ASPETTAZIONE: CENTRO DI MASSA

Definizione di Aspettazione per una V.A. Discreta

L'ASPETTAZIONE DI UNA V.A. DISCRETA $X \in \{a_1, a_2, \dots\} = S_X$, É DATA DA:

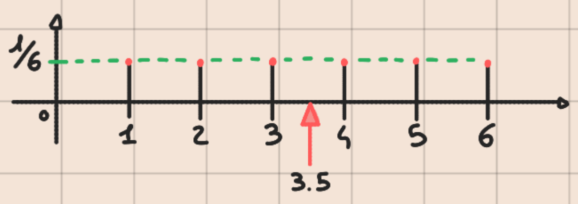
$$\boxed{E(X) = \sum_i a_i \cdot P(X = a)}$$

PURCHÉ LA SERIE SIA ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE.

1) Esempio Discreto: Dado Equo

DATO: $X \in \{1, 2, \dots, 6\}$, UN DADO EQUO => SPAZIO EQUIPROBABILE:

X	1	2	3	4	5	6
P_X	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$



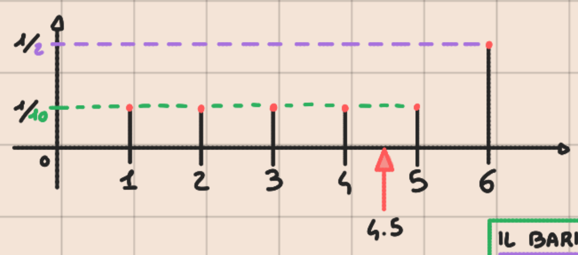
$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

L'ASPETTAZIONE É UNA SORTA DI BARICENTRO.

2) Esempio Discreto: Dado Non Equo

DATO: $X \in \{1, 2, \dots, 6\}$, UN DADO NON EQUO => SPAZIO NON EQUIPROBABILE:

X	1	2	3	4	5	6
P_X	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/2$



$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + \dots + 5 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4.5$$

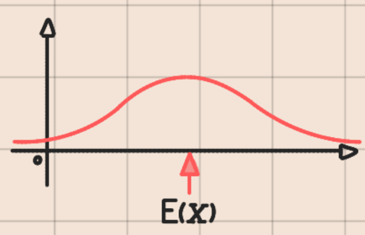
IL BARICENTRO SI SPOSTA VERSO DX.

Definizione di Aspettazione per una V.A. Assol. Continua

L'ASPETTAZIONE DI UNA V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUA X É DATA DA:

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx}$$

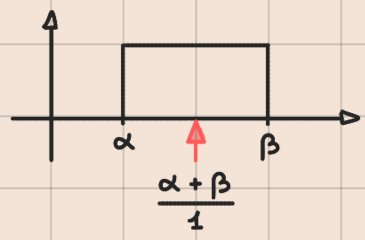
PURCHÉ L'INTEGRALE SIA ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE.



NOTA: GUARDA TABELLA DISTRIBUZIONI CON RELATIVE ASPETTAZIONI (ALCUNE DIMOSTRAZIONI SUL QUADERNO).

RELAZIONE TRA MEDIANA E ASPETTAZIONE

Distribuzione Uniforme:



$X \sim U(\alpha, \beta)$

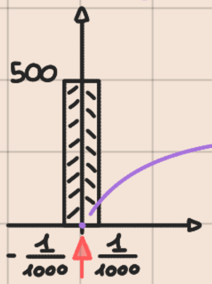
$$\boxed{E(X) = \frac{\alpha+\beta}{1} = \mathrm{Med}(X)}$$

Nella D.U. l'aspettazione e la mediana corrispondono sempre.

Note sull'aspettazione:

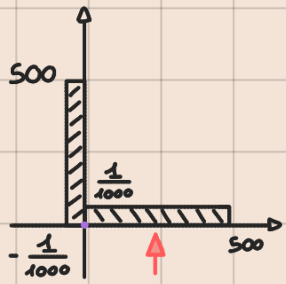
- $E(X)$ é il valore piú probabile della V.A. X? No.
- $E(X)$ é sempre positiva? No.

Esempio di differenza tra la Mediana e l'Aspettazione



$X \sim U\left(-\frac{1}{1000}, \frac{1}{1000}\right)$

$$\boxed{E(X) = 0 = \mathrm{Med}(X)}$$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{1000} \\ 500 & x \in \left[-\frac{1}{1000}, 0\right) \\ \frac{1}{1000} & x \in [0, 500) \\ 0 & x \geq 500 \end{cases}$$

$$\boxed{E(X) \neq 0 = \mathrm{Med}(X)}$$

ASPETTAZIONE E CAMBIO DI VARIABILE

Sia X una V.A. e $\boxed{g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}$ $\left(\boxed{g_X : S_X \longrightarrow \mathbb{R}}\right)$ una funzione:

→ Se X <u>discreta</u>: $\boxed{E[g(x)] = \sum_i g(a_i) \cdot p_X(a_i) = \sum_i g(a_i) \cdot P(X = a_i)}$.

→ Se X <u>continua</u>: $\boxed{E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx}$. <u>CAMBIO DI VARIABILE</u>

1) Esempio Distribuzione Bernoulli

Sia $X \sim \mathrm{Ber}(p)$, calcolare $E[2^X]$.

X	0	1
P_X	(1-p)	p

con $g(x) = 2^x$

$$E[2^x] = \sum_{a \in \{0,1\}} 2^a \cdot P_X(a) = 2^0 \cdot P_X(0) + 2^1 \cdot P_X(1) = (1-p) + 2p = \boxed{1 + p}.$$

2) Esempio V.A. Discreta

Sia X discreta:

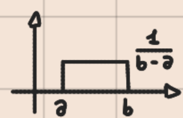
x	-2	-1	1	3
P_X	1/4	1/8	1/4	3/8

Calcolare $E[x^2]$.

$$E[x^2] = \sum_{a \in S_X} a^2 \cdot P_X(a) = (-2)^2 \cdot \frac{1}{4} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{8} + (1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (3)^2 \cdot \frac{3}{8}$$
$$= 1 + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{27}{8} = \boxed{\frac{19}{4}}.$$

3) Esempio V.A. Continua

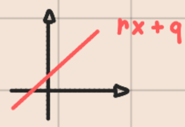
Sia $X \sim U(a, b)$ calcolare $E[x^2]$.



$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \boxed{\frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}}.$$

Proprietá dell'Aspettazione con Cambio di Variabile

1) Per ogni v.a. X e per ogni $r, s \in \mathbb{R}$ si ha: con $g(x)$ = retta = $mx + q$



$$\boxed{E[rX + s] = \ldots = r \cdot E[X] + s}$$

Dim: Si dimostra con la formula del cambio di variabile. (sul q.)

2) Sia X una v.a. e $r, s \in \mathbb{R}$ tali che $\boxed{r \leq X \leq s}$ con probabilitá 1 $\Rightarrow$ $\boxed{r \leq E[X] \leq s}$.

Dim: Si dimostra con la formula del cambio di variabile. (sul quaderno).

3) Linearitá dell'aspettazione, continuo:

$$\boxed{E[\alpha \cdot g(x) + \beta \cdot h(x) + \gamma] = \ldots = \alpha \cdot E[g(x)] + \beta \cdot E[h(x)] + \gamma} \quad . \quad \boxed{\begin{array}{l} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \\ g : S_x \longrightarrow \mathbb{R} \\ h : S_x \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}} \, .$$

4) Una variabile si dice centrata se $E[X] = 0$.