Wagner Spinato Chittó
201421493

Universidade Federal de Santa Maria - UFSM
Centro de Tecnologia - CT
Departamento de Eletromecânica e Sistemas de Potência - DESP
Prof. Jorge Rodrigo Massing, Dr. Eng.

Eletromagnetismo I - UFSM00068

Lista de Exercícios 1

Álgebra Vetorial

1. Determine o vetor unitário ao longo da direção OP, se O for a origem e P o ponto $(4, -5, 1)$.

$$|OP| = \sqrt{4^2+5^2+1} = \sqrt{42}$$

$$\hat{a}OP = \left(\frac{4}{\sqrt{42}}\hat{a}_x + \frac{-5}{\sqrt{42}}\hat{a}_y + \frac{1\hat{a}_z}{\sqrt{42}}\right) =$$

$$(.6172\hat{a}_x - .7715\hat{a}_y + .1543\hat{a}_z)$$

2. Os vetores posição dos pontos M e N são $\hat{a}_x - 4\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$ e $3\hat{a}_x + 5\hat{a}_y - \hat{a}_z$, respectivamente. Determine o vetor distância orientado de M a N.

$$\vec{MN} = (3\hat{a}_x + 5\hat{a}_y - \hat{a}_z) - (\hat{a}_x - 4\hat{a}_y - 2\hat{a}_z) =$$

$$(2\hat{a}_x + 9\hat{a}_y + \hat{a}_z)$$

3. Os vetores posição dos pontos P e Q são $4\hat{a}_x + 6\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$ e $\hat{a}_x + 8\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$, respectivamente. Determine o vetor distância orientado de P a Q,

$$\vec{PQ} = (\hat{a}_x + 8\hat{a}_y + 3\hat{a}_z) - (4\hat{a}_x + 6\hat{a}_y - 2\hat{a}_z) =$$

$$(-3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 5\hat{a}_z)$$

4. Dados $\vec{A} = 4\hat{a}_y + 10\hat{a}_z$ e $\vec{B} = 2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y$, encontre a projeção de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$.

$$\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{0+12+0}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{12}{\sqrt{13}}$$

5. Determine o ângulo entre $\vec{A} = 2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y + \hat{a}_z$ e $\vec{B} = -\hat{a}_x + 5\hat{a}_y + \hat{a}_z$.

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{-2+15+1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = \frac{14}{\sqrt{378}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{14}{\sqrt{378}}\right)$$

6. Ache o menor ângulo entre $\vec{A} = 10\hat{a}_x + 2\hat{a}_z$ e $\vec{B} = -4\hat{a}_y + 0{,}5\hat{a}_z$ usando tanto o produto escalar quanto o produto vetorial.

$$\text{PE)}\ \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{0+0+1}{\sqrt{104}\cdot\sqrt{16.25}} = \frac{1}{\sqrt{1690}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1690}}\right)$$

$$\text{PV)}\ \sin\theta = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 10 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & .5 \end{vmatrix}}{\sqrt{104}\sqrt{16.25}} = \frac{+8\hat{a}_x - 5\hat{a}_y - 40\hat{a}_z}{\sqrt{1690}} = \frac{\sqrt{1690}}{\sqrt{1690}} = 1$$

$$\theta = \arcsin(1)$$

7. Considere $\vec{A} = 4\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$ e $\vec{B} = 3\hat{a}_x + \hat{a}_y - \hat{a}_z$. Determine $\vec{A} \times \vec{B}$.

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2-5)\hat{a}_x + (15+4)\hat{a}_y + (4+6)\hat{a}_z =$$

$$-3\hat{a}_x + 19\hat{a}_y + 10\hat{a}_z$$

8. Dados $\vec{A} = 2\hat{a}_x - \hat{a}_z$, $\vec{B} = 3\hat{a}_x + \hat{a}_y$ e $\vec{C} = -2\hat{a}_x + 6\hat{a}_y - 4\hat{a}_z$, mostre que $\vec{C}$ é perpendicular simultaneamente a $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = (2,0,-1)\cdot(-2,6,-4) = -4+0+4 = 0 \checkmark$$

$$\vec{B}\cdot\vec{C} = (3,1,0)\cdot(-2,6,-4) = -6+6+0 = 0 \checkmark$$

9. Determine o produto escalar, o produto vetorial e o ângulo entre os vetores $\vec{P} = 2\hat{a}_x - 6\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$ e $\vec{Q} = 3\hat{a}_y + \hat{a}_z$.

$$\vec{P}\cdot\vec{Q} = (2,-6,5)\cdot(0,3,1) = 0-18+5 = -13$$

$$\vec{P}\times\vec{Q} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-6-15)\hat{a}_x + (-2)\hat{a}_y + (6+6)\hat{a}_z =$$

$$-21\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 12\hat{a}_z$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{|\vec{P}||\vec{Q}|} = \frac{-13}{\sqrt{4+36+25}\cdot\sqrt{10}} = \frac{-13}{\sqrt{650}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-13}{\sqrt{650}}\right)$$

10. Dados os vetores $\vec{A} = 2\hat{a}_x + 5\hat{a}_z$ e $\vec{B} = \hat{a}_x - 3\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$, determine $|\vec{A}\times\vec{B}| + \vec{A}\cdot\vec{B}$.

$$|\vec{A}\times\vec{B}| + \vec{A}\cdot\vec{B} = \left\|\begin{matrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{matrix}\right\| + (2,0,5)\cdot(1,-3,4) =$$

$$|15\hat{a}_x + (5-8)\hat{a}_y - 6\hat{a}_z| + 2 + 20 = \sqrt{15^2+9+36} + 22 =$$

$$\sqrt{270} + 22$$

11. Considere $\vec{A} = \hat{a}_x - \hat{a}_z$, $\vec{B} = \hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z$, $\vec{C} = \hat{a}_y + 2\hat{a}_z$ e determine:

a) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (1,0,-1) \cdot \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1,0,-1) \cdot (1,-2,1) =$

$1 + 0 - 1 = 0$

b) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (0,1,2) = (1,-2,1) \cdot (0,1,2) =$

$0 - 2 + 2 = 0$

c) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (1,0,-1) \times (1,-2,1) = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-2,-2) =$

$-2\hat{a}_x - 2\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$

d) $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (1,-2,1) \times (0,1,2) = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5,-2,1) =$

$-5\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 1\hat{a}_z$

12. Demonstre que $(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = (|\vec{A}||\vec{B}|)^2$.

Propriedade: $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cdot \cos\theta$

$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cdot \sin\theta$

Então: $(|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta)^2 + (|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta)^2 = (|\vec{A}||\vec{B}|)^2$

