Wagner Spinato Chittó
201421493

Universidade Federal de Santa Maria - UFSM
Centro de Tecnologia - CT
Departamento de Eletromecânica e Sistemas de Potência - DESP
Prof. Jorge Rodrigo Massing, Dr. Eng.

Eletromagnetismo I - UFSM00068

Lista de Exercícios 1

Álgebra Vetorial

1. Determine o vetor unitário ao longo da direção OP, se O for a origem e P o ponto $(4, -5, 1)$.

$$|OP| = \sqrt{4^2+5^2+1} = \sqrt{42}$$

$$\hat{a}OP = \left(\frac{4}{\sqrt{42}}\hat{a}_x + \frac{-5}{\sqrt{42}}\hat{a}_y + \frac{1\hat{a}_z}{\sqrt{42}}\right) =$$

$$(.6172\hat{a}_x - .7715\hat{a}_y + .1543\hat{a}_z)$$

2. Os vetores posição dos pontos M e N são $\hat{a}_x - 4\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$ e $3\hat{a}_x + 5\hat{a}_y - \hat{a}_z$, respectivamente. Determine o vetor distância orientado de M a N.

$$\vec{MN} = (3\hat{a}_x + 5\hat{a}_y - \hat{a}_z) - (\hat{a}_x - 4\hat{a}_y - 2\hat{a}_z) =$$

$$(2\hat{a}_x + 9\hat{a}_y + \hat{a}_z)$$

3. Os vetores posição dos pontos P e Q são $4\hat{a}_x + 6\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$ e $\hat{a}_x + 8\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$, respectivamente. Determine o vetor distância orientado de P a Q,

$$\vec{PQ} = (\hat{a}_x + 8\hat{a}_y + 3\hat{a}_z) - (4\hat{a}_x + 6\hat{a}_y - 2\hat{a}_z) =$$

$$(-3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 5\hat{a}_z)$$

4. Dados $\vec{A} = 4\hat{a}_y + 10\hat{a}_z$ e $\vec{B} = 2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y$, encontre a projeção de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$.

$$\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{0+12+0}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{12}{\sqrt{13}}$$

5. Determine o ângulo entre $\vec{A} = 2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y + \hat{a}_z$ e $\vec{B} = -\hat{a}_x + 5\hat{a}_y + \hat{a}_z$.

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{-2+15+1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = \frac{14}{\sqrt{378}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{14}{\sqrt{378}}\right)$$

6. Ache o menor ângulo entre $\vec{A} = 10\hat{a}_x + 2\hat{a}_z$ e $\vec{B} = -4\hat{a}_y + 0{,}5\hat{a}_z$ usando tanto o produto escalar quanto o produto vetorial.

PE) $$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{0+0+1}{\sqrt{104}\cdot\sqrt{16.25}} = \frac{1}{\sqrt{1690}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1690}}\right)$$

PV) $$\sin\theta = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 10 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & .5 \end{vmatrix}}{\sqrt{104}\,\sqrt{16.25}} = \frac{+8\hat{a}_x - 5\hat{a}_y - 40\hat{a}_z}{\sqrt{1690}} = \frac{\sqrt{1690}}{\sqrt{1690}} = 1$$

$$\theta = \arcsin(1)$$

7. Considere $\vec{A} = 4\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$ e $\vec{B} = 3\hat{a}_x + \hat{a}_y - \hat{a}_z$. Determine $\vec{A} \times \vec{B}$.

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2-5)\hat{a}_x + (15+4)\hat{a}_y + (4+6)\hat{a}_z =$$

$$-3\hat{a}_x + 19\hat{a}_y + 10\hat{a}_z$$

8. Dados $\vec{A} = 2\hat{a}_x - \hat{a}_z$, $\vec{B} = 3\hat{a}_x + \hat{a}_y$ e $\vec{C} = -2\hat{a}_x + 6\hat{a}_y - 4\hat{a}_z$, mostre que $\vec{C}$ é perpendicular simultaneamente a $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = (2,0,-1)\cdot(-2,6,-4) = -4+0+4 = 0 \checkmark$$

$$\vec{B}\cdot\vec{C} = (3,1,0)\cdot(-2,6,-4) = -6+6+0 = 0 \checkmark$$

9. Determine o produto escalar, o produto vetorial e o ângulo entre os vetores $\vec{P} = 2\hat{a}_x - 6\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$ e $\vec{Q} = 3\hat{a}_y + \hat{a}_z$.

$$\vec{P}\cdot\vec{Q} = (2,-6,5)\cdot(0,3,1) = 0-18+5 = -13$$

$$\vec{P}\times\vec{Q} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-6-15)\hat{a}_x + (-2)\hat{a}_y + (6+6)\hat{a}_z =$$

$$-21\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 12\hat{a}_z$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{|\vec{P}||\vec{Q}|} = \frac{-13}{\sqrt{4+36+25}\cdot\sqrt{10}} = \frac{-13}{\sqrt{650}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-13}{\sqrt{650}}\right)$$

10. Dados os vetores $\vec{A} = 2\hat{a}_x + 5\hat{a}_z$ e $\vec{B} = \hat{a}_x - 3\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$, determine $|\vec{A}\times\vec{B}| + \vec{A}\cdot\vec{B}$.

$$|\vec{A}\times\vec{B}| + \vec{A}\cdot\vec{B} = \left\|\begin{matrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{matrix}\right\| + (2,0,5)\cdot(1,-3,4) =$$

$$|15\hat{a}_x + (5-8)\hat{a}_y - 6\hat{a}_z| + 2 + 20 = \sqrt{15^2+9+36} + 22 =$$

$$\sqrt{270} + 22$$

11. Considere $\vec{A} = \hat{a}_x - \hat{a}_z$, $\vec{B} = \hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z$, $\vec{C} = \hat{a}_y + 2\hat{a}_z$ e determine:

a) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (1,0,-1) \cdot \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1,0,-1) \cdot (1,-2,1) =$

$1 + 0 - 1 = 0$

b) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (0,1,2) = (1,-2,1) \cdot (0,1,2) =$

$0 - 2 + 2 = 0$

c) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (1,0,-1) \times (1,-2,1) = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-2,-2) =$

$-2\hat{a}_x - 2\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$

d) $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (1,-2,1) \times (0,1,2) = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5,-2,1) =$

$-5\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 1\hat{a}_z$

12. Demonstre que $(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = (|\vec{A}||\vec{B}|)^2$.

Propriedade: $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cdot \cos\theta$

$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cdot \sin\theta$

Então: $(|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta)^2 + (|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta)^2 = (|\vec{A}||\vec{B}|)^2$

$(|\vec{A}||\vec{B}|)^2 \cos^2\theta + (|\vec{A}||\vec{B}|)^2 \sin^2\theta = (|\vec{A}||\vec{B}|)^2$

$(|\vec{A}||\vec{B}|)^2 \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (|\vec{A}||\vec{B}|)^2$

$(|\vec{A}||\vec{B}|)^2 \cdot 1 = (|\vec{A}||\vec{B}|)^2$

13. Considere $\vec{A} = \alpha\hat{a}_x + 3\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$ e $\vec{B} = 4\hat{a}_x + \beta\hat{a}_y + 8\hat{a}_z$, determine:

a) Os valores de α e β se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ forem paralelos.

$$\vec{B} = k\vec{A}$$

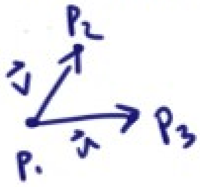
$$\frac{4}{\alpha} = \frac{\beta}{3} = \frac{8}{-2} \rightarrow \frac{8}{-2} = \boxed{-4 = k} \quad \begin{cases} \frac{4}{\alpha} = -4 \rightarrow \alpha = \frac{4}{-4} = -1 \\ \frac{\beta}{3} = -4 \rightarrow \beta = -12 \end{cases}$$

b) A relação entre α e β se $\vec{B}$ for perpendicular a $\vec{A}$.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

$$4\alpha + 3\beta - 16 = 0$$

14. Calcule a área de um triângulo determinado pelos pontos $P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (2,3,4)$ e $P_1 = (3,0,-1)$m.



$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (2-1, 3-1, 4-1) = (1,2,3)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_3} = (3-1, 0-1, -1-1) = (2,-1,-2)$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-4+3)\hat{a}_x + (6+2)\hat{a}_y + (-4-1)a_z =$$

$$-1\hat{a}_x + 8\hat{a}_y - 5\hat{a}_z$$

$$A = \frac{|\vec{v} \times \vec{u}|}{2} = \frac{\sqrt{1+64+25}}{2} = \frac{\sqrt{90}}{2}$$

Lista de Exercícios 2

Sistemas e Transformação de Coordenadas

1. Expresse os seguintes pontos em coordenadas cilíndricas e esféricas

	cilíndricas	esféricas
a) $P = (1, -4, -3)$	$\rho = \sqrt{17}$ $\varphi = \arctan(-4)$ $z = -3$	$r = \sqrt{26}$ $\theta = \arccos(-3/\sqrt{26})$ $\varphi = \arctan(-4)$
b) $Q = (3,0,5)$	$\rho = 3$ $\varphi = \arctan(0)$ $z = 5$	$r = \sqrt{34}$ $\theta = \arccos(5/\sqrt{34})$ $\varphi = \arctan(0)$
c) $R = (-2,6,0)$	$\rho = \sqrt{40}$ $\varphi = \arctan(-3)$ $z = 0$	$r = \sqrt{40}$ $\theta = \arccos(0)$ $\varphi = \arctan(-3)$

2. Dados dois pontos em coordenadas cilíndricas $P = (10{,}60°{,}2)$ e $Q = (5{,}30°, -4)$, determine a distância entre eles.

$$P = (10 \cdot \cos 60°, 10 \cdot \sin 60°, 2)$$

$$Q = (5 \cdot \cos 30°, 5 \cdot \sin 30°, -4)$$

$$d = \sqrt{(5\cos 30° - 10\cos 60°)^2 + (5\sin 30° - 10\sin 60°)^2 - 6^2}$$

$$d = \sqrt{(5\cos 30° - 5)^2 + (2.5 - 10\sin 60°)^2 - 36}$$

3. Se $\vec{A} = 5\hat{a}_\rho + 2\hat{a}_\phi - \hat{a}_z$ e $\vec{B} = \hat{a}_\rho - 3\hat{a}_\phi + 4\hat{a}_z$, determine:

a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 5 - 6 - 4 = -5$

b) $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_\rho & \hat{a}_\phi & \hat{a}_z \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 4\hat{a}_\rho - 21\hat{a}_\phi - 17\hat{a}_z$

c) O ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{-5}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{26}} = \frac{-5}{\sqrt{780}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{780}}\right)$$

d) O vetor unitário normal ao plano que contém ambos $\vec{A}$ e $\vec{B}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \frac{4\hat{a}_\rho - 21\hat{a}_\phi - 17\hat{a}_z}{\sqrt{16+441+289}} = \frac{4}{\sqrt{755}}\hat{a}_\rho + \frac{-21}{\sqrt{755}}\hat{a}_\phi + \frac{-17}{\sqrt{755}}\hat{a}_z$$

e) O vetor projeção de $\vec{A}$ em $\vec{B}$.

