ESERCIZI DISTRIBUZIONI PT.1

Esercizio Lampadine Difettose

Un negozio di materiale elettrico riceve un lotto di **1000** lampadine. Per ognuna delle lampadine, la probabilità di presentare un difetto è **0.1%**. Calcolare le probabilità che il lotto contenga:

- **0** lampadine difettose,
- **1** lampadina difettosa,
- almeno **2** lampadine difettose.

1) X = { NUMERO DI LAMPADINE DIFETTOSE }.

2) $X \sim \text{BIN}(n, p) = \text{BIN}(1000, 0.001)$

3) $S_X = \{0, 1, 2, \dots, 1000\} \ni X$

4) RISOLVIAMO:

→ PER $K = 0$: $p_X(0) = P(X = 0) = \boxed{(0.999)^{1000}}$.

→ PER $K = 1$: $p_X(1) = P(X = 1) = \boxed{1000 \cdot (0.001)^1 \cdot (0.999)^{999}}$.

→ PER $K \geq 2$: $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = \boxed{1 - p_X(0) - p_X(1)}$.

$$\boxed{\sum_{K \geq 2}^{1000} p_X(K) = 1 - \sum_{K < 2} p_X(K)}$$

Esercizio Due Lotterie

Decidiamo di giocare, ogni mese, a due diverse lotterie, e, di smettere alla prima vincita (in una delle due). La probabilità di vincere un premio nelle due lotterie è, rispettivamente, p1 e p2. Calcolare la probabilità di dover giocare almeno 3 volte prima di vincere un premio.

1) X = { NUMERO DI TENTATIVI DA EFFETTUARE PER VINCERE LA PRIMA VOLTA IN ALMENO UNA DELLE DUE LOTTERIE }.

2) $X \sim \text{GEO}(p)$ DOVE p = PROB. DI VINCERE AD OGNI SINGOLO TENTATIVO.

- V_i = VINCO ALLA LOTTERIA $i \in \{1, 2\}$ AD UN TENTATIVO FISSATO.

- $p_1 = P(V_1)$, $p_2 = P(V_2)$
- $p = P(V_1 \cup V_2) = P(V_1) + P(V_2) - P(V_1 \cap V_2)$

$$= p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2$$

$\boxed{P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2) \text{ PER } V_1, V_2 \text{ INDIPENDENTI.}}$

- ALLORA:

$$X \sim Geo(p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2) .$$

$\boxed{X \sim Geo(p) : 0 \notin S_X \quad S_X = \{1, 2, 3, \dots\} \ni X}$

3) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - p_X(1) - p_X(2) = 1 - p - p \cdot (1-p)$

$= (1-p)^2$

$= \boxed{(1 - (p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2))^2}$.

ALTERNATIVA

$P(X \geq 3) = \sum_{K=3}^{+\infty} p_X(K)$

$p_X(K) = p \cdot (1-p)^{K-1}$

Esercizio giocata unico biglietto

Supponete di voler andare ad un concerto con un vostro amico, ma c'è solo un biglietto ancora disponibile. Il bigliettaio vi propone il seguente criterio per stabilire chi deve andare al concerto. Avete a disposizione una moneta truccata, con la quale, la probabilità di ottenere testa è p∈(0,1). **Lanciate la moneta tante volte finché ottenete testa per la prima volta**. Se il numero di lanci effettuati è dispari vince il vostro amico, altrimenti vincete voi. Siete d'accordo con questo criterio?

X = NUMERO DI LANCI EFFETTUATI $\sim Geo(p)$.

$\{X \text{ DISPARI}\} = V^c$, $\{X \text{ PARI}\} = V$

VEDI GLI ESPONENTI

$P(V) = P(X \text{ PARI}) = \sum_{K \text{ PARI}} Geo(p) = p \cdot (1-p)^{K-1} = p \cdot (1-p) + p \cdot (1-p)^3 + p \cdot (1-p)^5 + \dots$

$P(V^c) = P(X \text{ DISPARI}) = \sum_{K \text{ DISPARI}} Geo(p) = p \cdot (1-p)^{K-1} = p \cdot (1-p)^2 + p \cdot (1-p)^4 + p \cdot (1-p)^6 + \dots$

SOLUZIONE: NON SONO D'ACCORDO PERCHÉ I DISPARI HANNO PIÙ PROBABILITÀ DI VINCERE:

$\boxed{P(V) = (1-p) \cdot P(V^c) \leq P(V^c)}$.

$$\begin{cases} P(V) = (1-p) \cdot P(V^c) \\ P(V^c) = 1 - P(V) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(V) = (1-p) \cdot (1 - P(V)) \\ P(V) + P(V) \cdot (1-p) = 1-p \end{cases}$$

$\Rightarrow (2-p) \cdot P(V) = 1-p \Rightarrow \boxed{P(V) = \frac{1-p}{2-p}}$.

Dimostrazione Proprietá della perdita di memoria

Sia X una v.a. Geometrica. Dimostrare che, per ogni $k,n \in \mathbb{N}$,

$$P(X > k+n \mid X > k) = P(X > n)$$

questa relazione è detta proprietà di perdita della memoria.

Dim:

- $P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p(1-p)^k$ con $m = k - n - 1$

$= p \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^{m+n} = p \cdot (1-p)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m$

$= p \cdot (1-p)^n \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \boxed{(1-p)^n}$.

- $X \sim Geo(p)$.
- $P(X = n) = p \cdot (1-p)^{n-1}$
- $X \in \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$.

- $P(X > n + k \mid X > k) = \frac{P(X > n+k,\, X > k)}{P(X > k)}$

$= \frac{P(X > n+k)}{P(X > k)} = \frac{(1-p)^{n+\cancel{k}}}{\cancel{(1-p)^k}} = (1-p)^n = P(X > n)$.

- $\{X > n+k\} \subseteq \{X > k\}$