$(|\vec{A}||\vec{B}|)^2\cos^2\theta + (|\vec{A}||\vec{B}|)^2\sin^2\theta = (|\vec{A}||\vec{B}|)^2$

$(|\vec{A}||\vec{B}|)^2 \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (|\vec{A}||\vec{B}|)^2$

$(|\vec{A}||\vec{B}|)^2 \cdot 1 = (|\vec{A}||\vec{B}|)^2$

13. Considere $\vec{A} = \alpha\hat{a}_x + 3\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$ e $\vec{B} = 4\hat{a}_x + \beta\hat{a}_y + 8\hat{a}_z$, determine:

a) Os valores de α e β se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ forem paralelos.

$$\vec{B} = k\vec{A}$$

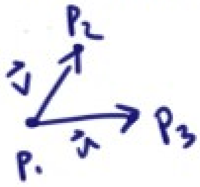
$$\frac{4}{\alpha} = \frac{\beta}{3} = \frac{8}{-2} \rightarrow \frac{8}{-2} = \boxed{-4 = k} \quad \begin{cases} \frac{4}{\alpha} = -4 \rightarrow \alpha = \frac{4}{-4} = -1 \\ \frac{\beta}{3} = -4 \rightarrow \beta = -12 \end{cases}$$

b) A relação entre α e β se $\vec{B}$ for perpendicular a $\vec{A}$.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

$$4\alpha + 3\beta - 16 = 0$$

14. Calcule a área de um triângulo determinado pelos pontos $P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (2,3,4)$ e $P_1 = (3,0,-1)$m.



$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (2-1, 3-1, 4-1) = (1,2,3)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_3} = (3-1, 0-1, -1-1) = (2,-1,-2)$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-4+3)\hat{a}_x + (6+2)\hat{a}_y + (-4-1)a_z =$$

$$-1\hat{a}_x + 8\hat{a}_y - 5\hat{a}_z$$

$$A = \frac{|\vec{v} \times \vec{u}|}{2} = \frac{\sqrt{1+64+25}}{2} = \frac{\sqrt{90}}{2}$$

Lista de Exercícios 2

Sistemas e Transformação de Coordenadas

1. Expresse os seguintes pontos em coordenadas cilíndricas e esféricas

	cilíndricas	esféricas
a) $P = (1, -4, -3)$	$\rho = \sqrt{17}$ $\varphi = \arctan(-4)$ $z = -3$	$r = \sqrt{26}$ $\theta = \arccos(-3/\sqrt{26})$ $\varphi = \arctan(-4)$
b) $Q = (3,0,5)$	$\rho = 3$ $\varphi = \arctan(0)$ $z = 5$	$r = \sqrt{34}$ $\theta = \arccos(5/\sqrt{34})$ $\varphi = \arctan(0)$
c) $R = (-2,6,0)$	$\rho = \sqrt{40}$ $\varphi = \arctan(-3)$ $z = 0$	$r = \sqrt{40}$ $\theta = \arccos(0)$ $\varphi = \arctan(-3)$

2. Dados dois pontos em coordenadas cilíndricas $P = (10{,}60°{,}2)$ e $Q = (5{,}30°, -4)$, determine a distância entre eles.

$$\vec{P} = (10 \cdot \cos 60°, 10 \cdot \sin 60°, 2)$$

$$\vec{Q} = (5 \cdot \cos 30°, 5 \cdot \sin 30°, -4)$$

$$d = \sqrt{(5\cos 30° - 10\cos 60°)^2 + (5\sin 30° - 10\sin 60°)^2 - 6^2}$$

$$d = \sqrt{(5\cos 30° - 5)^2 + (2.5 - 10\sin 60°)^2 - 36}$$

3. Se $\vec{A} = 5\hat{a}_\rho + 2\hat{a}_\phi - \hat{a}_z$ e $\vec{B} = \hat{a}_\rho - 3\hat{a}_\phi + 4\hat{a}_z$, determine:

a) $\vec{A}\cdot\vec{B} = 5 - 6 - 4 = -5$

b) $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_\rho & \hat{a}_\phi & \hat{a}_z \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 4\hat{a}_\rho - 21\hat{a}_\phi - 17\hat{a}_z$

c) O ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{-5}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{26}} = \frac{-5}{\sqrt{780}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{780}}\right)$$

d) O vetor unitário normal ao plano que contém ambos $\vec{A}$ e $\vec{B}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \frac{4\hat{a}_\rho - 21\hat{a}_\phi - 17\hat{a}_z}{\sqrt{16+441+289}} = \frac{4}{\sqrt{755}}\hat{a}_\rho + \frac{-21}{\sqrt{755}}\hat{a}_\phi + \frac{-17}{\sqrt{755}}\hat{a}_z$$

e) O vetor projeção de $\vec{A}$ em $\vec{B}$.

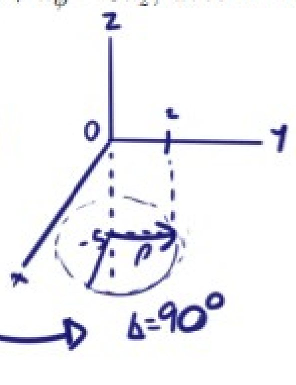
$$\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|^2}\right)\cdot\vec{B} = \frac{-5}{\sqrt{26}^2}\cdot(1,-3,4) = \frac{-5}{26}\hat{a}_\rho + \frac{15}{26}\hat{a}_\phi + \frac{-20}{26}\hat{a}_z$$

4. Dados os vetores $\vec{A} = 2\hat{a}_x + 4\hat{a}_y + 10\hat{a}_z$ e $\vec{B} = -5\hat{a}_\rho + \hat{a}_\phi - 3\hat{a}_z$, determine:

a) $\vec{A}+\vec{B}$ em $P = (0,2,-5)$

$\rho = \sqrt{4} = 2 \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{2}{0}\right)$

DIV(0)



$$\vec{B} = (-5\cos 90^\circ - 1\sin 90^\circ)\hat{a}_x + (-5\sin 90^\circ + 1\cos 90^\circ)\hat{a}_y - 3\hat{a}_z$$

$$\vec{B} = (-5\cdot 0 - 1\cdot 1)\hat{a}_x + (-5\cdot 1 + 1\cdot 0)\hat{a}_y - 3\hat{a}_z = (-1,-5,-3$$

$$\vec{A}+\vec{B} = (2,4,10) + (-1,-5,-3) = \hat{a}_x - \hat{a}_y + 7\hat{a}_z$$

b) O ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ em P

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{-2-20-30}{\sqrt{120}\cdot\sqrt{35}} = \frac{-52}{2\sqrt{1050}} = \frac{-52}{10\sqrt{42}} = \frac{-26}{5\sqrt{42}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-26}{5\sqrt{42}}\right)$$

c) A componente escalar de $\vec{A}$ ao longo de $\vec{B}$ em P.

