Lista de Exercícios 4

Lei de Coulomb e Intensidade de Campo Elétrico

1. Duas cargas pontuais de 5nC e −2nC estão localizadas em $(2, 0, 4)$ e $(-3, 0, 5)$, respectivamente.

   a) Determine a força sobre uma carga pontual de 1nC localizada em $(1, -3, 7)$.

   b) Encontre o campo elétrico $\vec{E}$ em $(1, -3, 7)$.

$$r_1 = P - r_1 = (1-2, -3, 7-4) = (-1, -3, 3) \qquad |r_1| = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}$$
$$r_2 = P - r_2 = (1+3, -3, 7-5) = (4, -3, 2) \qquad |r_2| = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}$$

Seja k definido por $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, para todos exercícios seguintes

$$E_1 = \frac{kQ_1 r_1}{|r_1|^3} = \frac{k \cdot 5}{19\sqrt{19}} \cdot (-1, -3, 3) = \frac{-5k}{19\sqrt{19}}\hat{a}_x - \frac{15k}{19\sqrt{19}}\hat{a}_y + \frac{15}{19\sqrt{19}}\hat{a}_z$$

$$E_2 = \frac{kQ_2 r_2}{|r_2|^3} = \frac{-2k}{29\sqrt{29}} \cdot (4, -3, 2) = \frac{-8k}{\sqrt{29}^3}\hat{a}_x + \frac{6k}{\sqrt{29}^3}\hat{a}_y - \frac{4k}{\sqrt{29}^3}\hat{a}_z$$

$$\vec{E} = E_1 + E_2 = \left(\frac{-5k}{19\sqrt{19}} - \frac{8k}{\sqrt{29}^3}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{6k}{\sqrt{29}^3} - \frac{15k}{19\sqrt{19}}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{15}{19\sqrt{19}}\hat{a}_z - \frac{4k}{\sqrt{29}^3}\hat{a}_z\right)$$

$$F = q \cdot E = 1 \cdot E = \left(\frac{-5k}{19\sqrt{19}} - \frac{8k}{\sqrt{29}^3}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{6k}{\sqrt{29}^3} - \frac{15k}{19\sqrt{19}}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{15}{19\sqrt{19}}\hat{a}_z - \frac{4k}{\sqrt{29}^3}\hat{a}_z\right)$$

2. Duas cargas pontuais Q_1 e Q_2 estão localizadas em (4,0, − 3) e (2,0,1), respectivamente. Se $Q_2 = 4$nC, determine Q_1 tal que:

   a) O campo $\vec{E}$ em (5,0,6) não contenha componente em z.

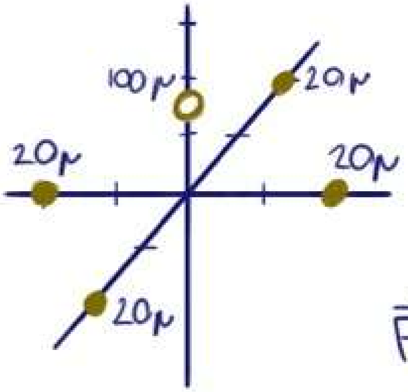
$$r_1 = (1, 0, 9) \qquad |r_1| = \sqrt{82}$$
$$r_2 = (3, 0, 5) \qquad |r_2| = \sqrt{34}$$

$$Q_1 \cdot \frac{r_{1z}}{R_1} + Q_2 \cdot \frac{r_{2z}}{R_2} = 0 \Rightarrow Q_1 = -Q_2 \frac{r_{2z} \cdot R_1}{r_{1z} \, R_2} = -4 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{\sqrt{82}^3}{\sqrt{34}^3} = \frac{20\sqrt{82}^3}{9\sqrt{34}^3} \text{nC}$$

   b) A força sobre uma carga de teste em (5,0,6) não tenha componente em x.

$$Q_1 = -4 \cdot 3 \frac{\sqrt{82}^3}{\sqrt{34}^3} = \frac{-12\sqrt{82}^3}{\sqrt{34}^3} \text{nC}$$

3. Quatro cargas pontuais de 20μC cada estão fixadas sobre os eixos x e y em ± 4m. Encontre a força sobre uma quinta carga pontual de 100μC localizada em $(0,0,3)$m.



