ESERCIZI VAR. ALE. ASSOLUTAMENTE CONTINUE

Eseecizio 3) Il voto ad un esame è un numero in [0,10]. L'esame si passa con 6. Il voto di Mario è una v.a. a.c. di densità:

$$f(x) = c \cdot \begin{cases} \frac{4}{10}x & \text{PER } 0 \leq x \leq 5 \\ 4 - \frac{4}{10}x & \text{PER } 5 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

- calcolare c.
- qual è la probabilità che Mario passi l'esame ?
- Sappiamo che Mario otterrà almeno il voto x con una probabilità del 80%? Calcolare x.

1) CALCOLARE C: PER CALCOLARE LA COSTANTE C NORMALIZZIAMO LA FUNZIONE DI DENSITÀ $f(x)$, IMPONENDO CHE L'INTEGRALE SIA UGUALE AD 1 (EVENTO CERTO):

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1}$$

NEL MIO CASO LA FUNZIONE DI DENSITÀ È DEFINITA IN [0,10], QUINDI:

$$\int_0^{10} f(x) \cdot dx = 1$$

E POICHÉ $\boxed{f(x) = c \cdot g(x)}$, DOBBIAMO CALCOLARE:

$$\int_0^{10} c \cdot g(x) \cdot dx = 1 \Rightarrow c \cdot \int_0^{10} g(x) \cdot dx = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{\int_0^{10} g(x) \cdot dx}}$$

DIVIDIAMO L'INTEGRALE IN DUE INTERVALLI:

$$\int_0^{10} g(x) \cdot dx = \boxed{\int_0^5 \frac{4}{10}x \cdot dx + \int_5^{10} \left(4 - \frac{4}{10}x\right) \cdot dx}$$

RISOLVIAMO IL PRIMO:

$$\int_0^5 \frac{4}{10}x \cdot dx = \frac{4}{10} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \frac{4}{10} \cdot \frac{25}{2} = 5$$

RISOLVIAMO IL SECONDO:

$$\int_5^{10} \left(4 - \frac{4}{10}x\right) \cdot dx = \int_5^{10} 4 \cdot dx - \int_5^{10} \frac{4}{10}x = 4 \cdot (10 - 5) - \frac{4}{10} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_5^{10}$$

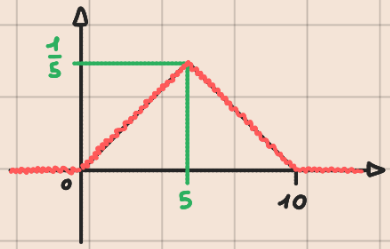
$$= 20 - \frac{4}{10} \cdot \left(\frac{100 - 25}{2}\right) = 20 - 15 = 5.$$

Quindi calcoliamo: $\int_0^{10} g(x)\cdot dx = 5 + 5 = 10$.

Possiamo calcolare c: $\boxed{c = \frac{1}{\int_0^{10} g(x)\cdot dx} = \frac{1}{10}}$.

Completiamo allora $f(x)$:

• $f(x) = \overbrace{\frac{1}{10}}^{c} \cdot g(x) = \begin{cases} \frac{4}{100}x & \text{per } 0 \leq x \leq 5 \\ \left(4 - \frac{4}{10}x\right)\frac{1}{10} & \text{per } 5 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$



• <u>Mediana</u>: $f(5) = \underbrace{\frac{4}{100}\cdot 5}_{0\leq x\leq 5} = \underbrace{\left(4 - \frac{4}{10}\cdot 5\right)\frac{1}{10}}_{5\leq x\leq 10} = \boxed{\frac{1}{5}}$, $\boxed{Q\left(\frac{1}{5}\right) = 5}$.

