LEZIONE 1ª 23/10/2025

ALEATORIO, STOCASTICO, RANDOMICO, CASUALE: SONO SINONIMI.

IN UN ESPERIMENTO STOCASTICO L'ESITO NON PUÓ ESSERE PREVISTO CON CERTEZZA.

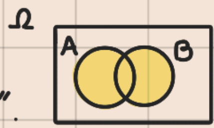
ESPERIMENTO: LANCIO DELLA MONETA.

- $\Omega = \{T, C\}$ = SPAZIO CAMPIONARIO. (T = TESTA, C = CROCE)
- $\omega \in \Omega$ = ESITO

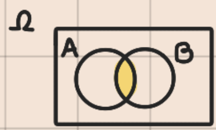
UN EVENTO É UN SOTTOINSIEME DELLO SPAZIO CAMPIONARIO. $\boxed{A \subseteq \Omega.}$

ESEMPIO: ABBIAMO UN DADO: $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, QUINDI A PUÓ ESSERE $\{2, 4, 6\}$.

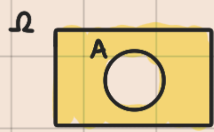
OPERAZIONI TRA INSIEMI IN LINGUAGGIO PROBABILISTICO



1) UNIONE: SIANO $A, B \subseteq \Omega$, ALLORA $A \cup B$ = "SI VERIFICA A OPPURE B".

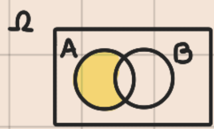


2) INTERSEZIONE: SIANO $A, B \subseteq \Omega$, ALLORA $A \cap B$ = "SI VERIFICA SIA A SIA B".



3) COMPLEMENTARE: SIANO $A, B \subseteq \Omega$, ALLORA A^c = "NON SI VERIFICA A".

- $A \cap A^c = \emptyset$
- $A \cup A^c = \Omega$



4) DIFFERENZA: SIANO $A, B \subseteq \Omega$, ALLORA A/B = "SI VERIFICA A MA NON B".

- ALLORA: $A/B = A \cap B^c$.

SIA OMEGA Ω E L'INSIEME VUOTO $\emptyset$ SONO DUE PARTICOLARI EVENTI (PARTICOLARI INSIEMI DI Ω).

- EVENTO CERTO $\rightarrow \Omega$.
- EVENTO IMPOSSIBILE $\rightarrow \emptyset$.

- INDICO CON EPSILON Σ LO SPAZIO DEGLI EVENTI, OVVERO L'INSIEME DI TUTTI I POSSIBILI EVENTI.
- SE Ω É DISCRETO, CIOÉ FINITO, ALLORA: $\Sigma = \{$ TUTTI I SOTTOINSIEMI DI $\Omega \}$.

QUINDI $\forall A \subseteq \Omega$, A É UN EVENTO.

ESEMPIO DELLA MONETA

$\rightarrow \quad \Omega = \{T, C\} \quad , \quad \Sigma = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \underbrace{\{T, C\}}_{=\Omega}\} \quad , \quad$ E $\quad |\Sigma| = 4 = 2^2$

ESEMPIO DELLE PALLINE

$\rightarrow \quad \Omega = \{R, B, G\}$ 

$$\Sigma = \{\emptyset, \{R\}, \{B\}, \{G\}, \{R,B\}, \{R,G\}, \{B,G\}, \underbrace{\{R,B,G\}}_{=\Omega}\} \quad , \quad \text{E} \quad |\Sigma| = 8 = 2^3$$

QUINDI IN GENERALE VALE CHE $\boxed{|\Sigma| = 2^{|\Omega|}}$.

VOGLIAMO MISURARE LA PROBABILITÁ CHE UN EVENTO SI VERIFICHI. ABBIAMO LA FUNZIONE:

$$P: \Sigma \rightarrow [0,1]$$
$$\;\; A \mapsto P(A) \quad (A \in \Sigma)$$

CONDIZIONI NECESSARIE:

1) $P(\Omega) = 1$

2) ADDITIVITÁ PER EVENTI DISGIUNTI

- A E B SONO DISGIUNTI SE $A \cap B = \emptyset$.
- SE $A \cap B = \emptyset$ ALLORA $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

ESEMPIO DELLA MONETA

- $\Omega = \{T, C\}$ E $\Sigma = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \Omega\}$
- ABBIAMO CHE: $P(\Omega) = 1 \quad , \quad P(\{T\}) = \frac{1}{2}$. $\quad P(\emptyset) = 0 \quad , \quad P(\{C\}) = \frac{1}{2}$. $\Rightarrow$ $P(\{T\} \cup \{C\}) = P(\{T, C\}) = P(\Omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

$\rightarrow$ POSSIAMO DERIVARE CHE $P(\emptyset) = 0$ DAI POSTULATI 1) E 2).

