-0.8x1-1.2x3-0.8x4-x5-0.2x8$
Підставимо в усі вирази:
$x0 = -12+9x1+10(0.6-0.8x1-1.2x3-0.8x4-x5-0.2x8)+8x3+8x4+7x5$
$x6 = 3-3x1-2(0.6-0.8x1-1.2x3-0.8x4-x5-0.2x8)-x3-2x4-x5$
$x7 = 6-2x1-3(0.6-0.8x1-1.2x3-0.8x4-x5-0.2x8)-x3-2x4-x5$
Отримаємо:
$x0 = -6+x1-4x3-3x5-2x8$
$x6 = 1.8-1.4x1+1.4x3-0.4x4+x5+0.4x8$
$x7 = 4.2+0.4x1+2.6x3+0.4x4+2x5+0.6x8$
$x2 = 0.6-0.8x1-1.2x3-0.8x4-x5-0.2x8$
Покладаючи небазисні змінні рівними нулю, отримаємо новий допустимий вектор та значення цільової функції.
$x = (-1, 0, 4, 0, 3, 0, 0, 2)$, $x0 = -6$
Поточний план не є оптимальним, в якості нової змінної оберемо x1.
Обчислимо значення Di по всім рівнянням для цієї змінної bi / ai2 та оберемо з них найменше:
$$min(\frac{1.8}{1.4},-,\frac{0.6}{0.8}) = 0.75$$
Замість змінної x2 в план ввійде x1.
Виразимо x1 через x2:
$x1 = 0.75-1.25x2-1.5x3-x4-1.25x5-0.25x8$
Підставимо в усі вирази:
$x0 = -5.25-1.25x2-5.5x3-x4-4.25x5-2.25x8$
$x6 = 0.75+1.75x2+3.5x3+x4+2.75x5+0.75x8$
$x7 = 4.5-0.5x2+2x3+1.5x5+0.5x8$
$x1 = 0.75-1.25x2-1.5x3-x4-1.25x5-0.25x8$
Покладаючи небазисні змінні рівними нулю, отримаємо новий допустимий вектор та значення цільової функції.
$x = (0, 1.25, 5.5, 1, 4.25, 0, 0, 2.25)$, $x0 = -5.25$
Від'ємні елементи відсутні, отже знайдений оптимальний план.
$x0 = -5.25-1.25x2-5.5x3-x4-4.25x5-2.25x8$
$x6 = 0.75+1.75x2+3.5x3+x4+2.75x5+0.75x8$
$x7 = 4.5-0.5x2+2x3+1.5x5+0.5x8$
$x1 = 0.75-1.25x2-1.5x3-x4-1.25x5-0.25x8$

$x0 = -16.5-10.5x3-x4-8x5+2.5x7-3.5x8$
$x6 = 16.5+10.5x3+x4+8x5-3.5x7+2.5x8$
$x2 = 9+4x3+3x5-2x7+x8$
$x1 = -10.5-6.5x3-x4-5x5+2.5x7-1.5x8$
Видалимо всі штучні змінні:
$x3 = -1.57-0.0952x4-0.76x5$
$x2 = 2.71-0.38x4-0.0476x5$
$x1 = -0.29-0.38x4-0.0476x5$

Підставимо значення в цільову функцію:
F(X) = -2.14-1.86x4-3.86x5
Кінцевий варіант системи рівнянь:
x0 = -2.14-1.86x4-3.86x5
x3 = -1.57-0.0952x4-0.76x5
x2 = 2.71-0.38x4-0.0476x5
x1 = -0.29-0.38x4-0.0476x5
Серед базисних змінних є від’ємні. Рішення не існує.