$$\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{-52}{\sqrt{35}}$$

5. Dado um ponto $P = (-2{,}6{,}3)$ e um vetor $A = 6\hat{a}_x + \hat{a}_y$, determine P em coordenadas cilíndricas e esféricas.

$$\rho = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{6}{-2}\right) = \arctan(-3)$$

$$r = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{3}{7}\right)$$

$$P_{(\rho,\phi,z)} = \left(\sqrt{40}, \tan^{-1}(-3), 3\right)$$

$$P(r,\theta,\phi) = \left(7, \cos^{-1}(3/7), \tan^{-1}(-3)\right)$$

Ainda, expresse o vetor $\vec{A}$ no ponto P em coordenadas cilíndricas e esféricas.

$$\vec{A}_{(\rho,\phi,z)} = \left(6\cdot\frac{-1}{\sqrt{10}} + 1\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\right)a_\rho + \left(-6\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)a_\phi + 0 = \frac{-3}{\sqrt{10}}a_\rho - \frac{19}{\sqrt{10}}a_\phi$$

$$\vec{A}_{(r,\theta,\varphi)} = \left(6\cdot\frac{\sqrt{40}}{7}\cdot\frac{-1}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{40}}{7}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\hat{a}_r + \left(6\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{-1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\hat{a}_\theta + \left(-6\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)\hat{a}_\phi =$$

$$\left(\frac{-6}{7}\right)\hat{a}_\rho + \left(\frac{-9}{7\sqrt{10}}\right)\hat{a}_\theta + \left(\frac{-19}{\sqrt{10}}\right)a_\phi$$

Por fim, calcule o módulo do vetor $\vec{A}$ nos três sistemas.

$$|A_{(x,y,z)}| = \sqrt{36+1+0} = \sqrt{37}$$

$$|A(\rho,\varphi,z)| = \sqrt{\frac{9}{10} + \frac{361}{10}} = \sqrt{\frac{370}{10}} = \sqrt{37}$$

$$|A_{(r,\theta,\varphi)}| = \sqrt{\left(\frac{36}{49} + \frac{81}{49\cdot 10} + \frac{361}{10}\right)} = \sqrt{37}$$

Lista de Exercícios 3

Cálculo Vetorial

1. Utilizando o comprimento diferencial dl, determine o comprimento de cada uma das seguintes curvas:

   a) $\rho = 3; \pi/4 < \phi < \pi/2; z =$ constante.

$$d\vec{l} = d\rho\hat{a}_\rho + \rho d\phi\hat{a}_\phi + dz\hat{a}_z = 0 + 3d\phi\hat{a}_\phi + 0$$

$$L = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 3d\phi = 3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

   b) $r = 1; \theta = 30°; 0 < \phi < 60°$.

$$d\vec{l} = dr\hat{a}_r + rd\theta\hat{a}_\theta + r\sin\theta d\phi\hat{a}_\phi = 0 + 0 + 1 \cdot .5 \cdot d\phi\hat{a}_\phi$$

$$L = \int_0^{60° = \pi/3} .5\, d\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi/6$$

   c) $r = 4; 30° < \theta < 90°; \phi =$ constante.

$$d\vec{l} = dr\hat{a}_r + rd\theta\hat{a}_\theta + r\sin\theta d\phi\hat{a}_\phi = 0 + 4d\theta\hat{a}_\theta + 0$$

$$L = \int_{\pi/6}^{\pi/2} 4d\theta = 4 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

2. Determine o gradiente dos seguintes campos escalares:

   a) $U = 5y - x^3y^2$.

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z = -3x^2y^2\hat{a}_x + (5 - 2yx^3)\hat{a}_y$$

   b) $U = x^2y + xyz$.

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z = (2xy + yz)\hat{a}_x + (x^2 + xz)\hat{a}_y + (xy)\hat{a}_z$$

   c) $V = \rho z \sin\phi + z^2\cos^2\phi + \rho^2$.

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z = (z \cdot \sin\varphi + 2\rho)\hat{a}_\rho + (\rho\sin\varphi + 2z\cdot\cos^2\varphi)\hat{a}_z$$

$$1/\rho(\rho z\cos\varphi + z^2 \cdot 2\cos\varphi \cdot (-\sin\varphi))\hat{a}_\varphi =$$

$$(z \cdot \sin\varphi + 2\rho)\hat{a}_\rho + (z \cdot \cos\varphi - 2z^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi)\hat{a}_\varphi + (\rho\sin\varphi + 2z\cdot\cos^2\varphi)\hat{a}_z$$

3. Determine o divergente dos seguintes campos vetoriais e os calcule nos pontos especificados:

a) $\vec{A} = yz\hat{a}_x + 4xy\hat{a}_y + y\hat{a}_z$ em $(1, -2, 3)$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 + 4x + 0 = 4x \text{ em } 4$$

b) $\vec{B} = \rho z \sin\phi \hat{a}_\rho + 3\rho z^2 \cos\phi \hat{a}_\phi$ em $(5, \pi/2, 1)$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\cdot(\rho\cdot\rho)' z\sin\varphi + \frac{1}{\rho}\left(3\rho z^2(-\sin\varphi)\right) + 0 =$$

$$= 2z\sin\varphi - 3z^2\sin\varphi = z\sin\varphi(2-3z) \text{ em } -1$$

c) $\vec{C} = 2r\cos\theta\cos\phi\hat{a}_r + r^{1/2}\hat{a}_\phi$ em $(1, \pi/6, \pi/3)$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$= \frac{(r^2\cdot 2r)'\cos\theta\cos\varphi}{r^2} + 0 + 0 = 6\cos\theta\cdot\cos\varphi \text{ em } 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

