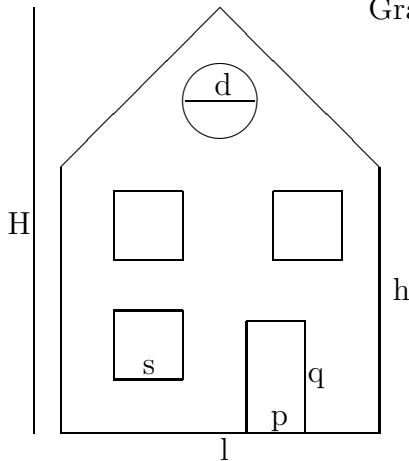


MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2013-14, primer semestre.

Examen parcial del 8 de novembre de 2013



- 1.- Es vol pintar la façana d'una casa. La forma de la façana és la unió d'un rectangle i d'un triangle isòscel·les. A més, no s'han de pintar les obertures: una porta rectangular, tres finestres quadrades iguals i una finestra circular.

S'han mesurat, aproximadament, les quantitats (mireu el dibuix):

- $l = 6 \pm 0.01$ m,
- $h = 5.5 \pm 0.01$ m,
- $H = 7.5 \pm 0.01$ m,
- $p = 1.1 \pm 0.01$ m,
- $q = 2 \pm 0.01$ m,
- $s = 1.2 \pm 0.01$ m,
- $d = 1 \pm 0.01$ m.

- (a) Quant medeix, aproximadament, la superfície que cal pintar? (cal donar un valor real únic; useu $\pi = 3.14$)
- (b) Quin dels 7 errors en les mesures, suposant-los tots iguals, afecta més al resultat? Podeu limitar-vos a aproximacions de primer ordre, i no considerem l'error degut a l'aproximació en π .

- 2.- Se suposa que la funció exponencial i la funció logaritme neperià s'avaluen aproximadament, amb un error relatiu fitat per $\epsilon \ll 1$. Sigui $x \in (0, 1)$. Treballant sempre amb aproximacions de primer ordre en ϵ , trobeu fites aproximades dels errors relatius en els dos càlculs:

(a) $\exp(\log(x))$,

(b) $\log(\exp(x))$.

Les fites han de dependre de ϵ i de x .

- (c) Quina de les dues fites és més gran (per a cada valor de x)?

- 3.-** Sigui B una matriu $k \times k$ regular, de la qual es coneix la factorització LU: $B = LU$, amb L triangular inferior amb uns a la diagonal, i U triangular superior. Es considera ara una matriu A $(k+1) \times (k+1)$ tal que, partida per dimensions k i 1 , té la forma

$$A = \begin{pmatrix} & & & \vdots & \\ & B & & \vdots & v \\ & & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & h^T & & \vdots & a \end{pmatrix},$$

on $v, h \in R^k$ i $a \in R$.

Aprofitant que es coneix la factorització LU de B , es vol calcular la factorització LU de A en la forma:

$$A = \begin{pmatrix} & & & \vdots & \\ & L & & \vdots & 0 \\ & & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & l^T & & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & \vdots & \\ & U & & \vdots & u \\ & & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & 0^T & & \vdots & z \end{pmatrix}.$$

O sigui, cal trobar les incògnites $l, u \in R^k$ i $z \in R$ a partir de les dades B, v, h, a, L i U .

- (a) Demostreu que això és possible degut al fet que B és regular, i vegeu que cal resoldre 2 sistemes triangulars i fer un producte escalar.
- (b) Compteu la quantitat d'operacions aritmètiques elementals que cal fer, en funció de k .

- 4.-** Sigui A una matriu regular i $\|\cdot\|$ una norma vectorial.

- (a) Demostreu que, si $A + \delta A$ és una matriu singular, llavors $\kappa(A) \geq \|A\|/\|\delta A\|$.

- (b) Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \epsilon & \epsilon \\ 1 & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}$, $0 < |\epsilon| < 1$. Doneu una fita inferior de $\kappa_\infty(A)$ d'acord amb (a) i compareu-la amb el valor exacte.

Entregueu problemes diferents en fulls diferents