Approfondimento sul Teorema di Bayes

Andrea Patrini matr. 176907

June 22, 2025

Teorema di Bayes

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)}$$

La si ottiene nel seguente modo:

1. $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
2. $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$
3. $P(A \mid B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

1.2 Casi di spiegazioni alternative

Due ipotesi alternative

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \overline{A})P(\overline{A})}$$

Più ipotesi alternative

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{m} P(B \mid A_i)P(A_i)}, \quad j = 1, \ldots, m$$

Considerando il rapporto tra l'ipotesi che A si verifichi data l'evidenza B e l'ipotesi che A non si verifichi data l'evidenza B, si ottiene:

Forma pronostica

$$odds = \frac{P(A \mid B)}{P(\overline{A} \mid B)} = \frac{P(B \mid A)}{P(B \mid \overline{A})} \times \frac{P(A)}{P(\overline{A})}$$

Ora possiamo calcolare la probabilità avendo l'odds come

$$p = \frac{odds}{1 + odds}$$

Forma moltiplicativa

Bisogna soddisfare il vincolo: $P(A \mid B) + P(\overline{A} \mid B) = 1$

$$\boxed{P(A \mid B) \;\propto\; P(B \mid A) \;\times\; P(A)}$$

$$\boxed{P(\overline{A} \mid B) \;\propto\; P(B \mid \overline{A}) \;\times\; P(\overline{A})}$$

Ovvero che

$$\boxed{\textit{Posterior} \propto \textit{Likelihood} \times \textit{Prior}}$$

3.1 Test diagnostico medico

Nell'ambito di una campagna di screening che mira a identificare precocemente una malattia rara, della quale si sa che colpisce il 2% della popolazione, un nostro amico è risultato positivo al test. Il test funziona correttamente sul 99.9% dei soggetti malati e sul 97.5% dei soggetti sani. Ci chiediamo quale sia la probabilità che il nostro amico sia malato.

Dati del test:

- **Prevalenza della malattia:** $P(M) = 0.02$
- **Sensibilità:** $P(T \mid M) = 0.999$ (probabilità del test positivo per un malato)
- **Specificità:** $P(\overline{T} \mid \overline{M}) = 0.975 \Rightarrow P(T \mid \overline{M}) = 0.025$

Probabilità complementare di salute:

$$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 0.98$$

Si vuole calcolare **la probabilità finale di malattia** ovvero $P(M \mid T)$

3.1.2 Calcolo esplicito probabilità posteriore

Applicando la formula di Bayes:

$$P(M \mid T) = \frac{P(T \mid M)P(M)}{P(T \mid M)P(M) + P(T \mid \overline{M})P(\overline{M})}$$

$$= \frac{0.999 \times 0.02}{0.999 \times 0.02 + 0.025 \times 0.98} = \frac{1998}{4448} \approx 0.45$$

Risultato: Probabilità che l'amico sia malato è **circa il 45%**.

3.1.3 Interpretazione dei risultati:

- Malattia rara: la bassa prevalenza limita l'affidabilità assoluta di un singolo test positivo.
- Tuttavia, la probabilità passa dal 2% al 45%, rappresentando un forte segnale.
- Necessità di approfondimenti clinici ulteriori.

Prior:

$$\frac{P(M)}{P(\overline{M})} = \frac{0.02}{0.98} \approx 0.0204$$

Likelihood Ratio:

$$\frac{P(T \mid M)}{P(T \mid \overline{M})} = \frac{0.999}{0.025} \approx 40$$

Odds posteriori:

$$\frac{P(M \mid T)}{P(\overline{M} \mid T)} = 40 \times 0.0204 \approx 0.816$$

Probabilità finale confermata:

$$P(M \mid T) = \frac{0.816}{1 + 0.816} \approx 0.45$$

Multinomial Naive Bayes

Questo algoritmo ha come ipotesi che le feature siano **indipendenti** date le classi.

3.2.1 Esempio pratico: filtraggio spam

Obiettivo: classificare mail in Spam o Non-Spam.

Supponiamo di avere un dataset con le seguenti mail:

ID	Testo	Classe
M1	compra ora è gratis	**Spam**
M2	offerta limitata	**Spam**
M3	ci vediamo ora	**Non-Spam**
M4	andiamo a cena	**Non-Spam**

Parametri e vocabolario

- Vocabolario $V = 12$ parole.
- $N_{\text{spam}} = 6$, $N_{\text{non-spam}} = 6$.
- Prior: $P(\text{spam}) = P(\text{non-spam}) = 0.5$.

3.2.2 Calcolo probabilità di una parola data una classe:

$$P(w_k \mid C) = \frac{\mathrm{count}(w_k, C) + 1}{N_C + V}$$

dove:

- $\mathrm{count}(w_k, C)$: numero di volte che la parola w_k appare nella classe C
- N_C: totale parole nella classe C
- V: numero totale parole nel vocabolario

3.2.3 Calcolo della probabilità di una mail

Formula del Multinomial Naive Bayes

$$P(C \mid \mathrm{mail}) \propto P(C) \prod_{k=1} P(w_k \mid C)^{f_k}$$

Analizziamo la mail: "compra ora compra ora" ($f_{compra} = 2$, $f_{ora} = 2$).

3.2.4 Calcolo probabilità: Spam vs Non-Spam

Classe Spam:

$$P(\text{compra} \mid \text{spam}) = \frac{1+1}{6+12} = \frac{2}{18}$$

$$P(\text{ora} \mid \text{spam}) = \frac{2+1}{6+12} = \frac{3}{18}$$

$$P(\text{spam} \mid \text{mail}) \propto 0.5 \cdot \left(\frac{2}{18}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{18}\right)^2 = \frac{9}{18^4}$$

Classe Non-Spam:

$$P(\text{compra} \mid \text{non-spam}) = \frac{0+1}{6+12} = \frac{1}{18}$$

$$P(\text{ora} \mid \text{non-spam}) = \frac{1+1}{6+12} = \frac{2}{18}$$

$$P(\text{non-spam} \mid \text{mail}) \propto 0.5 \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{18}\right)^2 = \frac{1}{18^4}$$

Conclusione: poiché $\frac{9}{18^4} > \frac{1}{18^4}$, la mail è classificata come **Spam**.

34.2.5 Prestazioni e limiti del modello

- **Vantaggi:** estramemento veloce e leggero
- **Svantaggi:** assunzione di indipendenza delle feature spesso non realistica.