- REGOLA DEL COMPLEMENTO

$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad , \quad \forall A \in \Sigma$$

- DIM. • $A^c \cup A = \Omega$ e $A \cap A^c = \emptyset$.

  • $1 \overset{1)}{=} P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{2)}{=} P(A) + P(A^c) \quad \Rightarrow \quad P(A^c) = 1 - P(A)$.

- COROLLARIO: $P(\emptyset) = 0$

  DIM. $\Omega^c = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(\emptyset) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad P(\emptyset) = 0$.

UN EVENTO DI CARDINALITÁ 1, OVVERO $\{\omega\}$, É DETTO ELEMENTARE.

SPAZIO EQUIPROBABILE

P ASSEGNA LA STESSA PROBABILITÁ A TUTTI GLI EVENTI ELEMENTARI $\{\omega\}$ DI Ω.

ESEMPIO: UN ESEMPIO DI SPAZIO EQUIPARABILE É IL LANCIO DEL DADO:

- $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, $P(\{1\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$ E $|\Sigma| = 2^{|\Omega|} = 2^6 = 64$.

GENERALIZZANDO: DATO $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$, CON $|\Omega| = m$ FINITO,

SIA $A \subseteq \Omega$ DICO CHE: $\boxed{P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})}$.

INOLTRE: $\boxed{P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}}$ DIM.

1) $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$.

2) $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

$$\boxed{\forall A \in \Sigma, \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$

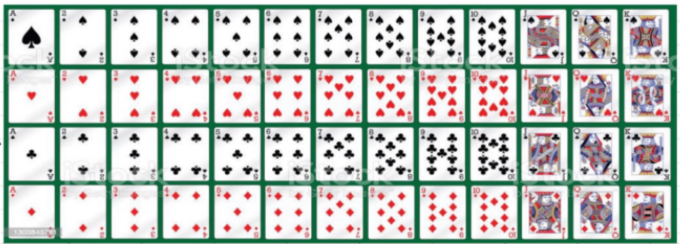
GENERALIZZANDO: DATI A E B DISGIUNTI $(A \cap B = \emptyset)$, ABBIAMO CHE:

$$P(A \cup B) = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B)$$

DOVE 1) E 2) SODDISFATTE.

ESERCIZIO SPAZIO EQUIPROBABILE - PESCA UNA CARTA

Esercizio 1.2.1 *Si scelga a caso una carta da un mazzo ben mescolato di 52 carte da ramino. Ci si chiede la probabilità di ottenere: 1) un asso; 2) una carta di fiori; 3) una figura; 4) una figura non di cuori.*

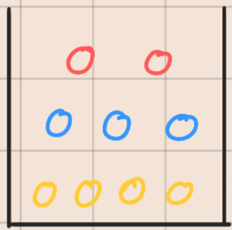
S = {  }

ABBIAMO: Ω = "INTERO MAZZO", $|\Omega| = 52$ CARTE.

VOGLIAMO L'AZIONE 1): $A = \{\text{ASSI}\}$ $\Rightarrow$ $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

IL CALCOLO É FACILE PERCHÉ LO SPAZIO É EQUIPROBABILE; MA NON É SEMPRE COSÍ.

ESERCIZIO SPAZIO NON EQUIPROBABILE - PESCA LE BIGLIE



ABBIAMO: $\Omega = \{R, B, G\}$, $|\Omega| = 3$

1) DEFINIAMO LE PROBABILITÁ DEGLI EVENTI ELEMENTARI:

$$P(\{R\}) = 2/9$$
$$P(\{B\}) = 3/9$$
$$P(\{G\}) = 4/9$$

2) ESTENDIAMO LA COSTRUZIONE DI P AGLI EVENTI GENERICI:

PRENDIAMO: $A \in \Sigma$, $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$

PER ESEMPIO: $A = \{G, B\}$, $P(A) = P(\{G\}) + P(\{B\}) = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{7}{9}$.

CONSIDERANDO $A, B \in \Sigma$, DISGIUNTI $A \cap B = \emptyset$, ABBIAMO:

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} P(\{\omega\}) \underset{A \cap B = \emptyset}{=} \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in B} P(\{\omega\}).$$

AFFINCHÉ VALGA 1) DEVO AVERE $\boxed{P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1}$.