DISTÂNCIA q à qualquer Q:

$$r = \sqrt{16+9} = 5m$$

$$a_r = \frac{(-4,0,3)}{5} = (-4/5, 0, 3/5)$$

$$\vec{F}_{Qq} = 4K \cdot \frac{qQ}{r^2} a_r = 4K \frac{20\mu \cdot 100\mu}{5^2} \cdot \frac{3}{5} a_z = K \cdot \frac{0{,}024}{5^3}$$

4. Determine a carga total:

a) Sobre uma linha dada por $0 \leq x \leq 5$m, se $\rho_l = 12x^2$mC/m.

$$\rho = 12x^2\, mC/m$$

$$Q = \int_0^5 \rho\, dx = \int_0^5 12x^2\, dx = 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = 4 \cdot 125 = 500\, mC$$

b) Sobre um cilindro dado por $\rho = 3$, $0 \leq z \leq 4$m, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $\rho_s = \rho z^2$nC/m^2.

$$Q = \int_0^4 \int_0^{2\pi} (3z^2)(3)\, d\varphi\, dz = 3\left[z^3\right]_0^4 \cdot 2\pi =$$

$$Q = 2\pi \cdot 3 \cdot 4^3 = 6\pi \cdot 64 = 384\, nC$$

c) Dentro de uma esfera com $r = 4$m, se $\rho_v = \frac{10}{r \sin\theta}$C/m^3

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^4 \frac{10}{r \cdot \sin\theta} \cdot r^2 \cdot \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^4 10r\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$Q = 10\frac{r^2}{2}\Big|_0^4 \cdot \theta\Big|_0^{\pi} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = 5 \cdot 4^2 \cdot \pi \cdot 2\pi = 160\pi^2$$

5. Encontre a carga total contida em um segmento cônico de esfera definido por $0 \leq r \leq 2\text{m}$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$, $0 \leq \phi < 2\pi$, dado que $\rho_v = 10r^2 \cos^2 \theta \text{mC/m}^3$.

$$Q = \int_v \rho_v dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 10r^2 \cos^2\theta \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$Q = 10\pi \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta}_{} \cdot \int_0^2 r^4 \, dr$$

$$u = \cos\theta \rightarrow \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 u^2 \, du = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{4-\sqrt{2}}{12}$$

$$Q = 10\pi \cdot 2\pi \cdot \frac{4-\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{32}{5} = 20\pi^2 \cdot \frac{32-8\sqrt{2}}{15} \text{ mC}$$

6. Uma linha infinita uniformemente carregada com 10nC/m está posicionada em $x = 0$, $y = 2$, enquanto uma outra linha infinita, também uniformemente carregada, com -10nC/m está posicionada em $x = 0$, $y = -2$. Determine $\vec{E}$ na origem.

$\vec{E}$ na origem é $k \cdot 20$nC na direção $(-\hat{a}_y)$

7. Um anel posicionado em $z = 0$, de raio $\rho = 2$m, está carregado com uma densidade linear de cargas $\rho_l = 5\mu$C/m. Determine o valor de $\vec{E}$ no ponto (0,0,3).

$$E = K \cdot \frac{Qh}{(a^2+h^2)^{3/2}} \hat{a}_z = K \cdot \frac{20\pi \cdot 3}{(4+9)^{3/2}} \hat{a}_z = \frac{K \cdot 60\pi}{\sqrt{13}^3} \hat{a}_z \ \mu\text{V/m}$$

8. Um disco circular de raio a está uniformemente carregado com $\rho_s \text{C/m}^2$. Considere o disco no plano $z = 0$ com seu eixo ao longo de z.

