VARIABILI ALEATORIE

Problema Introduttivo

Supponiamo di partecipare ad un gioco in cui si lanciano due monete e si vincono **2 euro** se escono *due teste*, **1 euro** se esce *una testa e una croce*, e si **perdono 3 euro** se escono **due croci**. Calcolare le probabilità associate a questi eventi.

$\Omega = \{(T,T),(T,C),(C,T),(C,C)\}$ EQUIPROBABILE $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

DEFINISCO UNA FUNZIONE X CHE VALE PER $\boxed{x \in \mathbb{R}: \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \subseteq \Omega}$ INCREMENTALE.

$\boxed{X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}}$

$(T,T) \longrightarrow 2$
$(T,C) \longrightarrow 1$
$(C,T) \longrightarrow 1$
$(C,C) \longrightarrow -3$

X: VARIABILE ALEATORIA (FUNZIONE).
x: NUMERO REALE.
$\{X = x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$, CIOÉ UN EVENTO.

$\{X = 1\} = \{(T,C),(C,T)\}$.
$\{X = 2\} = \{(T,T)\}$.
$\{X = -3\} = \{(C,C)\}$.

Ω DISCRETO: Σ INSIEME DI TUTTI I SOTTOINSIEMI DI Ω.
Ω CONTINUO: Σ É UNA σ-ALGEBRA DI Ω.

QUINDI NEL NOSTRO PROBLEMA, DATO $x = 1.5$:

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq 1.5\} = \{\omega : X(\omega) \in \{1,-3\}\} = \{(T,C),(C,T),(C,C)\} \subseteq \Omega$.

IL SUPPORTO DELLA VARIABILE X É:

$S_X = \{1, 2, -3\} \longrightarrow$ IN QUESTO CASO IL SUPPORTO È FINITO E DISCRETO.

MENTRE LA PROBABILITÁ DELLE x AL DI FUORI S_X SONO PARI A ZERO:
$\forall x \in \mathbb{R}/S \quad P(X = x) = 0$.

INSIEME SUPPORTO ASSOCIATO ALLA VARIABILE X: S_X

VALE CHE PER: $P(X = x) > 0 \Rightarrow x \in S$.

QUINDI NEL CASO DI $x = 1.5$: $1.5 \notin S \Rightarrow P(X = 1.5) = 0$.

- $P(X \in \{1,2,-3\}) = 1$.
- $P(X \in (-3, +\infty)) = 1$.

MENTRE: $P: \Sigma \longrightarrow [0,1]$

DEFINIAMO: $p_X: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$
$x \longrightarrow p_X(x)$

$\boxed{P: \Sigma \longrightarrow [0,1] \quad x \in \mathbb{R} \quad p_X(x) = P(X = x)}$

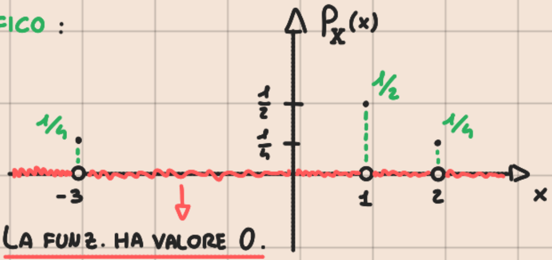
- p_X: FUNZIONE DI PROBABILITÁ ASSOCIATA ALLA VARIABILE X.
- LA FUNZIONE DI PROBABILITÁ SULLO SPAZIO DEGLI EVENTI DIVENTA UNA FUNZIONE DI PROBABILITÁ SU X IN $\mathbb{R}$.

NEL NOSTRO CASO:

- $p_X(1) = P(X=1) = P(\{(T,C),(C,T)\}) = P(\{(T,C)\} \cup \{(C,T)\}) = P(\{(T,C)\}) + P(\{(C,T)\})$
- $p_X(2) = P(X=2) = P(\{(T,T)\}) = 1/4. \qquad = 1/4 + 1/4 = 1/2.$
- $p_X(-3) = P(X=-3) = P(\{(C,C)\}) = 1/4.$

DA CUI DERIVIAMO TABELLA E GRAFICO:

x	-3	1	2
p_X	$1/4$	$1/2$	$1/4$



Esercizio Variabile Aleatoria Discreta

Nel lancio di due dadi, chiamo M il massimo tra i due esiti.

DEFINIAMO: $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$ EQUIPROBABILE $|\Omega| = 36$.