ESERCIZIO SPAZIO NON EQUIPROBABILE - DADO TRUCCATO

Esercizio 1.2.4 *Carlo e Giorgio sono due amici che ogni giorno scommettono sul risultato del lancio di un dado. Carlo punta sempre su un risultato dispari, Giorgio su un risultato pari. Giorgio crede che i numeri riportati sulle facce del dado (ovviamente gli interi da 1 a 6) siano equiprobabili. In realtà non è così in quanto Carlo, di nascosto, ha "truccato" il dado facendo in modo che il numero 1 abbia probabilità $\frac{1}{5}$, lasciando però che gli altri numeri siano equiprobabili. Quali sono le probabilità di vincere di Carlo e Giorgio rispettivamente?*

DATI: $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, Σ SPAZIO NON EQUIPROBABILE.

1) DEFINIAMO LE PROBABILITÁ DEGLI EVENTI ELEMENTARI:

$$P(\{1\}) = \frac{1}{5} \quad , \quad P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{\frac{4}{5}}{5} = \frac{4}{25}$$

2) CONTROLLIAMO CHE $P(\Omega) = 1$:

$$\left(5 \times P(\{2\}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{25} \right)$$

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \{1,\dots,6\}} P(\{\omega\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + \dots + P(\{6\}) =$$
$$= \frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \dots + \frac{4}{25} = \frac{1}{5} + 5 \times \frac{4}{25} = 1$$

3) CALCOLO DELLE PROBABILITÁ:

G = "VINCE GIORGIO" $= \{2, 4, 6\}$ $\Rightarrow$ $P(G) = \sum_{\omega \in G} P(\{\omega\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 3 \times \frac{4}{25} = \frac{12}{25}$.

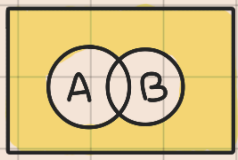
C = "VINCE CARLO" $= \{1, 3, 5\}$ $\Rightarrow$ $P(C) = \sum_{\omega \in C} P(\{\omega\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{5} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{13}{25}$.

ESERCIZIO APPLICAZIONE TEOREMA DEL COMPLEMENTO

Siano E ed F due eventi per i quali sappiamo che
la probabilità che almeno uno dei due si verifichi è ¾.
Qual è la probabilità che non si verifichi né E né F ?

$$\boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$$

Ω



DATI: $\frac{3}{4} = P(A \cup B)$

P. RICHIESTA: "NÉ A NÉ B" $\Rightarrow P((A\cup B)^c)$

ALLORA: $P((A\cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

---

1. Sapendo che P(A)=1/3, P(B)=1/2 e P(A ∪ B)=3/4, calcolare P(A^c ∪ B^c).

2. Un esperimento ha solo due esiti possibili. Il primo si verifica con probabilità p. Il secondo con probabilità p^2. Calcolare p.

1) $\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) + P(A\cap B)}$

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$$

$$P(A\cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{4}{12} + \frac{6}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$$

$\boxed{P(A^c \cup B^c) = P((A\cap B)^c)}$ $\boxed{P(A) = P(A^c)}$

$$P((A\cap B)^c) = 1 - P(A\cap B)$$

$$= 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

2) $\begin{cases} P(A) + P(B) = 1 \\ P(A)^2 = P(B) \end{cases}$ (PERCHÉ $P(\Omega) = 1$ E $|\Omega| = 2$).

$\begin{cases} P(A) + P(A)^2 = 1 \\ P(A)^2 = P(B) \end{cases} \Rightarrow P(A)^2 + P(A) - 1 = 0$

$$\boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}}$$

FORMULA QUADRATICA

≈ 0.618

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \cancel{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right)$$

NEGATIVO

CONSIDERAZIONI SUGLI INSIEMI DISGIUNTI (A DUE A DUE).

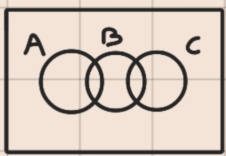
SE HO TRE INSIEMI $A, B, C \in \Sigma$ ALLORA:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ SE E SOLTANTO SE A, B, C DISGIUNTI A DUE A DUE.

