

ALEATORIO, STOCASTICO, RANDOMICO, CASUALE: sono sinonimi.

IN UN ESPERIMENTO STOCASTICO L'ESITO NON PUÒ ESSERE PREVISTO CON CERTEZZA.

ESPERIMENTO: LANCIO DELLA MONETA.

- $\Omega = \{T, C\} =$ SPAZIO CAMPIONARIO. ($T = \text{TESTA}, C = \text{CROCE}$)
- $w \in \Omega$ = ESITO

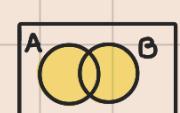
UN EVENTO È UN SOTTOINSIEME DELLO SPAZIO CAMPIONARIO.

$$A \subseteq \Omega.$$

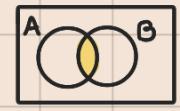
ESEMPIO: Abbiamo un dado: $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, quindi A può essere $\{2, 4, 6\}$.

OPERAZIONI TRA INSIEMI IN LINGUAGGIO PROBABILISTICO

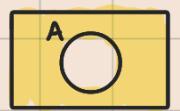
1) UNIONE: Siano $A, B \subseteq \Omega$, allora $A \cup B =$ "si verifica A oppure B".



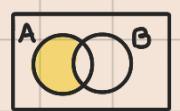
2) INTERSEZIONE: Siano $A, B \subseteq \Omega$, allora $A \cap B =$ "si verifica sia A sia B".



3) COMPLEMENTARE: Siano $A, B \subseteq \Omega$, allora $A^c =$ "non si verifica A".



4) DIFFERENZA: Siano $A, B \subseteq \Omega$, allora $A/B =$ "si verifica A ma non B".



SIA OMEGA Ω E L'INSIEME VUOTO \emptyset SONO DUE PARTICOLARI EVENTI (PARTICOLARI INSIEMI DI Ω).

- EVENTO CERTO $\rightarrow \Omega$.
- EVENTO IMPOSSIBILE $\rightarrow \emptyset$.

• INDICO CON EPSILON Σ LO SPAZIO DEGLI EVENTI, OVVERO L'INSIEME DI TUTTI I POSSIBILI EVENTI.

• SE Ω È DISCRETO, CIOÈ FINITO, ALLORA: $\Sigma = \{\text{TUTTI I SOTTOINSIEMI DI } \Omega\}$.

QUINDI $\forall A \subseteq \Omega$, A È UN EVENTO.

ESEMPIO DELLA MONETA

$$\rightarrow \Omega = \{T, C\} , \Sigma = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \{\{T, C\}\} , \text{ e } |\Sigma| = 4 = 2^2$$

$$= \Omega$$

↑

ESEMPIO DELLE PALLINE

$$\rightarrow \Omega = \{R, B, G\}$$



$$= \Omega$$

↑

$$\Sigma = \{\emptyset, \{R\}, \{B\}, \{G\}, \{R, B\}, \{R, G\}, \{B, G\}, \{R, B, G\}\} , \text{ e } |\Sigma| = 8 = 2^3$$

QUINDI IN GENERALE VALE CHE

$$|\Sigma| = 2^{|\Omega|}$$

Vogliamo misurare la **probabilità** che un evento si verifichi. Abbiamo la funzione:

$$P: \Sigma \rightarrow [0, 1]$$

$$\stackrel{\psi}{A} \rightarrow P(A)$$

CONDIZIONI NECESSARIE:

$$1) P(\Omega) = 1$$

2) ADDITIVITÀ PER EVENTI DISGIUNTI

- $A \in \Sigma$ sono disgiunti se $A \cap B = \emptyset$.
- Se $A \cap B = \emptyset$ allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

ESEMPIO DELLA MONETA

$$\bullet \Omega = \{T, C\} \quad \text{e} \quad \Sigma = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \{\{T, C\}\}$$

$$\bullet \text{Abbiamo che: } P(\Omega) = 1 , \quad P(\{T\}) = \frac{1}{2} . \quad \left. \begin{array}{l} P(\emptyset) = 0 , \quad P(\{C\}) = \frac{1}{2} . \\ \Rightarrow \end{array} \right\} P(\{T\} \cup \{C\}) = P(\{T, C\}) = P(\Omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .$$

\rightarrow Possiamo derivare che $P(\emptyset) = 0$ dai postulati 1) e 2).