$p_M(m) = P(M=m) \qquad S_M = \{1, 2, \dots, 6\}$.

ALLORA:

$p_M(1) = P(M=1) = P(\{(1,1)\}) = 1/36$.

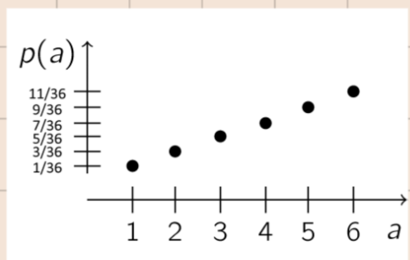
$p_M(2) = P(M=2) = P(\{(2,2),(2,1),(1,2)\}) = 3/36$.

$p_M(3) = P(M=3) = P(\{\dots\}) = 5/36$.

$p_M(4) = P(M=4) = P(\{\dots\}) = 7/36$.

$p_M(5) = P(M=5) = P(\{\dots\}) = 9/36$.

$p_M(6) = P(M=6) = P(\{\dots\}) = 11/36$.



a	1	2	3	4	5	6
$p(a)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Esercizio Lancio di due Dadi

Sia **Z** *il numero di volte che 6 appare in due lanci* indipendenti di un dado. Sia **S** *la somma dei due esiti*, ed **M** *il Massimo*.

1. Calcolare pZ(z).

2. Calcolare le probabilità degli eventi: {M=2 , Z=0}, {S=5 , Z=1}, {S=8 , Z=1}.

3. Determinare se gli eventi {M=2} e {Z=0} sono indipendenti.

1) $Z \in S_Z = \{0,1,2\}$ = NUMERO DI VOLTE CHE PUÓ COMPARIRE SEI.

z	0	1	2
p_z	$25/36$	$10/36$	$1/36$

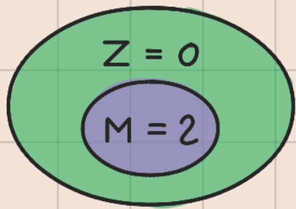
$(6,6)$

$(6,\cdot)+(\cdot,6)$

$5 + 5 = 10$

$1 - \frac{10}{36} - \frac{1}{36} = \frac{25}{36}$

2) CALCOLARE LA PROBABILITÁ DI:



- $\{M=2, Z=0\} = \{M=2\} \cap \{Z=0\}$

  $P(M=2, Z=0) = P(M=2) = \boxed{3/36}$.

SE IL MASSIMO É 2 ALLORA NON POSSO AVERE UN SEI.

$M=2 \Rightarrow Z=0$

- $\{S=5, Z=1\} = \{S=5\} \cap \{Z=1\} = \emptyset$

  $P(S=5, Z=1) = \boxed{0}$.

- $\{S=8, Z=1\} = \{S=8\} \cap \{Z=1\} = \{(6,2),(2,6)\}$

  $P(S=8, Z=1) = \boxed{2/36}$.

3) SONO INDIPENDENTI SE É VALIDA:
- $P(A|B) = P(A)$

  e
- $P(B|A) = P(B)$

  e
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (SONO $\equiv$, BASTA CONTROLLARNE SOLO UNA).

- $P(M=2, Z=0) = 3/36 \neq$

  $P(M=2) \cdot P(Z=0) = 3/36 \cdot 25/36$

Da $p_X(x)$ alla somma delle singole probabilitá $P(\{w\})$

PER VARIABILI ALEATORIE SINGOLE:

$p_X(x) = P(X=x) = P(\{X=x\}) = P(\{w \in \Omega : X(w) = x\}) = P(\{w_1, w_2, \ldots, w_m\})$

$= P(\{w_1\} \cup \{w_2\} \cup \ldots \cup \{w_m\}) = P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + \ldots + P(\{w_m\})$.

$\boxed{\{X=x\} = \{w \in \Omega : X(w) = x\}}$

$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{m} \{w_i\}\right) = \sum_{i=1}^{m} P(\{w_i\})}$

$\boxed{\text{S.E. } P(\{w\}) = \frac{1}{|\Omega|}}$

PER L'INTERSEZIONE DI VARIABILI ALEATORIE:

$p_{X \cap Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\}) = P(\{w \in \Omega : X(w)=x, Y(w)=y\}) =$