a) Demonstre que, em um ponto $(0,0,h)$, $\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\left\{1 - \frac{h}{(h^2+a^2)^{1/2}}\right\}\hat{a}_z$

$$\vec{E} = K \cdot \int \frac{\rho_s ds \vec{R}}{|\vec{R}|^3} \hat{a}_z = K \cdot \int \frac{\rho_s ds}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \cdot \rho h \, d\rho \, \hat{a}_z = K \cdot \rho_s \cdot z \int_0^a \frac{2\pi \cdot \rho \, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \hat{a}_z$$

$$\vec{E} = K 2\pi \rho_s \cdot z \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\right) = K 2\pi \rho_s \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right) \hat{a}_z$$

b) Se $a \ll h$, demonstre que $\vec{E}$ é similar ao campo de uma carga pontual.

$$\sqrt{h^2+a^2} = h\sqrt{1 + \frac{a^2}{h^2}} \approx h\left(1 + \frac{a^2}{2h^2}\right)$$

$$\text{cm } E \approx K 2\pi \cdot \frac{a^2}{2h^2} = \rho_s \frac{a^2}{h^2} k\pi \rightarrow Q = \pi a^2 \rho_s, \quad E \approx K \cdot \frac{Q}{h^2}$$

9. Encontre a força sobre uma carga pontual de 50μC localizada em (0,0,5)m devido à carga de $500\pi\mu$C, distribuída uniformemente sobre o disco circular de raio $r \leq 5$m, colocado na origem $z = 0$m.

$$\sigma = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{500\pi \mu}{\pi 5^2} = 20 \mu C/m^2$$

$$E = 2k\pi \sigma \left(1 - \frac{h^2}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) = k \cdot 40\pi \cdot (1 - 1/\sqrt{2})\, \hat{a}_z = \mu N/C$$

$$F = q\vec{E} = 2k\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) nN$$

10. Cargas estão situadas em um plano na forma de quadrado perfeito definido por $-2 \leq x \leq 2$m, $-2 \leq y \leq 2$m e $z = -3$m, com densidade de cargas $\rho_s = 2(x^2 + y^2 + 9)^{3/2}$nC/m^2. Calcule o campo elétrico $\vec{E}$ na origem.

$$\vec{E} = k \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \frac{2(x^2+y^2+3^2)^{3/2}}{\sqrt{x^2+y^2+3^2}^3} \cdot 3\hat{a}_z dx dy$$

$$\vec{E} = 6k \cdot x\Big|_{-2}^{2} y\Big|_{-2}^{2} = 6k \cdot 4 \cdot 4 = 96k\ nN/C$$

11. Uma superfície infinita carregada com densidade superficial de cargas $-\rho_s$ está localizada no plano xy em $z = 0$m, enquanto uma superfície infinita carregada com densidade superficial de cargas $+\rho_s$ está localizada no plano xy em $z = 2$m. Determine $\vec{E}$ em todas as regiões.

- $z < 0$

$$E = (2k\pi \cdot -\rho_s\, \hat{a}_z + 2k\pi \cdot \rho_s)\, \hat{a}_z = 0$$

- $0 < z < 2$

$$E = (2k\pi \cdot \rho_s + 2k\pi \cdot \rho_s)\, \hat{a}_z = 4k\pi \rho_s \hat{a}_z = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \hat{a}_z$$

- $z > 2$

$$E = (2k\pi \cdot \rho_s\, \hat{a}_z + 2k\pi \cdot (-\rho_s))\hat{a}_z = 0$$

Lista de Exercícios 5

Densidade de Fluxo Elétrico e Lei de Gauss

1. Uma carga pontual de 30nC está localizada na origem, enquanto um plano infinito em $y = 3$ está carregado com 10nC/m^2. Determine $\vec{D}$ em (0,4,3).

