

FUNZIONE GENERATRICE

DEI MOMENTI

Def: SIA $m \in \mathbb{N}$ ALLORA SI DICE MOMENTO m-ESIMO DI UNA V.A. X , L'ASPETTAZIONE $E[X^m]$ BEN DEFINITA.

Def: SI DICE FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI DI X LA FUNZIONE $G_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ CHE ASSOCIA AD OGNI $t \in \mathbb{R}$, L'ASPETTAZIONE:

$$G_x(t) = E[e^{tx}]$$

DISCRETA
=
CONTINUA
=

$\sum_{x \in S_x} e^{tx} \cdot p_x(x)$
 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x) \cdot dx$

Theo: SIA X UNA V.A. CON F.G.M. BEN DEFINITA $G_x(t)$, ALLORA:

$$E[X^m] = \frac{d^m}{dt^m} G_x(0)$$

Aspettazione e Varianza col metodo della F.G.M.

Oss: ASPETTAZIONE E VARIANZA POSSONO ESSERE CALCOLATE CON LA F.G.M., INFATTI:

$$E[X] = G'_x(0), \quad E[X^2] = G''_x(0) \Rightarrow \text{VAR}(x) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Modi per Caratterizzare X

- 1) $f(x)$.
- 2) $F_x(x)$.
- 3) $\{E[X^m] : m \in \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}\}$.
- 4) $G_x(t) \quad t \in (-\delta, \delta) \quad \text{PER QUALCHE } \delta > 0$.

Relazioni tra le caratterizzazioni

- $f(x) \Rightarrow F_x(x) :$
$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot du$$
- $F_x(x) \Rightarrow f(x) :$
$$f(x) = \frac{d}{dx} \cdot F_x(x)$$
- $G_x(t) \Rightarrow \{E[X^m] : m \in \mathbb{N}\} :$
$$E[X^m] = \frac{d^m}{dt^m} G_x(0)$$
- $\{E[X^m] : m \in \mathbb{N}\} \Rightarrow G_x(t) :$
$$G_x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \cdot E[X^m] \quad |t| < \delta$$

SE CONOSCO TUTTI I MOMENTI DI X ALLORA POSSO CALCOLARE $G_x(t)$.

Esempio calcolo Media e Varianza col metodo della FGM

Sia $X \sim \text{Pois}(\mu)$, $G_x(t) = e^{\mu(e^t - 1)}$:

$$\bullet E[X] = G'_x(0) = e^{\mu(e^0 - 1)} \cdot \mu e^0 = \mu e^{\mu(e^0 - 1) + 0} \xrightarrow{t=0} \boxed{\mu}$$

$$\bullet E[X^2] = G''_x(0) = \mu e^{\mu(e^0 - 1) + 0} \cdot (\mu e^0 + 1) \xrightarrow{t=0} \boxed{\mu(\mu + 1)}$$

$$\bullet \text{VAR}(x) = E[X^2] - (E[X])^2 = \cancel{\mu^2} + \mu - \cancel{\mu^2} = \boxed{\mu}$$

Momenti n-esimi noti delle distribuzioni

MOMENTI DISTRIBUZIONE ESPOENZIALE

$$E[X^m \sim \text{Exp}(\lambda)] = \frac{\lambda \cdot m!}{(\lambda - t)^{m+1}} \xrightarrow{t=0} \frac{m!}{\lambda^m}$$

MOMENTI DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD

$$E[Z^{2k} \sim N(0,1)] = (2k-1)!! = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}$$

$$E[Z^{2k+1} \sim N(0,1)] = 0$$