# Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2013-2014
## Examen Parcial

- **Feu els problemes en fulls separats.**
- **Justifiqueu detalladament les respostes.**

**(1)** (a) (**1.5 punts**) Definiu els conceptes de punt interior i conjunt obert. Proveu que la unió finita o infinita de conjunts oberts és un conjunt obert. És cert que la intersecció infinita de conjunts oberts és un obert?

(b) (**2 punts**) Considereu el conjunt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4x + y^2 \geq 0,\ y \leq 0\}$.

(i) Representeu-lo gràficament.

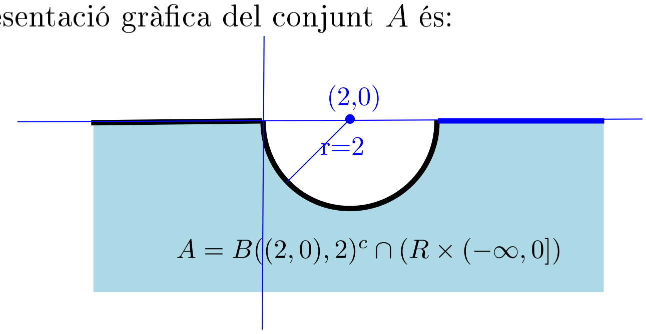
(ii) Determineu l'interior, l'adherència i la frontera de $A$.

(iii) És compacte el conjunt $A$?

**Solució:**

(a)
- Un punt $p \in A \subset \mathbb{R}^n$ és interior si existeix un $r > 0$ tal que la bola $B(p, r)$ de centre $p$ i radi $r$ està continguda en $A$, és a dir existeix $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset A$.
- Un conjunt $A$ és obert si tot punt $p$ de $A$ és interior a $A$, o bé ai $A$ és el conjunt buit.
- Provem que la unió finita o infinita de conjunts oberts és un conjunt obert.
  Sigui $\{A_\alpha\}_\alpha$ una família de conjunts oberts. Hem de veure que donat un punt $p \in A = \cup_\alpha A_\alpha$ existeix un $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset A$.
  Si $p \in A$, llavors $p \in A_\alpha$ per a un cert $\alpha$. Donat que $A_\alpha$ és obert existeix $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset A_\alpha \subset A$ que prova el resultat.
- La intersecció infinita de conjunts oberts no necessàriqment és un obert. Per exemple si $A_k = (-1/k, 1/k)$, $k \in \mathbb{N}$, llavors $\cap_{k=1}^{\infty} A_k = \{0\}$ que no és obert.

(b) (i) Completant quadrats tenim $x^2 - 4x + y^2 = (x-2)^2 + y^2 - 4$ i per tant la primera condició és pot escriure de la forma $(x-2)^2 + y^2 \geq 4$, que geomètricament es correspon amb el complementari de la bola oberta de centre $c = (2, 0)$ i radi $r = 2$. La condició $y \leq 0$ geomètricament es correspon amb el semipla inferior tancat. Per tant la representació gràfica del conjunt $A$ és:




(ii) Considerem l'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x, y) = (x^2 - 4x + y^2, y)$.

- Veiem que $A$ és tancat:
  Sabem que les funcions polinòmiques són contínues. Per tant les dues components de $f$ són funcions contínues i $f$ és contínua.
  Per definició, tenim $A = f^{-1}([0, +\infty) \times (-\infty, 0])$. Utilitzant que $[0, +\infty) \times (-\infty, 0]$ és tancat en $\mathbb{R}^2$ (és el producte cartesià de dos tancats en $\mathbb{R}$) i que

l'aintiimatge d'un conjunt tancat per una funció contínua és tancat, tenim que $A$ és tancat, i per tant la seva adherència és ell mateix, és a dir $\overline{A} = A$.
També podeu utilitzar aquest raonament.
Com hem comentat abans $A = B((2,0),2)^c \cap (\mathbb{R} \times (-\infty, 0])$. Donat que el complementari d'un obert és tancat tenim que $B((2,0),2)^c$ és tancat en $\mathbb{R}^2$. El producte cartesià de tancats és tancat, i per tant $\mathbb{R} \times (-\infty, 0]$ també és tancat. Utilitzant que la intersecció de tancats és un tancat, veiem que $A$ és tancat i per tant $\overline{A} = A$.