4. Determine o rotacional dos seguintes campos vetoriais e os calcule nos pontos especificados:

a) $\vec{A} = yz\hat{a}_x + 4xy\hat{a}_y + y\hat{a}_z$ em $(1, -2, 3)$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{a}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{a}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{a}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$= \hat{a}_x(1-0) + \hat{a}_y(y-0) + \hat{a}_z(4y-z) = \hat{a}_x + y\hat{a}_y + (4y-z)\hat{a}_z \text{ em } \hat{a}_x - 2\hat{a}_y - 11\hat{a}_z$$

b) $\vec{B} = \rho z \sin\phi \hat{a}_\rho + 3\rho z^2 \cos\phi \hat{a}_\phi$ em $(5, \pi/2, 1)$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{a}_\rho & \rho\hat{a}_\phi & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} = \frac{\hat{a}_\rho}{\rho}\left(\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi \rho}{\partial z}\right) + \hat{a}_\varphi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\frac{\rho}{\rho} + \frac{\hat{a}_z}{\rho}\left(\frac{\partial A_\varphi \rho}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= (0 - 6z\rho\cos\varphi)\hat{a}_\rho + (\rho\sin\varphi - 0)a_\varphi + \left(6\frac{\rho}{\rho}z^2\cos\varphi - \frac{\rho}{\rho}z\cos\varphi\right)a_z =$$

$$= (-6z\rho\cos\varphi)\hat{a}_\rho + (\rho\sin\varphi)a_\varphi + (z\cos\varphi(6z-1))a_z \text{ em } 5\hat{a}_\varphi$$

c) $\vec{C} = 2r\cos\theta\cos\phi\hat{a}_r + r^{1/2}\hat{a}_\phi$ em $(1, \pi/6, \pi/3)$.

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\theta & r\sin\theta\hat{a}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\hat{a}_r}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial r\sin\theta A_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial rA_\theta}{\partial\varphi}\right) + \frac{\hat{a}_\theta}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial r\sin\theta A_\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\hat{a}_\varphi}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

$$= \frac{\hat{a}_r}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} r\sin\theta\cdot r^{1/2} + 0\right) + \frac{\hat{a}_\theta}{r\sin\theta}\left(-2r\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial}{\partial r} r^{3/2}\sin\theta\right) + \frac{\hat{a}_\varphi}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

$$= \frac{\hat{a}_r}{r\sin\theta}\left(r^{1/2}\cdot\cos\theta\right) + \frac{\hat{a}_\theta}{\sin\theta}\left(-2r\cos\theta\cdot\sin\varphi - \frac{3}{2}r^{1/2}\sin\theta\right) + \frac{\hat{a}_\varphi}{r}\left(+2r\sin\theta\cos\varphi\right)$$

$$= \hat{a}_r\left(r^{-1/2}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) + \hat{a}_\theta\left(-2r\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi - \frac{3r^{1/2}}{2}\right) + \hat{a}_\varphi\left(2\sin\theta\cos\varphi\right)$$

em $\hat{a}_r\left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) + \hat{a}_\theta\left(-4\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{2}\right) + \hat{a}_\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$

5. Determine o laplaciano dos seguintes campos escalares:

a) $U = x^2y + xyz$.

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 2y$$

b) $V = \rho z\sin\phi + z^2\cos^2\phi + \rho^2$.

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho z\sin\varphi + 2\rho^2\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\rho z\cos\phi + z^2(2\cos\phi(-\sin\phi))\right) + 2\cos^2\phi$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(z\sin\varphi + 4\rho\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(-\rho z\sin\varphi + 2z^2\sin\varphi\cdot -\cos\varphi\right) + 2\cos^2\varphi$$

$$= \frac{z\sin\varphi}{\rho} + 4 + \frac{1}{\rho^2}\left(-\rho z\sin\varphi + 2z^2\cdot(\cos\varphi\cdot -\cos\varphi + \sin\varphi\cdot\sin\varphi\right) + 2\cos^2\varphi$$

$$= \frac{z\sin\varphi}{\rho} + 4 - \frac{z\sin\varphi}{\rho} + \frac{2z^2}{\rho^2}\left(-\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + 2\cos^2\varphi$$

$$= 4 + \frac{2z^2}{\rho^2}\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) + 2\cos^2\varphi$$

6. Dado que $\vec{H} = x^2\hat{a}_x + y^2\hat{a}_y$, calcule $\int \vec{H} \cdot d\vec{l}$, considerando L ao longo da curva $y = x^2$, de $(0,0,0)$ até $(1,1,0)$.

$$dl = dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y = dx\,\hat{a}_x + 2x\,dx\,\hat{a}_y$$

$$H\,dl = x^2 dx + y^2(2x\,dx) = x^2 dx + x^4 \cdot 2x\,dx = x^2 dx + 2x^5 dx$$

$$\int_0^1 (x^2 + 2x^5)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^6}{6}\right)\Big|_0^1 = 1/3 + 1/3 = 2/3$$

7. Se $\vec{H} = (x-y)\hat{a}_x + (x^2+zy)\hat{a}_y + 5yz\hat{a}_z$, calcule $\int \vec{H} \cdot d\vec{l}$ ao longo do caminho (1,0,0) → (0,0,0) → (0,0,1) → (0,2,0).

$$\int_1^0 x\,dx + \int_0^1 z\,dz + \int_0^1 (6t, 6t^2)\,dt =$$

$$\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 0 + (-3t^2 + 2t^3)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} - 3 + 2 = -\frac{3}{2}$$

8. Determine o vetor unitário normal à superfície $S = x^2 + y^2 - z$ no ponto (1,3,0).

$$\nabla S = (2x, 2y, -1)$$

$$|\nabla S| = \frac{2}{\sqrt{41}}\hat{a}_x + \frac{6}{\sqrt{41}}\hat{a}_y - \frac{1}{\sqrt{41}}\hat{a}_z$$

9. Mostre que o campo vetorial $\vec{F} = y^2 z\hat{a}_x + 2xyz\hat{a}_y + (2z + xy^2)\hat{a}_z$ é um campo conservativo e encontre o campo escalar V associado tal que $\vec{F} = \vec{\nabla}V$.

$$(\nabla \times F)_x = \partial_y(2z + xy^2) - \partial_z(2xyz) = 2xy - 2xy = 0$$

$$(\nabla \times F)_y = \partial_z(y^2 z) - \partial_x(2z + xy^2) = y^2 - y^2 = 0$$

$$(\nabla \times F)_z = \partial_x(2xyz) - \partial_y(y^2 z) = 2yz - 2yz = 0$$

$$V = xy^2 z + g(y,z)$$

$$g = g(z) = z^2 + c$$

$$V(x,y,z) = xy^2 z + z^2 + c$$

Use o resultado para calcular $\int \vec{F} \cdot d\vec{l}$ do ponto (2,1,1) até o ponto (3,2,2).

$$\int F\,d_v = V(3,2,2) - V(2,1,1) = (3\cdot 4\cdot 2 + 4) - (2\cdot 1\cdot 1 + 1) = 28 - 3 = 25$$

