

ESERCIZIO 1°

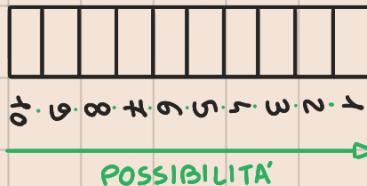
Svolto il 26/09/2025

1. Quanti modi ci sono di mettere in fila 10 persone?

DATI: $K = 10 = m$

\Rightarrow PERMUTAZIONI SEMPLICI

\Leftarrow PERSONE NON RISCEGLIBILI



$$\text{S. G. O. O. H. O. O. S. S. W. N. I.} = 10!$$

$$P_{10} = 10!$$

APPLICAZIONE DELLA REGOLA FONDAMENTALE DEL CONTEGGIO

$$P_m = m!$$

2. Quanti modi ci sono di formare una password di 4 caratteri composta da sole lettere dell'alfabeto italiano dalla A alla L?

DATI: $K = 5$, $m = |\{A, B, \dots, L\}| / |\{S, K\}| = 10$, $m > K$.

- ORDINE CONTA \wedge CON RIPETIZIONI \Rightarrow DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONI



$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$$

$$D^r(10, 4) = 10^4$$

$$D^r(m, K) = m^K$$

3. Quanti modi ci sono di mettere in fila 4 persone scelte a caso tra 10?

DATI: $K = 5$, $m = 10$

- CONTA L'ORDINE \wedge SENZA RIPETIZIONI \Rightarrow DISPOSIZIONI SEMPLICI

$$D(10, 4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!}$$

$$= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

$$D(m, K) = \frac{m!}{(m-K)!}$$

4. Quanti modi ci sono di formare una commissione composta da 4 persone scelte a caso in un gruppo di 10 persone?

DATI: $K = 5$, $m = 10$, Non conta l'ordine

SENZA RIPETIZIONI

COMBINAZIONI

SEMPLICI

$$C(10, 4) = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6!} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210.$$

$$C(m, K) = \binom{m}{K} = \frac{m!}{K!(m-K)!}$$

ESERCIZIO 2°

$$(1) = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \binom{12}{3} = (2)$$
RISPOSTA c)

ESERCIZIO 3°

Carla, Carmela e Clotilde possono scegliere i loro accompagnatori per il ballo in un gruppo di 25 ragazzi. Qual è il numero totale di modi di formare le 3 coppie?

DATI: $K = 3$, $M = 25$, Conta l'ordine \wedge No ripetizioni \Rightarrow Disposizioni Simplici

$$D(25, 3) = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22!}{22!} = 25 \cdot 24 \cdot 23.$$

ESERCIZIO 4°

1) Dato un insieme S di n elementi, calcolare il numero dei suoi sottoinsiemi.

DATI: $S = \{1, 2, \dots, M\}$, l'insieme delle parti di S ha cardinalità:

Dim: $\sum_{k=0}^M \binom{m}{k} \cdot 1^{m-k} \cdot 1^k = (1+1)^m = 2^m$
BINOMIO DI NEWTON

$$|\Sigma| = 2^m$$

2) Da un insieme di n persone se ne scelgono k per formare un comitato con un presidente. In quanti modi è possibile fare questo?

1° MODO: SCEGLIENDO PRIMA IL COMITATO:

- SCELTA DEL COMITATO: $C(m, k) = \binom{m}{k}$
- SCELTA DEL PRESIDENTE: $C(m, k) \cdot k = \binom{m}{k} \cdot k$

1° MODO: SCEGLIENDO PRIMA IL PRESIDENTE:

- SCELTA DEL PRESIDENTE: m
- SCELTA DEL COMITATO: $m \cdot \binom{m-1}{k-1}$

I DUE RISULTATI SONO EQUIVALENTI:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \binom{m}{k} \cdot k &= \frac{m! \cdot k}{k! \cdot (m-k)!} = \frac{m!}{(k-1)! \cdot (m-k)!} \\ \bullet \quad m \cdot \binom{m-1}{k-1} &= \frac{(m-1)! \cdot m}{(k-1)! \cdot (m-1-k-1)!} = \frac{m!}{(k-1)! \cdot (m-k)!} \end{aligned}$$

3) Una gelateria offre gelati di 9 gusti diversi. Quante varianti di cono gelato si possono comporre con 3 palline di gelato, supponendo di non poter scegliere diverse palline dello stesso gusto (supponendo che l'ordine dei gusti scelti non conti)?

