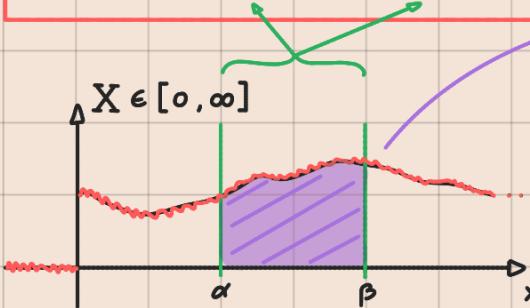


VARIABILI ALEATORIE ASSOLUTAMENTE CONTINUE

V.A. Assol. Continue e Funzione Densità di Probabilitá

- UNA VARIABILE ALEATORIA $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ SI DICE ASSOLUTAMENTE CONTINUA SE ESISTE UNA FUNZIONE $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ DETTA DENSITÁ DI PROBABILITÁ, TALE CHE:

$$P(X \in (\alpha, \beta]) = P(\alpha < X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot dx, \quad \forall \alpha \leq \beta \in \mathbb{R}.$$



IL SUPPORTO È UN INSIEME CONTINUO COME UN INTERVALLO:

$$S_X = (\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$$

CHE COINCIDE, A MENO DI UN INSIEME DI PUNTI NUMERABILI,

CON IL SUPPORTO DI $f(x)$, OVVERO: $\{x \in \mathbb{R}: f(x) > 0\}$.

- PER UNA V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUA NON HA SENSO DEFINIRE LA FUNZIONE DI PROBABILITÁ $P(x) = P(X = x)$ PERCHÉ SEMPRE A ZERO: $P(X = \alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) \cdot dx = 0$.

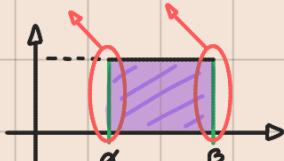


- LA FUNZIONE f DEVE SODDISFARE LE DUE CONDIZIONI SEGUENTI:

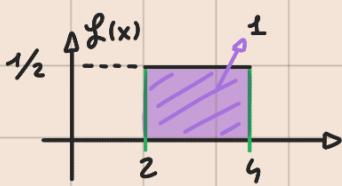
$$1) \text{ EVENTO CERTO FA } 1: P(-\infty < X \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1.$$

$$2) f(x) \text{ È NON NEGATIVO: } f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

LA FUNZIONE f È CONTINUA A MENO DI UN INSIEME NUMERABILE DI PUNTI OI DISCONTINUITÀ.



Esempio V.A. Assolutamente Continua



L'AREA SOTTESA ALLA CURVA DEVE FARE 1.

LA $f(x)$ È DEFINITA COME:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{SE } x \in [2, 4] \\ 0 & \text{SE } x \notin [2, 4] \end{cases}$$

SUPPORTO:

IL SUPPORTO DI f :

$$S_f = [2, 4]$$

IL SUPPORTO DI X :

$$S_X = (2, 4]$$

$$\text{PERCHÉ: } P(2 < X \leq 4) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot dx = 1.$$

SI NOTA CHE I DUE SUPPORTI SONO LO STESSO A MENO DI UN INSIEME NUMERABILE DI PUNTI.

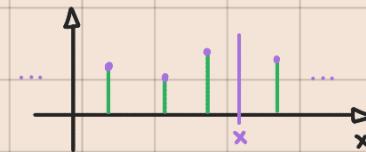
Funzione di Distribuzione

LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE F DI UNA V.A. X È LA FUNZIONE $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ DEFINITA DA:

$$F(a) = P(X \leq a) \quad \text{PER } -\infty < a < +\infty$$

X DISCRETA:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{a \in S : a \leq x} P(a)$$



X ASSOLUTAMENTE CONTINUA: LE FUNZIONI f E F SONO LEGATE DALLE SEGUENTI RELAZIONI:

$$1) F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y) \cdot dy , \quad \text{LA SOMMA DIVENTA UN INTEGRALE.}$$

