Probabilitá Condizionata

Esercizio Introduttivo

Due dadi, uno rosso ed uno blu, vengono lanciati contemporaneamente.
• Qual è la probabilità che l'esito del lancio del dado rossosia 5?
Supponiamo di sapere che l'esito del lancio dei due dadi dà come somma 9.
• Qual è la probabilità che l'esito del lancio del dado rosso sia stato 5?
• Qual è la probabilità che l'esito del lancio di almenouno dei due dadi sia stato 5?
Risoluzione:

DATI: $\Omega = \{ (\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{1, \dots, 6\} \}$.

$|\Omega| = D^R(6, 2) = 6^2 = 36$.

DOMANDA (1): $A = \{\text{Lancio dado rosso risulta } 5\} = \{(5,1), (5,2), \dots, (5,6)\}$

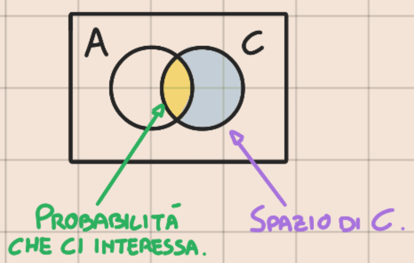
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

DOMANDA (2): $C = \{\text{Somma dei due dadi da } 9\} = \{(3,6), (5,4), (4,5), (6,3)\}$

$A \cap C = \{\text{Lancio dado rosso risulta } 5\} \overset{(\text{DATO})}{\cap} \{\text{Somma dei due dadi da } 9\} = \{(5,4)\}$ $\quad |A \cap C| = 1.$

$$\boxed{P(A|C)} = \frac{1}{4} = \frac{|A \cap C| / |\Omega|}{|C| / |\Omega|} = \boxed{\frac{P(A \cap C)}{P(C)}}.$$

VALE ANCHE IN UNO SPAZIO NON EQUIPROBABILE.



PROPRIETÁ

DATO $C \in \Sigma$ ABBIAMO: $P(\cdot|C) = \Sigma \longrightarrow [0,1]$

$$A \longrightarrow P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}.$$

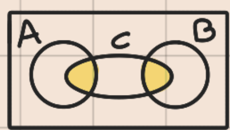
(1) $P(\Omega|C) = 1$

DIM: $P(\Omega|C) = \dfrac{P(\Omega \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(C)}{P(C)} = 1$ $\square$.

(2) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots | C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|C)$ CON $A_i \cap A_j = \emptyset$ (DISGIUNTI) A DUE A DUE.

→ QUINDI, PER ESEMPIO: SIANO $A, B, C \in \Sigma$ CON $A \cap B = \emptyset$:

$$\boxed{P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)}.$$



DIM: $P(A \cup B|C) = \dfrac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} + \dfrac{P(B \cap C)}{P(C)}$

$= P(A|C) + P(B|C)$ $\square$.

REGOLE

REGOLA DEL COMPLEMENTO: $\boxed{P(A^c|C) = 1 - P(A|C)}$.

REGOLA DELL'ADDIZIONE: $\boxed{P(A\cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A\cap B|C)}$.

REGOLA DELLA MOLTIPLICAZIONE: $\boxed{P(A\cap B) = P(B|A) \cdot P(B)}$

Esercizio

Supponiamo di estrarre consecutivamente due carte da un mazzo da poker. Definiamo gli eventi:
S1={la prima carta estratta è cuori}
S2={la seconda carta estratta è cuori}.
Calcolare le probabilità:
P(S1), P(S2|S1), P(S2|S1^c) e P(S2∩S1).

RISOLUZIONE:

- $P(S_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- $P(S_2|S_1) = \frac{12}{51}$ ← (CARTE CUORI RIMANENTI) / (TOTALE CARTE RIMANENTI). $= \frac{P(S_2\cap S_1)}{P(S_1)}$

(REGOLA DELLA MOLTIPLICAZIONE)

- $P(S_2\cap S_1) = \boxed{P(S_2|S_1) \cdot P(S_1)} = \boxed{\frac{12}{51} \cdot \frac{13}{53}}$.

RISOLUZIONE CON LA PROBABILITÁ CONDIZIONATA:

$$\Omega = \{ (w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \text{Mazzo}, w_1 \neq w_2 \}.$$

$$|\Omega| = D(52,2) = \frac{52!}{50!} = 52 \cdot 51.$$

$$S_1\cap S_2 = \{ (w_1, w_2) \in \Omega : w_i \in \text{Cuori}, w_1 \neq w_3 \}.$$

$$|S_1\cap S_2| = D(13,2) = \frac{13!}{11!} = 13 \cdot 12$$

$$P(S_1\cap S_2) = \frac{|S_1\cap S_2|}{|\Omega|} = \frac{13\cdot 12}{52\cdot 51} = \boxed{\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}}.$$

//

Esercizo

Supponiamo di volare da Sydney ad Amsterdam via Bangkok.
La probabilità di perdere la valigia a Sydney è 0,02.
La probabilità di perdere la valigia a Bangkok, supposto che vi arrivi, è 0,05.
Qual è la probabilità che la valigia arrivi ad Amsterdam?

- $A = \{$ LA VALIGIA ARRIVA AD AMSTERDAM $\}$.

$$S \xrightarrow{0.98} B \xrightarrow{0.95} A$$

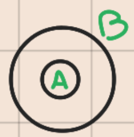
- $B = \{ \text{Arriva a Bangkok} \} = \{ \text{Non si perde a Sidney} \}$.

$\rightarrow P(A|B) = 0.95$.

$\rightarrow P(B) = 0.98$.

- $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0.95 \cdot 0.98$.
- Allora $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

$\rightarrow P(A) = P(A \cap B) = 0.95 \cdot 0.98$.



