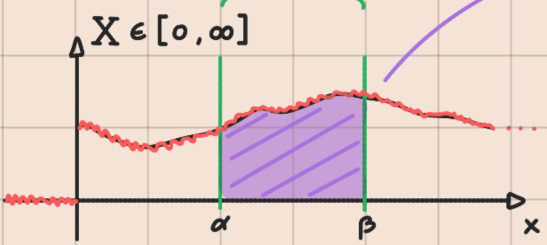
VARIABILI ALEATORIE ASSOLUTAMENTE CONTINUE

V.A. Assol. Continue e Funzione Densitá di Probabilitá

- Una Variabile Aleatoria $\boxed{X : \Omega \to \mathbb{R}}$ si dice Assolutamente Continua se esiste una funzione $\boxed{f : \mathbb{R} \to [0, \infty)}$ detta Densitá di Probabilitá, tale che:

$$\boxed{P(X \in (\alpha, \beta]) = P(\alpha < X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta f(x) \cdot dx \quad , \quad \forall \alpha \leq \beta \in \mathbb{R}} .$$



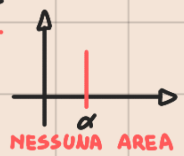
Il supporto é un insieme continuo come un intervallo:

$$\boxed{S_X = (a, b] \subseteq \mathbb{R}}$$

Che coincide, a meno di un insieme di punti numerabile, con il supporto di $f(x)$, ovvero: $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$.

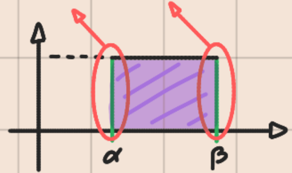
- Per una V.A. assolutamente continua non ha senso definire la Funzione di Probabilitá $p(x) = P(X = x)$ perché sempre a zero:

$$P(X = \alpha) = \int_\alpha^\alpha f(x) \cdot dx = 0 .$$

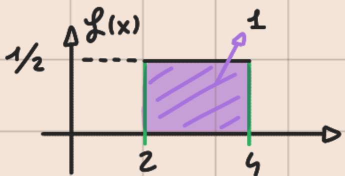


- La funzione f deve soddisfare le due condizioni seguenti:
  1) Evento certo fa 1: $P(-\infty < X \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1$.
  2) $f(x)$ é non negativo: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

La funzione f é continua a meno di un insieme numerabile di punti di discontinuitá.



Esempio V.A. Assolutamrnte Continua



- L'area sottesa alla curva deve fare 1.
- La $f(x)$ é definita come:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se} \quad x \in [2,4] \\ 0 & \text{se} \quad x \notin [2,4] \end{cases}$$

Supporto:

- Il supporto di f: $S_f = [2,4]$
- Il supporto di X: $S_X = (2,4]$ perché: $P(2 < X \leq 4) = \boxed{\int_\alpha^\beta f(x) \cdot dx = 1}$.

Si nota che i due supporti sono lo stesso a meno di un insieme numerabile di punti.

Funzione di Distriibuzione

La funzione di distribuzione F di una v.a. X è la funzione $\boxed{F: \mathbb{R} \to [0,1]}$ definita da:

$$\boxed{F(a) = P(X \leq a) \quad \text{per} \quad -\infty < a < +\infty}$$

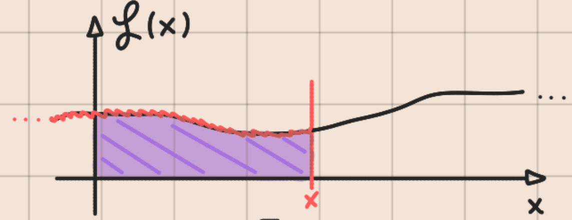
X Discreta:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \sum_{a \in S : a \leq x} p(a)}$$

X Assolutamente Continua: Le funzioni f e F sono legate dalle seguenti relazioni:

1) $\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y) \cdot dy}$, La somma diventa un integrale.

2) $\boxed{f(x) = F'(x)}$

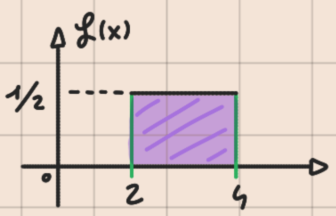


Oss: Se X è assolutamente continua, allora l'insieme dei punti in cui F non è derivabile è al più numerabile. Questo coincide con l'insieme dei punti di discontinuità di f.

Esempio Funzione di Distribuzione

Ricordiamo che:
$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y) \cdot dy}$$

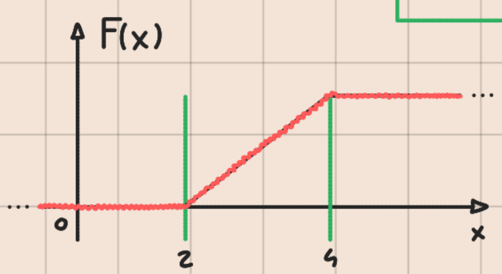
Riprendiamo l'esempio di prima:



$f(x)$ non è discreta.

- Se $x < 2$: $F(x) = 0$.
- Se $2 \leq x \leq 4$: $F(x) = \frac{x-2}{2}$.
- Se $x \geq 4$: $F(x) = 1$.

Quindi abbiamo che:



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{x-2}{2} & 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

Osservazioni:

1) f non è sempre continua. Mentre F invece è continua.
2) La probabilità di una v.a.a.c. è:
   - 0 in un punto.
   - > 0 in un intervallo.
3) F è derivabile tranne nei punti di discontinuità di f. (2 e 4 nell'esempio).

