TRASFORMAZIONE di una V.A.

(Testi dei Teoremi sulle slides)

Esempio v.a. Discreta

$\boxed{p_Y(y) = ?}$

Sia X una v.a. discreta Uniforme a valori nell'insieme {-1,0,1,2}. Qual è la funzione di probabilità p_Y di $Y = X^2$?

X	-1	0	1	2
p_X	1/4	1/4	1/4	1/4

$Y = X^2$

Y	0	1	4
p_Y	1/4	1/2	1/4

ABBIAMO CHE: $S_X = \{-1,0,1,2\} \iff g(x) = x^2 \iff S_Y = \{0,1,4\}$

- $p_Y(0) = P(Y=0) = P(X^2=0) = P(X=0) = \boxed{\frac{1}{4}}$.
- $p_Y(1) = P(Y=1) = P(X^2=1) = P(X=1) + P(X=-1) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$.
- $p_Y(4) = 1 - p_Y(0) - p_Y(1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$.

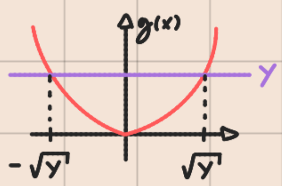
Esempio v.a. Continua

$\boxed{Y \sim f_Y(y) = ?}$

Sia X una v.a. continua ~ N(0,1). Qual è la densità di probabilità f_Y di $Y = X^2$?

DENSITÀ DI PROB. DI f_X: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

SUPPORTO: $S_X = \mathbb{R} \Rightarrow S_Y = \mathrm{Im}_g(S_X) = (0,+\infty) = \mathbb{R}^+$



$Y = X^2 \Rightarrow g(x) = x^2$

1) CALCOLARE $F_Y(y)$ IN TERMINI DI $F_X(x)$:

- FISSO $y \in S_Y = [0,+\infty)$
- $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \boxed{F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})}$

$\boxed{P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)}$

2) CALCOLARE $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y)$ IN TERMINI DI $f_X(x)$:

$\boxed{f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)}$

$\boxed{D f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$

- $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}\{F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})\}$

$$= \frac{d}{dy}F_X(\sqrt{y}) - \frac{d}{dy}F_X(-\sqrt{y})$$

$$= f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{d}{dy}\sqrt{y} - f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{d}{dy}(-\sqrt{y})$$

$$= f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\}$$

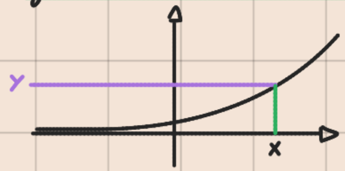
$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y}} \cdot \cancel{2} f_X(\sqrt{y}) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \quad y \ge 0}.$$

$\boxed{X \sim N(0,1) \text{ FUNZ. PARI} \quad f_X(\sqrt{y}) = f_X(-\sqrt{y})}$

QUINDI: $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \cdot \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y)$

Caso Funzione Crescente

g strettamente crescente $\Rightarrow$ invertibile su S_y.



$$\boxed{g(x) \le y \iff x \le g^{-1}(y)}$$

Dati: $Y = g(X)$, $f_y = ?$, $S_y = \Im_g(S_x)$

1) Fissiamo $y \in S_y$:

- $F_y(y) = P(Y \le y) = P(g(x) \le y) = P(x \le g^{-1}(y)) = F_x(g^{-1}(y))$

2) Calcolo f_y in termini di f_x:

$$\boxed{f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)}$$

$$\boxed{D f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

- $f_y(y) = \frac{d}{dy} \cdot F_y(y) = \frac{d}{dy} F_x(g^{-1}(y))$

$= \boxed{f_x(g^{-1}(y)) \cdot \frac{d}{dy} g^{-1}(y)}$.

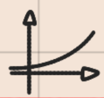
Derivata di una funzione inversa

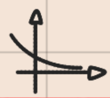
Teo: Sia $g: S_x \to \mathbb{R}$ strettamente crescente (allora è invertibile e $g^{-1}: S_y \to S_x$)

e sia X una v.a. a.c. con funzione di densità f_x, allora:

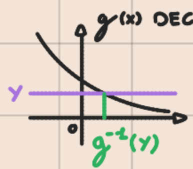
$$\boxed{f_y(y) = f_x(g^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(y))}} .$$

Teo: Una funzione è invertibile se monotona (strettamente crescente o decrescente).