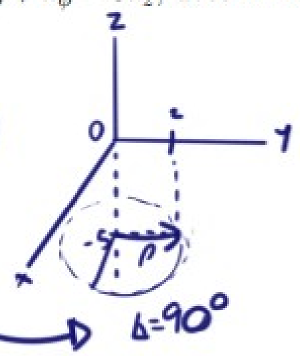
$$\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|^2}\right)\cdot\vec{B} = \frac{-5}{\sqrt{26}^2}\cdot(1,-3,4) = \frac{-5}{26}\hat{a}_\rho + \frac{15}{26}\hat{a}_\phi + \frac{-20}{26}\hat{a}_z$$

4. Dados os vetores $\vec{A} = 2\hat{a}_x + 4\hat{a}_y + 10\hat{a}_z$ e $\vec{B} = -5\hat{a}_\rho + \hat{a}_\phi - 3\hat{a}_z$, determine:

a) $\vec{A} + \vec{B}$ em $P = (0,2,-5)$

$\rho = \sqrt{4} = 2 \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{2}{0}\right)$

DIV(0)



$$\vec{B} = (-5\cos 90° - 1\sin 90°)\hat{a}_x + (-5\sin 90° + 1\cos 90°)\hat{a}_y - 3\hat{a}_z$$

$$\vec{B} = (-5\cdot 0 - 1\cdot 1)\hat{a}_x + (-5\cdot 1 + 1\cdot 0)\hat{a}_y - 3\hat{a}_z = (-1,-5,-3$$

$$\vec{A}+\vec{B} = (2,4,10) + (-1,-5,-3) = \hat{a}_x - \hat{a}_y + 7\hat{a}_z$$

b) O ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ em P

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{-2-20-30}{\sqrt{120}\cdot\sqrt{35}} = \frac{-52}{2\sqrt{1050}} = \frac{-52}{10\sqrt{42}} = \frac{-26}{5\sqrt{42}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-26}{5\sqrt{42}}\right)$$

c) A componente escalar de $\vec{A}$ ao longo de $\vec{B}$ em P.

$$\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{-52}{\sqrt{35}}$$

5. Dado um ponto $P = (-2{,}6{,}3)$ e um vetor $A = 6\hat{a}_x + \hat{a}_y$, determine P em coordenadas cilíndricas e esféricas.

$$\rho = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{6}{-2}\right) = \arctan(-3)$$

$$r = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{3}{7}\right)$$

$$P_{(\rho,\phi,z)} = (\sqrt{40}, \tan^{-1}(-3), 3)$$

$$P(r,\theta,\phi) = (7, \cos^{-1}(3/7), \tan^{-1}(-3)$$

Ainda, expresse o vetor $\vec{A}$ no ponto P em coordenadas cilíndricas e esféricas.

$$\vec{A}_{(\rho,\phi,z)} = \left(6\cdot\frac{-1}{\sqrt{10}} + 1\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\right)a_\rho + \left(-6\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)a_\phi + 0 = \frac{-3}{\sqrt{10}}a_\rho - \frac{19}{\sqrt{10}}a_\phi$$

$$\vec{A}_{(r,\theta,\phi)} = \left(6\cdot\frac{\sqrt{40}^{\,2}}{7}\cdot\frac{-1}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{40}^{\,2}}{7}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\hat{a}_r + \left(6\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{-1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\hat{a}_\theta + \left(-6\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)\hat{a}_\phi =$$

$$\left(\frac{-6}{7}\right)\hat{a}_\rho + \left(\frac{-9}{7\sqrt{10}}\right)\hat{a}_\theta + \left(\frac{-19}{\sqrt{10}}\right)a_\phi$$

Por fim, calcule o módulo do vetor $\vec{A}$ nos três sistemas.

$$|A_{(x,y,z)}| = \sqrt{36+1+0} = \sqrt{37}$$

$$|A(\rho,\varphi,z)| = \sqrt{\frac{9}{10} + \frac{361}{10}} = \sqrt{\frac{370}{10}} = \sqrt{37}$$

$$|A_{(r,\theta,\phi)}| = \sqrt{\left(\frac{36}{49} + \frac{81}{49\cdot 10} + \frac{361}{10}\right)} = \sqrt{37}$$

Lista de Exercícios 3

Cálculo Vetorial

1. Utilizando o comprimento diferencial dl, determine o comprimento de cada uma das seguintes curvas:

   a) $\rho = 3; \pi/4 < \phi < \pi/2; z =$ constante.

   $$d\vec{l} = d\rho\hat{a}_\rho + \rho d\phi\hat{a}_\phi + dz\hat{a}_z = 0 + 3d\phi\hat{a}_\phi + 0$$

   $$L = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 3d\phi = 3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

   b) $r = 1; \theta = 30°; 0 < \phi < 60°$.

   $$d\vec{l} = dr\hat{a}_r + rd\theta\hat{a}_\theta + r\sin\theta d\phi\hat{a}_\phi = 0 + 0 + 1 \cdot .5 \cdot d\phi\hat{a}_\phi$$

   $$L = \int_0^{60° = \pi/3} .5 d\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi/6$$

   c) $r = 4; 30° < \theta < 90°; \phi =$ constante.

   $$d\vec{l} = dr\hat{a}_r + rd\theta\hat{a}_\theta + r\sin\theta d\phi\hat{a}_\phi = 0 + 4d\theta\hat{a}_\theta + 0$$

   $$L = \int_{\pi/6}^{\pi/2} 4d\theta = 4 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

2. Determine o gradiente dos seguintes campos escalares:

   a) $U = 5y - x^3y^2$.

   $$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z = -3x^2y^2\hat{a}_x + (5 - 2yx^3)\hat{a}_y$$

   b) $U = x^2y + xyz$.

   $$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z = (2xy + yz)\hat{a}_x + (x^2 + xz)\hat{a}_y + (xy)\hat{a}_z$$

   c) $V = \rho z \sin\phi + z^2\cos^2\phi + \rho^2$.

   $$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z = (z \cdot \sin\varphi + 2\rho)\hat{a}_\rho + (\rho\sin\varphi + 2z \cdot \cos^2\varphi)\hat{a}_z$$

   $$1/\rho(\rho z\cos\varphi + z^2 \cdot 2\cos\varphi \cdot (-\sin\varphi)\hat{a}_\varphi =$$

   $$(z \cdot \sin\varphi + 2\rho)\hat{a}_\rho + (z \cdot \cos\varphi - 2z^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi)\hat{a}_\varphi + (\rho\sin\varphi + 2z \cdot \cos^2\varphi)\hat{a}_z$$

3. Determine o divergente dos seguintes campos vetoriais e os calcule nos pontos especificados:

a) $\vec{A} = yz\hat{a}_x + 4xy\hat{a}_y + y\hat{a}_z$ em $(1, -2, 3)$.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 + 4x + 0 = 4x \text{ em } 4$$

b) $\vec{B} = \rho z \sin\phi\hat{a}_\rho + 3\rho z^2\cos\phi\hat{a}_\phi$ em $(5, \pi/2, 1)$.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\cdot(\rho\cdot\rho)' z\sin\varphi + \frac{1}{\rho}\left(3\rho z^2(-\sin\varphi)\right) + 0 =$$

$$= 2z\sin\varphi - 3z^2\sin\varphi = z\sin\varphi(2-3z) \text{ em } -1$$

c) $\vec{C} = 2r\cos\theta\cos\phi\hat{a}_r + r^{1/2}\hat{a}_\phi$ em $(1, \pi/6, \pi/3)$.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$= \frac{(r^2\cdot 2r)'\cos\theta\cos\varphi}{r^2} + 0 + 0 = 6\cos\theta\cdot\cos\varphi \text{ em } 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

4. Determine o rotacional dos seguintes campos vetoriais e os calcule nos pontos especificados:

a) $\vec{A} = yz\hat{a}_x + 4xy\hat{a}_y + y\hat{a}_z$ em $(1, -2, 3)$.

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{a}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{a}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{a}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$= \hat{a}_x(1-0) + \hat{a}_y(y-0) + \hat{a}_z(4y-z) = \hat{a}_x + y\hat{a}_y + (4y-z)\hat{a}_z \text{ em } \hat{a}_x - 2\hat{a}_y - 11\hat{a}_z$$

b) $\vec{B} = \rho z\sin\phi\hat{a}_\rho + 3\rho z^2\cos\phi\hat{a}_\phi$ em $(5, \pi/2, 1)$.

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{a}_\rho & \rho\hat{a}_\phi & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} = \frac{\hat{a}_\rho}{\rho}\left(\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi\rho}{\partial z}\right) + \hat{a}_\varphi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\frac{\rho}{\rho} + \frac{\hat{a}_z}{\rho}\left(\frac{\partial A_\varphi\rho}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= (0 - 6z\rho\cos\varphi)\hat{a}_\rho + (\rho\sin\varphi - 0)a_\varphi + \left(6\frac{\rho}{\rho}z^2\cos\varphi - \frac{\rho}{\rho}z\cos\varphi\right)a_z =$$

$$= (-6z\rho\cos\varphi)\hat{a}_\rho + (\rho\sin\varphi)a_\varphi + (z\cos\varphi(6z-1))a_z \text{ em } 5\hat{a}_\varphi$$

c) $\vec{C} = 2r\cos\theta\cos\phi\hat{a}_r + r^{1/2}\hat{a}_\phi$ em $(1, \pi/6, \pi/3)$.