DATI: $m = 9$, $k = 3$, No RIP. \wedge No ORD. \Rightarrow COMBINAZ. SEMPLICI

$$\text{Ris: } C(9, 3) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot (9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{3 \cdot 2 \cdot 6!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 84.$$

INIZIO ESERCIZI PROBABILITÀ E CALCOLO COMBINATORIO

4) Lancio una moneta equa 5 volte. Calcolare la probabilità che escano k teste. Calcolare la probabilità che esca almeno una testa.

DATI: 1) Conta l'ordine dei 5 lanci \Rightarrow VETTORE \vec{w}

2) Ogni evento elementare è composto da 5 lanci $\Rightarrow | \vec{w} | = 5$

QUINDI DEFINISCO:

- ESEMPIO EVENTO: $A = (T, C, C, T, T)$

- $\Omega = \{(\underbrace{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5}_{\vec{w}}) : \forall i \in \{1, \dots, 5\}, w_i \in \{T, C\}\}$

- $|\Omega| =$ Disposizioni con Ripetizione di $K=5$ oggetti scelti in $\{T, C\}$.
 $= D^r(2, 5) = 2^5 = 32.$

- $\Sigma =$ Insieme delle parti di Ω (discreto, finito).

- Lo spazio di probabilità è EQUIPROBABILE!

$$P(\{\vec{w}\}) = \frac{1}{|\Omega|} \quad \forall \vec{w} \in \Omega$$

QUINDI PER UN EVENTO GENERICO A LA PROBABILITÀ VALE:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \Rightarrow \text{DOBBIAMO CALCOLARE LE } |A|.$$

RISONDIAMO ALLA 1^a DOMANDA:

- $A_k = \{\text{"ESCONO } k \text{ TESTE"}\}$ con $k \in \{1, 2, \dots, 5\}$
- CASO CON UNA TESTA:

$$A_0 = \{(T, C, C, C, C)\} \rightarrow |A_0| = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{|A_0|}{|\Omega|} = \frac{5}{2^5} = \frac{5}{32} \approx 0.15$$

$$A_1 = \{(C, T, C, C, C)\}$$

...

$$A_5 = \{(C, C, C, C, T)\}$$

- CASO CON DUE TESTE:

$$A_0 = \{(T, T, C, C, C)\} \rightarrow \text{DEVO SCEGLIERE 2 COMPONENTI TRA LE 5 DOVE METTERE LE 2 TESTA.} \Rightarrow \text{DISPOSIZIONI SEMPLICI}$$

$$A_1 = \{(T, C, T, C, C)\}$$

...

$$A_5 = \{(C, C, C, T, T)\}$$

$$|A_2| = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{\binom{5}{2}}{2^5}$$

- CASO CON K TESTE:

$$|A_k| = \binom{5}{k}, \quad P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{\binom{5}{k}}{2^5} \quad \checkmark$$

RISONDIAMO ALLA 2^a DOMANDA:

- $B = \{\text{"ESCA ALMENO UNA TESTA"}\}$ con $k \in \{1, 2, \dots, 5\}$
- CONVIENE UTILIZZARE IL COMPLEMENTO:

$$(1): B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \quad \forall i, s \in \{1, 2, \dots, 5\} \quad A_i \cap A_s = \emptyset$$

(1 TESTA o 2 TESTE o 3 TESTE o 4 TESTE o 5 TESTE)

$$(2): B^c = A_0^c$$

(NESSUNA TESTA)^c

- QUINDI POSSIAMO RISOLVERE IN DUE MODI:

$$(1): P(B) = P(A_1, A_2, \dots, A_5) = \sum_{k=1}^5 \frac{\binom{5}{k}}{2^5} \quad \checkmark$$

$$(2): P(B) = P(A_0^c) = 1 - P(A_0) = 1 - \frac{1}{2^5} \quad \checkmark$$

ESERCIZIO 5° - URNA PALLINE

Un'urna contiene 20 palline numerate progressivamente:

2) Vengono estratte una dopo l'altra 4 palline ogni volta con reimmissione: qual è la probabilità che venga estratta la pallina numero 1 almeno una volta?

