ESERCIZIO 1°

Svolti il 26/09/2025

1. Quanti modi ci sono di mettere in fila 10 persone ?

DATI: $K = 10 = m$ $\Rightarrow$ PERMUTAZIONI SEMPLICI $\Leftarrow$ PERSONE NON RISCEGLIBILI

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$

POSSIBILITÀ

$\boxed{P_{10} = 10!}$

APPLICAZIONE DELLA REGOLA FONDAMENTALE DEL CONTEGGIO

$\boxed{P_m = m!}$

2. Quanti modi ci sono di formare una password di 4 caratteri composta da sole lettere dell'alfabeto italiano dalla A alla L?

DATI: $K = 4$, $m = |\{A, B, \dots, L\} / \{J, K\}| = 10$, $m > K$.

- ORDINE CONTA $\wedge$ CON RIPETIZIONI $\Rightarrow$ DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONI

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$

POSSIBILITÀ

$\boxed{D^r(10, 4) = 10^4}$

$\boxed{D^r(m, K) = m^K}$

3. Quanti modi ci sono di mettere in fila 4 persone scelte a caso tra 10 ?

DATI: $K = 4$, $m = 10$

- CONTA L'ORDINE $\wedge$ SENZA RIPETIZIONI $\Rightarrow$ DISPOSIZIONI SEMPLICI

$$D(10, 4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}}$$

$$= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \boxed{5040}.$$

$\boxed{D(m, K) = \frac{m!}{(m-K)!}}$

4. Quanti modi ci sono di formare una commissione composta da 4 persone scelte a caso in un gruppo di 10 persone ?

DATI: $K = 4$, $m = 10$, SENZA RIPETIZIONI $\wedge$ NON CONTA L'ORDINE $\Rightarrow$ COMBINAZIONI SEMPLICI

$$C(10, 4) = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{6!}} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = \boxed{210}.$$

$\boxed{C(m, K) = \binom{m}{K} = \frac{m!}{K!(m-K)!}}$

ESERCIZIO 2°

$(1) = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot \cancel{9!}}{3!\cdot \cancel{9!}} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} = \binom{12}{3} = (2)$. $\boxed{\text{RISPOSTA c)}}$

ESERCIZIO 3°

Carla, Carmela e Clotilde possono scegliere i loro accompagnatori per il ballo in un gruppo di 25 ragazzi. Qual è il numero totale di modi di formare le 3 coppie?

DATI: $K = 3$, $m = 25$, CONTA L'ORDINE $\wedge$ NO RIPETIZIONI $\Rightarrow$ DISPOSIZIONI SEMPLICI

$$D(25,3) = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot \cancel{22!}}{\cancel{22!}} = \boxed{25\cdot 24\cdot 23}\ .$$

ESERCIZIO 4°

1) Dato un insieme S di n elementi, calcolare il numero dei suoi sottoinsiemi.

DATI: $S = \{1, 2, \dots, m\}$, L'INSIEME DELLE PARTI DI S HA CARDINALITÀ:

DIM: $\boxed{\sum_K \binom{m}{K}\cdot 1^{m-K}\cdot 1^K} = (1+1)^m = 2^m$

BINOMIO DI NEWTON

$$\boxed{|\Sigma| = 2^m}$$

2) Da un insieme di n persone se ne scelgono k per formare un comitato con un presidente. In quanti modi è possibile fare questo?