• REGOLA DEL COMPLEMENTO

$$P(A^c) = 1 - P(A) , \quad \forall A \in \Sigma$$

$$\bullet \text{DIM. } A^c \cup A = \Omega \quad \text{e} \quad A \cap A^c = \emptyset .$$

$$\bullet 1) P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A) .$$

2)

$$\bullet \text{COROLLARIO: } P(\emptyset) = 0$$

$$\bullet \text{Dm. } \Omega^c = \emptyset \Rightarrow P(\emptyset) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow P(\emptyset) = 0 .$$

UN EVENTO DI CARDINALITÀ 1, OVVERO $\{\omega\}$, È DETTO ELEMENTARE.

SPAZIO EQUIPROBABILE

P ASSEGNA LA STESSA PROBABILITÀ A TUTTI GLI EVENTI ELEMENTARI $\{\omega\}$ DI Ω .

ESEMPPIO: UN ESEMPIO DI SPAZIO EQUIPARABILE È IL LANCIO DEL DADO:

$$\bullet \quad \Omega = \{1, 2, \dots, 6\}, \quad P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_6\}) = \frac{1}{6} \quad \text{E} \quad |\Omega| = 2^{|\Omega|} = 2^6 = 64.$$

GENERALIZZANDO: DATO $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$, CON $|\Omega| = m$ FINITO,

SIA $A \subseteq \Omega$ DICO CHE: $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$

INOLTRE:

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$$

OIM. 1) $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$.

2) $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

$$\forall A \in \Sigma, \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

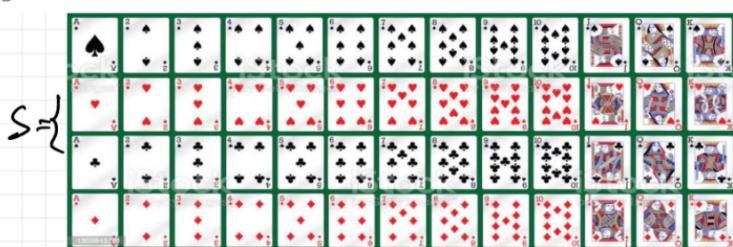
GENERALIZZANDO: DATI A E B DISGIUNTI ($A \cap B = \emptyset$), ABBIAMO CHE:

$$P(A \cup B) = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B)$$

DOVE 1) E 2) SODDISFATTE.

ESERCIZIO SPAZIO EQUIPROBABILE - PESCA UNA CARTA

Esercizio 1.2.1 Si scelga a caso una carta da un mazzo ben mescolato di 52 carte da ramino. Ci si chiede la probabilità di ottenere: 1) un asso; 2) una carta di fiori; 3) una figura; 4) una figura non di cuori.



ABBIAMO: $\Omega = \text{"INTERO MAZZO"}$, $|\Omega| = 52$ CARTE.

Vogliamo l'azione 1): $A = \{\text{ASSI}\} \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

IL CALCOLO È FACILE PERCHÉ LO SPAZIO È EQUIPROBABILE; MA NON È SEMPRE COSÌ.

ESERCIZIO SPAZIO NON EQUIPROBABILE - PESCA LE BIGUE

ABBIAMO: $\Omega = \{R, B, G\}$, $|\Omega| = 3$

○	○
○	○
○	○

1) DEFINIAMO LE PROBABILITÀ DEGLI EVENTI ELEMENTARI:

$$P(\{R\}) = 2/9$$

$$P(\{B\}) = 3/9$$

$$P(\{G\}) = 4/9$$

2) ESTENDIAMO LA COSTRUZIONE DI P AGLI EVENTI GENERICI:

PRENDIAMO: $A \in \Sigma$, $P(A) = \sum_{w \in A} P(\{w\})$

$$\text{PER ESEMPIO: } A = \{G, B\}, P(A) = P(\{G\}) + P(\{B\}) = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{7}{9}.$$

