

Probabilità Condizionata

Esercizio Introduttivo

Due dadi, uno rosso ed uno blu, vengono lanciati contemporaneamente.

- Qual è la probabilità che l'esito del lancio del dado rosso sia 5?

Supponiamo di sapere che l'esito del lancio dei due dadi dà come somma 9.

- Qual è la probabilità che l'esito del lancio del dado rosso sia stato 5?

- Qual è la probabilità che l'esito del lancio di almeno uno dei due dadi sia stato 5?

Risoluzione:

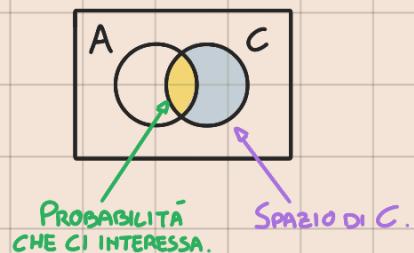
DATI: $\Omega = \{(w_1, w_2) : w_i \in \{1, \dots, 6\}\}$
 $|\Omega| = D^R(6, 2) = 6^2 = 36$.

DOMANDA: A = {LANCIO DADO ROSSO RISULTA 5} = {(5,1), (5,2), ..., (5,6)}
(1) $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

DOMANDA: C = {SOMMA DEI DUE DADI DA 9} = {(3,6), (5,4), (4,5), (6,3)}
(2) $A \cap C = \{\text{LANCIO DADO ROSSO RISULTA 5}\} \cap \{\text{SOMMA DEI DUE DADI DA 9}\} = \{(5,4)\}$ $|A \cap C| = 1$

$$P(A|C) = \frac{1}{4} = \frac{|A \cap C| / |\Omega|}{|C| / |\Omega|} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$$

VALE ANCHE IN UNO SPAZIO
NON EQUIPROBABILE.



PROPRIETÀ

DATO $C \in \Sigma$ ABBIAMO: $P(\cdot | C) = \sum_{A \in \Sigma} P(A \cap C) = [0, 1]$

$$A \rightarrow P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$$

(1) $P(\Omega | C) = 1$

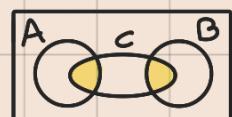
Dim: $P(\Omega | C) = \frac{P(\Omega \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C)}{P(C)} = 1 \quad \square$

(2) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots | C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | C)$ CON $A_1 \cap A_2 \cap \dots = \emptyset$ (DISGIUNTI)
A DUE A DUE.

→ QUINDI, PER ESEMPIO: SIANO $A, B, C \in \Sigma$ CON $A \cap B = \emptyset$:

$$P(A \cup B | C) = P(A | C) + P(B | C)$$

Dim: $P(A \cup B | C) = \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$
 $= P(A | C) + P(B | C) \quad \square$



REGOLE

REGOLA DEL COMPLEMENTO: $P(A^c|C) = 1 - P(A|C)$.

REGOLA DELL'ADDITIONE: $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$.

REGOLA DELLA MOLTIPLICAZIONE: $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

Esercizio

Supponiamo di estrarre consecutivamente due carte da un mazzo da poker. Definiamo gli eventi:

S_1 = {la prima carta estratta è cuori}

S_2 = {la seconda carta estratta è cuori}.

Calcolare le probabilità:

$P(S_1)$, $P(S_2|S_1)$, $P(S_2|S_1^c)$ e $P(S_2 \cap S_1)$.

RISOLUZIONE:

$$\cdot P(S_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$\cdot P(S_2|S_1) = \frac{12}{51} \xleftarrow{\text{(CARTE CUORI RIMANENTI)}} \cdot \frac{P(S_2 \cap S_1)}{P(S_1)} \xleftarrow{\text{(TOTALE CARTE RIMANENTI)}}$$

(REGOLA DELLA MOLTIPLICAZIONE)

$$\cdot P(S_2 \cap S_1) = P(S_2|S_1) \cdot P(S_1) = \frac{12}{51} \cdot \frac{13}{53} .$$

RISOLUZIONE CON LA PROBABILITÀ CONDIZIONATA:

$$\Omega = \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \text{MAZZO}, w_1 \neq w_2\}.$$

$$|\Omega| = D(52, 2) = \frac{52!}{50!} = 52 \cdot 51 .$$

$$S_1 \cap S_2 = \{(w_1, w_2) \in \Omega : w_1 \in \text{CUORI}, w_1 \neq w_2\} .$$

$$|S_1 \cap S_2| = D(13, 2) = \frac{13!}{11!} = 13 \cdot 12 .$$

$$P(S_1 \cap S_2) = \frac{|S_1 \cap S_2|}{|\Omega|} = \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51} = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} .$$

Esercizo

Supponiamo di volare da Sydney ad Amsterdam via Bangkok.

La probabilità di perdere la valigia a Sydney è 0,02.

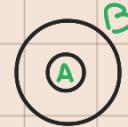
La probabilità di perdere la valigia a Bangkok, supposto che vi arrivi, è 0,05.

Qual è la probabilità che la valigia arrivi ad Amsterdam?

$$\cdot A = \{\text{LA VALIGIA ARRIVA AD AMSTERDAM}\} .$$



- $B = \{\text{ARRIVA A BANGKOK}\} = \{\text{NON SI PERDE A SIDNEY}\}$.
- $\rightarrow P(A|B) = 0.95$.
- $\rightarrow P(B) = 0.98$.
- $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0.95 \cdot 0.98$.
- Allora $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.
- $\rightarrow P(A) = P(A \cap B) = 0.95 \cdot 0.98$.



Esercizio

Consideriamo una famiglia con due bambini.

$\{\{M,M\}, \{F,F\}, \{M,F\}\}$

Non è equiprobabile!