1° MODO: SCEGLIENDO PRIMA IL COMITATO:

- SCELTA DEL COMITATO: $C(m,K) = \binom{m}{K}$
- SCELTA DEL PRESIDENTE: $C(m,K)\cdot K = \boxed{\binom{m}{K}\cdot K}$

1° MODO: SCEGLIENDO PRIMA IL PRESIDENTE:

- SCELTA DEL PRESIDENTE: m
- SCELTA DEL COMITATO: $\boxed{m\cdot\binom{m-1}{K-1}}$

I DUE RISULTATI SONO EQUIVALENTI:

- $\boxed{\binom{m}{K}\cdot K} = \frac{m!\cdot K}{K!\cdot(m-K)!} = \frac{m!}{(K-1)!\cdot(m-K)!}$

- $\boxed{m\cdot\binom{m-1}{K-1}} = \frac{(m-1)!\,m}{(K-1)!\cdot(m-\cancel{1}-K+\cancel{1})!} = \frac{m!}{(K-1)!\cdot(m-K)!}$

3) Una gelateria offre gelati di 9 gusti diversi. Quante varianti di cono gelato si possono comporre con 3 palline di gelato, supponendo di non poter scegliere diverse palline dello stesso gusto (supponendo che l'ordine dei gusti scelti non conti)?

DATI: $n = 9$, $k = 3$, NO RIP. $\wedge$ NO ORD. $\Rightarrow$ COMBINAZ. SEMPLICI

RIS: $C(9,3) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!\cdot(9-3)!} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot\cancel{6!}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{6!}} = 3\cdot 4\cdot 7 = \boxed{84}$.

INIZIO ESERCIZI PROBABILITÁ E CALCOLO COMBINATORIO

4) Lancio una moneta equa 5 volte. Calcolare la probabilità che escano k teste. Calcolare la probabilità che esca almeno una testa.

DATI: 1) CONTA L'ORDINE DEI 5 LANCI $\Rightarrow$ VETTORE $\vec{\omega}$

2) OGNI EVENTO ELEMENTARE É COMPOSTO DA 5 LANCI $\Rightarrow$ $|\vec{\omega}| = 5$

QUINDI DEFINISCO:

- ESEMPIO EVENTO: $A = (T, C, C, T, T)$
- $\Omega = \{\underbrace{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5)}_{\vec{\omega}} : \forall i \in \{1,\dots,5\}, \omega_i \in \{T, C\}\}$
- $|\Omega|$ = DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE DI $K = 5$ OGGETTI SCELTI IN $\{T, C\}$.
  $= D^r(2,5) = 2^5 = 32$.
- Σ = INSIEME DELLE PARTI DI Ω (DISCRETO; FINITO).
- LO SPAZIO DI PROBABILITÁ É EQUIPROBABILE!

$$\boxed{P(\{\vec{\omega}\}) = \frac{1}{|\Omega|} \quad \forall \vec{\omega} \in \Omega}$$

QINDI PER UN EVENTO GENERICO A LA PROBABILITÁ VALE:

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$ $\Rightarrow$ DOBBIAMO CALCOLARE LE $|A|$:

Rispondiamo alla 1ª domanda:

- $A_K = \{\text{"escono K teste"}\}$ con $K \in \{1, 2, \dots, 5\}$.
- Caso con una testa:

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = \{(T, C, C, C, C)\} \\ A_1 = \{(C, T, C, C, C)\} \\ \dots \\ A_4 = \{(C, C, C, C, T)\} \end{array}\right] \rightarrow |A_1| = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{5}{2^5} = \frac{5}{32} \simeq \boxed{0.15}.$$

- Caso con due teste:

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = \{(T, T, C, C, C)\} \\ A_1 = \{(T, C, T, C, C)\} \\ \dots \\ A_m = \{(C, C, C, T, T)\} \end{array}\right] \rightarrow$$

Devo scegliere 2 componenti tra le 5 dove mettere le 2 testa. => Disposizioni Semplici

$$|A_2| = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \boxed{\frac{\binom{5}{2}}{2^5}}.$$

- Caso con K teste:

$$|A_K| = \binom{5}{K} \quad , \quad P(A_K) = \frac{|A_K|}{|\Omega|} = \boxed{\frac{\binom{5}{K}}{2^5}} \checkmark.$$

Rispondiamo alla 2ª domanda:

- $B = \{\text{"esca almeno una testa"}\}$ con $K \in \{1, 2, \dots, 5\}$.
- Conviene utilizzare il complemento:

(1): $B = \underset{(1\text{ testa}}{A_1} \cup \underset{\text{o } 2\text{ teste}}{A_2} \cup \underset{\text{o } 3\text{ teste}}{A_3} \cup \underset{\text{o } 4\text{ teste}}{A_4} \cup \underset{\text{o } 5\text{ teste})}{A_5} \quad \forall i, s \in \{1, 2, \dots, 5\}\ A_i \cap A_s = \emptyset$.

