DISTRIBUZIONI

Esercizio introduttivo Distribuzione di Bernulli

Qual è la distribuzione di probabilità di una v.a. X che descrive l'esito del lancio di una moneta truccata per la quale la probabilità di ottenere testa è due volte la probabilità di ottenere croce?

DISTRIBUZIONE DI BERNOULLI

$\Omega = \{T, C\}$

$X: \Omega \to \mathbb{R}$

$T \to 1$

$C \to 0$

x	0	1
p_X	$1-p$	p

- $P(X=1) = p \to \{X=1\}$ SUCCESSO
- $P(X=0) = 1-p \to \{X=0\}$ INSUCCESSO

NOTAZIONE: $X \sim Ber(p)$ CON $p \in [0,1]$

Esercizio introduttivo Distribuzione Binomiale

Supponiamo di lanciare la moneta truccata dell'esercizio precedente tre volte. Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente **due** volte?

- ASSUMIAMO I LANCI INDIPENDENTI TRA LORO.
- LANCI: $\boxed{Y_1, Y_2, Y_3}$ IN GENERALE: $\boxed{Y_i \sim Ber(p)}$. → ESITO DELL'i-ESIMO SALTO.
- $\boxed{X} = \{$NUMERO DI TESTE SU 3 LANCI INDIPENDENTI$\}$.
- DEFINIAMO IL SUPPORTO: $\boxed{S_X = \{0,1,2,3\} \ni X}$.

DOBBIAMO CALCOLARE: $\boxed{p_X(k) = P(X=k) \quad \text{con} \quad k \in S_X}$:

→ PER $k=0$: $p_X(0) = P(X=0) = P(Y_1=0, Y_2=0, Y_3=0) = \underbrace{P(Y_1=0)}_{(1-p)} \cdot \underbrace{P(Y_2=0)}_{(1-p)} \cdot \underbrace{P(Y_3=0)}_{(1-p)} = \boxed{(1-p)^3}$.

→ PER $k=1$: $p_X(1) = P(X=1) = P(Y_1=1, Y_2=0, Y_3=0) + P(Y_1=0, Y_2=1, Y_3=0) + P(\underbrace{Y_1=0}_{(1-p)}, \underbrace{Y_2=0}_{(1-p)}, \underbrace{Y_3=1}_{p}) = \boxed{3 \cdot p \cdot (1-p)^2}$.

$3 \times (1-p) \times (1-p) \times p$

→ PER $k=2$: $p_X(2) = P(X=2) = P(Y_1=1, Y_2=1, Y_3=0) + P(Y_1=1, Y_2=0, Y_3=1) + P(\underbrace{Y_1=0}_{(1-p)}, \underbrace{Y_2=1}_{p}, \underbrace{Y_3=1}_{p}) = \boxed{3 \cdot p^2 \cdot (1-p)}$.

RICHIESTA DALL'ESERCIZIO

$3 \times (1-p) \times p \times p$

→ PER $k=3$: $p_X(3) = P(X=3) = P(Y_1=1, Y_2=1, Y_3=1) = \underbrace{P(Y_1=1)}_{p} \cdot \underbrace{P(Y_2=1)}_{p} \cdot \underbrace{P(Y_3=1)}_{p} = \boxed{p^3}$.

Supponiamo ora di lanciare la moneta quattro volte? Qual è ora la probabilità di ottenere testa esattamente due volte?

- Assumiamo i lanci indipendenti tra loro.
- Lanci: $\boxed{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4}$ in generale: $\boxed{Y_i \sim Ber(p)}$.
- $\boxed{X}$ = {Numero di teste su 4 lanci indipendenti}.
- Definiamo il supporto: $\boxed{S_X = \{0, 1, 2, 3, 4\} \ni X}$.
- $\boxed{p_X(k) = P(X = k) \quad \text{con} \quad k \in S_X}$.

Dobbiamo calcolare:

→ Per $k = 2$: $p_X(2) = P(X = 2)$

$$= \boxed{\binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^2}.$$

Es: $\underbrace{1 \quad 1}_{p^2} \quad \underbrace{0 \quad 0}_{(1-p)^2} \times \binom{4}{2}$, con $p^2 \times (1-p)^2 \times \binom{4}{2}$

- Numero di modi di scegliere due posizioni su quattro in cui mettere gli 1:

$$\boxed{C(4,2) = \binom{4}{2} = 6}$$

Generalizzando per **n** lanci indipendenti

- Assumiamo i lanci indipendenti tra loro.
- Lanci: $\boxed{Y_1, Y_2, \dots, Y_m}$ in generale: $\boxed{Y_i \sim Ber(p)}$.
- $\boxed{X}$ = {Numero di teste su m lanci indipendenti}.
- Definiamo il supporto: $\boxed{S_X = \{0, 1, \dots\} \ni X}$.
- $\boxed{p_X(k) = P(X = k) \quad \text{con} \quad k \in S_X}$.

Quindi:

→ $p_X(k) = P(X = k) = \boxed{\binom{m}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{m-k}}$

Es: $\square_1 \quad \square_2 \quad \square_3 \quad \dots \quad \square_{m-1} \quad \square_m$

- Ognuna delle m-uple di questo tipo ha probabilità: $\boxed{p^k \cdot (1-p)^{m-k}}$.
- Il numero di queste m-uple è: $\boxed{\binom{m}{k}}$.