CONSIDERANDO $A, B \in \Sigma$, DISGIUNTI $A \cap B = \emptyset$, ABBIAMO:

$$P(A \cup B) = \sum_{w \in A \cup B} P(\{w\}) = \sum_{w \in A} P(\{w\}) + \sum_{w \in B} P(\{w\}).$$

$$A \cap B = \emptyset$$

AFFINCHÉ VALGA 1) DEVO AVERE

$$P(\Omega) = \sum_{w \in \Omega} P(\{w\}) = 1.$$

ESERCIZIO SPAZIO NON EQUIPROBABILE - DADO TRUCCATO

Esercizio 1.2.4 Carlo e Giorgio sono due amici che ogni giorno scommettono sul risultato del lancio di un dado. Carlo punta sempre su un risultato dispari, Giorgio su un risultato pari. Giorgio crede che i numeri riportati sulle facce del dado (ovviamente gli interi da 1 a 6) siano equiprobabili. In realtà non è così in quanto Carlo, di nascosto, ha "truccato" il dado facendo in modo che il numero 1 abbia probabilità $\frac{1}{5}$, lasciando però che gli altri numeri siano equiprobabili. Quali sono le probabilità di vincere di Carlo e Giorgio rispettivamente?

DATI: $\Omega = \{1, \dots, 6\}$. Σ SPAZIO NON EQUIPROBABILE.

1) DEFINIAMO LE PROBABILITÀ DEGLI EVENTI ELEMENTARI:

$$P(\{1\}) = \frac{1}{5}, P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{\frac{4}{5}}{5} = \frac{4}{25}$$

2) CONTROLLIAMO CHE $P(\Omega) = 1$:

$$P(\Omega) = \sum_{w \in \{1, \dots, 6\}} P(\{w\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + \dots + P(\{6\}) = \left(5 \times P(\{2\}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \dots + \frac{4}{25} = \frac{1}{5} + 5 \times \frac{4}{25} = 1$$

3) CALCOLO DELLE PROBABILITÀ:

$$G = \text{"VINC GEORGIO"} = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(G) = \sum_{w \in G} P(\{w\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 3 \times \frac{4}{25} = \frac{12}{25}.$$

$$C = \text{"VINC CARLO"} = \{1, 3, 5\} \Rightarrow P(C) = \sum_{w \in C} P(\{w\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{5} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{13}{25}.$$

ESERCIZIO APPLICAZIONE TEOREMA DEL COMPLEMENTO

Siano E ed F due eventi per i quali sappiamo che la probabilità che almeno uno dei due si verifichi è $\frac{3}{4}$. Qual è la probabilità che non si verifichi né E né F?

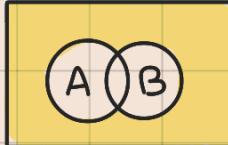
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

DATI: $\frac{3}{4} = P(A \cup B)$

P. RICHIESTA: "NÉ A NÉ B" $\Rightarrow P((A \cup B)^c)$

AUORA: $P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Ω



1. Sapendo che $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{2}$ e $P(A \cup B)=\frac{3}{4}$, calcolare $P(A^c \cup B^c)$.
2. Un esperimento ha solo due esiti possibili. Il primo si verifica con probabilità p . Il secondo con probabilità p^2 . Calcolare p .

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{4}{12} + \frac{6}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$$

$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c)$

$P(A) = P(A^c)$

$$P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B)$$

$$= 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

2) $\begin{cases} P(A) + P(B) = 1 \\ P(A)^2 = P(B) \end{cases}$ (PERCHÉ $P(\Omega) = 1$ E $|\Omega| = 2$).

$$\begin{cases} P(A) + P(A)^2 = 1 \\ P(A)^2 = P(B) \end{cases} \Rightarrow P(A)^2 + P(A) - 1 = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

≈ 0.618

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

NEGATIVO

FORMULA QUADRATICA

CONSIDERAZIONI SUGLI INSIEMI DISGIUNTI (A DUE A DUE).

SE HO TRE INSIEMI $A, B, C \in \Sigma$ ALLORA:

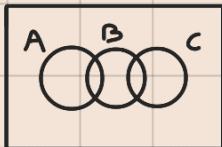
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ SE E SOLTANTO SE A, B, C DISGIUNTI A DUE A DUE.