Derivabile in un punto se le derivate sx e dx sono uguali.

SCHEMA PROPRIETÁ DI F MAIUSCOLO
(per X assolutamente continua)

1) F(x) NON É DECRESCENTE: $\forall x \leq y \quad F(x) \leq F(y)$

2) GLI ASINTOTI:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 = P(X \leq -\infty) \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 = P(X \leq +\infty)$$

3) F(x) É ASSOLUTAMENTE CONTINUA: CIOÉ, É:

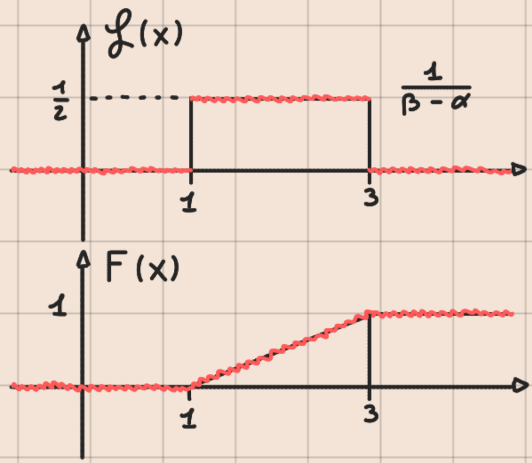
- CONTINUA.
- DERIVABILE A MENO DI UNA QUANTITÁ NUMERABILE DI PUNTI.
- $f(x) = F'(x)$ DERIVABILE, $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot dy$ INTEGRABILE.

Distribuzione Uniforme

Definizione:
Una variabile aleatoria a.c. X ha *distribuzione Uniforme* sull' intervallo $[\alpha, \beta]$ se la sua densità di probabilità f è data da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{for } x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{for } x \text{ not in } [\alpha, \beta] \end{cases}$$

Notazione: $X \sim U(\alpha, \beta)$



La fun. di distribuzione di una variabile aleatoria uniforme nell' intervallo (α, β) è: $F(x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot dy = \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot (x - \alpha) = \boxed{\frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}}$.

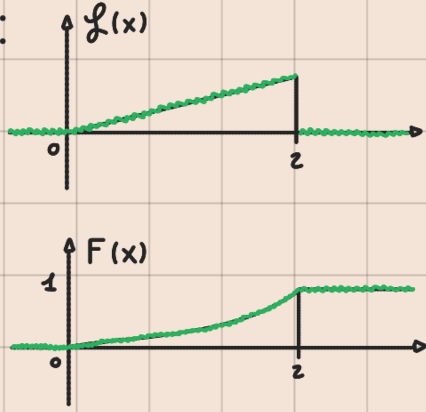
ESEMPIO SEMPLICE:

Sia X una v.a.a.c. con densità di probabilità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

- calcolare la funzione di distribuzione F(x).

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{y}{2} \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{0}^{x} = \boxed{\frac{x^2}{4}}.$$



QUANTILE, PERCENTILE e MEDIANA

DEF: Siano $0 \leq p \leq 1$ ed X una v.a.. Allora definiamo il p^{mo} - quantile anche detto $100\% \cdot p^{mo}$ - percentile, il valore $q_p \in \mathbb{R}$ dato da:

$$\boxed{q_p = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq x\}} \qquad q_p = \text{inv. generalizzata di } F_X(p) = F_X^{-1}(p)$$

- In particolare la mediana é: $\boxed{q = 0.5 \text{ o } q_{0.5} \ , \ P_{50}}$.

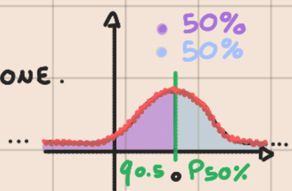
SPIEGAZIONE: Sono tre concetti che servono, nel caso di una variabile aleatoria, a capire "dove si trova" una certa parte della probabilitá.

1) QUANTILE: Valore che divide la distribuzione in una certa frazione.

⟶ Il quantile di ordine q ($0 \leq q \leq 1$) é il valore in cui si trova il $q \cdot 100\%$ della distribuzione.

2) PERCENTILE: Caso particolare di quantile.

⟶ Il Percentile P_k é il valore sotto cui si trova il $K\%$ della distribuzione.



3) MEDIANA: Caso particolare di quantile (e di percentile).

⟶ Il valore centrale: il 50% della distribuzione sta sotto di lui, e l'altro 50% sopra.

QUANTILE e FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

- **Variabile Aleatoria (X)**: una variabile che assume valori secondo una certa distribuzione di probabilitá.

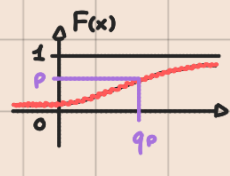
$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x)}$$

- **Funzione di Distribuzione (F(x))**: dá la probabilitá che X sia minore o uguale ad un certo valore.

$$\boxed{P(X \leq x_p) = p}$$

- **Quantile (o percentile)**: l'inverso concettuale della funzione di distribuzione. Ad esempio, il quantile di livello p é quel valore x_p tale che:

$$\boxed{Q(p) = F_X^{-1}(p) \quad \text{con} \quad p \in [0,1]} \implies \boxed{Q(p) = x : \quad F_X(x) = p}$$



==>

$$\boxed{F_X(q_p) = \text{Area} = p}$$

perché $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y) \cdot dy$