(2): $= \underset{(\text{nessuna testa})^c}{A_0^c}$

- Quindi possiamo risolvere in due modi:

(1): $P(B) = P(A_1, A_2, \dots, A_5) = \boxed{\sum_{K=1}^{5} \frac{\binom{5}{K}}{2^{32}}}$. $\checkmark$

(2): $P(B) = P(A_0^c) = 1 - P(A_0) = \boxed{1 - \frac{1}{2^{32}}}$. $\checkmark$

ESERCIZIO 5° - URNA PALLINE.

Un'urna contiene 20 palline numerate progressivamente:

2) Vengono estratte una dopo l'altra 4 palline ogni volta con reimmissione: qual è la probabilità che venga estratta la pallina numero 1 almeno una volta?

DATI: 1) ESTRAZIONI DI PALLINE CHE POSSONO RIPETERSI => VETTORE $\vec{\omega}$.

2) OGNI EVENTO ELEMENTARE È COMPOSTO DA 4 ESTRAZIONI => $|\vec{\omega}| = 4$.

QUINDI DEFINISCO:

- $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \forall i \in \{1,\dots,4\}, \omega_i \in \{1,2,\dots,20\}\}$
- $|\Omega|$ = DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE DI $K=4$ OGGETTI SCELTI IN $\{1,2,\dots,20\}$
  $= D^r(20,4) = 20^4$.
- Σ = INSIEME DELLE PARTI DI Ω (DISCRETO).
- SPAZIO DI PROBABILITÀ EQUIPROBABILE: $\boxed{P(\{\vec{\omega}\}) = \frac{1}{|\Omega|} \quad \forall \vec{\omega} \in \Omega}$

RISPONDO ALLA DOMANDA:

- $A = \{$"OTTENGO L'ELEMENTO 1 ALMENO UNA VOLTA"$\}$

→ RAGIONIAMO CON LA REGOLA DEL COMPLEMENTO:

- $P(A) = 1 - P(A^c)$

SENZA LA 1° PALLINA PER IL COMPLEMENTARE.

- $A^c = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \omega_i \in \{2,\dots,20\}\}$.
- $|A^c|$ = DISP. CON RIP. $= D^r(19,4) = 19^4$.
- $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \boxed{1 - \frac{19^4}{20^4}}$. ✓

1) Vengono estratte in blocco 4 palline: qual è la probabilità che venga estratta la pallina numero 1?

PRIMO APPROCCIO:

DATI: ESTRAZIONE IN BLOCCO, QUINDI NON CONTA L'ORDINE => INSIEME.

QUINDI DEFINISCO:

- $\Omega = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} : \omega_i \in \{1,2,\dots,20\}\}$.
- $|\Omega|$ = COMBINAZIONI SEMPLICI $= C(20,4) = \binom{20}{4}$.
- Σ OK; P SPAZIO EQUIPROBABILE: $P(\{\vec{\omega}\}) = 1/|\Omega|$.

Domanda: $A = \{ \{w_1, \dots, w_4\}$ che contenga la pallina $1 \}$

Risoluzione: $|A| = $ Comb. Semp. considerando che la 1ª viene presa

$$= \binom{20-1}{4-1} = \binom{19}{3}$$

← La 1ª pallina è già stata scelta.
← Un posto è già occupato dalla 1ª pallina.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{19}{3}}{\binom{20}{4}} = \frac{\frac{19!}{3!\,\cancel{16!}}}{\frac{20!}{4!\,\cancel{16!}}} = \frac{\cancel{19!}\cdot 4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,20\cdot\cancel{19!}} = \frac{4}{20} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$ ✓

Secondo approccio:

Definisco:

- $\Omega = \{ (w_1, w_2, w_3, w_4) : w_i \in \{1,2,\dots,20\},\ w_i \neq w_j \}$.

