КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Кафедра інтелектуальних та інформаційних систем

Лабораторна робота № 3

з дисципліни

“Методи синтезу та оптимізації”

Виконав студент

групи КН-31

Пашковський Павло Володимирович

Київ-2020

Завдання №1. Побудова багатогранної множини заданої в канонічному вигляді в просторі E^{n-m} $(n-m=3)$ на основі методу Гауса (повного виключення) та знаходження фундаментальної системи розв'язків (ФСР).

Умова:

ax_1	$+(a-d)x_2$	$+(a-2d)x_3$	$+(a-d)x_4$	$+(a-2d)x_5$	$=b$
$(b-e)x_1$	$+bx_2$	$+(b-2e)x_3$	$+(b-e)x_4$	$+(b-2e)x_5$	$=c$
$(c-2f)x_1$	$+(c-f)x_2$	$+cx_3$	$+(c-2f)x_4$	$+(c-f)x_5$	$=a$

, де a=3, b=3, c=6, d=1, e=1, f=1.

Маємо:

3x1+2x2+x3+2x4+x5=3

2x1+3x2+x3+2x4+x5=6

4x1+5x2+6x3+4x4+4x5=3

Метод Гауса

Метод Гауса полягає в послідовному виключенні змінних і перетворенні системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

до трикутного (східчастого) вигляду

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1; \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2; \\ \qquad\qquad \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ \qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n, \ c_{kk} = 1, (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Хід вирішення:

Для вирішення систему побудуємо розширену матрицю:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

Для зручності поміняємо рядки місцями:

4	5	6	4	4	3
3	2	1	2	1	3
2	3	1	2	1	6

Помножимо другий рядок на -2/3 і додамо до третього.

4	5	6	4	4	3
3	2	1	2	1	3
0	$^5/_3$	$^1/_3$	$^2/_3$	$^1/_3$	4

Помножимо перший рядок на -3/4 і додамо до другого.

4	5	6	4	4	3
0	$^{-7}/_4$	$^{-7}/_2$	-1	-2	$^3/_4$
0	$^5/_3$	$^1/_3$	$^2/_3$	$^1/_3$	4

Помножимо другий рядок на 20/21 і додамо до третього.

4	5	6	4	4	3
0	$^{-7}/_4$	$^{-7}/_2$	-1	-2	$^3/_4$
0	0	-3	$^{-2}/_7$	$^{-11}/_7$	$^{33}/_7$

Для отримання одиниць на головній діагоналі, ділимо кожний рядок на відповідний елемент головної діагоналі.

1	$^5/_4$	$^3/_2$	1	1	$^3/_4$
0	1	2	$^4/_7$	$^8/_7$	$^{-3}/_7$
0	0	1	$^2/_{21}$	$^{11}/_{21}$	$^{-11}/_7$

Тепер початкову систему можна записати наступним чином:

x1 = 3/4 - (5/4x2 + 3/2x3 + x4 + x5)

x2 = -3/7 - (2x3 + 4/7x4 + 8/7x5)

x3 = -11/7 - (2/21x4 + 11/21x5)

Необхідно прийняти змінні x4 та x5 в якості вільних змінних, щоб виразити через них інші змінні.

Для отримання частного рішення прирівнюємо x4 та x5 до нуля.

Маємо:

x3 = -11/7

x2 = -3/7 - 2*(-11/7) - 4/7*0 - 8/7*0 = 19/7

x1 = 3/4 - 5/4*19/7 - 3/2*(-11/7) - 1*0 - 1*0 = -2/7

Завдання №2. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування заданої в канонічному вигляді в просторі E^{n-m} $(n-m=2)$.

Беремо дану систему з попереднього завдання:
x1=-5-2/21x4-53/21x5
x2=19/7+16/21x4+46/21x5
x3=-11/7-2/21x4-11/21x5
Обмеження:
-2/21x4-53/21x5<=-5
6/21x4+46/21x5<=19/7
-2/21x4-11/21x5<=-11/7

Завдання №3. Задача лінійного програмування: модифікований симплекс-метод, двоїстий симплекс-метод, як основа побудови алгоритмів розв'язання задач дискретної оптимізації.