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\theta & r\sin\theta\hat{a}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\hat{a}_r}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial r\sin\theta A_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial rA_\theta}{\partial\varphi}\right) + \frac{\hat{a}_\theta}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial r\sin\theta A_\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\hat{a}_\varphi}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

$$= \frac{\hat{a}_r}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} r\sin\theta\cdot r^{1/2} + 0\right) + \frac{\hat{a}_\theta}{r\sin\theta}\left(-2r\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial}{\partial r} r^{3/2}\sin\theta\right) + \frac{\hat{a}_\varphi}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

$$= \frac{\hat{a}_r}{r\sin\theta}\left(r^{1/2}\cdot\cos\theta\right) + \frac{\hat{a}_\theta}{\sin\theta}\left(-2r\cos\theta\cdot\sin\varphi - \frac{3}{2}r^{1/2}\sin\theta\right) + \frac{\hat{a}_\varphi}{r}\left(+2r\sin\theta\cos\varphi\right)$$

$$= \hat{a}_r\left(r^{-1/2}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) + \hat{a}_\theta\left(-2r\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi - \frac{3r^{1/2}}{2}\right) + \hat{a}_\varphi\left(2\sin\theta\cos\varphi\right)$$

$$\text{em } \hat{a}_r\left(2\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\right) + \hat{a}_\theta\left(-4\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) - \tfrac{3}{2}\right) + \hat{a}_\varphi\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

5. Determine o laplaciano dos seguintes campos escalares:

a) $U = x^2y + xyz$.

$$\nabla^2V = \frac{\partial^2V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2V}{\partial z^2} = 2y$$

b) $V = \rho z\sin\phi + z^2\cos^2\phi + \rho^2$.

$$\nabla^2V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2V}{\partial z^2}$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho z\sin\varphi + 2\rho^2\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\rho z\cos\phi + z^2(2\cos\phi(-\sin\phi))\right) + 2\cos^2\varphi$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(z\sin\varphi + 4\rho\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(-\rho z\sin\varphi + 2z^2\sin\varphi\cdot -\cos\varphi\right) + 2\cos^2\varphi$$

$$= \frac{z\sin\varphi}{\rho} + 4 + \frac{1}{\rho^2}\left(-\rho z\sin\varphi + 2z^2\cdot(\cos\varphi\cdot -\cos\varphi + \sin\varphi\cdot\sin\varphi\right) + 2\cos^2\varphi$$

$$= \frac{z\sin\varphi}{\rho} + 4 - \frac{z\sin\varphi}{\rho} + \frac{2z^2}{\rho^2}\left(-\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + 2\cos^2\varphi$$

$$= 4 + \frac{2z^2}{\rho^2}\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) + 2\cos^2\varphi$$

6. Dado que $\vec{H} = x^2\hat{a}_x + y^2\hat{a}_y$, calcule $\int \vec{H} \cdot d\vec{l}$, considerando L ao longo da curva $y = x^2$, de $(0,0,0)$ até $(1,1,0)$.

$$dl = dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y = dx\,\hat{a}_x + 2x\,dx\,\hat{a}_y$$

$$H dl = x^2 dx + y^2(2x dx) = x^2 dx + x^4 \cdot 2x dx = x^2 dx + 2x^5 dx$$

$$\int_0^1 (x^2 + 2x^5) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^6}{6}\right)\Big|_0^1 = 1/3 + 1/3 = 2/3$$

7. Se $\vec{H} = (x-y)\hat{a}_x + (x^2 + zy)\hat{a}_y + 5yz\hat{a}_z$, calcule $\int \vec{H} \cdot d\vec{l}$ ao longo do caminho $(1,0,0) \to (0,0,0) \to (0,0,1) \to (0,2,0)$.

$$\int_1^0 x dx + \int_0^1 z d_z + \int_0^1 (6t, 6t^2) dt =$$

$$\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 0 + (-3t^2 + 2t^3)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} - 3 + 2 = -\frac{3}{2}$$

8. Determine o vetor unitário normal à superfície $S = x^2 + y^2 - z$ no ponto (1,3,0).

$$\nabla S = (2x, 2y, -1)$$

$$|\nabla S| = \frac{2}{\sqrt{41}}\hat{a}_x + \frac{6}{\sqrt{41}}\hat{a}_y - \frac{1}{\sqrt{41}}\hat{a}_z$$

9. Mostre que o campo vetorial $\vec{F} = y^2 z\hat{a}_x + 2xyz\hat{a}_y + (2z + xy^2)\hat{a}_z$ é um campo conservativo e encontre o campo escalar V associado tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} V$.

$$(\nabla \times F)_x = \partial_y(2z + xy^2) - \partial_z(2xyz) = 2xy - 2xy = 0$$

$$(\nabla \times F)_y = \partial_z(y^2 z) - \partial_x(2z + xy^2) = y^2 - y^2 = 0$$

$$(\nabla \times F)_z = \partial_x(2xyz) - \partial_y(y^2 z) = 2yz - 2yz = 0$$

$$V = xy^2 z + g(y,z)$$

$$g = g(z) = z^2 + c$$

$$V(x,y,z) = xy^2 z + z^2 + c$$

Use o resultado para calcular $\int \vec{F} \cdot d\vec{l}$ do ponto (2,1,1) até o ponto (3,2,2).

$$\int F d_v = V(3,2,2) - V(2,1,1) = (3 \cdot 4 \cdot 2 + 4) - (2 \cdot 1 \cdot 1 + 1) = 28 - 3 = 25$$

10. Seja $\vec{D} = \rho^2 \cos^2\phi \hat{a}_\rho + z \sin\phi \hat{a}_\phi$, determine o fluxo líquido de $\vec{D}$ sobre a superfície fechada de um cilindro definido por $0 \le z \le 1$, $\rho = 4$. Verifique o teorema da divergência para este caso.

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \cdot \vec{D}\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^1 3\rho^2 \cos^2\varphi \, dz\, d\rho\, d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^1 \left(z\cos^2\varphi + \frac{z}{\rho}\cos\varphi\right)\rho\, dz\, d\rho\, d\varphi$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot \frac{4^3}{3} \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0 = 64\pi$$

11. Verifique o teorema da divergência para a função $A = r^2 \hat{a}_r + r \sin\theta \cos\phi \hat{a}_\phi$ sobre a superfície de um quadrante de hemisfério definido por $0 < r < 3; 0 < \phi < \pi/2; 0 < \theta < \pi/2$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^3 (4r - \sin\varphi) r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{81\pi}{2} - 9$$

12. Demonstre que $\vec{B} = (y + z\cos(xz))\hat{a}_x + x\hat{a}_y + x\cos(xz)\hat{a}_z$ é conservativo, sem calcular nenhuma integral.

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial y} x\cos(xz) - \frac{\partial}{\partial z} x, + \frac{\partial}{\partial z}(y + z\cos(xz)) - \frac{\partial}{\partial x}(x\cos(xz)),$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y}(y + z\cos xz) =$$

$$= (0-0)\hat{a}_x + \left(\cos(xz) - xz\sin(xz) - \cos(xz) + xz\sin(xz)\right)\hat{a}_y + (1-1)\hat{a}_z =$$

$$0\hat{a}_x + 0\hat{a}_y + 0\hat{a}_z \Rightarrow \nabla \times \vec{B} = 0 \text{ CONSERVATIVO!}$$

13. Seja a função vetorial $\vec{A} = \rho\cos\phi \hat{a}_\rho + z\sin\phi \hat{a}_z$, verifique o teorema de Stokes para o caminho fechado L definido por $0 \le \rho \le 2$; $0 \le \phi \le 60°$; $z = 0$.

$$\oint \vec{A}\, d\vec{l} = \int_0^2 \rho\, d\rho + \int_0^{\pi/3} 0\, d\phi + \int_2^0 \frac{\rho}{2} d\rho = 2 + 0 - 1 = 1$$

$$\nabla \times \vec{A} = \sin\varphi\, \hat{a}_z = 1$$

Lista de Exercícios 4

Lei de Coulomb e Intensidade de Campo Elétrico

1. Duas cargas pontuais de 5nC e −2nC estão localizadas em $(2, 0, 4)$ e $(-3, 0, 5)$, respectivamente.

   a) Determine a força sobre uma carga pontual de 1nC localizada em $(1, -3, 7)$.

   b) Encontre o campo elétrico $\vec{E}$ em $(1, -3, 7)$.

$v_1 = P - v_1 = (1-2, -3, 7-4) = (-1, -3, 3)$ $\quad |v_1| = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}$

$v_2 = P - v_2 = (1+3, -3, 7-5) = (4, -3, 2)$ $\quad |v_2| = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}$

Seja k definido por $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, para todos exercícios seguintes

$$E_1 = \frac{kQ_1 v_1}{|v_1|^3} = \frac{k \cdot 5}{19\sqrt{19}} \cdot (-1, -3, 3) = \frac{-5k}{19\sqrt{19}} \hat{a}_x - \frac{15k}{19\sqrt{19}} \hat{a}_y + \frac{15}{19\sqrt{19}} \hat{a}_z$$

$$E_2 = \frac{kQ_2 v_2}{|v_2|^3} = \frac{-2k}{29\sqrt{29}} \cdot (4, -3, 2) = \frac{-8k}{\sqrt{29}^3} \hat{a}_x + \frac{6k}{\sqrt{29}^3} \hat{a}_y - \frac{4k}{\sqrt{29}^3} \hat{a}_z$$

$$\vec{E} = E_1 + E_2 = \left(\frac{-5k}{19\sqrt{19}} - \frac{8k}{\sqrt{29}^3}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{6k}{\sqrt{29}^3} - \frac{15k}{19\sqrt{19}}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{15}{19\sqrt{19}}\hat{a}_z - \frac{4k}{\sqrt{29}^3}\hat{a}_z\right)$$

$$F = q \cdot E = 1 \cdot E = \left(\frac{-5k}{19\sqrt{19}} - \frac{8k}{\sqrt{29}^3}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{6k}{\sqrt{29}^3} - \frac{15k}{19\sqrt{19}}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{15}{19\sqrt{19}}\hat{a}_z - \frac{4k}{\sqrt{29}^3}\hat{a}_z\right)$$

2. Duas cargas pontuais Q_1 e Q_2 estão localizadas em (4,0, − 3) e (2,0,1), respectivamente. Se $Q_2 = 4$nC, determine Q_1 tal que:

   a) O campo $\vec{E}$ em (5,0,6) não contenha componente em z.