I vettori permettono la ripetizione degli w. Quindi esplicito la disuguaglianza.

- $|\Omega| = $ Disposizioni Semplici $= D(20,4) = \frac{20!}{16!}$ (Semplici per via di $w_i \neq w_j$).
- Σ ok ; P spazio equiprobabile : $P(\{\vec{w}\}) = 1/|\Omega|$.

Domanda:

- $A = \{ (w_1, \dots, w_4) \in \Omega :$ contenga la pallina $1 \}$.

→ **Primo modo:**

- $$|A| = (P_1, w_2, w_3, w_4) \cup (w_1, P_1, w_3, w_4) \cup (w_1, w_2, P_1, w_4) \cup (w_1, w_2, w_3, P_1)$$

→ Disposizioni Semplici × 4

$$|A| = \boxed{D(19,3) \times 4}$$

$$P(A) = \frac{\frac{19!}{\cancel{16!}} \times 4}{\frac{20!}{\cancel{16!}}} = \frac{\cancel{19!}\cdot 4}{\cancel{19!}\cdot 20} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$ ✓

→ **Secondo modo (regola del complemento):**

- $P(A) = 1 - P(A^c)$, $A^c = \{ (w_1, \dots, w_4) \in \Omega : w_i \neq$ Pallina numero $1 \}$
- $|A^c| = D(19,4) = \frac{19!}{15!}$.
- $$P(A) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{\frac{19!}{15!}}{\frac{20!}{16!}} = 1 - \frac{4}{20} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$ ✓

ESERCIZIO 6° - POKER

Da un mazzo ben mescolato di 52 carte francesi se ne estraggono 5 a caso:

1. Qual è il numero di tutte le possibili cinquine (non ordinate) di carte ottenute ?
2. Qual è la probabilità di ottenere un Poker ?
3. Qual è la probabilità di ottenere un Full ?
4. Qual è la probabilità di ottenere una Doppia Coppia ?
5. Qual è la probabilità di ottenere una Coppia?

RISOLUZIONE:

$$\Omega = \left\{ \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5\} : \omega_{i \in \{1,\dots,5\}} \in \{\text{"MAZZO DA 52 CARTE"}\} \right\}.$$

1. $\# \text{CINQUINE} = |\Omega| = C(52, 5) = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5! \cdot 47!}$ COMBINAZIONI SEMPLICI.

2. $A = \left\{ \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5\} \in \Omega : \text{"QUATTRO COMPONENTI SIANO LA STESSA CARTA, MA DI SEME DIVERSO"} \right\}.$

$$|A| = 13 \cdot (52 - 4) = 13 \cdot 48 = 624$$

PESCO LE 4 CARTE CON STESSO VALORE MA SEME DIVERSO. $13 = 52/4$

PESCO L'ULTIMA CARTA TRA LE 48 RESTANTI: $48 = 52 - 4$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \boxed{\frac{624}{\binom{52}{5}}} = \frac{624}{2.598.960} \simeq 0.00024 = \boxed{0.024\%}.$$

3. $A = \left\{ \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5\} \in \Omega : \text{"UN TRIS E UNA COPPIA"} \right\}.$

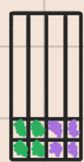
$$|A| = \underbrace{C(4,3) \cdot 13}_{} \times \underbrace{C(4,2) \cdot 12}_{} =$$

TRE CARTE DI EGUAL VALORE TRA TREDICI SEMI DISPONIBILI.