$$D_q = \frac{Q}{4\pi r^2} a_R = \frac{30\,n}{4\pi\, 25}\left(4/5\,\hat{a}_y + 3/5\,\hat{a}_z\right)$$

$$D_q = \left(\frac{12}{50\pi}\hat{a}_y + \frac{9}{50\pi}\hat{a}_z\right) nC/m^2$$

$$D_{plano} = \frac{\rho_s}{2}\hat{a}_y = \frac{10n}{2}\hat{a}_y = 5\,\hat{a}_y\ nC/m^2$$

$$D = D_q + D_{plano} = \left(\frac{12}{50\pi}+5\right)\hat{a}_y + \left(\frac{9}{50\pi}\right)\hat{a}_z\ nC/m^2$$

2. Se $\vec{D} = (2y^2 + z)\hat{a}_x + 4xy\hat{a}_y + x\hat{a}_z \text{C/m}^2$, determine

a) A densidade volumétrica de cargas em $(-1,0,3)$

$$\rho v = \nabla D = \frac{\partial(2y^2+z)}{\partial x} + \frac{\partial(4xy)}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z}$$

$$\rho v = 0 + 4x + 0 = 4x$$

$$\rho v(-1,0,3) = -4\ C/m^3$$

b) A carga total encerrada no cubo definido por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

$$Q = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 4x\,dx\,dy\,dz = 4\,\frac{x^2}{2}\cdot 1\cdot 1 = 2C$$

3. Uma distribuição de cargas no espaço livre tem $\rho_v = 2r\text{nC/m}^3$ para $0 \leq r \leq 10\text{m}$ e é zero em todos os outros pontos do espaço.

Determine $\vec{E}$ em $r = 2\text{m}$.

$$Q = \oint \vec{D}\, ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2} 2r \cdot r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi = 2\frac{r^4}{4}\Big|_0^2 \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} \cdot 2\pi$$

$$= -8\cos\pi \cdot (+2) \cdot 2\pi = 32\pi$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{Q\hat{a}_r \cdot k}{r^2} = \frac{32kn\pi}{4} = 8k\pi\, \hat{a}_r \text{ nV/m}$$

Determine $\vec{E}$ em $r = 12\text{m}$.

$$Q = \int_0^{10} 2r \cdot 4\pi r^2 \, dr = 8\pi \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^{10} = 20\pi \mu C$$

$$E = Q\frac{\hat{a}_r \cdot k}{r^2} = \frac{20\pi \cdot k}{144} = \frac{10\pi k}{72} \text{ KV/m}$$

4. Determine a densidade de cargas devido a cada uma das seguintes densidades de fluxo elétrico:

a) $\vec{D} = 8xy\hat{a}_x + 4x^2\hat{a}_y \text{C/m}^2$

$$\nabla\vec{D} = \frac{\partial 8xy}{\partial x} + \frac{\partial 4x^2}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 8y \text{ C/m}^3$$

b) $\vec{D} = 4\rho\sin\phi\hat{a}_\rho + 2\rho\cos\phi\hat{a}_\phi + 2z^2\hat{a}_z \text{C/m}^2$

$$\nabla\vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial 4\rho^2\sin\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial 2\rho\cos\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial 2z^2}{\partial z} = 8\sin\varphi - 2\sin\varphi + 4z =$$

$$= 6\sin\varphi + 4z \text{ C/m}^2$$

c) $\vec{D} = \frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{a}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{a}_\theta \text{C/m}^2$

$$\nabla D = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\left(r^2 \cdot 2\cos\theta \cdot r^{-3}\right)}{\partial r} + \frac{\partial \sin\theta \cdot \sin\theta \cdot r^{-3}}{\partial\theta} + 0 =$$

$$= -\frac{2\cos\theta}{r^4} + \frac{2\cos\theta}{r^4} + 0 = 0 \text{ C/m}^3$$

5. Seja $\rho_v = \begin{cases} \frac{10}{r^2}\text{mC/m}^3 & ,1\text{m} < r < 4\text{m} \\ 0 & ,r > 4\text{m} \end{cases}$

a) Determine o fluxo líquido que atravessa as superfícies $r = 2\text{m}$ e $r = 6\text{m}$.

