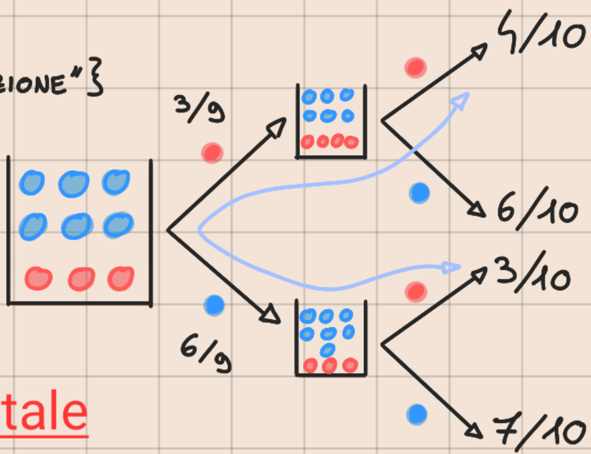
PROBABILITÁ TOTALE E BAYES

Esercizio Introduttivo (Probabilitá Totale)

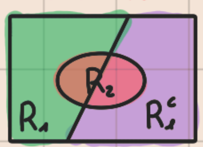
Un'urna contiene 9 biglie: 3 rosse e 6 blu. Supponiamo di estrarre una biglia e di rimpiazzarla con due biglie dello stesso colore. Effettuiamo quindi una seconda estrazione. Qual è la probabilità che la biglia estratta (alla seconda estrazione) sia rossa?

- $R_{i\in\{1,2\}}$ = {"Estraggo una rossa alla i-esima estrazione"}
- $P(R_1) = 3/9$, $P(R_1^c) = 6/9$
- $P(R_2 \cap R_1) = P(R_2|R_1) \cdot P(R_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$
- $P(R_2 \cap R_1^c) = P(R_2|R_1^c) \cdot P(R_1^c) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9}$



Otteniamo la Legge di Probabilitá Totale

- $R_2 = (R_2 \cap R_1) \cup (R_2 \cap R_1^c)$ → Unione di eventi disgiunti
- $P(R_2) = P((R_2 \cap R_1) \cup (R_2 \cap R_1^c))$



Additivitá ← $= P(R_2 \cap R_1) + P(R_2 \cap R_1^c)$

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ← $= P(R_2|R_1) \cdot P(R_1) + P(R_2|R_1^c) \cdot P(R_1^c)$ $\forall$ Coppia di eventi $R_1, R_2 \subseteq \Omega$.

$$\boxed{P(A) = P(A|C) \cdot P(C) + P(A|C^c) \cdot P(C^c) \quad \forall \text{ Coppia di eventi } A, C \subseteq \Omega}$$ L.P.T.

Quindi nel nostro caso:

- $P(R_2) = \boxed{\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{9}}$.

Generalizzazione della Legge di Probabilitá Totale

$C_1, C_2, \dots, C_m \subseteq \Omega$ SI DICE PARTIZIONE DI Ω, SE:

$C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m = \Omega$ CON $\forall i,s \in \{1,\dots,m\}$ $C_i \cap C_s = \emptyset$, CIOÉ DISGIUNTI A DUE A DUE.

ALLORA:

DATO $A \subseteq \Omega$, $A = (A \cap C_1) \cup (A \cap C_2) \cup \dots \cup (A \cap C_m)$

$= \{A \cap C_i\}_{i=1}^{m}$ INSIEME DI EVENTI DISGIUNTI A 2 A 2.

QUINDI:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} (A \cap C_i)\right) \overset{\text{ADDITIVITÁ}}{=} \sum_{i=1}^{m} P(A \cap C_i) = \boxed{\sum_{i=1}^{m} P(A|C_i) \cdot P(C_i)} .$$

Esercizio Tablets

Una ditta produce tablets utilizzando macchinari di tre tipi: **tipo I, tipo II** e **tipo III**. Questi macchinari producono, rispettivamente, il **35%** il **25%** ed il **40%** della produzione totale di tablets. Le percentuali di tablets difettosi prodotti, rispettivamente, dai tre tipi di macchinari sono: il **2%**, il **1%** ed il **3%**. Qual è la probabilità che un tablet scelto a caso tra quelli prodotti sia difettoso?

- Ω = { INSIEME DEI TABLETS PRODOTTI DALLA DITTA }
- D = { INSIEME DEI TABLETS DIFETTOSI }

DEFINIAMO:

- R_i = { TABLET TIPO $i \in \{1,2,3\}$ }.
- $P(D) = P(D|R_1) \cdot P(R_1) + P(D|R_2) \cdot P(R_2) + P(D|R_3) \cdot P(R_3)$

$= \boxed{0.02 \cdot 0.35 + 0.01 \cdot 0.25 + 0.03 \cdot 0.40}$.