<u>**Модифікований симплекс-метод**</u>

ax_1	$+bx_2$	$+cx_3$	$+dx_4$	$+ex_5$	Max	
ax_1	$+(a-d)x_2$	$+(a-2d)x_3$	$+(a-d)x_4$	$+(a-2d)x_5$	$=b$	1
$(b-e)x_1$	$+bx_2$	$+(b-2e)x_3$	$+(b-e)x_4$	$+(b-2e)x_5$	$=c$	2
$(c-2f)x_1$	$+(c-f)x_2$	$+cx_3$	$+(c-2f)x_4$	$+(c-f)x_5$	$=a$	3
$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	$x_3 \geq 0$	$x_4 \geq 0$	$x_5 \geq 0$		

, де a=3, b=3, c=6, d=1, e=1, f=1.

Маємо:
$3x1+3x2+6x3+x4+x5 \longrightarrow max$
$3x1+2x2+x3+2x4+x5=3$
$2x1+3x2+x3+2x4+x5=6$
$4x1+5x2+6x3+4x4+4x5=3$
$x1, x2, x3, x4, x5>=0$

Розширена матриця:

3	2	1	2	1	3
2	3	1	2	1	6
4	5	6	4	4	3

Приведемо систему до одиничної матриці методом жораднівських перетворень. В якості базової змінної оберемо x3. Вирішальний ел. =1.
Отримаємо нову матрицю.

3	2	1	2	1	3
-1	1	0	0	0	3
-14	-7	0	-8	-2	-15

В якості базової змінної оберемо x4. Вирішальний ел. =-8.
Отримаємо нову матрицю.

$-1/2$	$1/4$	1	0	$1/2$	$-3/4$
-1	1	0	0	0	3
$7/4$	$7/8$	0	1	$1/4$	$15/8$

В якості базової змінної оберемо x2. Вирішальний ел. =1.
Отримаємо нову матрицю.

$-1/4$	0	1	0	$1/2$	$-3/2$
-1	1	0	0	0	3
$21/8$	0	0	1	$1/4$	$-3/4$

Оскільки система містить одиничну матрицю, то в якості базисних змінних приймемо x2, x3, x4.
Виразимо базисні змінні через інші:

x3 = 1/4x1-1/2x5-11/2
x2 = x1+3
x4 = -21/8x1-1/4x5-¾
Підставимо в цільову функцію:
F(X) = 39/8x1-9/4x5-3/4
Серед вільних членів є від'ємні значення, отже отриманий базисний план не є оптимальним.
Замість змінної x3 вводимо змінну x1.
Виповнимо зміни симплекс-таблиці:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	6	1	0	-4	0	-2
x_2	9	0	1	-4	0	-2
x_4	$^{-33}/_{2}$	0	0	$^{21}/_{2}$	1	$^{11}/_{2}$
F(X0)	-30	0	0	$^{39}/_{2}$	0	$^{15}/_{2}$

Виразимо базисні змінні через інші:
x1 = 4x3+2x5+6
x2 = 4x3+2x5+9
x4 = -21/2x3-11/2x5-161/2
Підставимо їх в цільову функцію.
F(X) = 39/2x3+15/2x5+281/2
Вважаємо, що вільні змінні =0 і отримаємо перший опорний план.
X0 = (6,9,0,-161/2,0)
Базисне рішення вважається допустимим, якщо воно невід'ємне.
Оскільки в початковому плані є від'ємні значення, то перейдемо до першого кроку модифікованого симплекс-методу.
Маємо:
Матриця коефіцієнтів A = aij:

1	0	-4	0	-2
0	1	-4	0	-2
0	0	21/2	1	11/2

Матриця b:

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -33/2 \end{pmatrix}$$

Базисні змінні:
X=(1, 2, 4)
Обираємо з матриці A стовпці 1, 2, 4 та формуємо матрицю B.

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця c.
c = (0, 0, -191/2, 0, -71/2)
Формуємо з матриці C дві матриці: cB з базисних компонентів та cN з небазисних.
cB(1,2,4) = (0, 0, 0)
cN(3,5) = (-191/2, -71/2)
Матриця N формується з матриці A:

$$N_{3,5} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -2 \\ 21/2 & 11/2 \end{pmatrix}$$

Обчислимо B^(-1):

$$B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Множимо вектор cB на B^(-1), отримаємо вектор u.
u = cB*B^(-1)= (0, 0, 0)
Множимо B^(-1) на вектор b.

$$b_{1,2,4}^{*} = B^{-1} * b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -33/2 \end{pmatrix}$$

Множимо вектор u на матрицю N.

uN = (0, 0)

c*3,5 = cN - uN = (-191/2, -71/2)

Звідси номер направляючого стовпчика.

$$(a_{11} \dots a_{m1}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 21/2 \end{pmatrix}$$

Множимо матрицю B^(-1) на вектор (a11,...,am1).

Отримаємо: F(x)=28,5.