Caso Funzione Decrescente



Quando la funzione sta al di sotto di y?
Quando la x sta sopra $g^{-1}(y)$.

Dati: $g: S_x \longrightarrow \mathbb{R} = S_y$, $\Im_g(S_x) = S_y$

$g': S_y \longrightarrow S_x$

1) Fissiamo $y \in S_y$:

$F_y(y) = P(Y \le y) = P(g(x) \le y) = P(X \ge g^{-1}(y)) = 1 - F_x(g^{-1}(y))$

2) Calcolo f_y in termini di f_x:

$$\boxed{f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)}$$

$$\boxed{D f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

$f_y = \frac{d}{dy} F_y(y) = \frac{d}{dy} \left\{ 1 - F_x(g^{-1}(y)) \right\}$

$= 0 - \frac{d}{dy} F_x(g^{-1}(y)) = \boxed{- f_x(g^{-1}(y)) \cdot \frac{d}{dy} g^{-1}(y)}$.

Abbiamo trovato che:

- Se g strettamente crescente: $f_x(g^{-1}(y)) \cdot \frac{d}{dy} g^{-1}(y)$.
- Se g strettamente decrescente: $- f_x(g^{-1}(y)) \cdot \frac{d}{dy} g^{-1}(y)$.

In generale:

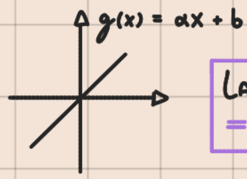
- Se g strettamente decrescente o crescente: $\boxed{f_x(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|}$.

La formula col valore assoluto comprende entrambi i casi.

TRASFORMAZIONE LINEARE

Abbiamo: $Y = g(x) = ax + b$

Regole:
- $E[aX+b] = aE[X]+b$
- $VAR(aX+b) = a^2 VAR(X)$



La retta è monotona => quindi invertibile.

L'inversa di $g(x)$ è: $X = g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$, $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{d}{dy}\frac{1}{a}(y-b) = \frac{1}{a}(1-0) = \frac{1}{a}$

Calcoliamo $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| = \boxed{f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{|a|}}.$$

Trasformazione Normale in una Normale Standard

- $X \sim N(\mu,\sigma^2)$
- $Y = g(x) = rX + s$
- $X = g^{-1}(y) = \frac{y-s}{r}$
- $E[rX+s] = rE[X]+s = r\mu + s$
- $VAR(rX+s) = r^2 VAR(X) = r^2\sigma^2$

Normale generica
$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Calcoliamo f_Y:

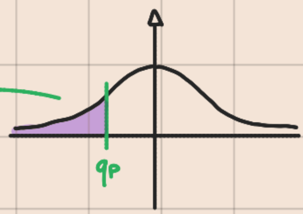
$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\cdot\left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi r^2\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{\left(\frac{y-s}{r}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r^2\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{(y-s-\mu r)^2}{2r^2\sigma^2}}$$

=> Ogni normale può essere trasformata in una Normale Standard. => $Y \sim N(s+\mu r, r^2\sigma^2)$

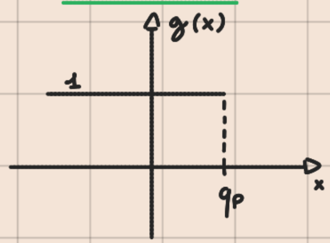
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $\frac{X-\mu}{\sigma} = Z \sim N(0,1)$ con $r = \frac{1}{\sigma}$, $s = -\frac{\mu}{\sigma}$.

Esempio trasformazione v.a. a.c. in discreta

- $X\sim N(0,1)$ continua
- $Y \sim Ber(p)$ $S_Y = \{0,1\}$
- $Y = \begin{cases}1 & \text{se } X\le q_p\\ 0 & \text{se } X>q_p\end{cases}$



Non invertibile



$P_Y(1) = P(Y=1) = P(X\le q_p) = F_X(q_p) = p$

$P_Y(0) = P(Y=0) = P(X> q_p) = 1-F_X(q_p) = 1-p$

$F(Q(p)) = p$

$F(x) = p$, $Q(p) = x$