DATI: 1) Estrazioni di palline che possono ripetersi

=> VETTORE \vec{w}

2) OGNI EVENTO ELEMENTARE È COMPOSTO DA 4 ESTRAZIONI

=> $|\vec{w}| = 4$

QUINDI DEFINISCO:

$$\cdot \Omega = \{(w_1, w_2, w_3, w_4) : \forall i \in \{1, \dots, 4\}, w_i \in \{1, 2, \dots, 20\}\}$$

$$\cdot |\Omega| = \text{DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE DI } K=4 \text{ OGGETTI SCELTI IN } \{1, 2, \dots, 20\}$$
$$= D^r(20, 4) = 20^4$$

$$\cdot \Sigma = \text{INSIEME DELLE PARTI DI } \Omega \text{ (DISCRETO).}$$

$$\cdot SPAZIO DI PROBABILITÀ EQUIPROBABILE: P(\{\vec{w}\}) = \frac{1}{|\Omega|} \quad \forall \vec{w} \in \Omega$$

RISPONDO ALLA DOMANDA:

$$\cdot A = \{"OTTENGO L'ELEMENTO 1 ALMENO UNA VOLTA"\}$$

=> RAGIONIAMO CON LA REGOLA DEL COMPLEMENTO:

$$\cdot P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$\cdot A^c = \{(w_1, w_2, w_3, w_4) : w_i \in \{2, \dots, 20\}\}$$

SENZA LA 1^a PALLINA PER IL COMPLEMENTARE.

$$\cdot |A^c| = \text{Disp. con Rip.} = D^r(19, 4) = 19^4$$

$$\cdot P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{19^4}{20^4}$$

✓

1) Vengono estratte in blocco 4 palline: qual è la probabilità che venga estratta la pallina numero 1?

PRIMO APPROCCIO:

DATI: ESTRAZIONE IN BLOCCO, QUINDI NON CONTA L'ORDINE => INSIEME.

QUINDI DEFINISCO:

$$\cdot \Omega = \{\{w_1, w_2, w_3, w_4\} : w_i \in \{1, 2, \dots, 20\}\}$$

$$\cdot |\Omega| = \text{COMBINAZIONI SEMPLICI} = C(20, 4) = \binom{20}{4}$$

$$\cdot \Sigma \text{ OK; } P \text{ SPAZIO EQUIPROBABILE: } P(\{\vec{w}\}) = 1/|\Omega|$$

DOMANDA: $A = \{ \{w_1, \dots, w_4\} \text{ CHE CONTENGA LA PALLINA } 1 \}$

RISOLUZIONE: $|A| = \text{Comb. SEMP. CONSIDERANDO CHE LA } 1^{\text{a}} \text{ VIENE PRESA}$

$$= \binom{20-1}{4-1} = \binom{19}{3} \quad \begin{array}{l} \text{LA } 1^{\text{a}} \text{ PALLINA È GIÀ STATA SCELTA.} \\ \text{UN POSTO È GIÀ OCCUPATO DALLA } 1^{\text{a}} \text{ PALLINA.} \end{array}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{19}{3}}{\binom{20}{4}} = \frac{\frac{19!}{3!16!}}{\frac{20!}{4!16!}} = \frac{\cancel{19!} \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{20!} \cdot \cancel{16!}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \quad \checkmark$$

SECONDO APPROCCIO:

DEFINISCO:

- $\Omega = \{ (w_1, w_2, w_3, w_4) : w_i \in \{1, 2, \dots, 20\}, w_i \neq w_s \}$.
- $|\Omega| = \text{DISPOSIZIONI SEMPLICI} = D(20, 4) = \frac{20!}{16!}$ (SEMPLICI PER VIA DI $w_i \neq w_s$).
- $\sum \text{OK}; P \text{ SPAZIO EQUIPROBABILE}: P(\{\vec{w}\}) = 1/|\Omega|$.

I VETTORI PERMETTONO LA RIPETIZIONE DEGLI W. QUINDI ESPLICITO LA DISUGUAGLIANZA.

DOMANDA:

- $A = \{ (w_1, \dots, w_4) \in \Omega : \text{CONTENGA LA PALLINA } 1 \}$.