$$Q(2) = \int_1^2 \rho_v \, dv = \frac{10}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \Big|_1^2 = 40\pi(2-1) = 40\pi \text{ mC}$$

$$Q(6) = \int_1^4 \rho_v \, dv = \frac{10}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \Big|_1^4 = 40\pi(4-1) = 120\pi \text{ mC}$$

b) Determine $\vec{D}$ em $r = 1\text{m}$ e em $r = 5\text{m}$.

$$D_r(1) = 0$$

$$D_r(5) = \frac{120\pi}{4\pi 5^2} = 1{,}2\hat{a}_r \text{ mC/m}^2$$

6. Uma densidade volumétrica de cargas uniforme ρ_v é definida tal que

$$\rho_v = \begin{cases} 80\mu\text{C/m}^3 & ,8\text{mm} < r < 10\text{mm} \\ 0 & ,r < 8\text{mm} \end{cases}$$

a) Determine a carga total dentro da superfície de raio $r = 10\text{mm}$.

$$Q = \rho_v \cdot V = \mu 80 \cdot \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3) = \mu \frac{320\pi}{3}(0{,}01^3 - 0{,}008^3) =$$

$$Q = \mu \frac{320}{3}\pi \cdot (1\mu - 0{,}512\mu) = \mu \frac{320\pi}{3} \cdot 0{,}488\mu =$$

$$Q = \frac{320}{3} \cdot 0{,}488 \, \mu^2 \, n\text{C} = 163 p\text{C}$$

b) Determine $\vec{D}$ em $r = 10\text{mm}$.

$$D_r = \frac{163}{4\pi r^2} p = \frac{163p}{4\pi \cdot 10^{-4}} = \frac{1{,}63\mu}{4\pi} \approx \frac{410}{\pi} n\text{C}$$

c) Determine $\vec{D}$ em $r = 20\text{mm}$.

$$D_r = \frac{163p}{4\pi(0{,}020)^2} = \frac{163p}{4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-4}} = \frac{1{,}63\mu}{16\pi} \approx \frac{0{,}1}{\pi} \mu\text{C}$$

7. Um disco circular de raio 4m e densidade $\rho_s = 12 \sin \phi \mu C/m^2$ está envolto por uma superfície fechada S. Que fluxo total cruza S?

$$\Psi = Q = \iint \rho_s dS = \int_0^{2\pi}\int_0^a 12 \sin\varphi \, \rho d\rho d\varphi =$$

$$= 12 \cdot 1 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot 0 = 0$$

8. Determine a carga contida no paralelepípedo de dimensões $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$ calculando ambos os lados do teorema da divergência de Gauss considerando a densidade de fluxo elétrico $\vec{D} = 2xy\hat{a}_x + x^2\hat{a}_y C/m^2$.

$\rightarrow$ $$\nabla D = \frac{\partial 2xy}{\partial x} + \frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 2y + 0 + 0 = 2y$$

$$Q = \int_0^1\int_0^2\int_0^3 2y \, dz dy dx = \int_0^1\int_0^2 6y = 6 \cdot \int_0^1 dx \int_0^2 y \, dy =$$

$$= 6 x\Big|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = 6 \cdot 1 \cdot \frac{4}{2} = 12 \, C$$

$\leftarrow$ $\cdot\, x=0$, $dS = -a_x dy dz$, $D \cdot dS = -2xy \, dy dz = 0$

$\cdot\, x=1$, $dS = a_x dy dz$, $D \cdot dS = 2xy \, dy dz =$

$$\int_0^2\int_0^3 2 \cdot 1 y \, dz dy = 6\int_0^2 y \, dy = 6 \cdot \frac{4}{2} = 12$$

$\cdot\, y=0$, $dS = -a_y dx dz$, $D \cdot dS = -x^2 dx dz =$

$$\int_0^1\int_0^3 -x^2 dz dx = -\int_0^1 3x^2 dx = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$$