Veniamo a sapere che almeno uno dei due è maschio.

Qual è la probabilità che siano entrambi maschi?

$$\Omega = \{(M,M), (M,F), (F,M), (F,F)\}$$

$$C = \{\text{ALMENO UNO DEI DUE È MASCHIO}\} = \{(M,M), (M,F), (F,M)\}$$

$$A = \{(M,M)\} \Rightarrow P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{|A|/|\Omega|}{|C|/|\Omega|} = \frac{1}{3}$$

INDIPENDENZA TRA EVENTI

- SE $A, B \in \Sigma$ con A INDIPENDENTE B ALLORA:

$$P(A|B) = P(A)$$

e

$$P(B|A) = P(B)$$

(PROPRIETÀ È SIMMETRICA)

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A)$$

Esempio Esercizio

Nell'estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte, gli eventi $A=\{\text{Regina}\}$ e $B=\{\text{Cuori}\}$ sono indipendenti?

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow A, B \text{ INDIPENDENTI.}$$

CON RICHISSIMA ABBIAMO EVENTI INDIPENDENTI.

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{52}$$

1	2	.	.	.	S	Q	K
1	2	.	.	.	S	Q	K
1	2	.	.	.	S	Q	K
1	2	.	.	.	S	Q	K
1	2	.	.	.	S	Q	K

✓

✗

$$P(A) = \frac{1}{13}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{13}$$

Supponiamo di aggiungere 2 jokers al mazzo.

Gli eventi $A = \{\text{Regina}\}$ e $B = \{\text{Cuori}\}$ sono indipendenti?

- IN QUESTO CASO A, B SONO DIPENDENTI.

$$\begin{aligned} \cdot P(A) &= \frac{4}{54} \\ \cdot P(A|B) &= \frac{1}{13} \end{aligned}$$

PROPRIETÀ

SIANO A, B EVENTI TRA LORO INDIPENDENTI

$\Rightarrow A, B^c$ INDIPENDENTI.

$\Rightarrow A^c, B$ INDIPENDENTI.

$\Rightarrow A^c, B^c$ INDIPENDENTI.

Dim: (1°) $P(B^c|A) = 1 - P(B|A) = 1 - P(B) = P(B^c) \Rightarrow B^c, A$ INDIP. □.

(2°), (3°): Si dimostra allo stesso modo.

DEFINIZIONE

SIANO A, B, C INDIPENDENTI A DUE A DUE SE:

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

DEVONO ESSERE SODDISFATTE
TUTTE E QUATTRO.

MA ANCHE:

- $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Esercizio Roulette

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32
33	34	35	36

Consideriamo roulette fittizia rappresentata nella tabella a sinistra.

La ruota della roulette seleziona un numero scelto a caso in $\{1, \dots, 36\}$.

Definiamo gli eventi $E = \{\text{pari}\}$, $R = \{\text{rosso}\}$, e $L = \{\text{minore-uguale di } 18\}$.

1. Mostrare che ogni coppia di eventi scelta tra i tre definiti è indipendente, ma che i tre insieme sono dipendenti.
2. Dimostrare che $P(E|R \cap L) \neq P(E)$

$$E = \{\text{pari}\}, |E| = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$R = \{\text{rosso}\}, |R| = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$L = \{\leq 18\}, |L| = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$1) \cdot P(E \cap R) = \frac{9}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(E) \cdot P(R) \quad \checkmark$$

$$\cdot P(E \cap L) = \frac{9}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(E) \cdot P(L) \quad \checkmark$$

$$\cdot P(R \cap L) = \frac{9}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(R) \cdot P(L) \quad \checkmark$$

• $P(A \cap B \cap C) = \frac{5}{36} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$. \times

2) Dim. CHE $P(E | R \cap L) \neq P(E)$:

• $R \cap L = \{3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 18\}$, $|R \cap L| = 9$.

• $E \cap R \cap L = \{4, 8, 10, 16, 18\}$, $|E \cap R \cap L| = 5$.

• $P(E | R \cap L) = \frac{P(E \cap R \cap L)}{P(R \cap L)} = \frac{5}{9} \neq \frac{1}{2} = P(E)$.

DEFINIZIONE

GLI EVENTI A_1, A_2, \dots, A_m SONO DETTI INDEPENDENTI, SE A "SOTTO"- FAMIGLIA

$A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik}$ CON $k \leq m$ VALE $P(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik}) = P(A_{i1}) \cdot P(A_{i2}) \cdots P(A_{ik})$

Esercizio: Tiro al bersaglio

Anna e Bianca sparano ad un bersaglio. Sia A l'evento «Anna fa centro» e B l'evento «Bianca fa centro». Supponiamo che A e B siano indipendenti e che $P(A) = 1/4$ e $P(B) = 2/5$.

Calcolare le probabilità che:

- almeno una delle due colpisca il bersaglio,
- una sola delle due centrì il bersaglio.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}$ (A E B INDEPENDENTI).

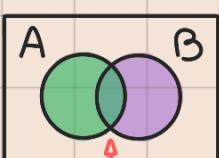
$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}\right) = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} - \frac{2}{20} = \frac{11}{20}$.

b) $P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A/B) + P(B/A)$

$= P((A \cup B) / (A \cap B))$

$= P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)$

$= \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - 2 \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}\right) = \frac{9}{20}$.



VIENE CONTATA 2 VOLTE
SE UNISCO A E B. ($A \cup B$)

$$S_E \ A \subseteq B \Rightarrow P(B/A) = P(B) - P(A)$$

DIM: $B = A \cup (B/A)$

$$P(B) = P(A) + P(B/A)$$

$$P(B/A) = P(B) - P(A) \quad o.$$



REGOLA GENERALE: $P(B/A) = P(B) - P(A \cap B)$