Esercizio

Consideriamo una famiglia con due bambini.
Veniamo a sapere che almeno uno dei due è maschio.
Qual è la probabilità che siano entrambi maschi ?

$\{ \{M, M\}, \{F, F\}, \{M, F\} \}$
Non é equiprobabile!

$$\Omega = \{ (M,M), (M,F), (F,M), (F,F) \}.$$

$$C = \{ \text{Almeno uno dei due é maschio} \} = \{ (M,M), (M,F), (F,M) \}.$$

$$A = \{(M,M)\} \Rightarrow P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{|A|/\cancel{|\Omega|}}{|C|/\cancel{|\Omega|}} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

INDIPENDENZA TRA EVENTI

- Se $A, B \in \Sigma$ con A indipendente B allora:

$$\boxed{P(A|B) = P(A)} \quad e \quad \boxed{P(B|A) = P(B)} \quad \text{(proprietà é simmetrica)}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \qquad\qquad \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B)$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A)$$

Esempio Esercizio

Nell' estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte,
gli eventi A={Regina} e B={Cuori} sono indipendenti?

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow$ A, B indipendenti.

Con reimmissione abbiamo eventi indipendenti.

- $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
- $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

$P(A \cap B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{52}}$. ✓

	1	2	. . .	3	Q	K
	1	2	. . .	3	Q	K
	1	2	. . .	3	Q	K
♡	1	2	. . .	3	Q	K

$\rightarrow P(A) = \frac{1}{13}$

$\rightarrow P(A|B) = \frac{1}{13}$

$=$

Supponiamo di aggiungere 2 jokers al mazzo.
Gli eventi A={Regina} e B={Cuori} sono indipendenti ?

- In questo caso A, B sono dipendenti.

- $P(A) = \frac{4}{54}$
- $P(A|B) = \frac{1}{13}$

$$\neq$$

PROPRIETÁ

Siano A, B eventi tra loro indipendenti $\Rightarrow$ A, B^c indipendenti.
$\Rightarrow$ A^c, B indipendenti.
$\Rightarrow$ A^c, B^c indipendenti.

Dim: (1°) $P(B^c|A) = 1 - P(B|A) = 1 - P(B) = P(B^c) \Rightarrow B^c, A$ indip. $\square$.

(2°),(3°): Si dimostrano allo stesso modo.

DEFINIZIONE

Siano A, B, C indipendenti a due a due se:

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

ma anche:

- $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Devono essere soddisfatte tutte e quattro.

Esercizio Roulette

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	39	31	32
33	34	35	36

Consideriamo roulette fittizia rappresentata nella tabella a sinistra.
La ruota della roulette seleziona un numero scelto a caso in $\{1, \ldots, 36\}$.
Definiamo gli eventi $E=\{pari\}$, $R=\{rosso\}$, e $L=\{minore\text{-}uguale\ di\ 18\}$.

1. Mostrare che ogni coppia di eventi scelta tra i tre definiti è indipendente, ma che i tre insieme sono dipendenti.

2. Dimostrare che $P(E \mid R \cap L) \neq P(E)$

$E = \{Pari\}$, $|E| = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$R = \{Rosso\}$, $|R| = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$L = \{\leq 18\}$, $|L| = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

1) • $P(E \cap R) = \frac{9}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(E) \cdot P(R)$ ✓

• $P(E \cap L) = \frac{9}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(E) \cdot P(L)$ ✓

• $P(R \cap L) = \frac{9}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(R) \cdot P(L)$ ✓

- $P(A \cap B \cap C) = \frac{5}{36} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$. ×

2) Dim. che $P(E|R \cap L) \neq P(E)$:

- $R \cap L = \{3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 18\}$, $|R \cap L| = 9$.
- $E \cap R \cap L = \{4, 8, 10, 16, 18\}$, $|E \cap R \cap L| = 5$.
- $P(E|R \cap L) = \frac{P(E \cap R \cap L)}{P(R \cap L)} = \frac{5}{9} \neq \frac{1}{2} = P(E)$.

DEFINIZIONE

Gli eventi $A_1, A_2, \dots, A_m$ sono detti INDIPENDENTI, se $\forall$ "sotto"- famiglia $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ con $k \leq m$ vale $\boxed{P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})}$.

Esercizio: Tiro al bersaglio

Anna e Bianca sparano ad un bersaglio. Sia A l'evento «Anna fa centro» e B l'evento «Bianca fa centro». Supponiamo che A e B siano indipendenti e che P(A)=1/4 e P(B)=2/5.

Calcolare le probabilità che:

a) almeno una delle due colpisca il bersaglio,

b) una sola delle due centri il bersaglio.

a) $P(A \cup B) = \overset{1/4}{P(A)} + \overset{2/5}{P(B)} - \overset{?}{P(A \cap B)}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}$ (A e B indipendenti).

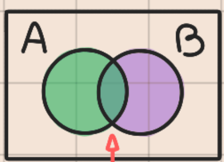
$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}\right) = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} - \frac{2}{20} = \boxed{\frac{11}{20}}$.

b) $P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A/B) + P(B/A)$

$= P((A \cup B)/(A \cap B))$

$= \boxed{P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)}$

$= \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - 2\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}\right) = \boxed{\frac{9}{20}}$.



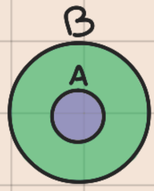
Viene contata 2 volte se unisco A e B. ($A \cup B$)

$\text{Se } A \subseteq B \Rightarrow P(B/A) = P(B) - P(A)$

Dim: $B = A \cup (B/A)$

$P(B) = P(A) + P(B/A)$

$P(B/A) = P(B) - P(A)$ □.



Regola generale: $P(B/A) = P(B) - P(A \cap B)$.