$v_1 = (1, 0, 9)$ $\quad |v_1| = \sqrt{82}$

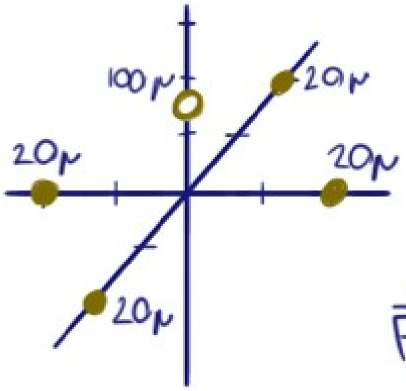
$v_2 = (3, 0, 5)$ $\quad |v_2| = \sqrt{34}$

$$Q_1 \cdot \frac{v_{1z}}{R_1} + Q_2 \cdot \frac{v_{2z}}{R_2} = 0 \Rightarrow Q_1 = -Q_2 \frac{v_{2z}}{v_{1z}} \cdot \frac{R_1}{R_2} = -4 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{\sqrt{82}^3}{\sqrt{34}^3} = \frac{20\sqrt{82}^3}{9\sqrt{34}^3} \text{nC}$$

   b) A força sobre uma carga de teste em (5,0,6) não tenha componente em x.

$$Q_1 = -4 \cdot 3 \frac{\sqrt{82}^3}{\sqrt{34}^3} = \frac{-12\sqrt{82}^3}{\sqrt{34}^3} \text{nC}$$

3. Quatro cargas pontuais de 20μC cada estão fixadas sobre os eixos x e y em ± 4m. Encontre a força sobre uma quinta carga pontual de 100μC localizada em (0,0,3)m.



DISTÂNCIA q à qualquer Q:

$r = \sqrt{16+9} = 5\text{m}$

$a_r = \frac{(-4,0,3)}{5} = (-4/5, 0, 3/5)$

$\vec{F}_{Qq} = 4K \cdot \frac{qQ}{r^2} a_r = 4K \frac{20\mu \cdot 100\mu}{5^2} \cdot \frac{3}{5} a_z = K \cdot \frac{0{,}024}{5^3}$

4. Determine a carga total:

a) Sobre uma linha dada por $0 \leq x \leq 5$m, se $\rho_l = 12x^2$mC/m.

$\rho = 12x^2 \, mC/m$

$Q = \int_0^5 \rho \, dx = \int_0^5 12x^2 \, dx = 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = 4 \cdot 125 = 500 \, mC$

b) Sobre um cilindro dado por $\rho = 3$, $0 \leq z \leq 4$m, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $\rho_s = \rho z^2 \text{nC/m}^2$.

$Q = \int_0^4 \int_0^{2\pi} (3z^2)(3) \, d\varphi \, dz = 3\left[z^3\right]_0^4 \cdot 2\pi =$

$Q = 2\pi \cdot 3 \cdot 4^3 = 6\pi \cdot 64 = 384 \, nC$

c) Dentro de uma esfera com $r = 4$m, se $\rho_v = \frac{10}{r \sin\theta}$C/m^3

$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^4 \frac{10}{r \cdot \sin\theta} \cdot r^2 \cdot \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^4 10r \, dr \, d\theta \, d\varphi$

$Q = 10 \frac{r^2}{2}\Big|_0^4 \cdot \theta \Big|_0^{\pi} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = 5 \cdot 4^2 \cdot \pi \cdot 2\pi = 160\pi^2$

5. Encontre a carga total contida em um segmento cônico de esfera definido por $0 \leq r \leq 2\text{m}$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$, $0 \leq \phi < 2\pi$, dado que $\rho_v = 10r^2\cos^2\theta \text{mC/m}^3$.

$$Q = \int_v \rho_v dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2} 10r^2 \cos^2\theta \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$Q = 10\pi \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta}_{u = \cos\theta \;\rightarrow\; \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} u^2 du = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{4-\sqrt{2}}{12}} \cdot \int_0^2 r^4 dr$$

$$Q = 10\pi \cdot 2\pi \cdot \frac{4-\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{32}{5} = 20\pi^2 \cdot \frac{32 - 8\sqrt{2}}{15} \text{ mC}$$

6. Uma linha infinita uniformemente carregada com 10nC/m está posicionada em $x = 0$, $y = 2$, enquanto uma outra linha infinita, também uniformemente carregada, com -10nC/m está posicionada em $x = 0$, $y = -2$. Determine $\vec{E}$ na origem.

$\vec{E}$ na origem é $k \cdot 20$nC na direção $(-\hat{a}_y)$

7. Um anel posicionado em $z = 0$, de raio $\rho = 2$m, está carregado com uma densidade linear de cargas $\rho_l = 5\mu$C/m. Determine o valor de $\vec{E}$ no ponto (0,0,3).

$$E = K \cdot \frac{Qh}{(a^2+h^2)^{3/2}} \hat{a}_z = K \cdot \frac{20\pi \cdot 3}{(4+9)^{3/2}} \hat{a}_z = \frac{K \cdot 60\pi}{\sqrt{13}^3} \hat{a}_z \; \mu\text{V/m}$$

8. Um disco circular de raio a está uniformemente carregado com ρ_sC/m^2. Considere o disco no plano $z = 0$ com seu eixo ao longo de z.

a) Demonstre que, em um ponto $(0,0,h)$, $\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\left\{1 - \frac{h}{(h^2+a^2)^{1/2}}\right\}\hat{a}_z$

$$\vec{E} = K \cdot \int \frac{\rho_s ds \, \vec{R}}{|\vec{R}|^3} \hat{a}_z = K \cdot \int \frac{\rho_s ds}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \cdot \rho h \, d\rho \, \hat{a}_z = K \cdot \rho_s \cdot z \int_0^a \frac{2\pi \cdot \rho \, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \hat{a}_z$$

$$\vec{E} = K 2\pi \rho_s \cdot z \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\right) = K 2\pi \rho_s \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right) \hat{a}_z$$

b) Se $a \ll h$, demonstre que $\vec{E}$ é similar ao campo de uma carga pontual.

$$\sqrt{h^2+a^2} = h\sqrt{1 + \frac{a^2}{h^2}} \approx h\left(1 + \frac{a^2}{2h^2}\right)$$

$$\text{cm } E \approx K 2\pi \cdot \frac{a^2}{2h^2} = \rho_s \frac{a^2}{h^2} k\pi \;\rightarrow\; Q = \pi a^2 \rho_s, \quad E \approx k \cdot \frac{Q}{h^2}$$

9. Encontre a força sobre uma carga pontual de 50μC localizada em (0,0,5)m devido à carga de $500\pi\mu$C, distribuída uniformemente sobre o disco circular de raio $r \leq 5$m, colocado na origem $z = 0$m.

$$\sigma = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{500\pi \mu}{\pi 5^2} = 20 \mu C/m^2$$

$$E = 2k\pi\sigma\left(1 - \frac{h^2}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) = k \cdot 40\pi \cdot (1 - 1/\sqrt{2})\, \hat{a}_z = \mu N/C$$

$$F = q\vec{E} = 2k\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) nN$$

10. Cargas estão situadas em um plano na forma de quadrado perfeito definido por $-2 \leq x \leq 2$m, $-2 \leq y \leq 2$m e $z = -3$m, com densidade de cargas $\rho_s = 2(x^2 + y^2 + 9)^{3/2}$nC/m^2. Calcule o campo elétrico $\vec{E}$ na origem.

$$\vec{E} = k \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \frac{2(x^2+y^2+3^2)^{3/2}}{\sqrt{x^2+y^2+3^2}^3} \cdot 3\,\hat{a}_z\, dx\, dy$$

$$\vec{E} = 6k \cdot x\Big|_{-2}^{2}\, y\Big|_{-2}^{2} = 6k \cdot 4 \cdot 4 = 96k\ nN/C$$

11. Uma superfície infinita carregada com densidade superficial de cargas $-\rho_s$ está localizada no plano xy em $z = 0$m, enquanto uma superfície infinita carregada com densidade superficial de cargas $+\rho_s$ está localizada no plano xy em $z = 2$m. Determine $\vec{E}$ em todas as regiões.

• $z < 0$

$$E = (2k\pi \cdot -\rho_s\, \hat{a}_z + 2k\pi \cdot \rho_s)\, \hat{a}_z = 0$$

• $0 < z < 2$

$$E = (2k\pi \cdot \rho_s + 2k\pi \cdot \rho_s)\, \hat{a}_z = 4k\pi \rho_s\, \hat{a}_z = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\, \hat{a}_z$$

• $z > 2$

$$E = (2k\pi \cdot \rho_s\, \hat{a}_z + 2k\pi \cdot (-\rho_s))\hat{a}_z = 0$$

Lista de Exercícios 5

Densidade de Fluxo Elétrico e Lei de Gauss

1. Uma carga pontual de 30nC está localizada na origem, enquanto um plano infinito em $y = 3$ está carregado com 10nC/m^2. Determine $\vec{D}$ em (0,4,3).

$$D_q = \frac{Q}{4\pi r^2} a_R = \frac{30n}{4\pi\, 25}\left(\frac{4}{5}\hat{a}_y + \frac{3}{5}\hat{a}_z\right)$$

$$D_q = \left(\frac{12}{50\pi}\hat{a}_y + \frac{9}{50\pi}\hat{a}_z\right) nC/m^2$$

$$D_{plano} = \frac{\rho_s}{2}\hat{a}_y = \frac{10n}{2}\hat{a}_y = 5\,\hat{a}_y \; nC/m^2$$

$$D = D_q + D_{plano} = \left(\frac{12}{50\pi} + 5\right)\hat{a}_y + \left(\frac{9}{50\pi}\right)\hat{a}_z \; nC/m^2$$

2. Se $\vec{D} = (2y^2 + z)\hat{a}_x + 4xy\hat{a}_y + x\hat{a}_z \text{C/m}^2$, determine

a) A densidade volumétrica de cargas em (−1,0,3)

$$\rho v = \nabla D = \frac{\partial(2y^2+z)}{\partial x} + \frac{\partial(4xy)}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z}$$

$$\rho v = 0 + 4x + 0 = 4x$$

$$\rho v(-1,0,3) = -4 \; C/m^3$$

b) A carga total encerrada no cubo definido por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

$$Q = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 4x \, dx\,dy\,dz = 4\,\frac{x^2}{2}\cdot 1 \cdot 1 = 2C$$

3. Uma distribuição de cargas no espaço livre tem $\rho_v = 2r\text{nC/m}^3$ para $0 \leq r \leq 10\text{m}$ e é zero em todos os outros pontos do espaço.