$= P(\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}) = \ldots =$

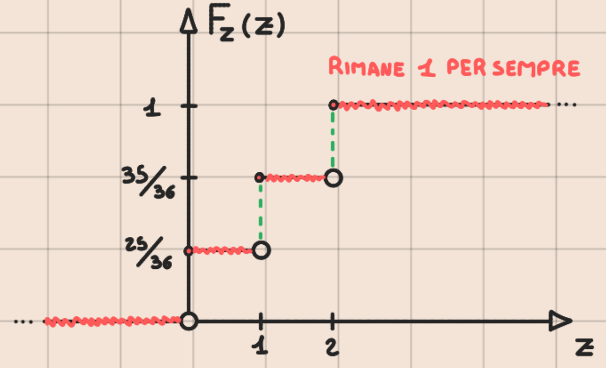
$= P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + \ldots + P(\{w_m\})$.

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

Esempio Introduttivo

$Z \in S_Z = \{0, 1, 2\}$

z	0	1	2
p_Z	$25/36$	$10/36$	$1/36$



LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE:

$z \in \mathbb{R} \qquad F_Z(z) = P(Z \leq z)$

É INCREMENTALE:

$z < 0 \longrightarrow F_Z(z) = P(Z \leq z) = 0$.

$z = 0 \longrightarrow F_Z(0) = P(Z \leq 0) = P(Z = 0) = p_Z(0) = 25/36$.

$0 < z < 1 \longrightarrow F_Z(z) = P(Z \leq z)$

ES: $z = 0.5 = p_Z(0.5) = P(Z \leq 0.5) = P(Z = 0) = 25/36$.

$z = 1 \longrightarrow F_Z(1) = P(Z \leq 1) = P(Z \in \{0, 1\}) = p_Z(0) + p_Z(1) = 35/36$.

SIA X VAR. ALEATORIA DISCRETA, ALLORA F_X É:

1) COSTANTE A TRATTI.

2) NON DECRESCENTE.

3) DATO $x \in \mathbb{R}$: $\quad F_X(x^+) = \lim_{y \to x^+} F(y) \qquad F_X(x^-) = \lim_{y \to x^-} F(y)$

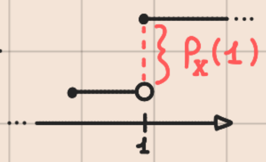
F_X É CONTINUA DA DESTRA IN $x \in \mathbb{R}$, SE $F_X(x^+) = F_X(x^-)$.

F_X É CONTINUA IN $\mathbb{R}/S$ (AL DI FUORI DEL SUPPORTO F_X É CONTINUA).

4) AMPIEZZA DEI SALTI:

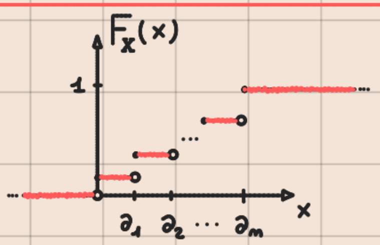
DENTRO AL SUPPORTO: $\nabla F(x) = F(x^+) - F(x^-) = F(x) - F(x^-) = p_X(x)$.

FUORI DAL SUPPORTO: $\nabla F(x) = F(x^+) - F(x^-) = 0 - 0 = 0$.

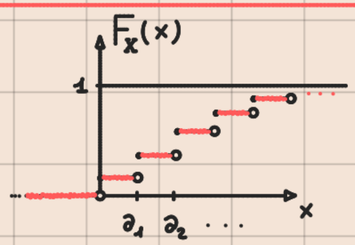


5) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \longrightarrow P(X \leq -\infty) = P(\emptyset) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \longrightarrow P(X \leq +\infty) = P(\Omega) = 1$.



$S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ FINITI



$S = \{a_1, a_2, \dots\}$ INFINITI

Passare dalla forma **p(x)** alla forma **F(x) e viceversa**

$$F(x) \implies p(x) = \nabla F(x) = F(x) - F(x^-)$$

$$p(x) \implies F(x) = \sum_{y \in S:\, y \leq x} p(y)$$

Esempio: $z \in \{0,1,2\}$

$$F(1.5) = \sum_{y \in \{0,1,2\}:\, y \leq 1.5} p(y) = p(0) + p(1)$$

Esercizio traduzione **p(x)** => **F(x)**

Sia X una v.a. discreta, calcolare le seguenti probabilità in termini della funzione di distribuzione F(x):