10. Seja $\vec{D} = \rho^2 \cos^2 \phi \hat{a}_\rho + z \sin \phi \hat{a}_\phi$, determine o fluxo líquido de $\vec{D}$ sobre a superfície fechada de um cilindro definido por $0 \leq z \leq 1$, $\rho = 4$. Verifique o teorema da divergência para este caso.

$$\iint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint \nabla\cdot\vec{D}\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^1 3\rho^2\cos^2\varphi\, dz\,d\rho\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^1 \left(z\cos^2\varphi + \frac{z}{\rho}\cos\varphi\right)\rho\, dz\,d\rho\,d\varphi$$

$$= 1\cdot 3\cdot \frac{4^3}{3}\cdot\pi + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 0 = 64\pi$$

11. Verifique o teorema da divergência para a função $A = r^2\hat{a}_r + r\sin\theta\cos\phi\hat{a}_\phi$ sobre a superfície de um quadrante de hemisfério definido por $0 < r < 3; 0 < \phi < \pi/2; 0 < \theta < \pi/2$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^3 (4r\cdot\sin\varphi)\, r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi = \frac{81\pi}{2} - 9$$

12. Demonstre que $\vec{B} = (y + z\cos(xz))\hat{a}_x + x\hat{a}_y + x\cos(xz)\hat{a}_z$ é conservativo, sem calcular nenhuma integral.

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \frac{\partial x\cos(xz)}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}, + \frac{\partial (y+z\cos(xz))}{\partial z} - \frac{\partial (x\cos(xz))}{\partial x}, + \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(y + z\cos xz) =$$

$$= (0-0)\hat{a}_x + \left(\cos(xz) - xz\sin(xz) - \cos(xz) + xz\sin(xz)\right)\hat{a}_y + (1-1)\hat{a}_z =$$

$$0\hat{a}_x + 0\hat{a}_y + 0\hat{a}_z \Rightarrow \nabla\times\vec{B} = 0$$ CONSERVATIVO!

13. Seja a função vetorial $\vec{A} = \rho\cos\phi\hat{a}_\rho + z\sin\phi\hat{a}_z$, verifique o teorema de Stokes para o caminho fechado L definido por $0 \leq \rho \leq 2$; $0 \leq \phi \leq 60°$; $z = 0$.

$$\oint \vec{A}\, d\vec{l} = \int_0^2 \rho\, d\rho + \int_0^{\pi/3} 0\, d\phi + \int_2^0 \frac{\rho}{2}\, d\rho = 2 + 0 - 1 = 1$$

$$\nabla\times\vec{A} = \sin\varphi\,\hat{a}_z = 1$$

Lista de Exercícios 4

Lei de Coulomb e Intensidade de Campo Elétrico

1. Duas cargas pontuais de 5nC e −2nC estão localizadas em $(2, 0, 4)$ e $(-3, 0, 5)$, respectivamente.

   a) Determine a força sobre uma carga pontual de 1nC localizada em $(1, -3, 7)$.

   b) Encontre o campo elétrico $\vec{E}$ em $(1, -3, 7)$.

$$v_1 = P - v_1 = (1-2, -3, 7-4) = (-1, -3, 3) \qquad |v_1| = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}$$

$$v_2 = P - v_2 = (1+3, -3, 7-5) = (4, -3, 2) \qquad |v_2| = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}$$

Seja k definido por $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, para todos exercícios seguintes

$$E_1 = \frac{kQ_1 v_1}{|v_1|^3} = \frac{k \cdot 5}{19\sqrt{19}} \cdot (-1, -3, 3) = \frac{-5k}{19\sqrt{19}}\hat{a}_x - \frac{15k}{19\sqrt{19}}\hat{a}_y + \frac{15}{19\sqrt{19}}\hat{a}_z$$

$$E_2 = \frac{kQ_2 v_2}{|v_2|^3} = \frac{-2k}{29\sqrt{29}} \cdot (4, -3, 2) = \frac{-8k}{\sqrt{29}^3}\hat{a}_x + \frac{6k}{\sqrt{29}^3}\hat{a}_y - \frac{4k}{\sqrt{29}^3}\hat{a}_z$$

$$\vec{E} = E_1 + E_2 = \left(\frac{-5k}{19\sqrt{19}} - \frac{8k}{\sqrt{29}^3}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{6k}{\sqrt{29}^3} - \frac{15k}{19\sqrt{19}}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{15}{19\sqrt{19}}\hat{a}_z - \frac{4k}{\sqrt{29}^3}\hat{a}_z\right)$$

$$F = q \cdot E = 1 \cdot E = \left(\frac{-5k}{19\sqrt{19}} - \frac{8k}{\sqrt{29}^3}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{6k}{\sqrt{29}^3} - \frac{15k}{19\sqrt{19}}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{15}{19\sqrt{19}}\hat{a}_z - \frac{4k}{\sqrt{29}^3}\hat{a}_z\right)$$

2. Duas cargas pontuais Q_1 e Q_2 estão localizadas em (4,0, − 3) e (2,0,1), respectivamente. Se $Q_2 = 4$nC, determine Q_1 tal que:

   a) O campo $\vec{E}$ em (5,0,6) não contenha componente em z.

$$v_1 = (1, 0, 9) \qquad |v_1| = \sqrt{82}$$

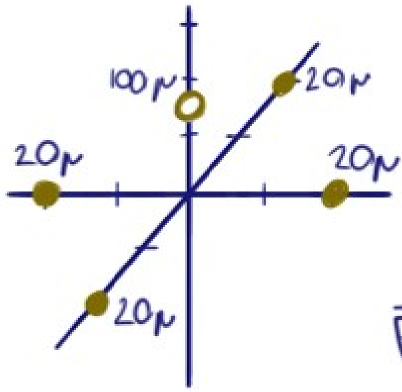
$$v_2 = (3, 0, 5) \qquad |v_2| = \sqrt{34}$$

$$Q_1 \cdot \frac{v_{1z}}{R_1} + Q_2 \cdot \frac{v_{2z}}{R_2} = 0 \Rightarrow Q_1 = -Q_2 \frac{v_{2z}}{v_{1z}} \cdot \frac{R_1}{R_2} = -4 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{\sqrt{82}^3}{\sqrt{34}^3} = \frac{20\sqrt{82}^3}{9\sqrt{34}^3} \text{nC}$$

   b) A força sobre uma carga de teste em (5,0,6) não tenha componente em x.

$$Q_1 = -4 \cdot 3 \frac{\sqrt{82}^3}{\sqrt{34}^3} = \frac{-12\sqrt{82}^3}{\sqrt{34}^3} \text{nC}$$

3. Quatro cargas pontuais de 20μC cada estão fixadas sobre os eixos x e y em ± 4m. Encontre a força sobre uma quinta carga pontual de 100μC localizada em (0,0,3)m.



