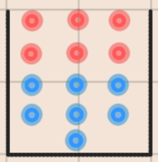
# DISTRIBUZIONI CONTINUO

## Esercizio introduttivo Distribuzione Ipergeometrica

Un' urna contiene 6 biglie rosse e 7 biglie blu.

**1.** Supponiamo di estrarre (**con rimessa**) *5 biglie*. Qual è la probabilità che **2 di queste siano rosse** e le *3 rimanenti siano blu*?



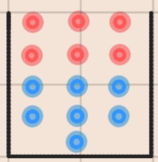
7: Blu
6: Rosse

- Le pescate sono indipendenti tra loro.
- $X$ = {Numero di biglie rosse tra le 5 estratte}.
- $6/13$ = Probabilità di una rossa ad ogni singola estrazione}.
- $S_X = \{1, \dots, 5\} \ni X$.
- $X \sim Bin(5, 6/13)$ : La $X$ è una binomiale perché all'inizio di ciascuna estrazione la P. non cambia.

Quindi:

$$\rightarrow p_X(2) = P(X=2) = \boxed{\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{6}{13}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{6}{13}\right)^3}.$$

**2.** Supponiamo di estrarre (**senza rimessa**) le *5 biglie* tutte insieme. Qual è ora la probabilità che **2 di queste siano rosse** e le *3 rimanenti siano blu*?



7: Blu
6: Rosse

- Estrazione in blocco; non più indipendenti.
- $X$ = {Numero di biglie rosse tra le 5 estratte}.
- $\Omega = \{ \{w_1, \dots, w_5\} = \overline{w},\ w_i \neq w_s \}$
- $\{X = 2\} = \{ \overline{w} \in \Omega : \overline{w}$ contiene 2 rosse e 3 blu$\}$.

Quindi calcoliamo:

- $|\Omega| = C(13, 5) = \binom{13}{5}$
- $|\{X = 2\}| = C(6,2) \cdot C(7,3) = \binom{6}{2} \cdot \binom{7}{3}$

2 tra le 6 rosse.
3 tra le 7 blu.

$$\rightarrow p_X(2) = P(X=2) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{13}{5}}$$

Generalizzando:

$$\boxed{p_X(k) = P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{b}{m-k}}{\binom{r+b}{m}}}$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | = | Biglie estratte. | $r$ | = | Tot. rosse. |
| $k$ | = | Rosse estratte. | $b$ | = | Tot. blu. |
| $m-k$ | = | Blu estratte. | $r+b$ | = | Tot. biglie. |

# DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA

$$p_X(k) = P(X = k) = \boxed{\frac{\binom{r}{k}\cdot\binom{b}{m-k}}{\binom{r+b}{m}}}$$

Notazione: $X \sim \text{Hyper}(r,b,m)$

Dove:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | = | Tot. estratte. | $r$ | = | Tot. primo insieme. |
| $k$ | = | Num di $r$ estratte. | $b$ | = | Tot. secon. insieme. |
| $m-k$ | = | Num di $b$ estratte. | $r+b$ | = | Totale. |

Supporto:

$$S_X = \text{Max}\{0, m-b\}, \dots, \text{Min}\{r, m\} \ni X.$$

Dim: che il supporto sia ottenuto correttamente:

- $X \in \text{Max}\{0,m-b\},\dots,\text{Min}\{r,m\}$.

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} X \leq r \\ X \leq m \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{X \leq \text{Min}\{r,m\}}$.

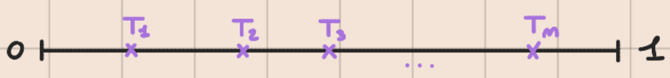
$\rightarrow \left.\begin{array}{l} X \geq 0 \\ m - X \leq b \\ m - b \leq X \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{X \geq \text{Max}\{0,m-b\}}$.

---

## Esempio introduttivo Distribuzione di Poisson

I clienti entrano in un negozio ai tempi di arrivo: ***T1, T2, …***

- Le $T_i \in [0,1]$ sono var. alea. continue:




- Ci interessa il numero di arrivi: $X = \{\text{Numero di clienti in } [0,1]\}$.

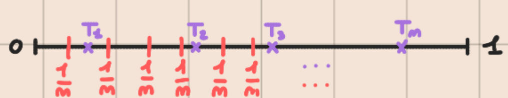
Condizioni:

Supponiamo che i tempi di arrivo soddisfino le condizioni:

1. **Omogeneità**: i clienti arrivano ad un **tasso μ constante nel tempo**, ovvero in ogni **intervallo di tempo di lunghezza t il numero medio di arrivi è** $\mu t$; (o, equivalentemente, la probabilità che arrivi un cliente in un **intervallo di tempo di lunghezza infinitesima** $\delta t$ **è** $\mu \cdot \delta t$);
2. **Indipendenza**: il numero di arrivi in **intervalli di tempo disgiunti** sono **variabili aleatorie indipendenti**;
3. **Non-simultaneità**: la probabilità di due arrivi nel medesimo istante è 0.

Da farsi: Vogliamo calcolare $p_X(k) = P(X = k)$ per $k = \{0,1\}$:

- Quindi suddivido $[0,1]$ in $m$ intervallini:




- Voglio mandare $\boxed{m \longrightarrow +\infty}$.

- Se ci sono due arrivi molto vicini, voglio prendere $m$ abbastanza grande così da poterle vedere separate in due intervallini.

Quindi: $Y_1, Y_2, \dots, Y_m \longrightarrow Y_i \sim Ber\left(\frac{\mu}{m}\right)$ con $Y_i = \begin{cases} 0 & \text{se nell'}i\text{-esimo intervallo c'è una } \times. \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

- Sono $m$ bernulliane di parametro $\frac{\mu}{m}$. (Tasso di arrivo normalizzato per la lunghezza dell'intervallo.)

Poi definisco: $X^{(m)}$ = Numero di "uni" (di $\times$) in $(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$.

= Numero di clienti entrati in $[0,1]$.

- $X^{(m)} \sim Bin\left(m, \frac{\mu}{m}\right)$
- Si tratta di una successione di v.a. di parametri $m$, $\mu/m$.
- Voglio mandare $m \longrightarrow +\infty$: $\quad X = \lim_{m \to +\infty} X^{(m)}$.
- Nel senso: $\boxed{p_X(k) = \lim_{m \to +\infty} p_{X^{(m)}}(k) \quad \forall k \in \{0, \dots, m\}}$.

Quindi per:

- $X^{(m)} \sim Bin\left(m, \frac{\mu}{m}\right)$, $\quad X^{(m)} \in \{0, \dots, m\} \ni k$

$$p_X(k) = \binom{m}{k} \cdot \left(\frac{\mu}{m}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\mu}{m}\right)^{m-k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} \cdot \frac{\mu^k}{m^k} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{m}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{\mu}{m}\right)^{-k}$$

$$= \underbrace{\frac{\mu^k}{k!}}_{\mu^k/m} \cdot \left(\underbrace{\frac{m}{m}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{m-1}{m}}_{1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{m-k-1}{m}}_{1}\right) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\mu}{m}\right)^m}_{e^{-\mu}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\mu}{m}\right)^{-k}}_{1} \xrightarrow{m \to +\infty} \boxed{\frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}}.$$

# DISTRIBUZIONE DI POISSON

$$p_X(k) = P(X = k) = \boxed{\frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}}$$

Notazione: $X \sim Pois(\mu)$

Dove:

$\mu$ = Tasso costante nel tempo (spazio, ecc...)

$k$ = Numero atteso di eventi.

Interpretazione: $\mu$ è il numero medio di avvenimenti nell'unità di tempo.

---