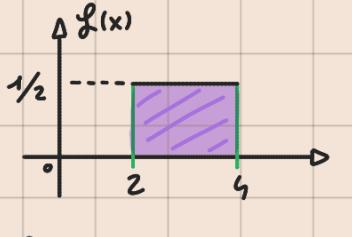
$$2) f(x) = F'(x)$$



Oss: SE X È ASSOLUTAMENTE CONTINUA, ALLORA L'INSIEME DEI PUNTI IN CUI F NON È DERIVABILE È AL PIÙ NUMERABILE. QUESTO COINCIDE CON L'INSIEME DEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI f .

Esempio Funzione di Distribuzione

RIPRENDIAMO L'ESEMPPIO DI PRIMA:



- SE $x < 2$: $F(x) = 0$.
- SE $2 \leq x \leq 4$: $F(x) = \frac{x-2}{2}$.
- SE $x > 4$: $F(x) = 1$.

QUINDI ABBIANO CHE:



RICORDIAMO CHE:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) \cdot dy$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{x-2}{2} & 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

OSSERVAZIONI:

1) f NON È SEMPRE CONTINUA. MENTRE F INVECE È CONTINUA.

2) LA PROBABILITÀ DI UNA V.A.A.C. È:

- 0 IN UN PUNTO.

- > 0 IN UN INTERVALLO.

3) F È DERIVABILE TRANNE NEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI f . (2 E 4 NELL'ESEMPPIO).

DERIVABILE IN UN PUNTO SE LE DERIVATE SX E DX SONO UGUALI.

SCHEMA PROPRIETÀ DI F MAIUSCOLO

(per X assolutamente continua)

1) F(x) NON È DECRESCENTE: $\forall x \leq y \quad F(x) \leq F(y)$

2) Gli Asintoti:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) &= 0 \\ &= P(X \leq -\infty)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) &= 1 \\ &= P(X \leq +\infty)\end{aligned}$$

3) F(x) È ASSOLUTAMENTE CONTINUA: cioè, è:

- **CONTINUA**.
- **DERIVABILE A MENO DI UNA QUANTITÀ NUMERABILE DI PUNTI**.
- $f(x) = F'(x)$ DERIVABILE , $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot dy$ INTEGRABILE.

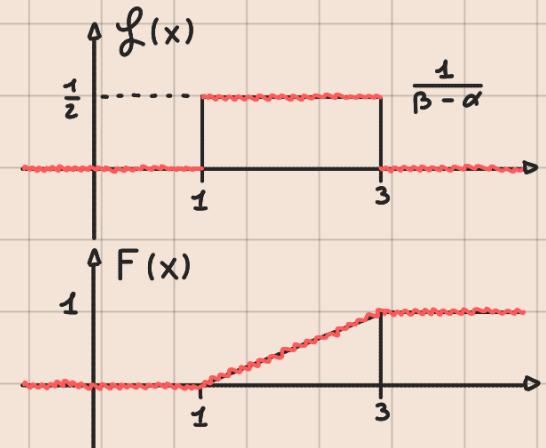
Distribuzione Uniforme

Definizione:

Una variabile aleatoria a.c. X ha *distribuzione Uniforme* sull' intervallo $[\alpha, \beta]$ se la sua densità di probabilità f è data da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \text{for } x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{for } x \text{ not in } [\alpha, \beta] \end{cases}$$

Notazione: $X \sim U(\alpha, \beta)$



La fun. di distribuzione di una **variabile aleatoria uniforme**

nell' intervallo (α, β) è: $F(x) = \int_{\alpha}^x \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot dy = \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot (x - \alpha) = \boxed{\frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}}$.

ESEMPIO SEMPLICE:

Sia X una v.a.a.c. con densità di probabilità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

• calcolare la funzione di distribuzione $F(x)$.

$$F(x) = \int_0^x \frac{y}{2} \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^x = \boxed{\frac{x^2}{4}}.$$