DISTÂNCIA q à qualquer Q:

$$r = \sqrt{16+9} = 5m$$

$$a_r = \frac{(-4,0,3)}{5} = (-4/5, 0, 3/5)$$

$$\vec{F}_{Qq} = 4K \cdot \frac{qQ}{r^2} a_r = 4K \frac{20\mu \cdot 100\mu}{5^2} \cdot \frac{3}{5} a_z = K \cdot \frac{0{,}024}{5^3}$$

4. Determine a carga total:

a) Sobre uma linha dada por $0 \leq x \leq 5$m, se $\rho_l = 12x^2$mC/m.

$$\rho = 12x^2 \, mC/m$$

$$Q = \int_0^5 \rho \, dx = \int_0^5 12x^2 \, dx = 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = 4 \cdot 125 = 500 \, mC$$

b) Sobre um cilindro dado por $\rho = 3$, $0 \leq z \leq 4$m, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $\rho_s = \rho z^2$nC/m^2.

$$Q = \int_0^4 \int_0^{2\pi} (3z^2)(3) \, d\varphi \, dz = 3\left[z^3\right]_0^4 \cdot 2\pi =$$

$$Q = 2\pi \cdot 3 \cdot 4^3 = 6\pi \cdot 64 = 384 \, nC$$

c) Dentro de uma esfera com $r = 4$m, se $\rho_v = \dfrac{10}{r \sin\theta}$C/m^3

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^4 \frac{10}{r \cdot \sin\theta} \cdot r^2 \cdot \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^4 10r \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$Q = 10 \frac{r^2}{2} \Big|_0^4 \cdot \theta \Big|_0^{\pi} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = 5 \cdot 4^2 \cdot \pi \cdot 2\pi = 160\pi^2$$

5. Encontre a carga total contida em um segmento cônico de esfera definido por $0 \leq r \leq 2\text{m}$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$, $0 \leq \phi < 2\pi$, dado que $\rho_v = 10r^2 \cos^2\theta \text{mC/m}^3$.

$$Q = \int_v \rho_v dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2} 10r^2 \cos^2\theta \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$Q = 10\pi \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta}_{} \cdot \int_0^2 r^4 \, dr$$

$$u = \cos\theta \rightarrow \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} u^2 \, du = \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{2}/4\right) = \frac{4-\sqrt{2}}{12}$$

$$Q = 10\pi \cdot 2\pi \cdot \frac{4-\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{32}{5} = 20\pi^2 \cdot \frac{32 - 8\sqrt{2}}{15} \text{ mC}$$

6. Uma linha infinita uniformemente carregada com 10nC/m está posicionada em $x = 0$, $y = 2$, enquanto uma outra linha infinita, também uniformemente carregada, com -10nC/m está posicionada em $x = 0$, $y = -2$. Determine $\vec{E}$ na origem.

$\vec{E}$ na origem é $k \cdot 20\text{nC}$ na direção $(-\hat{a}_y)$

7. Um anel posicionado em $z = 0$, de raio $\rho = 2\text{m}$, está carregado com uma densidade linear de cargas $\rho_l = 5\mu\text{C/m}$. Determine o valor de $\vec{E}$ no ponto (0,0,3).

$$E = K \cdot \frac{Qh}{(a^2+h^2)^{3/2}} \hat{a}_z = K \cdot \frac{20\pi \cdot 3}{(4+9)^{3/2}} \hat{a}_z = \frac{K \cdot 60\pi}{\sqrt{13}^3} \hat{a}_z \ \mu\text{V/m}$$

8. Um disco circular de raio a está uniformemente carregado com $\rho_s \text{C/m}^2$. Considere o disco no plano $z = 0$ com seu eixo ao longo de z.

a) Demonstre que, em um ponto $(0,0,h)$, $\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\left\{1 - \frac{h}{(h^2+a^2)^{1/2}}\right\}\hat{a}_z$

$$\vec{E} = K \cdot \int \frac{\rho_s ds \vec{R}}{|\vec{R}|^3} \hat{a}_z = K \cdot \int \frac{\rho_s ds}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \cdot \rho h \, d\rho \, \hat{a}_z = K \cdot \rho_s \cdot z \int_0^a \frac{2\pi \cdot \rho \, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \hat{a}_z$$

$$\vec{E} = K 2\pi \rho_s \cdot z \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\right) = K 2\pi \rho_s \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right) \hat{a}_z$$

b) Se $a \ll h$, demonstre que $\vec{E}$ é similar ao campo de uma carga pontual.

$$\sqrt{h^2+a^2} = h\sqrt{1 + \frac{a^2}{h^2}} \approx h\left(1 + \frac{a^2}{2h^2}\right)$$

$$\text{cm } E \approx K 2\pi \cdot \frac{a^2}{2h^2} = \rho_s \frac{a^2}{h^2} K\pi \rightarrow Q = \pi a^2 \rho_s, \quad E \approx K \cdot \frac{Q}{h^2}$$

9. Encontre a força sobre uma carga pontual de 50μC localizada em (0,0,5)m devido à carga de $500\pi\mu$C, distribuída uniformemente sobre o disco circular de raio $r \leq 5$m, colocado na origem $z = 0$m.

$$\sigma = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{500\pi\mu}{\pi 5^2} = 20\mu C/m^2$$

$$E = 2k\pi\sigma\left(1 - \frac{h^2}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) = k\cdot 40\pi\cdot\left(1 - 1/\sqrt{2}\right)\hat{a}_z = \mu N/C$$

$$F = q\vec{E} = 2k\pi\cdot\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) nN$$

10. Cargas estão situadas em um plano na forma de quadrado perfeito definido por $-2 \leq x \leq 2$m, $-2 \leq y \leq 2$m e $z = -3$m, com densidade de cargas $\rho_s = 2(x^2 + y^2 + 9)^{3/2}$nC/m^2. Calcule o campo elétrico $\vec{E}$ na origem.

$$\vec{E} = k\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\frac{2(x^2+y^2+3^2)^{3/2}}{\sqrt{x^2+y^2+3^2}^3}\cdot 3\hat{a}_z dx dy$$

$$\vec{E} = 6k\cdot x\Big|_{-2}^{2} y\Big|_{-2}^{2} = 6k\cdot 4\cdot 4 = 96k\ nN/C$$

11. Uma superfície infinita carregada com densidade superficial de cargas $-\rho_s$ está localizada no plano xy em $z = 0$m, enquanto uma superfície infinita carregada com densidade superficial de cargas $+\rho_s$ está localizada no plano xy em $z = 2$m. Determine $\vec{E}$ em todas as regiões.