$\cdot\, y=2$, $dS = a_y dx dz$, $D dS = x^2 dx dz =$

$$\int_0^1\int_0^3 x^2 dz dx = \int_0^1 3x^2 dx = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$\cdot\, z=0$, $dS = -a_z dx dy$, $D dS = 0$

$\cdot\, z=3$, $dS = a_z dx dy$, $D dS = 0$

$$\Sigma = 12 - 1 + 1 = 12$$

9. Três superfícies esféricas com raios $r_1 = 2\text{m}$, $r_2 = 4\text{m}$ e $r_3 = 6\text{m}$ estão carregadas com densidade superficial de cargas uniforme ρ_s de valores 20nC/m^2, -4nC/m^2 e ρ_{s0}, respectivamente.

$$Q = 4\pi R^2 \rho_s \qquad Q_1 = 4\pi(2)^2(20\,n) = 320\pi\ nC$$
$$Q_2 = 4\pi(4)^2(-4\,n) = -256\pi\ nC$$
$$Q_3 = 4\pi(6)^2\rho_{s0} = 144\pi\rho_{s0}$$

a) Determine $\vec{D}$ em $r = 1\text{m}$ $(r < r_1) \to Q = 0$

$$D = \frac{Q(r)}{4\pi r^2} = 0$$

Determine $\vec{D}$ em $r = 3\text{m}$ $(r_1 < r < r_2) \to Q = Q_1$

$$D = \frac{320\pi}{4\pi 9} = \frac{320}{36}\ nC$$

Determine $\vec{D}$ em $r = 5\text{m}$. $(r_2 < r < r_3) \to Q = Q_1 + Q_2)$

$$D = \frac{(320\pi - 256\pi)}{4\pi 5^2} = \frac{64}{100} = 640\,\hat{a}_r\ \mu C$$

b) Determine ρ_{s0} tal que $\vec{D} = 0$ em $r = 7\text{m}$. $(r > r_3)$ $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$$D_r(7) = 0$$
$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$320\pi - 256\pi + 144\pi\rho_{s0} = 0$$
$$\rho_{s0} = -\frac{64}{144} = \frac{-4}{9}\ nC/m^2$$

10. Dado $\vec{D} = \dfrac{10r^3}{4}\hat{a}_r$ em coordenadas esféricas, desenvolva os dois lados do teorema da divergência para o volume limitado por $r = 10$m.

$$\nabla D = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{10}{4}r^5 = \frac{25}{2}r^2$$

$\leftarrow$ $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{10} \frac{25}{2}r^2 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \frac{25}{2}\cdot 4\pi \int_0^{10} r^4 dr = 50\pi \cdot \frac{10^5}{5} = \pi MC$$

$\rightarrow$ $$\Phi = \iint D \cdot ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D_r \cdot 10 r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \frac{10}{4}\cdot 10^3 \cdot 4\pi \, 10^2 = 10^6 \cdot \pi = \pi MC$$

11. Dado $\vec{D} = 10\sin\theta\hat{a}_r + 2\cos\theta\hat{a}_\phi$ em coordenadas esféricas, desenvolva os dois lados do teorema da divergência para o volume limitado por $r = 2$m.

$$\nabla\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2 D_r + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial \sin\theta D_\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(10r\sin\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial(2\sin\theta\cos\theta)}{\partial\theta} =$$

$$\nabla\vec{D} = \frac{1}{r}\left(20\sin\theta + \frac{2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\sin\theta}\right)$$

$\leftarrow$ $$\int_v (\nabla D)\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2} r\,(18\sin^2\theta + 2\cos^2\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$\int_v (\nabla D)\,dv = 2\cdot 2\pi \cdot \left(\frac{18\pi}{2} + \frac{2\pi}{2}\right) = 4\pi \cdot 10\pi = 40\pi^2 C$$

$\rightarrow$ $$\Phi = \iint D_R r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 10\sin\theta \cdot 4\sin\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= 40\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin^2\theta \, d\theta = 40\cdot 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} = 40\pi^2 C$$