

VARIABILI ALEATORIE

Problema Introduttivo

Supponiamo di partecipare ad un gioco in cui si lanciano due monete e si vincono **2 euro** se escono *due teste*, **1 euro** se esce *una testa e una croce*, e si **perdono 3 euro** se escono *due croci*. Calcolare le probabilità associate a questi eventi.

$$\Omega = \{(T,T), (T,C), (C,T), (C,C)\} \quad \text{EQUIPROBABILE} \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} .$$

DEFINISCO UNA FUNZIONE X CHE VALE PER $x \in \mathbb{R}$: $\{w \in \Omega : X(w) \leq x\} \subseteq \Omega$ INCREMENTALE.

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

(T,T)	$\rightarrow 2$
(T,C)	$\rightarrow 1$
(C,T)	$\rightarrow 1$
(C,C)	$\rightarrow -3$

X : VARIABILE ALEATORIA (FUNZIONE).

x : NUMERO REALE.

$\{X = x\} = \{w \in \Omega : X(w) = x\}$, cioè UN EVENTO.

$\{X = 1\} = \{(T,C), (C,T)\}$.

$\{X = 2\} = \{(T,T)\}$.

$\{X = -3\} = \{(C,C)\}$.

Ω DISCRETO: \sum INSIEME DI TUTTI I SOTTOINSIEMI DI Ω .

Ω CONTINUO: \sum È UNA σ -ALGEBRA DI Ω .

QUINDI NEL NOSTRO PROBLEMA, DATO $x = 1.5$:

$$\{w \in \Omega : X(w) \leq 1.5\} = \{w : X(w) \in \{1, -3\}\} = \{(T,C), (C,T), (C,C)\} \subseteq \Omega .$$

IL SUPPORTO DELLA VARIABILE X È:

$$S_X = \{1, 2, -3\} \rightarrow \text{IN QUESTO CASO IL SUPPORTO È FINITO E DISCRETO.}$$

MENTRE LA PROBABILITÀ DELLE x AL DI FUORI S_X SONO PARI A ZERO:

$$\forall x \in \mathbb{R} / S \quad P(X = x) = 0 .$$

INSIEME SUPPORTO ASSOCIATO

ALLA VARIABILE X : S_X

VALE CHE PER: $P(X = x) > 0 \Rightarrow x \in S$.

QUINDI NEL CASO DI $x = 1.5$: $1.5 \notin S \Rightarrow P(X = 1.5) = 0$.

- $P(X \in \{1, 2, -3\}) = 1$.

- $P(X \in (-3, +\infty)) = 1$.

MENTRE: $P: \Sigma \longrightarrow [0,1]$

DEFINIAMO: $p_x: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$$x \longrightarrow p_x(x)$$

$P: \Sigma \longrightarrow [0,1] \quad x \in \mathbb{R} \quad p_x(x) = P(X = x)$

- p_x : FUNZIONE DI PROBABILITÀ ASSOCIASTA ALLA VARIABILE X .

- LA FUNZIONE DI PROBABILITÀ SULLO SPAZIO DEGLI EVENTI DIVENTA UNA FUNZIONE DI PROBABILITÀ SU X IN \mathbb{R} .

NEL NOSTRO CASO:

$$\begin{aligned} \cdot P_X(1) &= P(X=1) = P(\{(T,C), (C,T)\}) = P(\{(T,C)\} \cup \{(C,T)\}) = P(\{(T,C)\}) + P(\{(C,T)\}) \\ \cdot P_X(2) &= P(X=2) = P(\{(T,T)\}) = \frac{1}{4}. \\ \cdot P_X(-3) &= P(X=-3) = P(\{(C,C)\}) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

DA CUI DERIVANO TABELLA E GRAFICO:

x	-3	1	2
P_X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



Esercizio Variabile Aleatoria Discreta

Nel lancio di due dadi, chiamo M il massimo tra i due esiti.