Determine $\vec{E}$ em $r = 2\text{m}$.

$$Q = \oint \vec{D}\, ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2} 2r \cdot r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi = 2\frac{r^4}{4}\Big|_0^2 \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} \cdot 2\pi$$

$$= -8\cos\pi \cdot (+2) \cdot 2\pi = 32\pi$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{Q\hat{a}_r \cdot k}{r^2} = 3\frac{2kn\pi}{4} = 8k\pi\, \hat{a}_r \text{ nV/m}$$

Determine $\vec{E}$ em $r = 12\text{m}$.

$$Q = \int_0^{10} 2r \cdot 4\pi r^2\, dr = 8\pi \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^{10} = 20\pi\mu C$$

$$E = \frac{Q\hat{a}_r \cdot k}{r^2} = \frac{20\pi \cdot k}{144} = \frac{10\pi k}{72} \text{ KV/m}$$

4. Determine a densidade de cargas devido a cada uma das seguintes densidades de fluxo elétrico:

a) $\vec{D} = 8xy\hat{a}_x + 4x^2\hat{a}_y \text{C/m}^2$

$$\nabla\vec{D} = \frac{\partial\, 8xy}{\partial x} + \frac{\partial\, 4x^2}{\partial y} + \frac{\partial\, 0}{\partial z} = 8y \text{ C/m}^3$$

b) $\vec{D} = 4\rho\sin\phi\hat{a}_\rho + 2\rho\cos\phi\hat{a}_\phi + 2z^2\hat{a}_z \text{C/m}^2$

$$\nabla\vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\, 4\rho^2\sin\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\, 2\rho\cos\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\, 2z^2}{\partial z} = 8\sin\varphi - 2\sin\varphi + 4z =$$

$$= 6\sin\varphi + 4z \text{ C/m}^2$$

c) $\vec{D} = \frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{a}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{a}_\theta \text{C/m}^2$

$$\nabla D = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\,(r^2 \cdot 2\cos\theta \cdot r^{-3})}{\partial r} + \frac{\partial\, \sin\theta \cdot \sin\theta \cdot r^{-3}}{\partial\theta} + 0 =$$

$$= -\frac{2\cos\theta}{r^4} + \frac{2\cos\theta}{r^4} + 0 = 0 \text{ C/m}^3$$

5. Seja $\rho_v = \begin{cases} \dfrac{10}{r^2}\text{mC/m}^3 & , 1\text{m} < r < 4\text{m} \\ 0 & , r > 4\text{m} \end{cases}$

a) Determine o fluxo líquido que atravessa as superfícies $r = 2\text{m}$ e $r = 6\text{m}$.

$$Q(2) = \int_1^2 \rho_v \, dv = \frac{10}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \Big|_1^2 = 40\pi(2-1) = 40\pi \text{ mC}$$

$$Q(6) = \int_1^4 \rho_v \, dv = \frac{10}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \Big|_1^4 = 40\pi(4-1) = 120\pi \text{ mC}$$

b) Determine $\vec{D}$ em $r = 1\text{m}$ e em $r = 5\text{m}$.

$$D_r(1) = 0$$

$$D_r(5) = \frac{120\pi}{4\pi 5^2} = 1{,}2\,\hat{a}_r \text{ mC/m}^2$$

6. Uma densidade volumétrica de cargas uniforme ρ_v é definida tal que

$$\rho_v = \begin{cases} 80\mu\text{C/m}^3 & , 8\text{mm} < r < 10\text{mm} \\ 0 & , r < 8\text{mm} \end{cases}$$

a) Determine a carga total dentro da superfície de raio $r = 10\text{mm}$.

$$Q = \rho_v \cdot V = \mu 80 \cdot \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3) = \mu\frac{320\pi}{3}(0{,}01^3 - 0{,}008^3) =$$

$$Q = \mu\frac{320\pi}{3} \cdot (1\mu - 0{,}512\mu) = \mu\frac{320\pi}{3} \cdot 0{,}488\mu =$$

$$Q = \frac{320}{3} \cdot 0{,}488 \; \mu^2 \text{ nC} = 163 \text{ pC}$$

b) Determine $\vec{D}$ em $r = 10\text{mm}$.

$$D_r = \frac{163}{4\pi r^2} p = \frac{163 p}{4\pi \cdot 10^{-4}} = \frac{1{,}63\mu}{4\pi} \approx \frac{410}{\pi} \text{ nC}$$

c) Determine $\vec{D}$ em $r = 20\text{mm}$.

$$D_r = \frac{163 p}{4\pi(0{,}020)^2} = \frac{163 p}{4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-4}} = \frac{1{,}63\mu}{16\pi} \approx \frac{0{,}1}{\pi} \mu\text{C}$$

7. Um disco circular de raio 4m e densidade $\rho_s = 12 \sin\phi \mu\text{C/m}^2$ está envolto por uma superfície fechada S. Que fluxo total cruza S?

$$\Psi = Q = \iint \rho_s dS = \int_0^{2\pi}\int_0^a 12 \sin\varphi \, \rho d\rho d\varphi =$$

$$= 12 \cdot 1 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot 0 = 0$$

8. Determine a carga contida no paralelepípedo de dimensões $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq\ y \leq\ 2$, $0 \leq z \leq 3$ calculando ambos os lados do teorema da divergência de Gauss considerando a densidade de fluxo elétrico $\vec{D} = 2xy\hat{a}_x + x^2\hat{a}_y \text{C/m}^2$.

$\rightarrow$ $$\nabla D = \frac{\partial 2xy}{\partial x} + \frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 2y + 0 + 0 = 2y$$

$$Q = \int_0^1\int_0^2\int_0^3 2y \, dz dy dx = \int_0^1\int_0^2 6y = 6 \cdot \int_0^1 dx \int_0^2 y \, dy =$$

$$= 6x\Big|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = 6 \cdot 1 \cdot \frac{4}{2} = 12 \text{ C}$$

$\leftarrow$ $\cdot\ x = 0,\ dS = -a_x dy dz,\ D \cdot dS = -2xy \, dy dz = 0$

$\cdot\ x = 1,\ dS = a_x dy dz,\ D \cdot dS = 2xy \, dy dz =$

$$\int_0^2\int_0^3 2 \cdot 1 y \, dz dy = 6\int_0^2 y \, dy = 6 \cdot \frac{4}{2} = 12$$

$\cdot\ y = 0,\ dS = -a_y dx dz,\ D \cdot dS = -x^2 dx dz =$

$$\int_0^1\int_0^3 -x^2 dz dx = -\int_0^1 3x^2 dx = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$$

$\cdot\ y = 2,\ dS = a_y dx dz,\ D dS = x^2 dx dz =$

$$\int_0^1\int_0^3 x^2 dz dx = \int_0^1 3x^2 dx = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$\cdot\ z = 0,\ dS = -a_z dx dy,\ D dS = 0$

$\cdot\ z = 3,\ dS = a_z dx dy,\ D dS = 0$

$$\Sigma = 12 - 1 + 1 = 12$$

9. Três superfícies esféricas com raios $r_1 = 2\text{m}$, $r_2 = 4\text{m}$ e $r_3 = 6\text{m}$ estão carregadas com densidade superficial de cargas uniforme ρ_s de valores 20nC/m^2, -4nC/m^2 e ρ_{s0}, respectivamente.

$Q = 4\pi R^2 \rho_s$

$Q_1 = 4\pi (2)^2 (20\,n) = 320\pi\ nC$

$Q_2 = 4\pi (4)^2 (-4\,n) = -256\pi\ nC$

$Q_3 = 4\pi (6)^2 \rho_{s0} = 144\pi \rho_{s0}$

a) Determine $\vec{D}$ em $r = 1\text{m}$ $(r < r_1) \rightarrow Q = 0$

$D = \dfrac{Q(r)}{4\pi r^2} = 0$

Determine $\vec{D}$ em $r = 3\text{m}$ $(r_1 < r < r_2) \rightarrow Q = Q_1$

$D = \dfrac{320\pi}{4\pi 9} = \dfrac{320}{36}\ nC$

Determine $\vec{D}$ em $r = 5\text{m}$. $(r_2 < r < r_3) \rightarrow Q = Q_1 + Q_2)$

$D = \dfrac{(320\pi - 256\pi)}{4\pi 5^2} = \dfrac{64}{100} = 640\,\hat{a}_r\ \mu C$

b) Determine ρ_{s0} tal que $\vec{D} = 0$ em $r = 7\text{m}$. $(r > r_3)$ $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$D_r(7) = 0$

$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$

$320\pi - 256\pi + 144\pi \rho_{s0} = 0$

$\rho_{s0} = -\dfrac{64}{144} = \dfrac{-4}{9}\ nC/m^2$

10. Dado $\vec{D} = \frac{10r^3}{4}\hat{a}_r$ em coordenadas esféricas, desenvolva os dois lados do teorema da divergência para o volume limitado por $r = 10$m.

$$\nabla D = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{10}{4}r^5 = \frac{25}{2}r^2$$

$\leftarrow$ $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{10}\frac{25}{2}r^2r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{25}{2}\cdot 4\pi\int_0^{10}r^4\, dr = 50\pi\cdot\frac{10^5}{5} = \pi MC$$

$\rightarrow$ $$\Phi = \iint D\cdot ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D_r\cdot 10 r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{10}{4}\cdot 10^3\cdot 4\pi\, 10^2 = 10^6\cdot\pi = \pi MC$$

11. Dado $\vec{D} = 10\sin\theta\hat{a}_r + 2\cos\theta\hat{a}_\phi$ em coordenadas esféricas, desenvolva os dois lados do teorema da divergência para o volume limitado por $r = 2$m.

$$\nabla\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2D_r + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial \sin\theta D_\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(10r\sin\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial(2\sin\theta\cos\theta)}{\partial\theta} =$$

$$\nabla\vec{D} = \frac{1}{r}\left(20\sin\theta + \frac{2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\sin\theta}\right)$$

$\leftarrow$ $$\int_v(\nabla D)dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2} r\,(18\sin^2\theta + 2\cos^2\theta)\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\int_v(\nabla D)dv = 2\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{18\pi}{2} + \frac{2\pi}{2}\right) = 4\pi\cdot 10\pi = 40\pi^2 C$$

$\rightarrow$ $$\Phi = \iint D_R r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 10\sin\theta\cdot 4\sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= 40\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta = 40\cdot 2\pi\cdot\frac{\pi}{2} = 40\pi^2 C$$

Lista de Exercícios 6

Potencial Elétrico

1. O campo elétrico no espaço livre é dado por $\vec{E} = 2xyz\hat{a}_x + x^2z\hat{a}_y + x^2y\hat{a}_z$V/m. Calcule o trabalho necessário para mover uma carga de 2μC de $(2,1,-1)$ até $(5,1,2)$.