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

$$p_X(k) = P(X = k) = \boxed{\binom{m}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{m-k}}$$

Descrive il numero di successi k in m esperimenti bernulliani di parametro p.

Notazione: $X \sim Bin(m, p)$

Dove:

p : Probabilità successo esperimento.

m : Numero esperimenti.

k : Numero successi.

Esempio introduttivo Distribuzione Geometrica

Con la moneta truccata dell'esercizio precedente, effettuiamo il seguente esperimento stocastico. **Lanciamo la moneta tante volte quante necessarie per osservare almeno una volta testa**. All'uscita della prima testa l'esperimento termina. Qual è la distribuzione di probabilità del numero di lanci effettuati nel corso dell'esperimento?

- ASSUMIAMO I LANCI INDIPENDENTI TRA LORO.
- LANCI: $\boxed{\forall i \quad Y_i}$ ESITO DELL' i-ESIMO LANCIO: $\boxed{Y_i \sim Ber(p)}$.
- $\boxed{X}$ = { NUMERO DI LANCI INDIPENDENDENTI EFFETTUATI FINO AD OTTENERE LA PRIMA TESTA }.
- DEFINIAMO IL SUPPORTO: $\boxed{S_X = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \ni X}$. (LA GEOMETRICA PARTE DA 1)
- $\boxed{p_X(k) = P(X = k) \quad \text{con} \quad k \in S_X}$.

QUINDI:

$$\rightarrow p_X(k) = P(X = k)$$
$$= P(Y_1 = 0, Y_2 = 0, \dots, Y_k = 1)$$
$$= \underbrace{P(Y_1 = 0) \cdot \ldots}_{(1-p)^{k-1}} \times \underbrace{\cdot P(Y_k = 0)}_{p} = \boxed{(1-p)^{k-1} \cdot p}$$

ES: $\underbrace{0\ 0\ 0\ 0 \dots 0}_{(1-p)^{k-1}} \times \underbrace{1}_{p}$

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA

$$p_X(k) = P(X = k) = \boxed{(1-p)^{k-1} \cdot p}$$

NOTAZIONE: $X \sim Geo(p)$

DOVE:

p : PROBABILITÁ SUCCESSO ESPERIMENTO.

k : SUCCESSO AL k-ESIMO LANCIO.

DESCRIVE IL NUMERO DI ESPERIMENTI BERNULLIANI INDIPENDENTI DI PARAMETRO p CHE BISOGNA EFFETTUARE PER OSSERVARE IL PRIMO SUCCESSO.

DIM: CHE LA SOMMA DELLE PROBABILITÁ FACCIA 1.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{\overset{m}{\overset{\shortparallel}{k-1}}} \cdot p = p \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{m} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1 \quad \text{con} \quad m = k-1.$$

$$\boxed{\text{SERIE GEOMETRICA} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} r^m = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1}$$

Esempio introduttivo Distribuzione Binomiale Negativa

Lanciamo la moneta truccata tante volte finché non otteniamo *testa* per la terza volta. Sia X il numero di lanci effettuati fino alla terza testa.

a) Calcolare **P(X = 2), P(X = 3), P(X = 4), P(X = 10)**

b) Trovare una formula generale per con **P(X = k)** con **k >= 3**.

- $\boxed{X} = \{$Numero di tentativi per osservare r teste$\}$.
- Definiamo il supporto: $\boxed{S_X = \{3, 4, \dots\} \ni X}$.

(Come minimo effettuo 3 lanci) Devo avere 3 teste.

- $\boxed{p_X(k) = P(X = k) \quad \text{con} \quad k \in S_X}$.

Quindi:

→ $p_X(3) = P(X = 3) = p^3$

→ $p_X(4) = P(X = 4) = 3 \cdot p^3 \cdot (1-p)$

Es: □ □ □ 1

Due teste in 3 posti : $C(3,2) = 3$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right] 3 \times p^3 (1-p)$$

Generalizzando

- $\boxed{S_X = \{r, r+1, \dots\} \ni X}$.

→ $p_X(k) = P(X = k) = \boxed{\binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{k-r}}$

Es: $\underbrace{\square \ \square \ \square \ \square \ \square \ \dots}_{}$ 1

$k-1$: Tentativi. k-esimo.

$r-1$: Volte 1.

DISTRIBUZIONE BINOMIALE NEGATIVA

$$p_X(k) = P(X = k) = \boxed{\binom{k-1}{r-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{k-r}}$$

Descrive il numero di esperimenti bernulliani indipendenti di parametro p che bisogna effettuare per osservare l'r-esimo successo.

Notazione: $X \sim NB(r, p)$

Dove:

- r : Numero di successi che voglio ottenere.
- p : Probabilitá successo esperimento.
- k : Successo al k-esimo lancio.

Osservazioni tra le Distribuzioni:

1) $\boxed{NB}$
- Fisso il numero di successi.
- Non fisso il numero di lanci.

VS

$\boxed{Bin}$
- Non fisso il numero di successi.
- Fisso il numero di lanci.

2)
- $NB(1, p) = Geo(p)$
- $Bin(1, p) = Ber(p)$