- Determinem la frontera i l'interior:
Diem $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 - 4x + y^2 < 0, \, y < 0\} = f^{-1}((0,+\infty) \times (-\infty, 0))$. Utilitzant que $(0,+\infty) \times (-\infty, 0)$ és obert en $\mathbb{R}^2$ (és el producte cartesià de dos oberts en $\mathbb{R}$) i que l'aintiimatge d'un conjunt obert per una funció contínua és obert, tenim que $A$ és obert. Per tant $C \subset A^o$.
Per veure que $C$ és obert també podem utilitzar que $C = B'((2,0),2)^c \cup (\mathbb{R} \times [0,+\infty))$, on $B'((2,0),2)$ és la bola tancada de centre $(2,0)$ i radi 2. Recordeu que el complementari d'un conjunt tancat és un conjunt obert, que el producte cartesià d econjunts oberts és obert i que la intersecció de dos oberts també és un obert.
Comprovem que $A \setminus C \subset Fr(A)$. Sigui $p = (a,b) \in A \setminus C = D_1 \cup D_2$ on

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, (x-2)^2 + y^2 = 4, \, y \leq 0\}$$
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, (x-2)^2 \geq 4, y = 0\} = ((-\infty, 0] \cup [4, +\infty)]) \times \{0\}.$$

Cal veure que existeixen successions $\{p_k\} \subset A$ i $\{q_k\} \subset A^c$ tals que $p_k \to p$ i $q_k \to p$ si $k \to +\infty$.
Donat que $p \in A$ podem triar $p_k = p$ per a tot $k \geq 1$.
Triem $q_k = (x_k, y_k) = (a, b + 1/k) \to p$. Cal veure que $q_k \in A^c$, és a dir que no es compleix

$$\left.\begin{array}{c} (x_k - 2)^2 + y_k^2 \geq 4 \\ y_k \leq 0 \end{array}\right\} \qquad \equiv \qquad \left.\begin{array}{c} (a-2)^2 + b^2 + 2b/k + 1/k^2 \geq 4 \\ b + 1/k \leq 0 \end{array}\right\}.$$

Si $(a-2)^2 + b^2 = 4$ i $b \leq 0$ els sistema anterior és equivalent a $\left.\begin{array}{c} 2b + 1/k \geq 0 \\ b + 1/k \leq 0 \end{array}\right\}$,
d'on s'obté $-2b \leq 1/k \leq -b$ que no és possible ja que $b \leq 0$ i $k \geq 1$.
Si $(a-2)^2 + b^2 \geq 4$ i $b = 0$ els sistema anterior ens dona $1/k \leq 0 \leq 1/k$, que no és possible ja que $k \geq 1$.
Finalment, utilitzant que $C \subset A^o = \overline{A} \setminus Fr(A)$, $\overline{A} = A$ i que $A \setminus C \subset Fr(A)$ tenim $A^o = C$ i $Fr(A) = A \setminus C = D_1 \cup D_2$.

(iii) Provem que $A$ no és compacte. Recordem que un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ és compacte si és tancat i acotat. Per veure que no és acotat només cal triar $\{p_k\} \subset A$ tal que $\|p_k\| \to +\infty$. Per exemple, $p_k = (0, -k)$.

**(2)** (**3 punts**) Per a $\gamma > 0$, estudieu la continuïtat en $\mathbb{R}^2$ de la funció

$$f_\gamma(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|^\gamma y^5}{((x-1)^4+y^2)^4}\,, & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0), \\ 0\,, & \text{si} \quad (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

**Solució:**

La funció $f_\gamma$ és contínua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$, ja que les funcions polinòmiques són contínues, $|x-1|^\gamma y^5$ també ho és (ja que $\gamma > 0$), i el quocient de funcions contínues és contínua en els punts on el denominador no s'anul·la.

