INDIPENDENZA DI V.A.

Esempio Introduttivo: Lancio di due dadi

Verifichiamo prima l'indipendenza tra gli eventi $\{M=1\}$ e $\{S=12\}$:

> Abbiamo detto che due eventi $A, B \in \Sigma$ sono indipendenti tra loro se: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- $\{M=1\} = \{(1,1)\}$, $\{S=12\} = \{(6,6)\}$, $\{M=1\} \cap \{S=12\} = \phi$, con $|\Omega| = 36$.
- $P(M=1, S=12) = 0$
- $P(M=1) = \frac{|\{M=1\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$
- $P(S=12) = \frac{|\{S=12\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$

$\Rightarrow P(M=1, S=12) = 0 \neq \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = P(M=1) \cdot P(S=12)$

$\Rightarrow$ Gli eventi $\{M=1\}$ e $\{S=12\}$ sono dipendenti.

- Ma per quanto riguarda le variabili aleatorie M = massimo , S = somma ?
- M ed S sono indipendenti: $\boxed{\forall \, n, m \in \mathbb{R} \text{ se } P(S=n, M=m) = P(S=n) \cdot P(M=m)}$

DEF: Due v.a. X ed Y sono **indipendenti** se: $\boxed{F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)}$

per tutte le possibili coppie di valori x ed y;

- **V.A. discrete**: $p_{X,Y}(x,y) = p_X(a) \cdot p_Y(y) \quad \forall (a,b) \in S_{(a,b)}$
- **V.A. continue**: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \forall (x,y) \in S_{(x,y)}$

Esempio controllo dipendenza tra v.a. DISCRETE

X ed Y sono due v.a discrete con funzione di probabilità data dalla tabella di seguito. X ed Y sono indipendenti?

Y \ X	0	1	2	
-1	1/6	1/6	1/6	$p_Y(-1) = \frac{1}{2}$
1	0	1/2	0	$p_Y(1) = \frac{1}{6}$
	$p_X(0) = \frac{1}{6}$	$p_X(1) = \frac{2}{3}$	$p_X(2) = \frac{1}{6}$	

- Calcolo settore: $(x,y) \in \{0,1,2\} \times \{-1,1\} = S_{(x,y)}$
- Affinché siano indipendenti:

  $\forall (a,b) \in S_{X,Y} \quad p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$
- Abbiamo che:

  $p_{X,Y}(0,1) = 0 \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = p_X(0) \cdot p_Y(1) \Rightarrow X$ ed Y **dipendenti**.
- Basta trovare anche solo una disuguaglianza per dedurre che sono dipendenti.

Siano X ed Y v.a. la cui funz. di prob. congiunta $p_{X,Y}(x,y)$ è data dalla tabella:

Y \ X	0	1
0	$\frac{1}{4} - \varepsilon$	$\frac{1}{4} + \varepsilon$
1	$\frac{1}{4} + \varepsilon$	$\frac{1}{4} - \varepsilon$

Quali sono i valori di ε per cui X ed Y indipendenti? $\boxed{\frac{1}{4} - \varepsilon = p_{XY}(0,0) = p_X(0) \cdot p_Y(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}}$

$\boxed{\varepsilon = 0}$

Esempio controllo dipendenza tra v.a. CONTINUE

Siano X ed Y v.a. a.c. la cui densità congiunta è:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}xy(1+y) & \text{per } (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Determina se X ed Y sono indipendenti:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Calcolo marginali continue:} \\ f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) \cdot dy \\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) \cdot dx \end{array}}$$

1) Calcolo densità marginale: $f_X(x) = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y) \cdot dy} = \int_0^1 \frac{12}{5} xy(1+y) \cdot dy = \frac{12}{5} x \cdot \int_0^1 y^2 + y$

$$= \frac{12}{5} x \left\{ \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right\}_0^1 = \frac{12}{5} x \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \boxed{2x \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)} .$$

2) Calcolo densità marginale: $f_Y(y) = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y) \cdot dx} = \int_0^1 \frac{12}{5} xy(1+y) \cdot dx = \frac{12}{5} y(1+y) \cdot \int_0^1 x \cdot dx$

$$= \frac{12}{5} y(1+y) \cdot \left\{ \frac{x^2}{2} \right\}_0^1 = \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot y(1+y) = \boxed{\frac{6}{5} y(1+y) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)} .$$

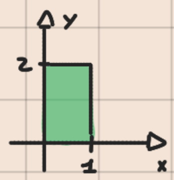
3) $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$?: $f_X(x) \cdot f_Y(y) = \left(2x \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \right) \cdot \left(\frac{6}{5} y(1+y) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \right)$

$$= \frac{12}{5} xy(1+y) = f_{X,Y}(x,y) \implies \underline{X \text{ ed } Y \text{ sono indipendenti}} .$$

Altro Esempio controllo dipendenza tra v.a. CONTINUE

Siano X ed Y v.a. a.c. la cui densità congiunta è:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{10}(3x^2 + 8xy) \quad \text{per} \quad 0 \le x \le 1 \quad e \quad 0 \le y \le 2$$