- $P(R_1) = 0.35$
- $P(R_2) = 0.25$
- $P(R_3) = 0.40$
- $P(D|R_1) = 0.02$
- $P(D|R_2) = 0.01$
- $P(D|R_2) = 0.03$

Esercizio 1.3.7 *Com'è noto, le trasfusioni di sangue possono avvenire con le modalità seguenti: dal gruppo 0 a tutti i gruppi; da A ai gruppi A e AB; da B ai gruppi B e AB; da AB al solo gruppo AB. Supposto che le frequenze dei gruppi sanguigni siano*

$$P(0) = 52\%, \quad P(A) = 32\%, \quad P(B) = 10\%, \quad P(AB) = 6\%,$$

ci si chiede: qual è la probabilità che un individuo x, scelto a caso, possa donare sangue a un individuo y pure scelto a caso?

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & & A & & B & & \\
0 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & A & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & B \arrow[ur] \arrow[dr] & & AB \arrow[r] & AB \\
 & B & & AB & & AB & & \\
 & AB & & & & & &
\end{tikzcd}$$

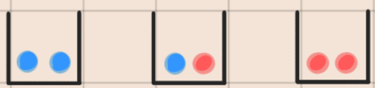
$$\begin{aligned}
P(\underset{\text{DONA}}{X \to Y}) &= P(X \to Y \mid X = AB) \cdot P(X = AB) \\
&+ P(X \to Y \mid X = A) \cdot P(X = A) \\
&+ P(X \to Y \mid X = B) \cdot P(X = B) \\
&+ P(X \to Y \mid X = 0) \cdot P(X = 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \to Y \mid X = AB) &= P(Y = AB) && = 0.06 \\
P(X \to Y \mid X = A) &= P(\{Y = A\} \cup \{Y = AB\}) = 0.32 + 0.06 && = 0.38 \\
P(X \to Y \mid X = B) &= P(\{Y = B\} \cup \{Y = AB\}) = 0.10 + 0.06 && = 0.16 \\
P(X \to Y \mid X = 0) &= P(\{Y = 0\} \cup \{Y = A\} \cup \{Y = B\} \cup \{Y = AB\}) && = 1.0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\underset{\text{DONA}}{X \to Y}) &= (0.06 \cdot 0.06) + (0.38 \cdot 0.32) + (0.16 \cdot 0.1) + (1.0 \cdot 0.52) \\
&= \boxed{66.12\ \%}.
\end{aligned}$$

Esercizio Introduttivo (Legge di Bayes)

Prendo a caso un'urna ed estraggo una pallina. Le probabilitá di scegliere le urne sono **1/8**, **1/4** e **5/8** rispettivamente.



1. Probabilitá che la pallina estratta sia blu.
2. Se la pallina estratta é blu.
   Quale é la probabilitá che venga dalla scatola **i=1,2,3** ?

$U_i = \{\text{SCELGO L'URNA } i \in \{1,2,3\}\}$.

$B = \{\text{"PESCO UNA PALLINA DALL'URNA SCELTA"}\}$.

- $P(U_1) = 1/8$
- $P(U_2) = 1/4$
- $P(U_3) = 5/8$

1) $P(B) = P(B|U_1) \cdot P(U_1) + P(B|U_2) \cdot P(U_2) + P(B|U_3) \cdot P(U_3)$

$$= 1 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{5}{8} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

2) $P(U_i|B)$ = Devo invertire il condizionamento.

Ottenimento della Legge di Bayes

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$ Simmetria

Inversione del condizionamento → Applico Bayes

Quindi:

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}}$$ Legge di Bayes

Che estendiamo con la Legge di Probabilità Totale:

$$\boxed{P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i) \cdot P(C_i)}{P(A)} = \frac{P(A|C_i) \cdot P(C_i)}{P(A|C_1) \cdot P(C_1) + P(A|C_2) \cdot P(C_2) + \dots + P(A|C_m) \cdot P(C_m)}}$$

Quindi nel nostro caso:

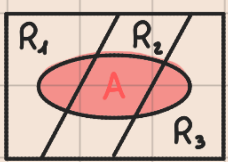
$$P(U_1|B) = \frac{P(B|U_1) \cdot P(U_1)}{P(B)} = \frac{1 \cdot 1/8}{1/4} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Esercizio Partito dei Pirati

Lo stato *Omega* ha tre regioni **R1, R2, R3** abitate, rispettivamente, dal **50%**, dal **20%** e dal **30%** di abitanti della popolazione totale. Supponiamo inoltre che in queste regioni, rispettivamente il **40%**, il **60%** ed il **30%** degli abitanti voti per il *Partito dei Pirati*. Se un abitante di *Omega* scelto a caso dichiara di votare per il *Partito dei Pirati*, qual è la probabilità che questo provenga dalla regione **R3**?