DEFINIAMO: $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$ **EQUIPROBABILE** $|\Omega| = 36$.

$$P_M(m) = P(M=m) \quad S_M = \{1, 2, \dots, 6\}.$$

AUORA: $P_M(1) = P(M=1) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$.

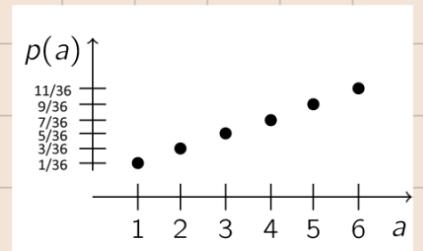
$$P_M(2) = P(M=2) = P(\{(2,2), (2,1), (1,2)\}) = \frac{3}{36}.$$

$$P_M(3) = P(M=3) = P(\{\dots\}) = \frac{5}{36}.$$

$$P_M(4) = P(M=4) = P(\{\dots\}) = \frac{7}{36}.$$

$$P_M(5) = P(M=5) = P(\{\dots\}) = \frac{9}{36}.$$

$$P_M(6) = P(M=6) = P(\{\dots\}) = \frac{11}{36}.$$



a	1	2	3	4	5	6
$p(a)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Esercizio Lancio di due Dadi

Sia Z il numero di volte che 6 appare in due lanci indipendenti di un dado. Sia S la somma dei due esiti, ed M il Massimo.

- Calcolare $p_Z(z)$.
- Calcolare le probabilità degli eventi: $\{M=2, Z=0\}$, $\{S=5, Z=1\}$, $\{S=8, Z=1\}$.
- Determinare se gli eventi $\{M=2\}$ e $\{Z=0\}$ sono indipendenti.

1) $Z \in S_Z = \{0, 1, 2\}$ = NUMERO DI VOLTE CHE PUÒ COMPARIRE SEI.

Z	0	1	2
P_Z	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$
	↓	↓	↓
	$(6, 6)$		
	$(6, \cdot) + (\cdot, 6)$		
	$S + S = 10$		
	$1 - \frac{10}{36} - \frac{1}{36} = \frac{25}{36}$		

2) CALCOLARE LA PROBABILITÀ DI:

- $\{M=2, Z=0\} = \{M=2\} \cap \{Z=0\}$

$$P(M=2, Z=0) = P(M=2) = \boxed{\frac{3}{36}}.$$

- $\{S=5, Z=1\} = \{S=5\} \cap \{Z=1\} = \emptyset$

$$P(S=5, Z=1) = \boxed{0}.$$

- $\{S=8, Z=1\} = \{S=8\} \cap \{Z=1\} = \{(6,2), (2,6)\}$

$$P(S=8, Z=1) = \boxed{\frac{2}{36}}.$$

3) SONO INDEPENDENTI SE È VALIDA:

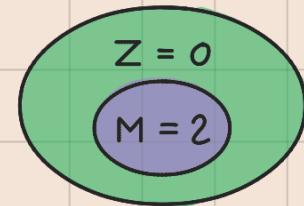
- $P(M=2, Z=0) = \frac{3}{36} \neq$

$$P(M=2) \cdot P(Z=0) = \frac{3}{36} \cdot \frac{25}{36}$$

- $P(A|B) = P(A)$

- $P(B|A) = P(B)$

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (SONO \equiv , BASTA CONTROLLARNE SOLO UNA).



SE IL MASSIMO È 2 ALLORA NON POSSO AVERE UN SEI.

$$M=2 \Rightarrow Z=0$$

Da $p(x)$ alla somma delle singole probabilità $P(\{w\})$

PER VARIABILI ALEATORIE SINGOLE:

$$\begin{aligned} p_x(x) &= P(X=x) = P(\{X=x\}) = P(\{w \in \Omega : X(w)=x\}) = P(\{w_1, w_2, \dots, w_m\}) \\ &= P(\{w_1\} \cup \{w_2\} \cup \dots \cup \{w_m\}) = P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + \dots + P(\{w_m\}). \end{aligned}$$

$$\{X=x\} = \{w \in \Omega : X(w)=x\}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m \{w_i\}\right) = \sum_{i=1}^m P(\{w_i\})$$

