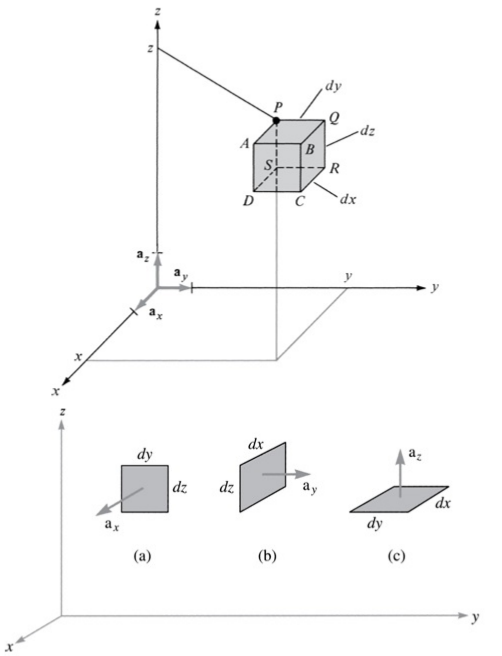
1 Sistemas de coordenadas - Comprimento, área e volume diferenciais

1. Coordenadas cartesianas

   - O elemento diferencial de caminho é:
$$d\vec{l} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z \qquad (1)$$

   - Os elementos diferenciais de superfície são:
$$d\vec{s} = dydz\hat{a}_x \qquad (2)$$
$$d\vec{s} = dxdz\hat{a}_y \qquad (3)$$
$$d\vec{s} = dxdy\hat{a}_z \qquad (4)$$

   - O elemento diferencial de volume é:
$$dv = dxdydz \qquad (5)$$

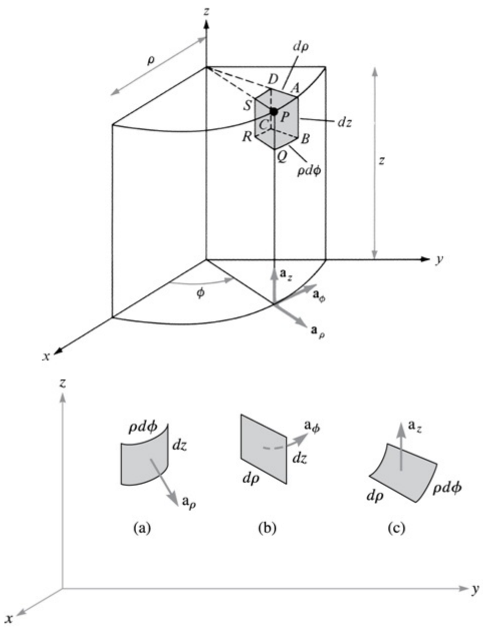


2. Coordenadas cilíndricas

   - O elemento diferencial de caminho é:
$$d\vec{l} = d\rho\hat{a}_\rho + \rho d\phi\hat{a}_\phi + dz\hat{a}_z \qquad (6)$$

   - Os elementos diferenciais de superfície são:
$$d\vec{s} = \rho d\phi dz\hat{a}_\rho \qquad (7)$$
$$d\vec{s} = d\rho dz\hat{a}_\phi \qquad (8)$$
$$d\vec{s} = \rho d\rho d\phi\hat{a}_z \qquad (9)$$