NOTA! $A \cap B \cap C = \emptyset$

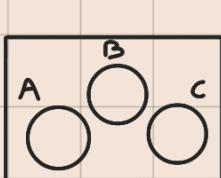


A, B, C DISGIUNTI A DUE A DUE

Ω



Ω



$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cap C = \emptyset$$

$$B \cap C = \emptyset$$

IMPLICA CHE: $A \cap B \cap C = \emptyset$.

DIM: BASTA APPLICARE L'ADDITIVITÀ ALLA PRIMA E SI DEMOSTRA PER INDUZIONE.

GENERALIZZANDO: DATI $A_1, A_2, \dots, A_m \in \Sigma$ DISGIUNTI A DUE A DUE ($\forall i, j \in \{1, \dots, m\} A_i \cap A_j = \emptyset$):

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = \sum_{i=1}^m P(A_i)$$

TEOREMA DELL' ADDIZIONE

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

QUINDI: $P(A \cup B) = P(A/B) + P(B/A) + P(A \cap B)$

DIM: $A = A/B + A \cap B \Rightarrow P(A) = P(A/B) + P(A \cap B)$

$B = B/A + A \cap B \Rightarrow P(B) = P(B/A) + P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A/B) + P(B/A) + P(A \cap B)$ □.

ESTENDENDO LA REGOLA: A TRE INSIEMI:

$A, B, C \in \Sigma$, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

ESEMPIO SPAZIO CAMPIONARIO INFINITO

Supponiamo di lanciare un dado diverse volte fino a quando

otteniamo 6 per la prima volta.

Siamo interessati al numero di lanci effettuati.

DATI: $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$, $\Sigma = \text{"INSIEME DELLE PARTI DI } \mathbb{N}\text{"}$.

DOMANDA: $P(\{\omega\}) = ?$ ($\omega \in \Omega = \mathbb{N}$)

RISOLUZIONE:

$$P(\{1\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{2\}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$P(\{3\}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$\dots P(\{\omega\}) = \underbrace{\frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{5}{6}}_{\omega-1 \text{ VOLTE.}} \cdot \frac{1}{6} =$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{\omega-1} \cdot \frac{1}{6}$$

COSE DA ACCERTARCI:

1) ACCERTARCI CHE $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$. ✓

2) ACCERTARCI CHE $\sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$. ✓

QUINDI VERIFICHIAMO LA 1 :

$$\begin{aligned} \sum_{\omega=1}^{\infty} P(\{\omega\}) &= \sum_{\omega=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{\omega-1} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \sum_{\omega=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{\omega-1} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^m, \quad m = \omega-1 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1, \quad \text{CONVERGE A } 1! \end{aligned}$$

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{m=0}^{\infty} p^m = \frac{1}{1-p}, \quad |p| < 1$$

SE $|p| < 1$ ALLORA LA SERIE CONVERGE A 1.

SIGMA ALGEBRA (σ -) PER INSIEMI DELLE PARTI (Σ) GRANDI

LA SIGMA-ALGEBRA (σ -) SERVE A RIDURRE I SOTTOINSIEMI OTTENUTI DA Ω , DATO CHE A VOLTE Ω RISULTA ESSERE TROPPO GRANDE.

- IN Σ METTO TUTTI I SOTTOINSIEMI DI Ω .
- MENTRE σ - È UN SOTTOINSIEME (FAMIGLIA) DI SOTTOINSIEMI DI Ω .
- QUINDI σ - È UNA RIDUZIONE DI Σ .

SE:

- 1) $\Omega, \emptyset \in \Sigma$
- 2) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$
- 3) $A_1, A_2, \dots \in \Sigma \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \Sigma$

LEGGI DI DE MORGAN

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \Rightarrow (\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m)^c = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \Rightarrow (\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m)^c = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m^c$$

TEOREMA DELLA σ - ALGEBRA: LE σ - ALGEBRE SONO CHIUSE RISPETTO ALLE INTERSEZIONI.

$$A_1, A_2, \dots \in \Sigma \Rightarrow \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \in \Sigma$$

DIM: $A_1, A_2, \dots \in \Sigma \Rightarrow A_1^c, A_2^c, \dots \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_m A_m^c \in \Sigma = (\bigcap_m A_m)^c$

2) $\Rightarrow \bigcap_m A_m \in \Sigma$

3) $\Rightarrow \bigcap_m A_m \in \Sigma$

DE MORGAN