PER L'INTERSEZIONE DI VARIABILI ALEATORIE:

$$\begin{aligned} p_{x,y}(x,y) &= P(X=x, Y=y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\}) = P(\{w \in \Omega : X(w)=x, Y(w)=y\}) = \\ &= P(\{w_1, w_2, \dots, w_m\}) = \dots = \\ &= P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + \dots + P(\{w_m\}). \end{aligned}$$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

Esempio Introduttivo

$$Z \in S_Z = \{0, 1, 2\}$$

Z	0	1	2
P_Z	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE:

$$z \in \mathbb{R} \quad F_Z(z) = P(Z \leq z)$$

È INCREMENTALE:

$$z < 0 \rightarrow F_Z(z) = P(Z \leq z) = 0.$$

$$z = 0 \rightarrow F_Z(0) = P(Z \leq 0) = P(Z = 0) = P_Z(0) = \frac{25}{36}.$$

$$0 < z < 1 \rightarrow F_Z(z) = P(Z \leq z)$$

$$\text{ES: } z = 0.5 = P_Z(0.5) = P(Z \leq 0.5) = P(Z = 0) = \frac{25}{36}.$$

$$z = 1 \rightarrow F_Z(1) = P(Z \leq 1) = P(Z \in \{0, 1\}) = P_Z(0) + P_Z(1) = \frac{35}{36}.$$

SIA X VAR. ALEATORIA DISCRETA, ALLORA F_X È:

1) COSTANTE A TRATTI.

2) NON DECREScente.

3) DATO $x \in \mathbb{R}$: $F_X(x^+) = \lim_{y \rightarrow x^+} F(y)$ $F_X(x^-) = \lim_{y \rightarrow x^-} F(y)$

F_X È CONTINUA DA DESTRA IN $x \in \mathbb{R}$, SE $F_X(x^+) = F_X(x^-)$.

F_X È CONTINUA IN \mathbb{R}/S (AL DI FUORI DEL SUPPORTO F_X È CONTINUA).

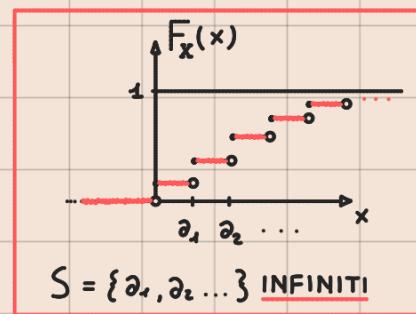
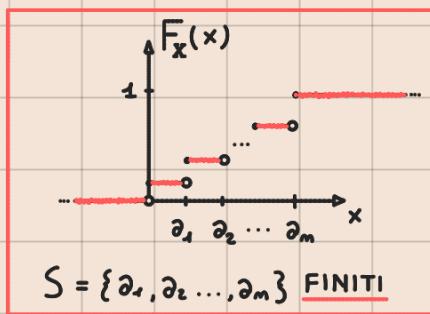
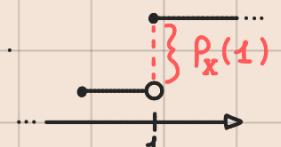
4) AMPIEZZA DEI SALTI:

DENTRO AL SUPPORTO: $\Delta F(x) = F(x^+) - F(x^-) = F(x) - F(x^-) = P_X(x)$.

FUORI DAL SUPPORTO: $\Delta F(x) = F(x^+) - F(x^-) = 0 - 0 = 0$.

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \rightarrow P(X \leq -\infty) = P(\emptyset) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \rightarrow P(X \leq +\infty) = P(\Omega) = 1$.



