1) Dimostrare che $P(A^c|C)=1-P(A|C)$.

$$P(A^c|C) = \frac{P(A^c \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\Omega \cap C) - P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C)-P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{P(C)}{P(C)} - \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = 1 - \frac{P(A\cap C)}{P(C)}.$$

$$\boxed{P(A^c \cap C) = P(\Omega \cap C) - P(A \cap C)}$$

---

2) Consideriamo il mese di nascita di una persona random. Siano L ed S gli eventi seguenti. Calcolare $P(L|S)$ e $P(S|L)$.
L={nato in un mese “lungo”}
S={nato in un mese estivo} .

- $L = \{$Gen, Mar, Mag, Lug, Ago, Ott, Dic$\}$, $|L| = 7$.
- $S = \{$Giu, Lug, Ago$\}$, $|S| = 3$.
- $L \cap S = \{$Lug, Ago$\}$, $|L\cap S| = 2$.
- $P(L) = \frac{7}{12}$, $P(S) = \frac{3}{12}$

→ $P(L|S) = \frac{P(L\cap S)}{P(S)} = \frac{2/\cancel{12}}{3/\cancel{12}} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

→ $P(S|L) = \frac{P(L\cap S)}{P(L)} = \frac{2/\cancel{12}}{7/\cancel{12}} = \boxed{\frac{2}{7}}$.

---

3) Una popolazione è composta dai genotipi **AA**, **Aa**, **aa**, presenti, rispettivamente, nelle percentuali 49%, 42% e 9%.
- Supponiamo che dopo un certo tempo muoiano tutti gli individui di tipo **aa**.
- Determinare le percentuali di individui di tipo **AA** e **Aa** nella popolazione adulta.

Totale dopo l'evento = 49 + 42 = 91 %

$AA_{nuovo} = \frac{49}{91} \cdot 100 = \boxed{53.8\%}$.

$Aa_{nuovo} = \frac{42}{91} \cdot 100 \simeq \boxed{46.2\%}$.

---

4) Un’urna contiene 9 palline rosse e 6 gialle. Una dopo l’altra vengono estratte tre palline.

a) Calcolare la probabilità che siano tutte rosse, supponendo che vengano estratte senza reimmissione.
b) Calcolare la probabilità che siano tutte rosse, supponendo che vengano estratte con reimmissione.
c) Calcolare la probabilità che la prima sia gialla, la seconda sia rossa e la terza sia gialla (con e senza reimmissione).

- TOTALE $= 9 + 6 = 15$.
- $P(a) = \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} \simeq \boxed{18.4\ \%}$.
- $P(b) = \frac{9}{15} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{9}{15} = \boxed{21.6\ \%}$.
- $P(c_{NR}) = \frac{6}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \simeq \boxed{9.9\ \%}$.
- $P(c_{R}) = \frac{6}{15} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{6}{15} = \boxed{9.6\ \%}$.

---

5) Calcolare:
1. Sapendo che **P(A) = 1/3** e **P(B|A') = 1/4**, calcolare **P(A ∪ B)**.
2. Sapendo che **P(A ∪ B) = 2/3** e **P(A'|B') = 1/2**, calcolare **P(B)**.

(1):
- $P(A \cup B) = P(A) + \boxed{P(B) - P(A \cap B)}$
- $P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(\Omega \cap B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} = \frac{1}{4} \quad // \cdot (1 - P(A))$

$\Rightarrow \boxed{P(B) - P(B \cap A)} = \frac{1}{4}(1 - P(A))$.

- $P(A \cup B) = P(A) + \frac{1}{4} \cdot (1 - P(A))$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$.

$A' = \Omega / A$
$A' \cap B = (\Omega \cap B)/(A \cap B)$
$= B/(A \cap B)$
$\boxed{P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)}$

(2):
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(B) = P(A \cup B) + \boxed{P(A \cap B) - P(A)}$.
- $P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{P(B') - P(A \cap B')}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(B) - (P(A) - P(A \cap B))}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) - P(A)} = \frac{1}{2}(1 - P(B)) - 1 + P(B) = \frac{1 - P(B) - 2 + 2P(B)}{2} = \frac{1}{2}(P(B) - 1)$.

$$\begin{cases} \underline{P(A \cap B) - P(A)} = \frac{1}{2}(P(B) - 1) \\ P(B) = \underline{P(A \cup B)} + \underline{P(A \cap B) - P(A)} \\ \underline{P(A \cup B)} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}(P(B) - 1) \Rightarrow 2 \cdot P(B) = \frac{4}{3} + P(B) - 1$$

$\Rightarrow P(B) = \frac{4}{3} - 1 = \boxed{\frac{1}{3}}$.

6) Consideriamo un gruppo di 25 persone. Qual è la probabilità che almeno due persone facciano il compleanno lo stesso giorno?

---> Primo metodo risolutivo (Calcolo Combinatorio)

- $A = \{$"ALMENO DUE PERSONE SU 25 HANNO LO STESSO GIORNO DI COMPLEANNO."$\}$
- $A^c = \{(\omega_1, \dots, \omega_{24}) \in \Omega : \omega_i \neq \omega_3\}$.
- $|A^c| = D(365, 25)$, $|\Omega| = D^R(365, 25)$
- $P(A) = \frac{|\Omega| - |A^c|}{|\Omega|} = \boxed{\frac{D^R(365,25) - D(365,25)}{D^R(365,25)}}$.

---> Secondo metodo risolutivo (Probabilitá Condizoonata)

- $A = \{$"ALMENO DUE PERSONE SU 25 HANNO LO STESSO GIORNO DI COMPLEANNO."$\}$
- $A^c = \{(\omega_1, \dots, \omega_{24}) \in \Omega : \omega_i \neq \omega_3\}$.
- $P(A^c) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365-24}{365} = \prod_{i=0}^{24} \frac{365-i}{365}$.
- $P(A) = 1 - P(A^c) = \boxed{1 - \prod_{i=0}^{24} \frac{365-i}{365}}$.

---

7) Un test diagnostico è corretto nel 98% dei casi. Ripetendo due volte il test, qual è la probabilità di un doppio errore?

$P(A) = P(B) = 100\% - 98\% = 2\%$ (A E B INDIPENDENTI).

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{4}{10\,000} = 0.0004 = \boxed{0.04\,\%}$.

8) Si lanciano due dadi. Consideriamo tre eventi:

A: la somma dei due dadi dà esito 7

B: il primo dado dà esito 3.

C: il secondo dado dà un numero maggiore del primo.

Quali famigle di eventi sono indipendenti?

$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

$B = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

$C = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$
$(2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$
$(3,4), (3,5), (3,6),$
$(4,5), (4,6),$
$(5,6)\}$

$|\Omega| = D^R(6,2) = \frac{1}{36}$.

$|A| = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$|B| = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$|C| = \frac{15}{36}$.

A) A e B, A e C, B e C

B) A e B, A e C

C) A e B, B e C

D) A e C, B e C

$\boxed{\textbf{E)}\text{ A e B}}$

F) A e C

G) B e C

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = P(A \cap B) = \{(4,3)\}$ ✓

$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{36} \neq \frac{3}{36} = P(A \cap C) = \{(1,6),(2,5),(3,4)\}$ ✗

$P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{36} \neq \frac{3}{36} = P(B \cap C) = \{(3,4),(3,5),(3,6)\}$ ✗