   - O elemento diferencial de volume é:
$$dv = \rho d\rho d\phi dz \qquad (10)$$

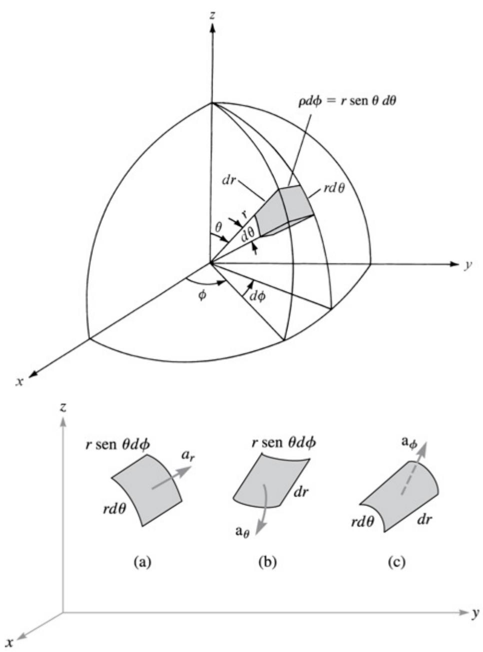


3. Coordenadas esféricas

   - O elemento diferencial de caminho é:
$$d\vec{l} = dr\hat{a}_r + rd\theta\hat{a}_\theta + r\sin\theta d\phi\hat{a}_\phi \qquad (11)$$

   - Os elementos diferenciais de superfície são:
$$d\vec{s} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{a}_r \qquad (12)$$
$$d\vec{s} = r\sin\theta drd\phi\hat{a}_\theta \qquad (13)$$
$$d\vec{s} = rdrd\theta\hat{a}_\phi \qquad (14)$$

   - O elemento diferencial de volume é:
$$dv = r^2\sin\theta drd\theta d\phi \qquad (15)$$



2 Cálculo vetorial diferencial

2.1 Gradiente de uma função escalar ($\vec{\nabla} V$)

- Coordenadas cartesianas:

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z \tag{16}$$

- Coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z \tag{17}$$

- Coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{a}_\phi \tag{18}$$

2.2 Divergente de uma função vetorial ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$)

- Coordenadas cartesianas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{19}$$

- Coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{20}$$

- Coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \tag{21}$$

2.3 Rotacional de uma função vetorial ($\vec{\nabla} \times \vec{A}$)

- Coordenadas cartesianas:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{22}$$

- Coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{a}_\rho & \rho\hat{a}_\phi & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \tag{23}$$

- Coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\theta & r\sin\theta\hat{a}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix} \tag{24}$$

2.4 Laplaciano de uma função escalar ($\nabla^2 V$)

- Coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{25}$$

- Coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{26}$$

- Coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \tag{27}$$

3 Cálculo vetorial integral

- Integral de linha aberta / fechada

$$\int \vec{A} \cdot d\vec{l}; \qquad \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \tag{28}$$

- Integral de superfície aberta / fechada

$$\iint \vec{A} \cdot d\vec{s}; \qquad \oiint \vec{A} \cdot d\vec{s} \tag{29}$$

- Integral de volume

$$\iiint \rho_v dv \tag{30}$$

- Teorema de Gauss

$$\oiint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \ \ dv \tag{31}$$

- Teorema de Stokes

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} \tag{32}$$

4 Eletrostática

- Lei de Coulomb

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2 \vec{R_{12}}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R_{12}}|^3}(\mathrm{N}); \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \tag{33}$$

- Campo elétrico da carga pontual

$$\vec{E} = \frac{Q\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R}|^3}(\mathrm{V/m}) \tag{34}$$

- Campo elétrico de uma linha de cargas

$$\vec{E} = \int \frac{\rho_l dl \vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R}|^3}; \; Q = \int \rho_l dl \tag{35}$$

- Campo elétrico de uma superfície de cargas

$$\vec{E} = \iint \frac{\rho_s ds \vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R}|^3}; \; Q = \iint \rho_s ds \tag{36}$$

- Campo elétrico de um volume de cargas

$$\vec{E} = \iiint \frac{\rho_v dv \vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R}|^3}; \; Q = \iiint \rho_v dv \tag{37}$$

- Fluxo elétrico e densidade de fluxo elétrico

$$\psi = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{s}; \;\; \vec{D} = \varepsilon\vec{E}; \;\; \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v; \tag{38}$$

- Trabalho sobre uma carga elétrica

$$W = -Q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{39}$$

- Diferença de potencial

$$V_{BA} = \frac{W}{Q} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_B - V_A \tag{40}$$

- Potencial elétrico (carga pontual)