- $z < 0$

$$E = (2k\pi\cdot -\rho_s\,\hat{a}_z + 2k\pi\cdot\rho_s)\,\hat{a}_z = 0$$

- $0 < z < 2$

$$E = (2k\pi\cdot\rho_s + 2k\pi\cdot\rho_s)\,\hat{a}_z = 4k\pi\rho_s\,\hat{a}_z = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\,\hat{a}_z$$

- $z > 2$

$$E = (2k\pi\cdot\rho_s\,\hat{a}_z + 2k\pi\cdot(-\rho_s))\hat{a}_z = 0$$

Lista de Exercícios 5

Densidade de Fluxo Elétrico e Lei de Gauss

1. Uma carga pontual de 30nC está localizada na origem, enquanto um plano infinito em $y = 3$ está carregado com 10nC/m^2. Determine $\vec{D}$ em (0,4,3).

$$D_q = \frac{Q}{4\pi r^2} a_R = \frac{30n}{4\pi 25}\left(\frac{4}{5}\hat{a}_y + \frac{3}{5}\hat{a}_z\right)$$

$$D_q = \left(\frac{12}{50\pi}\hat{a}_y + \frac{9}{50\pi}\hat{a}_z\right) nC/m^2$$

$$D_{plano} = \frac{\rho_s}{2}\hat{a}_y = \frac{10n}{2}\hat{a}_y = 5\hat{a}_y \ nC/m^2$$

$$D = D_q + D_{plano} = \left(\frac{12}{50\pi} + 5\right)\hat{a}_y + \left(\frac{9}{50\pi}\right)\hat{a}_z \ nC/m^2$$

2. Se $\vec{D} = (2y^2 + z)\hat{a}_x + 4xy\hat{a}_y + x\hat{a}_z \text{C/m}^2$, determine

a) A densidade volumétrica de cargas em $(-1,0,3)$

$$\rho_v = \nabla D = \frac{\partial(2y^2+z)}{\partial x} + \frac{\partial(4xy)}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z}$$

$$\rho_v = 0 + 4x + 0 = 4x$$

$$\rho_{v(-1,0,3)} = -4 \ C/m^3$$

b) A carga total encerrada no cubo definido por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

$$Q = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 4x \, dx\,dy\,dz = 4\frac{x^2}{2}\cdot 1 \cdot 1 = 2C$$

3. Uma distribuição de cargas no espaço livre tem $\rho_v = 2r\text{nC/m}^3$ para $0 \leq r \leq 10\text{m}$ e é zero em todos os outros pontos do espaço.

Determine $\vec{E}$ em $r = 2\text{m}$.

$$Q = \oint \vec{D}\, ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2} 2r \cdot r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi = 2\frac{r^4}{4}\Big|_0^2 \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} \cdot 2\pi$$

$$= -8\cos\pi \cdot (+2) \cdot 2\pi = 32\pi$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{Q\hat{a}_r \cdot k}{r^2} = 3\frac{2kn\pi}{4} = 8k\pi\, \hat{a}_r \ \text{nV/m}$$

Determine $\vec{E}$ em $r = 12\text{m}$.

$$Q = \int_0^{10} 2r \cdot 4\pi r^2\, dr = 8\pi \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^{10} = 20\pi\mu C$$

$$E = Q\frac{\hat{a}_r \cdot k}{r^2} = \frac{20\pi \cdot k}{144} = \frac{10\pi k}{72}\ \text{KV/m}$$

4. Determine a densidade de cargas devido a cada uma das seguintes densidades de fluxo elétrico:

a) $\vec{D} = 8xy\hat{a}_x + 4x^2\hat{a}_y \text{C/m}^2$

$$\nabla\vec{D} = \frac{\partial\, 8xy}{\partial x} + \frac{\partial\, 4x^2}{\partial y} + \frac{\partial\, 0}{\partial z} = 8y\ \text{C/m}^3$$

b) $\vec{D} = 4\rho\sin\phi\hat{a}_\rho + 2\rho\cos\phi\hat{a}_\phi + 2z^2\hat{a}_z \text{C/m}^2$

$$\nabla\vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\, 4\rho^2\sin\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\, 2\rho\cos\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\, 2z^2}{\partial z} = 8\sin\varphi - 2\sin\varphi + 4z =$$

$$= 6\sin\varphi + 4z\ \text{C/m}^2$$

c) $\vec{D} = \frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{a}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{a}_\theta \text{C/m}^2$

$$\nabla D = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\,(r^2 \cdot 2\cos\theta \cdot r^{-3})}{\partial r} + \frac{\partial \sin\theta \cdot \sin\theta \cdot r^{-3}}{\partial\theta} + 0 =$$

$$= -\frac{2\cos\theta}{r^4} + \frac{2\cos\theta}{r^4} + 0 = 0\ \text{C/m}^3$$

5. Seja $\rho_v = \begin{cases} \frac{10}{r^2}\mathrm{mC/m^3} & ,1\mathrm{m} < r < 4\mathrm{m} \\ 0 & ,r > 4\mathrm{m} \end{cases}$

a) Determine o fluxo líquido que atravessa as superfícies $r = 2\mathrm{m}$ e $r = 6\mathrm{m}$.

$$Q(2) = \int_1^2 \rho_v \, dv = \frac{10}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \Big|_1^2 = 40\pi(2-1) = 40\pi \ \mathrm{mC}$$

$$Q(6) = \int_1^4 \rho_v \, dv = \frac{10}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \Big|_1^4 = 40\pi(4-1) = 120\pi \ \mathrm{mC}$$

b) Determine $\vec{D}$ em $r = 1\mathrm{m}$ e em $r = 5\mathrm{m}$.

$$D_r(1) = 0$$

$$D_r(5) = \frac{120\pi}{4\pi 5^2} = 1{,}2\hat{a}_r \ \mathrm{mC/m^2}$$

6. Uma densidade volumétrica de cargas uniforme ρ_v é definida tal que

$$\rho_v = \begin{cases} 80\mu\mathrm{C/m^3} & ,8\mathrm{mm} < r < 10\mathrm{mm} \\ 0 & ,r < 8\mathrm{mm} \end{cases}$$

a) Determine a carga total dentro da superfície de raio $r = 10\mathrm{mm}$.