DUE CARTE DI EGUAL VALORE TRA DODICI SEMI DISPONIBILI.

$$= \frac{4!}{3!} \cdot 13 \times \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 12 = 4 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 12 = 3.744$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \boxed{\frac{3.744}{\binom{52}{5}}} = \frac{3.744}{2.598.960} \simeq 0.0014 = \boxed{0.14\%}.$$



DUE COPPIE PRESE

DUE COPPIE NON PRENDIBILI SENNO' SAREBBE TRIS O POKER.

4. $A = \left\{ \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5\} \in \Omega : \text{"DOPPIA COPPIA"} \right\}.$

$$|A| = \underbrace{C(4,2) \cdot 13}_{} \cdot \underbrace{C(4,2) \cdot 12}_{} \cdot (52 - 8) \cdot \frac{1}{2!} =$$

DUE CARTE DI EGUAL VALORE TRA TREDICI SEMI DISPONIBILI.

DUE CARTE DI EGUAL VALORE TRA DODICI SEMI DISPONIBILI.

XXYYZ

$$= 6 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 44 \cdot \frac{1}{2} = 123.552 .$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \boxed{\frac{123.552}{\binom{52}{5}}} = \frac{123.552}{2.598.960} \simeq 0.047 = \boxed{4,7\,\%} .$$

5. $A = \{\{w_1, w_2, \dots, w_5\} \in \Omega : \text{"COPPIA"}\}.$

$$|A| = C(4,2) \cdot 13 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot \frac{1}{3!} = 1.098.240$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \boxed{\frac{1.098.240}{\binom{52}{5}}} = \frac{1.098.240}{2.598.960} \simeq 0.42 = \boxed{42\,\%} .$$

ESERCIZIO 7° - COMPLEANNI

Calcolare la probabilità che tra n persone ce ne siano almeno due che compiono gli anni lo stesso giorno.

DEFINISCO:

- $\Omega = \{\{w_1, \dots, w_m\} : w_{i \in \{1,\dots,m\}} \in \{1, \dots, 365\}\}.$
- $|\Omega| =$ COMBINAZIONI RIPETIZIONE $= C^r(365, m) = \frac{(365+m-1)!}{m!\,(365-1)!}$
- Σ OK ; P SPAZIO EQUIPROBABILE : $P(\{\vec{w}\}) = 1/|\Omega|$.

DOMANDA: $A = \{\{w_1, \dots, w_m\} \in \Omega : \exists i,s \in \{1,\dots,m\} : w_i = w_s\}$

→ RISOLUZIONE (REGOLA DEL COMPLEMENTO):

- $A^c = \{\{w_1, \dots, w_m\} \in \Omega : w_i \neq w_s\}$
- $P(A^c) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365-(m-1)}{365}$

$$= \frac{1}{356} \cdot \prod_{K=0}^{m-1} (365 - K)$$

- $P(A) = 1 - P(A^c) = \boxed{1 - \left(\frac{1}{356} \cdot \prod_{K=0}^{m-1} (365-K)\right)}$.

ESERCIZIO 8° - BIGLIE ROSSE E BIANCHE

Un’urna contiene r biglie rosse e b biglie bianche. Si estraggono n biglie senza reimmissione.

1. Qual è il numero totale di esiti possibili?
2. Qual è la probabilità che esattamente k delle n biglie estratte sono rosse?

DEFINISCO:

- $\Omega = \{\{\omega_1, \dots, \omega_m\} : \omega_{i \in \{1,\dots,m\}} \in R \cup B\}$.
- $|\Omega|$ = COMBINAZIONI SEMPLICI $= C(r+b, m) = \binom{r+b}{m} = \frac{(r+b)}{m!(r+b-m)!}$
- Σ ok ; P SPAZIO EQUIPROBABILE: $P(\{\vec{\omega}\}) = 1/|\Omega|$.

(1): $C(r+b, m) = \binom{r+b}{m} = \boxed{\frac{(r+b)}{m!(r+b-m)!}}$

(2): $A = \{\{\omega_1, \dots, \omega_m\} \in \Omega :$ "K SIANO PALLINE ROSSE" $\}$.