$E = 2xyz\ \hat{a}_x + x^2\ \hat{a}_y + x^2y^2\ \hat{a}_z$

$q = 2\mu$

$r(t) = A + t(B-A) \rightarrow (3,0,3)$

$x = 2+3t$
$y = 1$
$z = -1+3t$
$dl = (3,0,3)dt$

$E_x = 2(2+3t)\cdot 1\cdot(-1+3t) = 2u(u-3)$ / $u = 2+3t$

$E_y = (2+3t)^2 = u^2$

$E_z = (2+3t)^2 = u^2$

$E\cdot dl = 3E_x + 3E_z = 3(2u(u-3)+u^2) = 3(3u^2-6u)$

$E\cdot dl = 81t^2 + 54t$

$\int_0^1 (81t^2+54t)dt = 81\cdot\frac{1}{3} + 54\cdot\frac{1}{2} = 27+27 = 54$

$W = -q\int_A^B El = -2\mu\cdot 54 = -108\mu J$

2. Em um campo elétrico $\vec{E} = 20r\sin\theta\hat{a}_r + 10r\cos\theta\hat{a}_\theta \text{V/m}$, determine a energia empregada para transferir uma carga de 10nC

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -20r\sin\theta \rightarrow V = -10r^2\sin\theta$$

$$W = q\Delta V = q(-10)(r_B^2\sin\theta_B - r_A^2\sin\theta_A)$$

a) De $A = (5{,}30°{,}0°)$ até $B = (5{,}90°{,}0°)$.

$$W = 10n(-10)(5^2 \cdot \sin 90° - 5^2 \cdot \sin 30°) = -100n \cdot (25 - 12{,}5)$$
$$W = -1250 nJ$$

b) De $A = (5{,}30°{,}0°)$ até $C = (10{,}30°{,}0°)$.

$$W = -100n(100\sin 30° - 25\sin 30°) = -100n \cdot (75/2)$$
$$W = -3750 nJ$$

c) De $A = (5{,}30°{,}0°)$ até $D = (5{,}30°{,}60°)$.

$$W = -100n(0) = 0 J$$

d) De $A = (5{,}30°{,}0°)$ até $E = (10{,}90°{,}60°)$.

$$W = -100n(25\sin 30° - 100\sin 90) = -100n(87{,}5)$$
$$W = -8750 nJ$$

3. Se uma carga pontual de 3μC estiver localizada na origem $(0{,}0{,}0)$, uma carga de -4μC estiver localizada em $(2, -1{,}3)$ e uma carga de 5μC estiver localizada em $(0{,}4, -2)$, determine o potencial em $(-1{,}5{,}2)$, considerando que $V(\infty) = 0$.

$$V = \int \frac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon_0 r} = k\int_v \frac{\rho_v(r')}{|r - r'|} dV' = k\sum_i \left(\frac{Q_i}{|r - r'|}\right)$$

$Q_A = 3\mu C \quad r_A = \sqrt{30}$

$Q_B = -4\mu C \quad r_B = \sqrt{46}$

$Q_C = 5\mu C \quad r_C = \sqrt{18}$

$$V = k\left(\frac{3\mu}{\sqrt{30}} + \frac{-4\mu}{\sqrt{46}} + \frac{5\mu}{\sqrt{18}}\right) V$$

4. Uma carga pontual de 5nC está localizada na origem. Se $V = 2$V em $(0,6,-8)$, determine:

a) O potencial em $A = (-3,2,6)$.

Seja k definido por $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, para todos exercícios seguintes

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = k\cdot\frac{Q}{r} + C \rightarrow C = 2 - \frac{kq}{10}$$

$$V_A = \frac{k\cdot Q}{\sqrt{9+4+36}} + C = \frac{kq}{7} + 2 - \frac{kq}{10} = 2 + \frac{3\cdot 5}{70}k = 2 + \frac{3k}{14}\ nV$$

$$V_A = 2 + \frac{27}{14}\ V \approx 4\ V$$

b) O potencial em $B = (1,5,7)$.

$$V_B = k\cdot\frac{Q}{\sqrt{1+25+49}} = \frac{kq}{5\sqrt{3}} + C = \frac{k\cdot 5nC}{5\sqrt{3}} + 2 - \frac{kq}{10} = 3\sqrt{3} + 2 - 4.5$$

$$V_B = 3\sqrt{3} - 2.5 \approx 5.2 - 2.5 \approx 2.7\ V$$

c) A diferença de potencial V_{BA}.

$$V_B - V_A \approx 2.7 - 4\ V = -1.3\ V$$

5. Dado o potencial $V = \frac{10}{r^2}\sin\theta\cos\phi$,

a) Determine a densidade de fluxo elétrico $\vec{D}$ em $(2,\pi/2,0)$.

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\cdot(-\nabla V) = -\varepsilon_0\left(\frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{a}_\theta + \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\hat{a}_\varphi\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 10\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^{-2}) = -\frac{20\sin\theta\cos\varphi}{r^3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{10}{r^2}\cos\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta) = \frac{10\cos\theta\cos\varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = \frac{10}{r^2}\sin\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\cos\varphi = \frac{-10\sin\theta\sin\varphi}{r^2}$$

$$\nabla V = \left(\frac{-20\sin\theta\cos\varphi}{r^3}\right)\hat{a}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{10\cos\theta\cos\varphi}{r^2}\right)\hat{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\left(-\frac{10\sin\theta\sin\varphi}{r^2}\right)$$

$$\nabla V = \left(\frac{-20\sin\theta\cos\varphi}{r^3}\right)\hat{a}_r + \left(\frac{10\cos\theta\cos\varphi}{r^3}\right)\hat{a}_\theta + \left(\frac{-10\sin\varphi}{r^3}\right)\hat{a}_\varphi$$

$$\vec{E} = \frac{20\sin\theta\cos\varphi}{r^3}\,\hat{a}_r - \frac{10\cos\theta\cos\varphi}{r^3}\,\hat{a}_\theta + \frac{10\sin\varphi}{r^3}\,\hat{a}_\varphi$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\left(\frac{20}{8}\hat{a}_r - 0\hat{a}_\theta + 0\,\hat{a}_\varphi\right)$$

$$\vec{D} = \frac{5\varepsilon_0}{2}\,\hat{a}_r$$

b) Calcule o trabalho realizado ao se movimentar uma carga de 10μC do ponto $A = (1,30°,120°)$ até o ponto $B = (4,90°,60°)$.

$$W = Q\cdot V_{BA} = 10\mu(V_B - V_A)$$

$$V_A = \frac{10}{1}\cdot\sin 80°\cos 120° = -\frac{10}{4} = -2.5V$$

$$V_B = \frac{10}{16}\cdot\sin 90°\cos 60° = \frac{10}{32} \approx 0.3V$$

$$W = 10\mu(0.3 + 2.5) = 28\mu J$$

6. Um disco circular de raio a está carregado com $\rho_s = \dfrac{1}{\rho}$ C/m^2. Calcule o potencial em $(0,0,h)$.

$$V = \int\frac{\rho_s\,ds}{4\pi\varepsilon_0 r} = k\int\frac{\rho_s\,ds}{r} = k\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\,d\varphi\,d\rho$$

$$V = k\cdot 2\pi\int_0^a\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+h^2}} = k\cdot 2\pi\cdot \ln\left(a+\sqrt{a^2+h^2}\right) - \ln(h)$$

$$V = \frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right)$$

7. a) Uma carga total $Q = 60\mu C$ é dividida em duas partes iguais localizadas a $180°$ uma da outra, posicionadas em um anel circular de raio 4m. Determine o potencial no centro do anel.

$$V = k \cdot \frac{Q}{r} = \frac{9G \cdot 30 \cdot 2}{4}\mu = 135kV$$

b) Se a carga Q for dividida em três cargas iguais espaçadas em intervalos iguais de $120°$ nesse anel, determine o potencial no centro do anel.

$$V = k \cdot \frac{Q}{r} = \frac{9G \cdot 20 \cdot 3}{4}\mu = 135kV$$

c) Se a carga for distribuída ao longo do anel com uma distribuição linear dada por $\rho_l = \dfrac{Q}{8\pi}$, determine o potencial no centro do anel.

$$V = k \cdot \int \frac{\rho l \, dl}{r} = k \cdot \int \frac{60\mu}{8\pi} \cdot \frac{2\pi r}{r} \, dl = k \cdot \frac{60}{4}\mu \cdot 9G = 135kV$$

8. No espaço livre, $V = x^2 y(z + 3)$V. Determine:

a) $\vec{E}$ em $(3{,}4, -6)$.