→ PRIMO MODO:

$$\begin{aligned} \cdot |A| &= (P_1, w_2, w_3, w_4) \xrightarrow{\text{DISPOSIZIONI SEMPLICI} \times 4} \\ &\cup (w_1, P_2, w_3, w_4) \quad |A| = D(19, 3) \times 4 \\ &\cup (w_1, w_2, P_3, w_4) \\ &\cup (w_1, w_2, w_3, P_4) \quad P(A) = \frac{\frac{19!}{16!} \times 4}{\frac{20!}{16!}} = \frac{\cancel{19!} \cdot 4}{\cancel{19!} \cdot 20} = \frac{1}{5} \quad \checkmark \end{aligned}$$

→ SECONDO MODO (REGOLA DEL COMPLEMENTO):

- $P(A) = 1 - P(A^c)$, $A^c = \{ (w_1, \dots, w_4) \in \Omega : w_i \neq \text{PALLINA NUMERO } 1 \}$
- $|A^c| = D(19, 4) = \frac{19!}{15!}$.
- $P(A) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{\frac{19!}{15!}}{\frac{20!}{16!}} = 1 - \frac{16}{20} = \frac{1}{5} \quad \checkmark$

ESERCIZIO 6° - POKER

Da un mazzo ben mescolato di 52 carte francesi se ne estraggono 5 a caso:

1. Qual è il numero di tutte le possibili cinquine (non ordinate) di carte ottenute ?
2. Qual è la probabilità di ottenere un Poker ?
3. Qual è la probabilità di ottenere un Full ?
4. Qual è la probabilità di ottenere una Doppia Coppia ?
5. Qual è la probabilità di ottenere una Coppia?

RISOLUZIONE:

$$\Omega_1 = \{ \{w_1, w_2, \dots, w_5\} : w_i \in \{\text{"MAZZO DA 52 CARTE"}\} \}$$

$$1. \# \text{ CINQUINE} = |\Omega_1| = C(52, 5) = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5! \cdot 47!}$$

$$2. A = \{ \{w_1, w_2, \dots, w_5\} \in \Omega_1 : \text{"QUATTRO COMPONENTI SIANO LA STESSA CARTA, MA DI SEME DIVERSO"} \}$$

$$|A| = 13 \cdot (52 - 4) = 13 \cdot 48 = 624$$

PESCO LE 4 CARTE CON STESSO VALORE MA SEME DIVERSO.
13 = 52/4

PESCO L'ULTIMA CARTA TRA LE 48 RESTANTI:
48 = 52 - 4

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega_1|} = \frac{624}{\binom{52}{5}} = \frac{624}{2.598.960} \approx 0.00024 = 0.024\%$$

COMBINAZIONI SEMPLICI

$$3. A = \{ \{w_1, w_2, \dots, w_5\} \in \Omega_1 : \text{"UN TRIS E UNA COPPIA"} \}$$

$$|A| = C(4, 3) \cdot 13 \times C(4, 2) \cdot 12 =$$

TRE CARTE DI EGUAL VALORE TRA TRE DODICI SEMI DISPONIBILI.

DUE CARTE DI EGUAL VALORE TRA DODICI SEMI DISPONIBILI.

$$= \frac{4!}{3!} \cdot 13 \times \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 12 = 4 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 12 = 3.744$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega_1|} = \frac{3.744}{\binom{52}{5}} = \frac{3.744}{2.598.960} \approx 0.0014 = 0.14\%$$



$$4. A = \{ \{w_1, w_2, \dots, w_5\} \in \Omega_1 : \text{"DOPPIA COPPIA"} \}$$

$$|A| = C(4, 2) \cdot 13 \cdot C(4, 2) \cdot 12 \cdot (52 - 8) \cdot \frac{1}{2!} =$$

DUE COPPIE PRESE
DUE COPPIE NON PRENDIBILI SENNO' SAREBBERE TRIS O POKER.

DUE CARTE DI EGUAL VALORE TRA TRE DICI SEMI DISPONIBILI.

DUE CARTE DI EGUAL VALORE TRA DODICI SEMI DISPONIBILI.

$\begin{matrix} x \\ x \\ y \\ y \\ z \end{matrix}$

$$= 6 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 44 \cdot \frac{1}{2} = 123.552.$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{123.552}{(5)}}{2.598.960} \approx 0.047 = 4.7\%.$$

5. $A = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5) \in \Omega : \text{"COPPIA"}\}$.

$$|A| = C(4,2) \cdot 13 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot \frac{1}{3!} = 1.098.240$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{1.098.240}{(5)}}{2.598.960} \approx 0.42 = 42\%.$$

ESERCIZIO 7° - COMPLEANNI

Calcolare la probabilità che tra n persone ce ne siano almeno due che compiono gli anni lo stesso giorno.