$A = \{\text{Vota per il partito dei pirati}\} \subseteq \Omega$

$$P(R_3|A) = \frac{P(A|R_3) \cdot P(R_3)}{P(A)} = \frac{P(A|R_3) \cdot P(R_3)}{P(A \cap R_1) \cdot P(R_1) + P(A \cap R_2) \cdot P(R_2) + P(A \cap R_3) \cdot P(R_3)}$$



$$= \boxed{\frac{0.3 \cdot 0.3}{0.4 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.2 + 0.3 + 0.3}}.$$

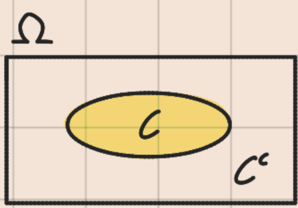
Esercizio Test Covid

Nel 2020 sono stati sviluppati dei test rapidi per la rilevazione della presenza del Coronavirus (Sars-coV-2). Secondo le direttive del Ministero essi devono avere i seguenti requisiti minimi di performance: **≥80% di sensibilità** e **≥97% di specificità**. In Italia la probabilità che una persona (attualmente) contragga il virus è di circa **0.9%**. *Supponiamo che una persona testata risulti negativa*. Qual è la probabilità che si tratti di un *falso negativo*? (supponendo che il test abbia sensibilità e specificità minimi).

N = {"Test risultato negativo"}

N^c = {"Test risultato positivo"}

C = {"Contratto il covid"}



- $P(C) = 0.009$
- $P(N^c|C) = 0.8 \Rightarrow P(N|C) = 0.2$
- $P(N|C^c) = 0.97$

$$P(C|N) = \frac{P(N|C)\cdot P(C)}{P(N|C)\cdot P(C) + P(N|C^c)\cdot P(C^c)}$$

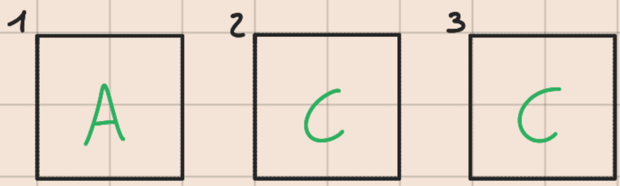
$$= \boxed{\frac{0.2\cdot 0.009}{0.2\cdot 0.009 + 0.97\cdot 0.991}}$$

Esercizio Gioco delle Tre Porte

In un gioco televisivo vengono mostrate al concorrente tre porte chiuse; dietro ad una si trova un'automobile, mentre ciascuna delle altre due nasconde una capra. Il giocatore può scegliere una delle tre porte, vincendo il premio corrispondente. Dopo che il giocatore ha selezionato una porta, ma non l'ha ancora aperta, il conduttore dello show – che conosce ciò che si trova dietro ogni porta – apre una delle altre due, rivelando una delle due capre, e offre al giocatore la possibilità di cambiare la propria scelta iniziale, passando all'unica porta restante.

A) Conviene cambiare porta
B) Conviene non cambiare porta
C) È indifferente

Il giocatore decide di cambiare porta. Qual è la probabilità che egli vinca l'automobile?



$V = \{$"IL GIOCATORE SCEGLIE PORTA VINCENTE"$\}$.

$C = \{$"IL CONDUTTORE APRE UNA PORTA CON UNA CAPRA"$\}$.

$P(V) = 1/3 \quad , \quad P(C|V^c) = 1$

$P(C) = 1 \quad , \quad P(C|V) = 1$

$$P(V^c|C) = \frac{\overbrace{P(C|V^c)}^{1} \cdot \overbrace{P(V^c)}^{2/3}}{\underbrace{P(C|V)}_{1} \cdot \underbrace{P(V)}_{1/3} + \underbrace{P(C|V^c)}_{1} \cdot \underbrace{P(V^c)}_{2/3}} = \frac{1 \cdot 2/3}{1 \cdot 1/3 + 1 \cdot 2/3} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

$P(V^c|C) = 2/3$ CAMBIANDO PORTA.

$P(V|C) = (1 - 2/3) = 1/3$ SENZA CAMBIARE PORTA.

Cosa devo cambiare perché il gioco sia "indifferente"?

$C = \{$"IL CONDUTTORE APRE UNA PORTA A CASO TRA LE DUE NON SCELTE DAL GIOCATORE"$\}$.

$P(V^c|C) = 1$

$P(V|C) = 1/2$

$$P(V^c|C) = \frac{P(C|V^c) \cdot P(V^c)}{P(C|V) \cdot P(V) + P(C|V^c) \cdot P(V^c)} = \frac{1/2 \cdot 2/3}{1 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 2/3} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$