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z\right)$$

$$\vec{E} = -\left(2xy(z+3)\hat{a}_x + x^2(z+3)\hat{a}_y + x^2y\,\hat{a}_z\right)$$

$$\vec{E} = -\left(2 \cdot 3 \cdot 4(-6+3)\hat{a}_x + 3^2(-6+3)\hat{a}_y + 3^2 \cdot 4\,\hat{a}_z\right)$$

$$\vec{E} = -\left(-72\hat{a}_x - 27\hat{a}_y + 36\hat{a}_z\right)$$

$$\vec{E} = 72\hat{a}_x + 27\hat{a}_y - 36\hat{a}_z \ \ V/m$$

b) A carga dentro de um cubo de dimensões $0 < x,y,z < 1$.

$$Q = \int_V \rho_v \, dV = \int_V \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \cdot \varepsilon_0 \, dV = \int_V \nabla \cdot (-\nabla V) \varepsilon_0 \, dV$$

$$Q = -\varepsilon_0 \int_V \nabla^2 V \, dV = -\varepsilon_0 \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^2 y(z+3)) + 0 + 0 \right) dV$$

$$Q = -\varepsilon_0 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2y(z+3) \, dz \, dy \, dx = -2\varepsilon_0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} \varepsilon_0 \ C$$

9. Para uma distribuição esfericamente simétrica de cargas dada por: $\rho_v = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$

a) Determine $\vec{E}$ e V para $r > a$.

$$\vec{E} = k \iiint \frac{\rho_v \, dV}{r^2} = \frac{K}{r^2} \int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = K \cdot 4\pi \int_0^a r^2 dr$$

$$\vec{E} = 4\pi \frac{K}{r^2} \rho_0 \int_0^a \left(1 - 2\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr = \frac{K}{r^2} \cdot \frac{2\pi}{15} a^3 \rho_0$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{30 \varepsilon_0 r^2} \hat{a}_r \qquad V = E \cdot r = \frac{\rho_0 a^3}{30 \varepsilon r}$$

b) Determine $\vec{E}$ e V para $r \leq a$.

$$\vec{E} = \frac{K}{r^2} \cdot \frac{2\pi \rho_0 r^3}{15 a^2} (10a^2 - 15ar + 6r^2) \hat{a}_r$$

$$V = \frac{\pi k \rho_0}{15 a^2} \left(5a^2(a^2 - 2r^2) + 10ar^3 - 3r^4 \right)$$

c) Determine a carga total.

$$Q = \frac{2\pi}{15} a^3 \rho_0$$

Lista de Exercícios 7

Campos Elétricos em Meio Material

1. Um condutor de seção reta uniforme e 150m de comprimento apresenta uma queda de tensão de 1,3V para uma densidade de corrente de $4{,}65 \times 10^5 \mathrm{A/m^2}$. Qual a condutividade do material do condutor?

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} = \sigma \cdot \frac{V}{l} \longrightarrow 4.66 \cdot 10^5 = \sigma \cdot \frac{1.3}{150}$$

$$\sigma = 0.465\,M \cdot \frac{150}{1.3} = \frac{69.75}{1.3}\,M \approx 53{,}6\,M\ S/m$$

2. Se as extremidades de uma barra cilíndrica de carbono ($\sigma = 3 \times 10^4 \mathrm{S/m}$), de raio 5mm e comprimento 8cm, são submetidas a uma diferença de potencial de 9V, determine:

   a) A resistência da barra.

$$R = \frac{l}{\sigma A} = \frac{.08}{3 \cdot 10^4 \cdot 25\mu\pi} = \frac{0.08}{0.75\pi} = \frac{8}{75\pi}\,\Omega$$

   b) A corrente através da barra.

$$I = \frac{V}{R} = \frac{9 \cdot 75\pi}{8} = \frac{675\pi}{8}\,A$$

   c) A potência dissipada na barra.

$$P = VI = \frac{9^2 \cdot 75\pi}{8} \approx 7.5\pi\ W$$

3. Uma bobina é feita de 150 voltas de fio de cobre ($\sigma = 5{,}8 \times 10^7 \mathrm{S/m}$) enroladas em torno de um núcleo cilíndrico. Se o raio médio das voltas é de 6,5mm e o diâmetro do fio é de 0,4mm, calcule a resistência da bobina.

$$R = \frac{l}{\sigma A} = \frac{150 \cdot 2\pi \cdot 6.5m}{5.8 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot 10^{-8} \cdot 4} = \frac{3\pi \cdot 0.65}{5.8\pi \cdot 4 \cdot 10^{-1}} = \frac{3 \cdot 65}{58 \cdot 4} \approx .84\,\Omega$$

4. Uma barra retangular de cobre tem dimensões 2cm por 8cm e comprimento 2m. Se entre as extremidades há uma queda de tensão de 50mV, calcule a resistência, a corrente, a densidade de corrente e o módulo do campo elétrico. Considerar $\sigma = 5{,}8 \times 10^7 \mathrm{S/m}$.

$$R = \frac{l}{\sigma A} = \frac{2}{5.8 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = \frac{m}{5.8 \cdot 8} \approx 21.5\mu\Omega$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{50m}{21.5\mu} = 2.32K\ A$$

$$J = \sigma \vec{E} = \sigma \frac{V}{l} = \frac{5.8 \cdot 10^7 \cdot 50m}{2} = 25.58K = 1450K\ A/m^2$$

$$|E| = \frac{V}{l} = 25mV/m$$

5. Qual é a condutividade de um fio de tungstênio de 203μm de diâmetro com uma resistência de $0{,}0172\Omega/\mathrm{cm}$?

$$\sigma = \frac{l}{AR} = \frac{l}{\pi \cdot (101.5)^2 \mu^2 \cdot 17.2m} = 1.8GS/m$$

6. Um dielétrico homogêneo ($\varepsilon_r = 2{,}5$) preenche uma região 1 ($x < 0$), enquanto a região 2 ($x > 0$) é o espaço livre. Se $\vec{D}_1 = 12\hat{a}_x - 10\hat{a}_y + 4\hat{a}_z \mathrm{nC/m^2}$, determine $\vec{D}_2$ e θ_2.

$$\left.\begin{aligned} D_{2x} &= D_{1x} = 12 \\ D_{2y} &= \frac{D_{1y}}{\varepsilon_r} = \frac{-10}{2.5} = -4 \\ D_{2z} &= \frac{D_{1z}}{\varepsilon_r} = \frac{4}{2.5} = 1.6 \end{aligned}\right\} D_2 = 12\hat{a}_x - 4\hat{a}_y + 1.6\hat{a}_z\ \frac{nC}{m^2}$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{(-4)^2 + 1.6^2}}{12}\right) \approx 19.7°$$

7. A região $y < 0$ consiste em um condutor perfeito, enquanto a região $y > 0$ é um meio dielétrico ($\varepsilon_r = 2$). Se existe uma densidade superficial de cargas de 2nC/m^2 no condutor, determine $\vec{D}$ e $\vec{E}$ em:

a) $A = (3, -2, 2)$.

Em um condutor perfeito, $\vec{E} = 0$ e $\vec{D} = 0$

b) $B = (-4, 1, 5)$.

$\vec{D} = 2\hat{a}_y \text{ nC/m}^2$ | $\vec{E} = \dfrac{2\hat{a}_y}{2\varepsilon_0} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\hat{a}_y \text{ V/m}$

8. Duas regiões dielétricas homogêneas 1 ($\rho \leq 4\text{cm}$) e 2 ($\rho > 4\text{cm}$) tem constantes dielétricas $\varepsilon_1 = 3{,}5$ e $\varepsilon_2 = 1{,}5$, respectivamente. Se $\vec{D}_2 = 12\hat{a}_\rho - 6\hat{a}_\phi + 9\hat{a}_z \text{nC/m}^2$, calcule $\vec{E}_1$ e $\vec{D}_1$.

$D_{1\rho} = D_{2\rho} = 12$

$D_{1\varphi} = \dfrac{3.5}{1.5} D_{2\varphi} = \dfrac{3.5 \cdot -6}{1.5} D_{2\varphi} = -14$

$D_{1z} = \dfrac{3.5}{1.5} D_{2z} = \dfrac{3.5}{1.5} \cdot 9 = 21$

$\vec{D}_1 = 12\hat{a}_\rho - 14\hat{a}_\varphi + 21\hat{a}_z \ \dfrac{nC}{m^2}$

$\vec{E}_1 = \dfrac{\vec{D}_1}{\varepsilon_1} = \dfrac{(12\hat{a}_\rho - 14\hat{a}_\varphi + 21\hat{a}_z)}{3.5\varepsilon_0} \text{ n V/m}$

Lista de Exercícios 8

Capacitância e Problemas de Valor de Fronteira

1. Um capacitor de placas paralelas com área $0{,}30\text{m}^2$ e distância de separação de 5,5mm contém três dielétricos com interfaces normais a $\vec{D}$ e $\vec{E}$, como segue: $\varepsilon_{r1} = 3$ e $d_1 = 1\text{mm}$; $\varepsilon_{r2} = 4$ e $d_2 = 2\text{mm}$; $\varepsilon_{r3} = 6$ e $d_3 = 2{,}5\text{mm}$. Calcule a capacitância.

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon A} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} A} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} A} + \frac{d_3}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_3} A}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1m}{\varepsilon_0 \cdot 0.3 \cdot 3} + \frac{2m}{\varepsilon_0 \cdot 0.3 \cdot 4} + \frac{2.5m}{\varepsilon_0 \cdot 0.3 \cdot 6}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1m}{0.9\varepsilon_0} + \frac{2m}{1.2\varepsilon_0} + \frac{2.5m}{1.8\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{2m + 3m + 2.5m}{1.8\varepsilon_0} = \frac{75}{18\varepsilon_0} m$$

$$C = \frac{6\varepsilon_0}{25 \cdot 10^{-3}}$$

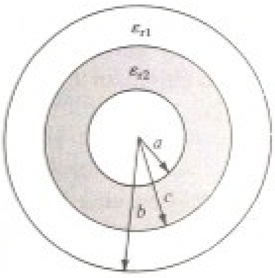
3. Um capacitor de placas paralelas de 8nF possui área de $1{,}51\text{m}^2$ e distância de separação de 10mm. Qual é a distância de separação necessária para obter a mesma capacitância se o dielétrico é substituído por vácuo?

$$\varepsilon_r = \frac{dC}{\varepsilon_0 A} = \frac{1 \cdot 10^{-2} \cdot 8n}{\varepsilon_0 \cdot 1.51} = 5.984$$

vácuo: $\varepsilon_r = 1$

$$d_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{C} = \frac{1.51\varepsilon_0}{8n} = 1.671\text{mm}$$

4. Se as figuras abaixo representam as seções retas de dois capacitores esféricos, determine suas capacitâncias. Sejam $a = 1$mm, $b = 3$mm, $c = 2$mm, $\varepsilon_{r1} = 2{,}5$, $\varepsilon_{r2} = 3{,}5$.



