# DISTRIBUZIONE CONGIUNTA

**Def:** Siano $X$ e $Y$ due v.a. La funzione di distribuzione congiunta $F$ di $X$ e $Y$ è:

$F: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ definita da:

$$F(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b) \quad \text{per} \quad -\infty < a,b < +\infty$$

## Funzione di probabilitá congiunta

**Def:** Siano $X$ e $Y$ due v.a. La funzione di probabilità congiunta $p$ di $X$ e $Y$ è:

$p: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ definita da:

$$p(a,b) = P(X = a, Y = b) \quad \text{per} \quad -\infty < a,b < +\infty$$

**Dalla congiunta alla marginale:** Le funzioni di probabilità marginali $p_X(x)$ e $p_Y(y)$ si ottengono sommando i valori sulle righe o sulle colonne nella tabella della probabilità congiunta.

## Esempio Coppia di Monete

Abbiamo: $(X, Y) \in \{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$ $\qquad T \to 1$, $C \to 0$

Rappresentazione schematica:

| X \ Y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1/4 | 1/4 |
| 1 | 1/4 | 1/4 |

- Funzione di probabilità congiunta: $p_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$
- Funzione di probabilità marginale: $p_X(x) = P(X=x)$, $p_Y(y) = P(Y=y)$

| X \ Y | 0 | 1 | $p_X$ | Marginali di $X$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $p_{X,Y}(0,0)$ | $p_{X,Y}(0,1)$ | $p_X(0)$ | $\to 1/2$ |
| 1 | $p_{X,Y}(1,0)$ | $p_{X,Y}(1,1)$ | $p_X(1)$ | $\to 1/2$ |
| $p_Y$ | $p_Y(0)$ | $p_Y(1)$ | | |
| Marginali di $Y$ | $\downarrow 1/2$ | $\downarrow 1/2$ | | |

- $p_X(0) = P(X=0, Y \text{ qualsiasi})$
$= P(X=0, Y \in \{0,1\})$
$= P((X,Y)=(0,0), (X,Y)=(0,1))$
$= P((X,Y)=(0,0)) + P((X,Y)=(0,1))$
$= p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(0,1)$

Funzioni di probabilità congiunta:

- $p_X(x) = P(X=x) = P(X=x, Y \text{ qualsiasi}) = \sum_{y \in S_Y} P(X=x, Y=y) = \sum_{y \in S_Y} p_{X,Y}(x,y)$.
- $p_Y(y) = P(Y=y) = P(X \text{ qualsiasi}, Y=y) = \sum_{x \in S_X} P(X=x, Y=y) = \sum_{x \in S_X} p_{X,Y}(x,y)$.

Funzione di distribuzione congiunta:

- $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{\substack{a \leq x \\ b \leq y}} p_{X,Y}(a,b)$.

"È possibile determinare la funzione di probabilità congiunta $p_{X,Y}(x,y)$ se si conoscono le marginali $p_X(x)$ e $p_Y(y)$ ?" NO

Consideriamo il seguente esempio, dove $\varepsilon \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$:

| X \ Y | 0 | 1 | $P_X$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $1/4 - \varepsilon$ | $1/4 + \varepsilon$ | $1/2$ |
| 1 | $1/4 + \varepsilon$ | $1/4 - \varepsilon$ | $1/2$ |
| $P_Y$ | $1/2$ | $1/2$ | |

- L'INFORMAZIONE CONTENUTA IN $P_{X,Y}$ È MAGGIORE DI QUELLE CONTENUTE IN $P_X$ E $P_Y$.

# Esempio Esercizio Somma e Massimo dadi

| | b | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 1/36 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 2/36 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1/36 | 2/36 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 2/36 | 2/36 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 1/36 | 2/36 | 2/36 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 2/36 | 2/36 | 2/36 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 1/36 | 2/36 | 2/36 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2/36 | 2/36 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/36 | 2/36 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2/36 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/36 |

- $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$ , $|\Omega| = 36$.
- $P_{S,M}(s, m)$
- $P_{S,M}(2, 1) = P(S=2, M=1) = P((1,1)) = \frac{1}{36}$.
- $P_{S,M}(3, 2) = P(S=3, M=2) = P(\{(1,2), (2,1)\}) = \frac{2}{36}$.

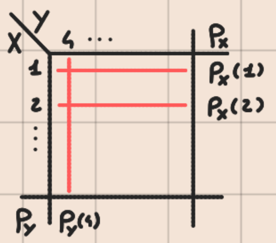
CALCOLIAMO LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE:

$$F_{SM}(3,2) = P(S \leq 3, M \leq 2) = \sum_{\substack{s \leq 3 \\ m \leq 2}} P_{S,M}(s,m) = \boxed{P_{S,M}(2,1) + P_{S,M}(2,1) + P_{S,M}(2,1) + P_{S,M}(2,1)}.$$

$s \leq 3,\ m \leq 2 \Rightarrow s \in \{2,3\},\ m \in \{1,2\}$

# Formule per **calcolo marginali** v.a. discrete e continue

- $P_{X,Y}(x,y)$
- $P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y)$
- $P_Y(y) = \sum_x P_{X,Y}(x,y)$




- $f_{X,Y}(x,y)$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) \cdot dy$ MARGINALE DI X
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) \cdot dx$ MARGINALE DI Y

# Esempio calcolo marginale di una v.a. continua

SIANO X ED Y V.A. A.C. LA CUI DENSITÀ CONGIUNTA È:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5} xy(1+y) & \text{PER } (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

DETERMINA LA MARGINALE $f_X(x)$:

CALCOLO MARGINALI CONTINUE:

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) \cdot dy$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) \cdot dx$

CALCOLO DENSITÀ MARGINALE: $f_X(x) = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) \cdot dy} = \int_0^1 \frac{12}{5} xy(1+y) \cdot dy = \frac{12}{5} x \cdot \int_0^1 y^2 + y$

$$= \frac{12}{5} x \left\{ \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right\}_0^1 = \frac{12}{5} x \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \boxed{2x \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)}.$$