2) <u>"Prob. che Mario passi l'esame"</u> $= P(X \geq 6)$

1° metodo: $P(X \geq 6) = 1 - F(6) = 1 - \int_{-\infty}^{6} f(y)\cdot dy \overset{*1}{=} \boxed{1 - \int_0^6 f(y)\cdot dy} \ldots$

2° metodo: $P(X \geq 6) = \int_6^{+\infty} f(y)\cdot dy \overset{*2}{=} \boxed{\int_6^{10} f(x)\cdot dx} = \int_6^{10}\left(4 - \frac{4}{10}x\right)\frac{1}{10}\cdot dx$

$*1$ Perché tra $x \in [-\infty, 0)$ la funzione f fa 0.

$= \int_0^{10}\left(\frac{4}{10} - \frac{4}{100}x\right)\cdot dx = \int_0^{10}\frac{4}{10}\cdot dx - \int_0^{10}\frac{4}{100}x\cdot dx$

$*2$ Perché tra $x \in (10, -\infty]$ la funzione f fa 0.

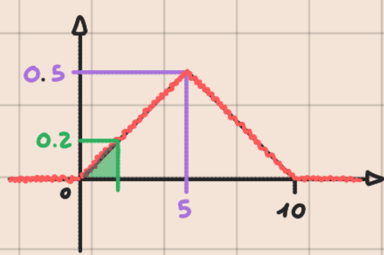
$= \frac{4}{10}(10-6) - \frac{4}{100}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_6^{10} = \frac{8}{5} - \frac{4}{100}\left(\frac{100-36}{2}\right) = \ldots$

3) <u>"Sappiamo che Mario otterrà almeno voto x con una probabilità del 80%. Calcolare x."</u>

Che significa: $\boxed{0.80 = P(X \geq x)}$

Che riscritta: $0.80 = 1 - P(X \leq x) \implies P(X \leq x) = 1 - 0.80 = 0.20$.

Quindi: $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\cdot dx \overset{*1}{=} \int_0^x f(x)\cdot dx = 0.20$.



Poiché 0.20 è minore di 0.5, possiamo limitarci alla <u>prima parte della funzione</u>:

Abbiamo: $f(x) = \frac{1}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot x = \frac{4}{100}x$ dato $\boxed{x \in [0, 5]}$

Quindi: $\int_0^x \frac{4}{100}t\cdot dt = \frac{4}{100}\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{4}{100}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{1}{50}\cdot x^2$

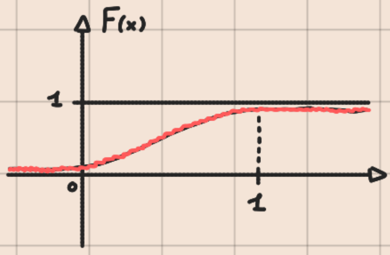
Poniamo $f(x) = 0.20$: $\frac{1}{50}\cdot x^2 = 0.20$ $\quad x^2 = 0.20\cdot 50 = 10$ $\quad \boxed{x = \cancel{\pm}\sqrt{10} \simeq 3.16}$

Esercizio 2) Sia X una v.a. a.c. con distribuzione:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{PER } 1 \leq x \\ 2x^2 - x^4 & \text{PER } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{PER } x \leq 0 \end{cases}$$

- calcolare P(1/4 ≤ X ≤ 3/4),
- calcolare la densità di probabilità di X.

SUPPORTO: $X \in S_X = [0,1]$



1) CALCOLARE: $\boxed{P(\alpha \leq x \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)}$

$$P\left(\tfrac{1}{4} \leq x \leq \tfrac{3}{4}\right) = F\left(\tfrac{3}{4}\right) - F\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

$$= 2\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{4}\right)^4 - 2\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 = \ldots$$

2) CALCOLARE LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ $f(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [0,1] \\ 4x - 4x^3 & x \in [0,1] \end{cases}$$

- $D(1) = 0$
- $D(0) = 0$
- $D(2x^2 - x^4) = 4x - 4x^3$

Esercizio 1) Sia X una v.a. a.c. con densità di probabilità:

$$f(x) = \begin{cases} cx + 3 & \text{PER } -3 \leq x \leq -2 \\ 3 - cx & \text{PER } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

- calcolare c,
- calcolare la funzione di distribuzione di X.