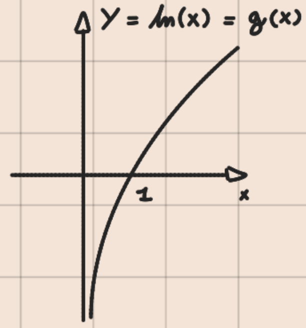
ES. TRASFORMAZIONI V.A.

Esercizi applicazione diretta del Teorema

Esercizio 1)

- $X \sim \mathrm{PAR}(\alpha)$ $\qquad Y = g(X) = \ln X$
- $f_X(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} \cdot \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)$, $S_X = (1,\infty)$



1) ABBIAMO CHE: $\frac{d}{dy} g^{\prime}(y) = \frac{d}{dy} e^{y} = e^{y}$

2) APPLICHIAMO LA FORMULA DEL TEOREMA:

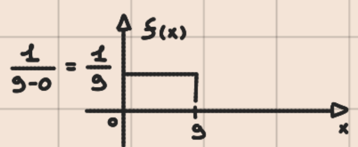
$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{d}{dy} g^{\prime}(y)\right|$$
$$= \frac{\alpha}{e^{y\alpha+\cancel{1}}} \cdot \mathbb{1}_{(1,\infty)}(e^{y}) \cdot \cancel{e^{y}}$$
$$= \boxed{\alpha e^{-\alpha y} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)} .$$

$$\mathbb{1}_{(1,\infty)}(e^{y}) = \begin{cases} e^{y} & \text{SE } e^{y} \geq 1 \\ 0 & \text{SE } e^{y} < 0 \end{cases}$$

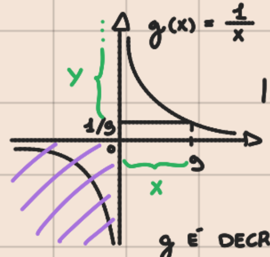
$$= \begin{cases} 1 & \text{SE } y \geq 0 \\ 0 & \text{SE } y < 0 \end{cases} = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

Esercizio 2)

- $X \sim \mathrm{UNIF}(0,9)$
- $f_X = \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot \mathbb{1}_{(0,9)}(x) = \frac{1}{9} \cdot \mathbb{1}_{(0,9)}(x)$
- $Y = g(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad S_Y = (1/9, \infty)$
- $X = g^{-1}(y) = \frac{1}{y}$



NOTIAMO CHE IL SUPPORTO È $S_X = (0,9)$



IL SUPPORTO $S_Y = (1/9, \infty)$

g È DECRESCENTE IN $(0,9)$.

1) CALCOLARE: $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{d}{dy} y^{-1} = -\frac{1}{y^2}$

2) APPLICHIAMO LA FORMULA DEL TEOREMA:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|$$
$$= \frac{1}{9} \cdot \mathbb{1}_{(0,9)}(1/y) \cdot \left|-\frac{1}{y^2}\right| =$$
$$= \boxed{\frac{1}{9y^2} \mathbb{1}_{(1/9,\infty)}(y)} .$$

$$\boxed{0 < 1 < 9y \implies y > 1/9}$$

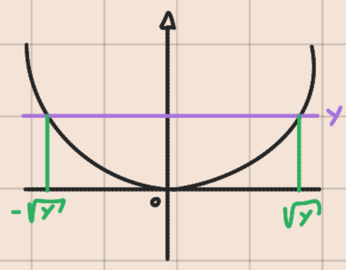
$$\mathbb{1}_{(0,9)}(1/y) = \begin{cases} 1 & \text{SE } 0 < \frac{1}{y} < 9 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{SE } y > 1/9 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} = \mathbb{1}_{(1/9,\infty)}(y)$$

Esercizi in cui non si può applicare direttamente il Teorema

Esercizio 3)

• $X \sim Exp(5)$



• $f_X(x) = 5e^{-5x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ $S_X = [0,+\infty) \ni X$

• $Y = g(x) = X^2$ $Y_X = [0,+\infty) \ni Y$

• $X = g^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$

Non posso applicare il teorema perché la funzione non è strettamente crescente o decrescente:

1) Calcoliamo F_Y in termini di F_X:

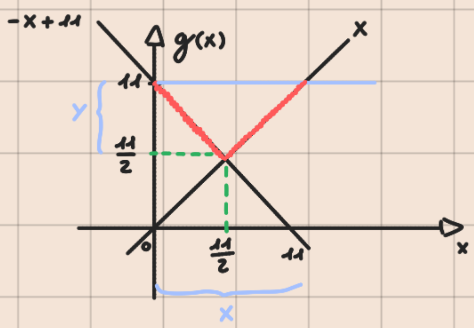
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$
$$= F_X(\sqrt{y}) - \cancel{F_X(-\sqrt{y})}$$ Vale 0 per una esponenziale.

2) Calcoliamo f_Y in termini di f_X:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(\sqrt{y}) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = 5e^{-5\sqrt{y}} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$
$$= \boxed{\frac{5e^{-5\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)} .$$

Esercizio altro 3)

• $X \sim U(0,11)$

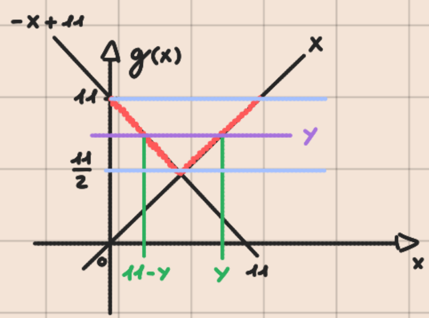


• $f_X = \frac{1}{11} \cdot \mathbb{1}_{[0,11]}(x)$ $S_X = [0,11]$

• $Y = g(x) = \max\{X, 11-X\}$ $S_Y = [\frac{11}{2}, 11]$

Non posso applicare il teorema: $g(x)$ non è invertibile in $[0,11]$.

1) Calcoliamo F_Y in termini di F_X:



$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\max\{X, 11-X\} \leq y)$$
$$= P(11-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(11-y)$$

2) Calcoliamo f_Y in termini di f_X:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}\{F_X(y) - F_X(11-y)\}$$
$$= f_X(y) - f_X(11-x) \cdot (-1)$$
$$= f_X(y) + f_X(11-x)$$

Si deduce che: $11-y \leq X \leq y$.

3) Sostituiamo a $f_X(y)$ il valore della distribuzione:

$$f_Y = \frac{1}{11} \cdot \mathbb{1}_{[0,11]}(y) + \frac{1}{11} \cdot \mathbb{1}_{[0,11]}(11-y)$$
$$= \frac{2}{11} \cdot \mathbb{1}_{[0,11]}(y)$$ ma dato che $S_Y = [\frac{11}{2}, 11]$
$$= \boxed{\frac{2}{11} \cdot \mathbb{1}_{[\frac{11}{2}, 11]}(y)} .$$

$$\boxed{\mathbb{1}_{[0,11]}(11-y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 11-y \in [0,11] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in [0,11] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}_{[0,11]}(y)}$$