

# FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

DEF: SIA  $m \in \mathbb{N}$  ALLORA SI DICE MOMENTO  $m$ -ESIMO DI UNA V.A.  $X$ , L'ASPETTATIVA  $E[X^m]$  BEN DEFINITA.

DEF: SI DICE FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI DI  $X$  LA FUNZIONE  $G_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  CHE ASSOCIA AD OGNI  $t \in \mathbb{R}$ , L'ASPETTATIVA:

$$G_X(t) = E[e^{tx}] \begin{cases} \text{DISCRETA} & = \sum_{a \in S_X} e^{ta} \cdot p_X(a) \\ \text{CONTINUA} & = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f_X(x) \cdot dx \end{cases}$$

TEO: SIA  $X$  UNA V.A. CON F.G.M. BEN DEFINITA  $G_X(t)$ , ALLORA:

$$E[X^m] = \frac{d^m}{dt^m} G_X(0)$$

## Aspettazione e Varianza col metodo della F.G.M.

Oss: ASPETTATIVA E VARIANZA POSSONO ESSERE CALCOLATE CON LA F.G.M., INFATTI:

$$E[X] = G'_X(0), \quad E[X^2] = G''_X(0) \Rightarrow \text{VAR}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

## Modi per Caratterizzare X

- 1)  $f_X(x)$
- 2)  $F_X(x)$
- 3)  $\{E[X^m]: m \in \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}\}$
- 4)  $G_X(t) \quad t \in (-\delta, \delta) \quad \text{PER QUALCHE } \delta > 0$

## Relazioni tra le caratterizzazioni

- $f_X(x) \Rightarrow F_X(x): \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot dx$
- $F_X(x) \Rightarrow f_X(x): \quad f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$
- $G_X(t) \Rightarrow \{E[X^m]: m \in \mathbb{N}\}: \quad E[X^m] = \frac{d^m}{dt^m} G_X(0)$
- $\{E[X^m]: m \in \mathbb{N}\} \Rightarrow G_X(t): \quad G_X(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} E[X^m] \quad |t| < \delta$

SE CONOSCO TUTTI I MOMENTI DI  $X$  ALLORA POSSO CALCOLARE  $G_X(t)$ .

## Esempio calcolo Media e Varianza col metodo della FGM

Sia  $X \sim \text{Pois}(\mu)$  ,  $G_X(t) = e^{\mu(e^t - 1)}$  :

- $E[X] = G'_X(0) = e^{\mu(e^t - 1)} \cdot \mu e^t = \mu e^{\mu(e^t - 1) + t} \xrightarrow{t=0} \boxed{\mu}$
- $E[X^2] = G''_X(0) = \mu e^{\mu(e^t - 1) + t} \cdot (\mu e^t + 1) \xrightarrow{t=0} \boxed{\mu(\mu + 1)}$
- $\text{VAR}(x) = E[X^2] - (E[X])^2 = \cancel{\mu^2} + \mu - \cancel{\mu^2} = \boxed{\mu}$

### Momenti n-esimi noti delle distribuzioni

~~MOMENTI DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE~~

$$E[X^m \sim \text{Exp}(\lambda)] = \frac{\lambda \cdot m!}{(\lambda - t)^{m+1}} \xrightarrow{t=0} \frac{m!}{\lambda^m}$$

~~MOMENTI DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD~~

$$\begin{aligned} E[Z^{2K} \sim N(0,1)] &= (2K-1)!! = \frac{(2K)!}{2^K \cdot K!} \\ E[Z^{2K+1} \sim N(0,1)] &= 0 \end{aligned}$$