SOMMA DI DUE V.A.

SOMMA DI DUE V.A. INDIPENDENTI

Def: Siano X ed Y due v.a. indipendenti, posto $Z = X+Y$ abbiamo:

- Se X,Y discrete:
  - $p_Z(z) = \sum_{x \in S_x} p_X(x) \cdot p_Y(z-x)$
  - $p_Z(z) = \sum_{y \in S_y} p_Y(y) \cdot p_X(z-y)$
- Se X,Y continue:
  - $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) \cdot dx$
  - $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \cdot f_X(z-y) \cdot dy$

Sono vere entrambe le $p_Z(z)$ e $f_Z(z)$ espresse in funzione di x e di y. Dim: sul quaderno.

Applicazioni:

Dim: sul quaderno.

1) Binomiali: $X \sim Bin(n,p)$ $\quad Y \sim Bin(m,p)$ $\quad$ indipendenti: $\quad X+Y \sim Bin(n+m, p)$
2) Normali st.: $X \sim N(0,1)$ $\quad Y \sim N(0,1)$ $\quad$ indipendenti: $\quad X+Y \sim N(0,2)$
3) Normali g.: $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $\quad$ indipendenti: $\quad X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

   In generale: $aX+bY+c \sim N(a\mu_1+b\mu_2+c, \; a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$
4) Poisson: $X \sim Pois(\alpha)$ $\quad Y \sim Pois(\beta)$ $\quad$ indipendenti: $\quad X+Y \sim Pois(\alpha+\beta)$
5) Esponenziali: $X \sim Exp(\lambda)$ $\quad Y \sim Exp(\lambda)$ $\quad$ indipendenti: $\quad X+Y \sim Gamma(2,\lambda)$

Esempio somma di due Bernulli indipendenti

Dati: $X \sim Ber(p)$ $\quad Y \sim Ber(p)$ $\quad$ indipendenti $\quad Z = X+Y \in \{0,1,2\}$

- $p_Z(0) = P(Z=0) = P(X+Y=0) = P(X=0, Y=0) = p_{X,Y}(0,0) = p_X(0) \cdot p_Y(0) = \boxed{(1-p)(1-q)}$.
- $p_Z(1) = P(Z=1) = P(X+Y=1) = P(X=1, Y=0) + P(X=0, Y=1) = \boxed{p \cdot (1-q) + q(1-p)}$.

Esempio somma due Normali indipendenti

Dati: $X \sim N(2,5)$ $\quad Y \sim N(5,9)$ $\quad$ indipendenti $\quad Z = 3X-2Y+1$.

- $E[Z] = E[3X-2Y+1] = 3E[X]-2E[Y]+1 = 3\cdot 2 - 2\cdot 5 + 1 = -3$.
- $Var(Z) = Var(3X-2Y+1) = 3^2 \cdot Var(X) + (-2)^2 \cdot Var(Y) = 9\cdot 5 + 4 \cdot 9 = 9 \cdot 9 = 81$.
- $F_Z(6) = P(Z \le 6) = \phi\left(\frac{6-(-3)}{\sqrt{81}}\right) = \boxed{\phi(1)}$.

DISTRIBUZIONE CONGIUNTA DI n VARIABILI ALEATORIE

(Teoria direttamente sulle slides)

Distribuzione congiunta di n variabili aleatorie

Funzione di distribuzione congiunta di n variabili aleatorie:
$F_{X_1,\dots,X_n}(a_1,\dots,a_n) = P(X_1 \le a_1, \dots, X_n \le a_n)$ per $a_i \in \mathbb{R}$

Funzione di probabilità congiunta di n variabili aleatorie:
$p_{X_1,\dots,X_n}(a_1,\dots,a_n) = P(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n)$ per $a_i \in \mathbb{R}$

Funzione di densità congiunta di n variabili aleatorie:
$P(a_1 \le X_1 \le b_1, \dots, a_n \le X_n \le b_n) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\, dx_1 \dots dx_n$
per $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

6/12

Variabili aleatorie indipendenti

Le v.a. $X_1, \dots, X_n$ sono dette **indipendenti** se
$F_{X_1,\dots,X_n}(a_1,\dots,a_n) = F_{X_1}(a_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(a_n)$,
$\forall\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Le v.a. discrete $X_1, \dots, X_n$ sono **indipendenti** se e solo se $p_{X_1,\dots,X_n}(a_1,\dots,a_n) = p_{X_1}(a_1) \cdot \dots \cdot p_{X_n}(a_n)$
$\forall\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Le v.a. continue $X_1, \dots, X_n$ sono **indipendenti** se e solo se $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$
$\forall\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

TEO: Se $X_1, \dots, X_m$ INDIPENDENTI $\Rightarrow VAR(X_1 + \dots + X_m) = VAR(X_1) + \dots + VAR(X_2)$.