$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

$P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a^-)$

$P(X \leq b) = F(b)$

$P(X < b) = F(b^-)$

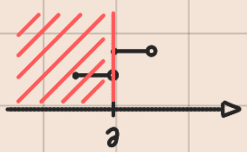
$P(a \leq X < b) = P(\{X < b\}/\{X < a\}) = F(b^-) - F(a^-)$

$P(a < X \leq b) = P(\{X \leq b\}/\{X \leq a\}) = F(b) - F(a)$

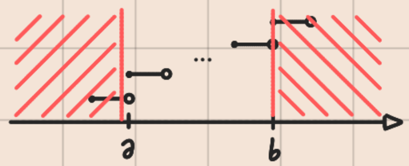
$P(a < X < b) = P(\{X < b\}/\{X \leq a\}) = F(b^-) - F(a)$

$P(a \leq X \leq b) = P(\{X \leq b\}/\{X < a\}) = F(b) - F(a^-)$

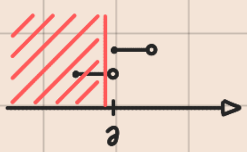
$1 - F(a)$



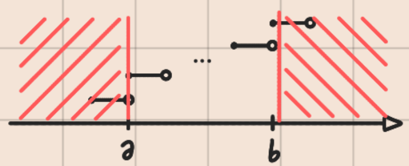
$F(b^-) - F(a^-)$



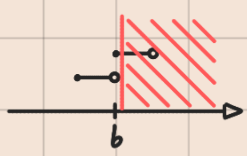
$1 - F(a^-)$



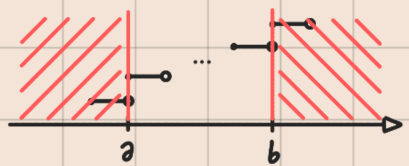
$F(b) - F(a)$



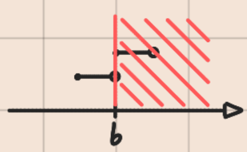
$F(b)$



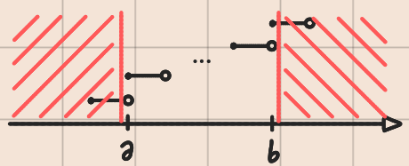
$F(b^-) - F(a)$



$F(b^-)$



$F(b) - F(a^-)$



Esercizio Funzioni di Distribuzione

1. Sia X una v.a. che assume i valori -1, 0, 1, 2, rispettivamente con probabilità ¼, 1/8, 1/8, ½. Sia $Y=X^2$, calcolare $p_Y(y)$ e $F_Y(y)$.

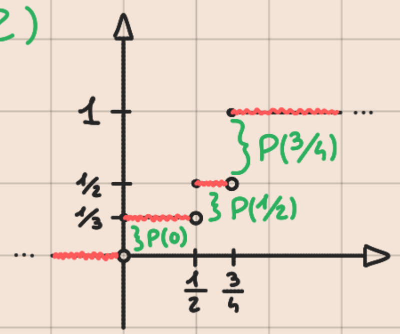
2. La v.a. X ha distribuzione di probabilità:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 1, & x \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$
calcolare $p_X(x)$.

- $p_Y(0) = P(X^2 = 0) = p_X(0) = \boxed{\frac{1}{8}}$.
- $p_Y(1) = P(X^2 = 1) = P(X \in \{-1, 1\})$
  $= p_X(-1) + p_X(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}$.
- $p_Y(4) = P(X^2 = 4) = P(X \in \{-2, 2\})$
  $= \boxed{p_X(-2)} + \boxed{p_X(2)} = \boxed{0} + \boxed{1 - \frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$.
- $p_Y(4) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} =$

x	-1	0	1	2
p_X	1/4	1/8	1/8	1/2

y	0	1	4
p_Y	1/4	3/8	1/6

2)



$p_X(1/2) = \nabla F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$.

$p_X(3/4) = \nabla F(\frac{3}{4}) = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

$p_X(0) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

x	0	1/2	3/4
p_Z	1/3	1/6	1/2

Differenza tra **Fun. Probabilità $p_X(x)$** e **Fun. Distribuzione $F_Z(z)$**

FUNZIONE DI PROBABILITÀ SU X:

$p_X(x) = P(X = x) = P(\{X = x\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) = P(\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\})$
$= P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \dots \cup \{\omega_m\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots + P(\{\omega_m\})$.

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE SU Z:

$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\{Z \leq z\}) = P(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \leq z\}) = P(\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\})$
$= P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \dots \cup \{\omega_k\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots + P(\{\omega_k\})$.