$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Calcolo marginali continue:} \\ f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) \cdot dy \\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) \cdot dx \end{array}}$$

Determina se X ed Y sono indipendenti:

1) Calcolo densità marginale: $f_X(x) = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y) \cdot dy} = \int_0^2 \frac{1}{10}(3x^2 + 8xy) \cdot dy = \frac{1}{10} \cdot \left\{ \int_0^2 3x^2 \cdot dy + \int_0^2 8xy \cdot dy \right\}$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left\{ 3x^2 \cdot \{y\}_1^2 + 8x \cdot \left\{ \frac{y^2}{2} \right\}_1^2 \right\} = \boxed{\frac{1}{5} \cdot \{3x^2 + 8x\} \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}(y)} .$$

2) Calcolo densità marginale: $f_Y(y) = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y) \cdot dx} = \int_0^1 \frac{1}{10}(3x^2 + 8xy) \cdot dx = \frac{1}{10} \left\{ 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 8y \cdot \frac{x^2}{2} \right\}_0^1$

$$= \boxed{\frac{1}{10} \cdot \{1 + 4y\} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)} .$$

3) $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$?: $f_X(x) \cdot f_Y(y) = \left(\frac{1}{5} \cdot \{3x^2 + 8x\} \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}(y) \right) \cdot \left(\frac{1}{10} \cdot \{1 + 4y\} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \right)$

$$\neq \frac{1}{10}(3x^2 + 8xy) = f_{X,Y}(x,y) \implies \underline{X \text{ ed } Y \text{ NON sono indipendenti}} .$$

ASPETTAZIONE DI FUNZIONE DI DUE O PIÚ V.A.

<u>Def</u>: Siano X ed Y due v.a. e sia $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione:

1) Se X ed Y discrete con valori $a_1, a_2, \ldots$ e $b_1, b_2 \ldots$ allora

- $$E[g(X,Y)] = \sum_{(x,y) \in S_{X,Y}} g(x,y) \cdot p_{XY}(x,y) = \sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} g(x,y) \cdot \underbrace{p_{XY}(x,y)}_{\boxed{P(X = x, Y = y)}}$$

2) Se X ed Y continue con densità di probabilità f allora

- $$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) \cdot f(x,y) \cdot dx \cdot dy$$

Esempio calcolo aspettazione di v.a. CONGIUNTE

X ed Y sono due v.a discrete con funzione di probabilità data dalla tabella di seguito. Calcolare E[X + Y]

Y \ X	0	1	2
-1	1/6	1/6	1/6
1	0	1/2	0

DATI: $g(X,Y) = E[X+Y]$

CALCOLO: $$E[g(X,Y)] = \sum_{(x,y) \in \{0,1,2\} \times \{-1,1\}} (x+y) \cdot p_{XY}(x,y)$$

$$= \boxed{(-1+0)\cdot\frac{1}{6} + (-1+1)\cdot\frac{1}{6} + (-1+2)\cdot\frac{1}{6} + (1+1)\cdot\frac{1}{2} + 0 + 0} = 1$$

LINEARITÀ DELL'ASPETTAZIONE

TEO: Siano X ed Y due v.a., allora si ha per ogni coppia di valori $r, s \in \mathbb{R}$:

$$E[rX + sY + t] = rE[X] + sE[Y] + t$$

DIM:

$$E[rX + sY + t] = \sum_{(x,y) \in S_{X,Y}} (rX + sY + t) \cdot p_{XY}(x,y)$$

$$= r\sum_{(x,y)} x \cdot p_{XY}(x,y) + s\sum_{(x,y)} y \cdot p_{XY}(x,y) + t\sum_{(x,y)} p_{XY}(x,y)$$

$$= r\sum_{x} x \cdot \underbrace{\sum_{y} p_{XY}(x,y)}_{p_X(x)} + s\sum_{y} y \cdot \underbrace{\sum_{x} p_{XY}(x,y)}_{p_Y(y)} + t \cdot 1$$

$$= r\sum_{x} x \cdot p_X(x) + s\sum_{y} y \cdot p_Y(y) + t \cdot 1 = rE[X] + sE[Y] + t.$$

Esempio precedente risolto con Linearitá dell'Aspettazione

X ed Y sono due v.a discrete con funzione di probabilità data dalla tabella di seguito. Calcolare E[X + Y]

Y \ X	0	1	2
-1	1/6	1/6	1/6
1	0	1/2	0

DATI: $$g(X,Y) = E[X+Y] \overset{\text{ASPETTAZIONE}}{=} E[X] + E[Y] = 1 + 0 = 1.$$

1) $$E[X] = \sum_{x \in \{0,1,2\}} x \cdot p_X(x) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1) + 2 \cdot p_X(2)$$
$$= 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{4}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$

2) $$E[Y] = \sum_{y \in \{-1,1\}} y \cdot p_Y(y) = -1 \cdot p_Y(-1) + 1 \cdot p_Y(1) = -\frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 0.$$