Passare dalla forma $p(x)$ alla forma $F(x)$ e viceversa

$$F(x) \Rightarrow p(x) = \nabla F(x) = F(x) - F(x^-)$$

$$p(x) \Rightarrow F(x) = \sum_{y \in S: y \leq x} p(y)$$

ESEMPIO: $z \in \{0, 1, 2\}$

$$F(1.5) = \sum_{y \in \{0, 1, 2\}: y \leq 1.5} p(y) = p(0) + p(1)$$

Esercizio traduzione $p(x) \Rightarrow F(x)$

Sia X una v.a. discreta, calcolare le seguenti probabilità in termini della funzione di distribuzione $F(x)$:

$$P(X > a)$$

$$= 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$$

$$P(X \geq a)$$

$$= 1 - P(X < a) = 1 - F(a^-)$$

$$P(X \leq b)$$

$$= F(b)$$

$$P(X < b)$$

$$= F(b^-)$$

$$P(a \leq X < b)$$

$$= P(\{X < b\} / \{X < a\}) = F(b^-) - F(a^-)$$



$$P(a < X \leq b)$$

$$= P(\{X \leq b\} / \{X \leq a\}) = F(b) - F(a)$$



$$P(a < X < b)$$

$$= P(\{X < b\} / \{X \leq a\}) = F(b^-) - F(a)$$

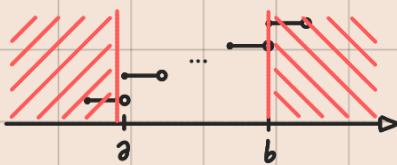
$$P(a \leq X \leq b)$$

$$= P(\{X \leq b\} / \{X < a\}) = F(b) - F(a^-)$$

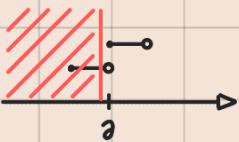
$$1 - F(a)$$



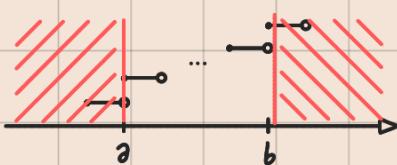
$$F(b^-) - F(a^-)$$



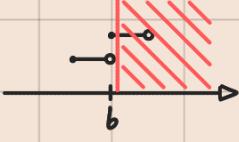
$$1 - F(a^-)$$



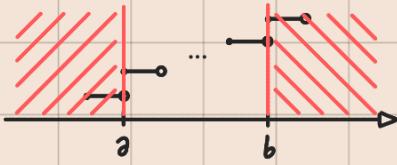
$$F(b) - F(a)$$



$$F(b)$$



$$F(b^-) - F(a)$$



$$F(b^-)$$



$$F(b) - F(a^-)$$



Esercizio Funzioni di Distribuzione

1. Sia X una v.a. che assume i valori -1, 0, 1, 2, rispettivamente con probabilità $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$.
Sia $Y = X^2$, calcolare $p_Y(y)$ e $F_Y(y)$.

2. La v.a. X ha distribuzione di probabilità:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 1, & x \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

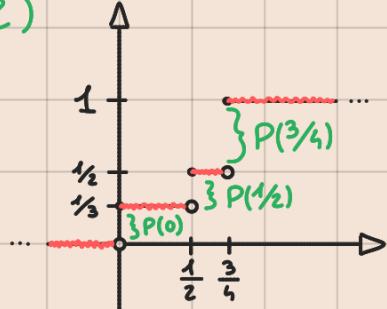
calcolare $p_X(x)$.

$$\begin{aligned} p_Y(0) &= P(X^2 = 0) = p_X(0) = \frac{1}{8} \\ p_Y(1) &= P(X^2 = 1) = P(X \in \{-1, 1\}) \\ &= p_X(-1) + p_X(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \\ p_Y(4) &= P(X^2 = 4) = P(X \in \{-2, 2\}) \\ &= p_X(-2) + p_X(2) = 0 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

x	-1	0	1	2
p_X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

y	0	1	4
p_Y	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$

2)



$$\begin{aligned} p_X(1/2) &= \nabla F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ p_X(3/4) &= \nabla F(\frac{3}{4}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ p_X(0) &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
p_Z	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$