$$Q = \rho_v \cdot V = \mu 80 \cdot \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3) = \mu\frac{320\pi}{3}(0{,}01^3 - 0{,}008^3) =$$

$$Q = \mu\frac{320}{3}\pi \cdot (1\mu - 0{,}512\mu) = \mu\frac{320\pi}{3} \cdot 0{,}488\mu =$$

$$Q = \frac{320}{3} \cdot 0{,}488 \ \mu^2 nC = 163 pC$$

b) Determine $\vec{D}$ em $r = 10\mathrm{mm}$.

$$D_r = \frac{163}{4\pi r^2}p = \frac{163p}{4\pi \cdot 10^{-4}} = \frac{1{,}63\mu}{4\pi} \approx \frac{410}{\pi} nC$$

c) Determine $\vec{D}$ em $r = 20\mathrm{mm}$.

$$D_r = \frac{163p}{4\pi(0{,}020)^2} = \frac{163p}{4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-4}} = \frac{1{,}63\mu}{16\pi} \approx \frac{0{,}1}{\pi}\mu C$$

7. Um disco circular de raio 4m e densidade $\rho_s = 12 \sin \phi \mu \mathrm{C/m^2}$ está envolto por uma superfície fechada S. Que fluxo total cruza S?

$$\Psi = Q = \iint \rho_s dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} 12 \sin\varphi \, \rho d\rho d\varphi =$$

$$= 12 \cdot 1 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot 0 = 0$$

8. Determine a carga contida no paralelepípedo de dimensões $0 \le x \le 1$, $0 \le \ y \le \ 2$, $0 \le z \le 3$ calculando ambos os lados do teorema da divergência de Gauss considerando a densidade de fluxo elétrico $\vec{D} = 2xy\hat{a}_x + x^2\hat{a}_y \mathrm{C/m^2}$.

$\rightarrow$ $$\nabla D = \frac{\partial 2xy}{\partial x} + \frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 2y + 0 + 0 = 2y$$

$$Q = \int_0^1\int_0^2\int_0^3 2y \, dz dy dx = \int_0^1\int_0^2 6y = 6 \cdot \int_0^1 dx \int_0^2 y \, dy =$$

$$= 6 x\Big|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = 6 \cdot 1 \cdot \frac{4}{2} = 12 \text{ C}$$

$\leftarrow$ • $x=0$, $dS = -a_x dy dz$, $D \cdot dS = -2xy \, dy dz = 0$

• $x=1$, $dS = a_x dy dz$, $D \cdot dS = 2xy \, dy dz =$

$$\int_0^2\int_0^3 2 \cdot 1 y \, dz dy = 6\int_0^2 y \, dy = 6 \cdot \frac{4}{2} = 12$$

• $y=0$, $dS = -a_y dx dz$, $D \cdot dS = -x^2 dx dz =$

$$\int_0^1\int_0^3 -x^2 dz dx = -\int_0^1 3x^2 dx = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$$

• $y=2$, $dS = a_y dx dz$, $D dS = x^2 dx dz =$

$$\int_0^1\int_0^3 x^2 dz dx = \int_0^1 3x^2 dx = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

• $z=0$, $dS = -a_z dx dy$, $D dS = 0$

• $z=3$, $dS = a_z dx dy$, $D dS = 0$

$$\Sigma = 12 - 1 + 1 = 12$$

9. Três superfícies esféricas com raios $r_1 = 2$m, $r_2 = 4$m e $r_3 = 6$m estão carregadas com densidade superficial de cargas uniforme ρ_s de valores 20nC/m^2, -4nC/m^2 e ρ_{s0}, respectivamente.

$Q = 4\pi R^2 \rho_s$

$Q_1 = 4\pi (2)^2 (20\,n) = 320\pi\ nC$

$Q_2 = 4\pi (4)^2 (-4\,n) = -256\pi\ nC$

$Q_3 = 4\pi (6)^2 \rho_{s0} = 144\pi \rho_{s0}$

a) Determine $\vec{D}$ em $r = 1$m $(r < r_1) \rightarrow Q = 0$

$D = \dfrac{Q(r)}{4\pi r^2} = 0$

Determine $\vec{D}$ em $r = 3$m $(r_1 < r < r_2) \rightarrow Q = Q_1$

$D = \dfrac{320\pi}{4\pi 9} = \dfrac{320}{36}\ nC$

Determine $\vec{D}$ em $r = 5$m. $(r_2 < r < r_3) \rightarrow Q = Q_1 + Q_2)$

$D = \dfrac{(320\pi - 256\pi)}{4\pi 5^2} = \dfrac{64}{100} = 640\,\hat{a}_r\ \mu C$

b) Determine ρ_{s0} tal que $\vec{D} = 0$ em $r = 7$m. $(r > r_3)$ $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$D_r(7) = 0$

$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$

$320\pi - 256\pi + 144\pi\rho_{s0} = 0$

$\rho_{s0} = -\dfrac{64}{144} = \dfrac{-4}{9}\ nC/m^2$

10. Dado $\vec{D} = \frac{10r^3}{4}\hat{a}_r$ em coordenadas esféricas, desenvolva os dois lados do teorema da divergência para o volume limitado por $r = 10$m.

$$\nabla D = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{10}{4}r^5 = \frac{25}{2}r^2$$

$$\leftarrow \quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{10}\frac{25}{2}r^2 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \frac{25}{2}\cdot 4\pi\int_0^{10} r^4 dr = 50\pi\cdot\frac{10^5}{5} = \pi MC$$

$$\rightarrow \quad \Phi = \iint D \cdot ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D_r \cdot 10 r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \frac{10}{4}\cdot 10^3 \cdot 4\pi \, 10^2 = 10^6 \cdot \pi = \pi MC$$

11. Dado $\vec{D} = 10\sin\theta\hat{a}_r + 2\cos\theta\hat{a}_\phi$ em coordenadas esféricas, desenvolva os dois lados do teorema da divergência para o volume limitado por $r = 2$m.

$$\nabla\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2 D_r + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial \sin\theta D_\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(10r\sin\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial(2\sin\theta\cos\theta)}{\partial\theta} =$$

$$\nabla\vec{D} = \frac{1}{r}\left(20\sin\theta + \frac{2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\sin\theta}\right)$$

$$\leftarrow \quad \int_v(\nabla D)dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2} r\,(18\sin^2\theta + 2\cos^2\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$\int_v(\nabla D)dv = 2\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{18\pi}{2}+\frac{2\pi}{2}\right) = 4\pi\cdot 10\pi = 40\pi^2 C$$

$$\rightarrow \quad \Phi = \iint D_R r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 10\sin\theta\cdot 4\sin\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= 40\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta \, d\theta = 40\cdot 2\pi\cdot\frac{\pi}{2} = 40\pi^2 C$$