# FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

**DEF:** SIA $m \in \mathbb{N}$ ALLORA SI DICE MOMENTO $m$-ESIMO DI UNA V.A. $X$, L'ASPETTAZIONE $E[X^m]$ BEN DEFINITA.

**DEF:** SI DICE FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI DI $X$ LA FUNZIONE $G_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ CHE ASSOCIA AD OGNI $t \in \mathbb{R}$, L'ASPETTAZIONE:

$$G_X(t) = E[e^{tX}]$$

DISCRETA
$$= \sum_{a \in S_X} e^{ta} \cdot p_X(a)$$

CONTINUA
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x) \cdot dx$$

**TEO:** SIA $X$ UNA V.A. CON F.G.M. BEN DEFINITA $G_X(t)$, ALLORA: $\boxed{E[X^m] = \frac{d^m}{dt^m} \cdot G_X(0)}$.

## Aspettazione e Varianza col metodo della F.G.M.

**OSS:** ASPETTAZIONE E VARIANZA POSSONO ESSERE CALCOLATE CON LA F.G.M., INFATTI:

$$E[X] = G'_X(0) \quad , \quad E[X^2] = G''_X(0) \quad \Longrightarrow \quad VAR(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

## Modi per Caratterizzare X

1) $f(x)$.
2) $F_X(x)$.
3) $\{ E[X^m] : m \in \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N} \}$.
4) $G_X(t)$ $\quad t \in (-\delta, \delta)$ PER QUALCHE $\delta > 0$.

## Relazioni tra le caratterizzazioni

- $f(x) \Rightarrow F_X(x)$: $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx$
- $F_X(x) \Rightarrow f(x)$: $\quad f(x) = \frac{d}{dx} \cdot F_X(x)$
- $G_X(t) \Rightarrow \{ E[X^m] : m \in \mathbb{N} \}$: $\quad E[X^m] = \frac{d^m}{dt^m} \cdot G_X(0)$
- $\{ E[X^m] : m \in \mathbb{N} \} \Rightarrow G_X(t)$: $\quad G_X(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \cdot E[X^m] \quad |t| < \delta$

SE CONOSCO TUTTI I MOMENTI DI $X$ ALLORA POSSO CALCOLARE $G_X(t)$.

## Esempio calcolo Media e Varianza col metodo della FGM

Sia $X \sim Pois(\mu)$ , $G_X(t) = e^{\mu(e^t-1)}$ :

- $E[X] = G'_X(0) = e^{\mu(e^t-1)} \cdot \mu e^t = \mu e^{\mu(e^t-1)+t} \xrightarrow{t=0} \boxed{\mu}$
- $E[X^2] = G''_X(0) = \mu e^{\mu(e^t-1)+t} \cdot (\mu e^t + 1) \xrightarrow{t=0} \boxed{\mu(\mu+1)}$
- $VAR(x) = E[X^2] - (E[X])^2 = \cancel{\mu^2} + \mu - \cancel{\mu^2} = \boxed{\mu}$ .

## Momenti n-esimi noti delle distribuzioni

Momenti distribuzione esponenziale

$$E[X^m \sim Exp(\lambda)] = \frac{\lambda \cdot m!}{(\lambda-t)^{m+1}} \xrightarrow{t=0} \frac{m!}{\lambda^m}$$

Momenti distribuzione normale standard

$$E[Z^{2K} \sim N(0,1)] = (2K-1)!! = \frac{(2K)!}{2^K \cdot K!}$$

$$E[Z^{2K+1} \sim N(0,1)] = 0$$