Calcolo combinatorio

calcolo combinatorio

$n =$ *numero di oggetti* $k =$ *numero di posti*	senza ripetizione di oggetti		con ripetizione di oggetti
Permutazioni • $n = k$ • *conta l'ordine*	$P_n = n!$		$P_n^r = \dfrac{n!}{r_1!\, r_2! \dots r_k!}$
Disposizioni • $n \neq k$ • *conta l'ordine*	$D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$n > k$	$D_{n,k}^r = n^k$
Combinazioni • $n \neq k$ • *non conta l'ordine*	$C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$n > k$	$C_{n,k}^r = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

esempi

$n =$ *numero di oggetti* $k =$ *numero di posti*	senza ripetizione di oggetti	con ripetizione di oggetti
Permutazioni • $n = k$ • *conta l'ordine*	quanti anagrammi anche senza senso si possono formare con la parola LIBRO? n=5 $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$	quanti anagrammi anche senza senso si possono formare con la parola MAMMA? n=5 r_1=3 r_2=2 $P_5^r = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{120}{6 \cdot 2} = 10$
Disposizioni • $n \neq k$ • *conta l'ordine*	in quanti modi diversi 5 alunni si possono sedere su 3 sedie numerate? n=5 k=3 $D_{5,3} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{120}{2} = 60$	utilizzando le cifre 1, 2, 3 quanti numeri di 4 cifre si possono formare? n=3 k=4 $D_{3,4}^r = 3^4 = 81$
Combinazioni • $n \neq k$ • *non conta l'ordine*	un negoziante vuole esporre 4 paia di scarpe scelte tra 10 modelli diversi. In quanti modi si può effettuare la scelta? n=10 k=4 $C_{10,4} = \dfrac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \dfrac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$	si vogliono distribuire 7 matite identiche a 4 bambini, in quanti modi diversi si possono distribuire? fai attenzione n=4 e k=7 $C_{4,7}^r = \dfrac{(4+7-1)!}{7! \cdot (4-1)!} = \dfrac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$

fattoriale di un numero n

Si chiama fattoriale di un numero naturale n e si indica con $\boldsymbol{n!}$ (si legge n fattoriale) il prodotto:

$$\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 1}$$

$\boldsymbol{n!}$ si può anche scrivere come $\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1)!}$ oppure come $\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}$

esempi	$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$	$6! = 6 \cdot 5!$	$0! = 1$ per convenzione	$\dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$

coefficiente binomiale

Il simbolo $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$ si chiama coefficiente binomiale di n su k. Il suo valore è dato da:

$$\boldsymbol{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}} \qquad n \geq k$$

proprietà

$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = \binom{1}{1} = \binom{0}{0} = 1$	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

esempio: $\boldsymbol{\binom{9}{5}} = \dfrac{9!}{5! \cdot (9-5)!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 4!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \dfrac{9 \cdot 7 \cdot 6}{3} = 9 \cdot 7 \cdot 2 = \mathbf{126}$