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{41}$$

- Potencial elétrico (linha de cargas)

$$V = \int \frac{\rho_l dl}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{42}$$

- Potencial elétrico (superfície de cargas)

$$V = \iint \frac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{43}$$

- Potencial elétrico (volume de cargas)

$$V = \iiint \frac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{44}$$

- Campo eletrostático(conservativo)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0; \;\; \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0; \;\; \vec{E} = -\vec{\nabla} V \tag{45}$$

- Corrente elétrica (de condução)

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} \tag{46}$$

- Densidade de corrente elétrica (de condução)

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = \rho_v \vec{u} \tag{47}$$

- Resistência elétrica

$$R = \frac{l}{\sigma A} \tag{48}$$

- Lei de Ohm

$$V = RI \tag{49}$$

- Potência elétrica

$$P = VI = \frac{V^2}{R} = RI^2 \tag{50}$$

- Equação da continuidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{51}$$

- Interface dielétrico-dielétrico

$$E_{1t} = E_{2t}; \quad D_{1n} = D_{2n} \tag{52}$$

- Interface condutor-dielétrico

$$E_t = 0; \quad D_n = \rho_s \tag{53}$$

- Capacitância

$$C = \frac{Q}{V} \tag{54}$$

- Capacitor de placas paralelas

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \tag{55}$$

- Capacitor cilíndrico

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{56}$$

- Capacitor esférico

$$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \tag{57}$$

5 Magnetostática

- Lei de Biot-Savart

$$\vec{H} = \int \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{4\pi|\vec{R}|^3} \tag{58}$$

- Lei de Ampère

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{env} \tag{59}$$

- Fluxo magnético

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H} \tag{60}$$

- Força magnética

$$\vec{F}_m = \int Id\vec{l} \times \vec{B} \tag{61}$$

- Torque sobre espira

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}, \qquad \vec{m} = N\ I\ A\ \hat{a}_n \tag{62}$$

- Interface entre dois meios

$$H_{1t} = H_{2t}; \quad B_{1n} = B_{2n} \tag{63}$$

- Indutância própria

$$L = \frac{N\phi}{I} \tag{64}$$

- Indutância mútua

$$M_{12} = \frac{N_1\phi_{12}}{I_2} \tag{65}$$

- Indutância de um solenoide/toroide

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \tag{66}$$

- Força magnetomotriz

$$\mathcal{F} = NI = \mathcal{R}\phi \tag{67}$$

- Relutância magnética

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A} \tag{68}$$

- Indutância

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} \tag{69}$$

6 Campos eletromagnéticos variantes no tempo

- Força eletromotriz induzida (lei de Faraday)

$$V_{fem} = -\frac{d}{dt}\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{70}$$

- Força eletromotriz induzida (f.e.m. de transformador)

$$V_{fem} = -\iint \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \cdot d\vec{s} \tag{71}$$

- Força eletromotriz induzida (f.e.m. de movimento)

$$V_{fem} = \oint (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \tag{72}$$

- Densidade de corrente de deslocamento

$$\vec{J}_d = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \tag{73}$$

- Corrente de deslocamento

$$I_d = \iint \vec{J}_d \cdot d\vec{s} = \iint \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \cdot d\vec{s} \tag{74}$$

- Equações de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \tag{75}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{76}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \tag{77}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \tag{78}$$

- Velocidade de propagação da onda eletromagnética

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f = \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}} \tag{79}$$

- Período da onda eletromagnética

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{80}$$

- Impedância intrínseca (meio sem perdas)

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{81}$$

- Impedância intrínseca (meio com perdas)

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \tag{82}$$

- Constantes de atenuação e de fase

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right]} \tag{83}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1\right]} \tag{84}$$

- Coeficiente de reflexão

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \tag{85}$$

- Coeficiente de transmissão

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \tag{86}$$

7 Definição de constantes e suas unidades

- Permissividade elétrica do vácuo

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\mathrm{F/m} \tag{87}$$

- Permeabilidade magnética do vácuo

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{H/m} \tag{88}$$