NOTA! $\boxed{A \cap B \cap C = \emptyset}$ $\not\equiv$ $\boxed{A, B, C \text{ DISGIUNTI A DUE A DUE}}$ $\rightarrow$ $A \cap B = \emptyset$. $A \cap C = \emptyset$. $B \cap C = \emptyset$.

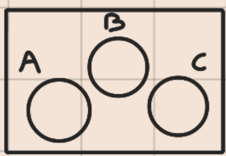
$\rightarrow$ IMPLICA CHE: $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Ω



$\not\equiv$

Ω



DIM: BASTA APPLICARE L'ADDITIVITÁ ALLA PRIMA E SI DIMOSTRA PER INDUZIONE.

GENERALIZZANDO: DATI $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \Sigma$ DISGIUNTI A DUE A DUE $(\forall i, s \; \{1, \ldots, m\} \; A_i \cap A_s = \emptyset)$:

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)}$$

TEOREMA DELL'ADDIZIONE

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

QUINDI: $P(A \cup B) = P(A/B) + P(B/A) + P(A \cap B)$

DIM: $A = A/B + A \cap B \Rightarrow P(A) = P(A/B) + P(A \cap B)$

$B = B/A + A \cap B \Rightarrow P(B) = P(B/A) + P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A/B) + P(B/A) + P(A \cap B)$ $\square$.

ESTENDENDO LA REGOLA: A TRE INSIEMI:

$A, B, C \in \Sigma$, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

ESERCIZIO SPAZIO CAMPIONARIO INFINITO

Supponiamo di lanciare un dado diverse volte fino a quando otteniamo 6 per la prima volta.
Siamo interessati al numbero di lanci effettuati.

DATI: $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$, $\Sigma =$ "INSIEME DELLE PARTI DI $\mathbb{N}$".

DOMANDA: $P(\{\omega\}) = ?$ $(\omega \in \Omega = \mathbb{N})$

RISOLUZIONE:

$$P(\{1\}) = 1/6$$

$$P(\{2\}) = 5/6 \cdot 1/6$$

$$P(\{3\}) = 5/6 \cdot 5/6 \cdot 1/6$$

$$\dots$$

$$P(\{\omega\}) = \underbrace{5/6 \cdot \dots \cdot 5/6}_{\omega - 1 \text{ VOLTE.}} \cdot 1/6 = \boxed{\left(\frac{5}{6}\right)^{\omega - 1} \cdot \frac{1}{6}}$$

COSE DA ACCERTARCI:

1) ACCERTARCI CHE $\boxed{\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1}$. ✓

2) ACCERTARCI CHE $\boxed{\sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})}$. ✓

QUINDI VERIFICHIAMO LA 1:

$$\sum_{\omega=1}^{\infty} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{\omega-1} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \sum_{\omega=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{\omega-1}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{m}, \quad m = \omega - 1$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1, \quad \text{CONVERGE A 1!}$$

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{m=0}^{\infty} p^m = \frac{1}{1-p}, \quad |p| < 1$$

SE $|p| < 1$ ALLORA LA SERIE CONVERGE A 1.

SIGMA ALGEBRA (σ-) PER INSIEMI DELLE PARTI (Σ) GRANDI

LA SIGMA-ALGEBRA (σ-) SERVE A RIDURRE I SOTTOINSIEMI OTTENUTI DA Ω, DATO CHE A VOLTE Ω RISULTA ESSERE TROPPO GRANDE.

- IN Σ METTO TUTTI I SOTTOINSIEMI DI Ω.
- MENTRE σ- É UN SOTTOINSIEME (FAMIGLIA) DI SOTTOINSIEMI DI Ω.
- QUINDI σ- É UNA RIDUZIONE DI Σ.

SE:

1) $\Omega, \emptyset \in \Sigma$
2) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$
3) $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \Sigma$

LEGGI DI DE MORGAN

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \Rightarrow \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right)^c = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \Rightarrow \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right)^c = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m^c$$

TEOREMA DELLA σ-ALGEBRA: LE σ-ALGEBRE SONO CHIUSE RISPETTO ALLE INTERSEZIONI.

$$\boxed{A_1, A_2, \ldots \in \Sigma \Rightarrow \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \in \Sigma}$$

DIM: $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma \underset{2)}{\Rightarrow} A_1^c, A_2^c, \ldots \in \Sigma \underset{3)}{\Rightarrow} \bigcup_m A_m^c \in \Sigma \overset{\text{DE MORGAN}}{=} \left(\bigcap_m A_m\right)^c$

$\underset{2)}{\Rightarrow} \bigcap_m A_m \in \Sigma$