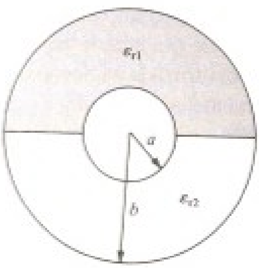
$$C = \frac{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

(a)

$$C_1 = \frac{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r1}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}} = \frac{4\pi \varepsilon_0 \cdot 2.5}{1 - \frac{1}{2}} = 20\varepsilon_0$$

$$C_2 = \frac{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}} = \frac{4\pi \varepsilon_0 \cdot 3.5}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 84\varepsilon_0$$

$$C_A = \frac{1}{\frac{1}{20\varepsilon_0} + \frac{1}{84\varepsilon_0}}$$



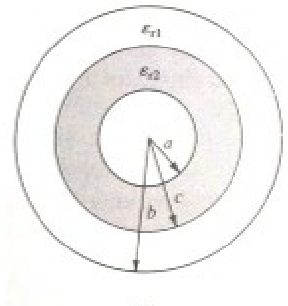
$$C = \frac{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = 24\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

(b)

$$C_B = \frac{1}{24\pi \varepsilon_0 \left(\frac{2.5+3.5}{2}\right)} = \frac{1}{24\pi \cdot 3\varepsilon_0}$$

$$C_B = \frac{1}{72\pi \varepsilon_0} = \frac{1}{2} nF$$

5. Determine a capacitância de 10m de comprimento dos capacitores cilíndricos representados na figura. Considere $a = 1\text{mm}$, $b = 3\text{mm}$, $c = 2\text{mm}$, $\varepsilon_{r1} = 3{,}5$, $\varepsilon_{r2} = 2{,}5$.



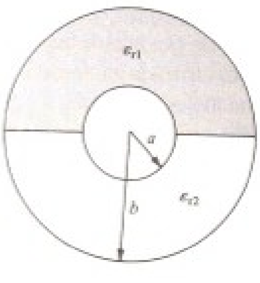
(a)

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}{\ln\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{7\pi\varepsilon_0}{\ln(2)}$$

$$C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}{\ln\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{5\pi\varepsilon_0}{\ln(3/2)}$$

$$\frac{1}{C_A} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{\ln(2)}{7\pi\varepsilon_0} + \frac{\ln(3/2)}{5\pi\varepsilon_0} = \frac{5\ln(2) + 7\ln(3/2)}{35\pi\varepsilon_0}$$

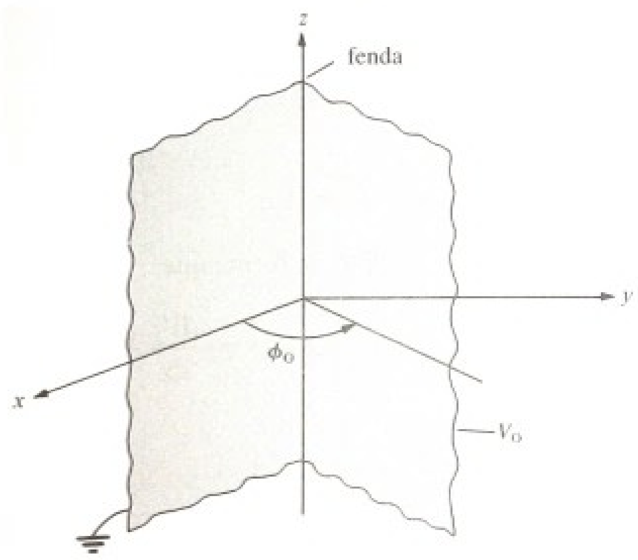
$$C_A = \frac{35\pi\varepsilon_0}{5\ln(2) + 7\ln(3/2)}$$



(b)

$$C_B = \frac{\pi\varepsilon_0 3.5}{\ln(3)} + \frac{\pi\varepsilon_0 2.5}{\ln(3)} = \frac{6\pi\varepsilon_0}{\ln(3)}$$

6. Dois semiplanos condutores $\phi = 0$ e $\phi = \pi/6$, estão separados por uma fenda de largura infinitesimal, como mostra a figura. Se $V(\phi = 0) = 0\text{V}$ e $V(\phi = \pi/6) = 100\text{V}$, determine V e $\vec{E}$ na região entre os semiplanos.



$$V(\varphi) = A\varphi + B$$

$$V(\varphi) = 100\frac{\pi}{6} + 0$$

$$V(\varphi) = \frac{600}{\pi}$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\phi} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{600}{\pi}\hat{\phi} = -\frac{600}{\rho\pi}\hat{\phi}$$

7. Cascas esféricas condutoras com raios $a = 10\text{cm}$ e $b = 30\text{cm}$ são mantidas sob uma diferença de potencial de 100V, tal que $V(r = b) = 0\text{V}$ e $V(r = a) = 100\text{V}$. Determine V e $\vec{E}$ na região entre as cascas. Se $\varepsilon_r = 2{,}5$ na região, determine a carga total induzida nas cascas e a capacitância do capacitor.

8. Um capacitor esférico com $a = 1{,}5$cm e $b = 4$cm tem um dielétrico não-homogêneo de $\varepsilon = 10\varepsilon_0/r$. Determine a capacitância do capacitor.

$$C = \frac{4\pi\mathcal{E}}{\frac{1}{.015}+\frac{1}{.04}} = \frac{40\pi\mathcal{E}_0/r}{\frac{K}{15}+\frac{K}{4}} = \frac{40\pi\mathcal{E}_0}{\frac{19Kr}{60}} = \frac{2.4\pi\mathcal{E}_0}{19r}$$

9. Dado $V = 5x^3y^2z$ e $\varepsilon = 2{,}25\varepsilon_0$, determine:

a) $\vec{E}$ no ponto $P = (-3{,}1{,}2)$.

$$\vec{E} = -\nabla V = -(15x^2y^2z\,\hat{a}_x + 10x^3yz\,\hat{a}_y + 5x^3y^2\,\hat{a}_z)$$

$$\vec{E} = (-15\cdot 9\cdot 1\cdot 2)\,\hat{a}_x + (-10\cdot -27\cdot 1\cdot 2)\,\hat{a}_y + (-5\cdot -27\,1)\,a_z$$

$$\vec{E} = -270\,\hat{a}_x + 540\,\hat{a}_y + 135\,\hat{a}_z$$

b) ρ_v em P.

$$\rho_v = \nabla D = \nabla E\cdot\mathcal{E} = -\nabla^2 V\cdot\mathcal{E}$$

$$\rho v = \mathcal{E}\cdot{-}(30xy^2z + 10x^3z + 0) = \mathcal{E}\cdot{-}(30\cdot -3\cdot 1\cdot 2 + 10\cdot -27\cdot 2)$$

$$\rho v = \mathcal{E}\cdot(720) = 720\cdot 2.25\,\mathcal{E}_0 = 1620\,\mathcal{E}_0$$

10. O campo potencial $V = 2x^2yz - y^3z$ existe em um meio dielétrico, cujo $\varepsilon = 2\varepsilon_0$.

a) V satisfaz a equação de Laplace? Demonstre. $\nabla^2 V = 0\,?$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial x}4xyz + \frac{\partial}{\partial y}2x^2z - 3y^2z + 0$$

$$\nabla^2 V = 4yz - 6yz = -2yz \neq 0$$

Não satisfaz!

b) Calcule a carga total dentro de um cubo unitário dado por $0 < x,y,z < 1$.

$$\rho_V = \nabla D = \varepsilon \nabla \vec{E} = \varepsilon \cdot - \nabla^2 V = 2\varepsilon_0 \cdot 2yz$$

$$\rho_V = 4yz \cdot \varepsilon_0$$

$$Q = 4\varepsilon_0 \cdot \int_0^1 dx \int_0^1 y\, dy \int_0^1 z\, dz = 4\varepsilon_0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

11. A região entre duas cascas esféricas condutoras, com $r = 0{,}5$m e $r = 1$m, é livre de cargas. Se $V(r = 0{,}5) = -50$V e $V(r = 1) = 50$V, determine a distribuição de potencial e a intensidade do campo elétrico na região entre as cascas.

$$V(r) = -\frac{A}{r} + B$$

$$\begin{cases} -\frac{A}{a} + B = -50 \\ -\frac{A}{b} + B = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} A = 100 \\ B = 150 \end{matrix}$$

$$V(r) = -\frac{100}{r} + 500$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{100}{r^2}\hat{a}_r$$

12. Um capacitor esférico tem um raio interno a e um raio externo b e é preenchido com um dielétrico não-homogêneo com $\varepsilon = \varepsilon_0 k/r^2$, onde k é uma constante.

Demonstre que a capacitância do capacitor é $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 k}{(b-a)}$

13. Um capacitor cilíndrico tem um raio interno a e um raio externo b e é preenchido com um dielétrico não-homogêneo, tendo $\varepsilon = \varepsilon_0 k/\rho$, onde k é uma constante. Calcule a capacitância por unidade de comprimento do capacitor.

14. Uma lâmina metálica aterrada está localizada no plano $z = 0$ enquanto uma carga pontual Q está em $(0,0,a)$. Determine a força que atua sobre uma carga pontual $-Q$ colocada em $(a,0,a)$.

15. Duas cargas pontuais de 3nC e -4nC estão localizadas, respectivamente, em (0,0,1)m e (0,0,2)m, enquanto um plano infinito condutor está em $z = 0$. Determine:

a) A carga total induzida no plano.

$$Q = -\sum q = -(3-4)n = +1nC$$

b) O valor da força de atração entre as cargas e o plano.