DEFINISCO:

- $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_m) : \omega_i \in \{1, \dots, 365\}\}$.
- $|\Omega| = \text{COMBINAZIONI RIPETIZIONE} = C^r(365, m) = \frac{(365+m-1)!}{m!(365-1)!}$
- $\sum_{\text{OK}} ; P \text{ SPAZIO EQUIPROBABILE} : P(\{\vec{\omega}\}) = 1/|\Omega|$.

DOMANDA: $A = \{(\omega_1, \dots, \omega_m) \in \Omega : \exists i, s \in \{1, \dots, m\} : \omega_i = \omega_s\}$

→ RISOLUZIONE (REGOLA DEL COMPLEMENTO):

- $A^c = \{(\omega_1, \dots, \omega_m) \in \Omega : \omega_i \neq \omega_s\}$
- $P(A^c) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365-(m-1)}{365}$
 $= \frac{1}{356} \cdot \prod_{k=0}^{m-1} (365 - k)$
- $P(A) = 1 - P(A^c) = \boxed{1 - \left(\frac{1}{356} \cdot \prod_{k=0}^{m-1} (365 - k) \right)}$.

ESERCIZIO 8° - BIGLIE ROSSE E BIANCHE

Un'urna contiene r biglie rosse e b biglie bianche. Si estraggono n biglie senza reimmissione.

1. Qual è il numero totale di esiti possibili?
2. Qual è la probabilità che esattamente k delle n biglie estratte sono rosse?

DEFINISCO:

- $\Omega = \{\{w_1, \dots, w_m\} : w_i \in \{1, \dots, m\} \in R \cup B\}$.
- $|\Omega| = \text{COMBINAZIONI SEMPLICI} = C(r+b, m) = \binom{r+b}{m} = \frac{(r+b)!}{m!(r+b-m)!}$
- $\sum \text{OK}; P \text{ SPAZIO EQUIPROBABILE}: P(\{\vec{w}\}) = 1/|\Omega|$.

$$(1): C(r+b, m) = \binom{r+b}{m} = \frac{(r+b)!}{m!(r+b-m)!}$$

$$(2): A = \{\{w_1, \dots, w_m\} \in \Omega : "K \text{ SIANO PALLINE ROSSE"}\}$$

$$|A| = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{b}{m-k}}{\binom{r+b}{m}}$$

DOVE:

• $\binom{r}{k} \rightarrow \text{MODI DI SCEGLIERE } K \text{ ROSSE DALLE } n \text{ DISPONIBILI.}$

• $\binom{b}{m-k} \rightarrow \text{MODI DI SCEGLIERE } m-k \text{ BIANCHE DALLE } b \text{ DISPONIBILI.}$

ESERCIZIO 9° - COMPLEANNO #2

Trova la probabilità che almeno due fra 14 persone abbiano lo stesso data di compleanno.

- $\Omega = \{(w_1, \dots, w_{14}) : w_i \in \{1, \dots, 365\}\}$, $|\Omega| = D^R(365, 14)$
 $= 365^{14}$
- $A^c = \{(w_1, \dots, w_{14}) \in \Omega : w_i \neq w_s\}$
- $|A^c| = D(365, 14) = \frac{365!}{(365-14)!}$
- $P(A) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365!}{(365-14)!} \cdot \frac{1}{365^{14}}$ (P EQUIPROBABILE)

QUINDI: $P(A) = \begin{cases} 1 - \frac{365!}{(365-m)! \cdot 365^m} & m \leq 365 \\ 1 & m > 365 \end{cases}$

ESERCIZIO 10° -

In uno scaffale ci sono 10 libri, 3 di matematica e 7 di fisica; trova la probabilità che i 3 libri di matematica si trovino insieme.

1	2	3	4	5	6	7	8
M	M	M	F	F	F	F	F
F	N	M	M	F	F	F	F
.
F	F	F	F	F	F	M	M

$$A = \{\text{TRE LIBRI DI MATEMATICA VICINI}\}$$

$$|A| = P(3) \cdot P(7) \cdot 8 = P(3) \cdot P(8)$$

$$|\Omega| = P(10)$$

$$\text{CON } P \text{ EQUIPROB. } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{P(3) \cdot P(8)}{P(10)} = \frac{1}{15} = 6.6\%$$