Per estudiar la continuïtat en el punt $(1,0)$ utilitzarem les desigualtats

$$|x-1| \leq ((x-1)^4+y^2)^{1/4} \qquad \text{i} \qquad |y| \leq ((x-1)^4+y^2)^{1/2}.$$

Donat que $\gamma > 0$ es compleix

$$|f_\gamma(x,y) - f_\gamma(1,0)| \leq ((x-1)^4+y^2)^{\gamma/4+5/2-4} = ((x-1)^4+y^2)^{\gamma/4-3/2}.$$

Si $\gamma/4 - 3/2 > 0$, és a dir si $\gamma > 6$, llavors $((x-1)^4+y^2)^{\gamma/4-3/2} \to 0$ si $(x,y) \to (1,0)$. Per tant, per la regla del sandwich, $f_\gamma(x,y) - f_\gamma(1,0) \to 0$.

Així doncs, si $\gamma > 6$ llavors $f_\gamma$ és contínua en el punt $(1,0)$.

Provem ara que si $0 < \gamma \leq 6$, llavors $f_\gamma$ no és contínua en $(1,0)$.

Cal veure que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{|x-1|^\gamma y^5}{((x-1)^4+y^2)^4} \neq 0.$

La manera més sencilla és provar que el límit sobre el conjunt

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = (x-1)^2\}$$

no és 0. Tenim

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0) \\ y=(x-1)^2}} \frac{|x-1|^\gamma y^5}{((x-1)^4+y^2)^4} = \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|^{\gamma+10-16}}{2^4} = \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|^{\gamma-6}}{16}$$

que val $+\infty$ is $\gamma < 6$ i $1/16$ si $\gamma = 6$.

Per tant:

- Si $\gamma > 6$, llavors $f_\gamma$ és contínua en $\mathbb{R}^2$.
- Si $\gamma \leq 6$, llavors $f_\gamma$ només és contínua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$.

**(3)** (a) (**1.5 punts**) Per a una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definiu el concepte de funció diferenciable en un punt $p$ de $\mathbb{R}^n$.

Si $f(x, y) = (x^2 \sin(3x + y - 3), \cos(xy - y), x^2)$, calculeu la seva diferencial en el punt $p = (1, 0)$.

(b) (**2 punts**) Per a quins valors de $\gamma > 0$ la funció

$$f_\gamma(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^3}{(x^2 + y^2)^\gamma}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

és diferenciable en $(0, 0)$?

**Solució:**

(a) Una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és diferenciable en un punt $p$ de $\mathbb{R}^n$ si existeix una aplicació **lineal** $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que compleix

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p) - L(x - p)}{\|x - p\|} = 0.$$

L'aplicació $L$, si existeix, és única i s'anomena diferencial de $f$ en $p$. Escrivim $L = Df(p)$ o bé $L = df_p$.

Si $f(x, y) = (x^2 \sin(3x + y - 3), \cos(xy - y), x^2)$, calculem la seva diferencial en el punt $p = (1, 0)$.

La funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida per$f(x, y) = (x^2 \sin(3x + y - 3), \cos(xy - y), x^2)$ és de classe $\mathcal{C}^1$, en $\mathbb{R}^2$ ja que les seves components estan formades per productes i composicions de funcions de classe $\mathcal{C}^1$ (funcions polinòmiques i funcions trigonomètriques).

Per tant $f$ és diferenciable i la matriu associada a l'aplicació lineal $df_p$ és la matriu Jacobiana

$$df_p = \begin{pmatrix} 2x \sin(3x + y - 3) + 3x^2 \cos(3x + y - 3) & x^2 \cos(3x + y - 3) \\ -y \sin(xy - y) & -(x - 1) \sin(xy - y) \\ 2x & 0 \end{pmatrix}_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) (**2 punts**) Per a quins valors de $\gamma > 0$ la funció

$$f_\gamma(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^3}{(x^2 + y^2)^\gamma}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

és diferenciable en $(0, 0)$?

Estudiem primerament l'existència de derivades parcials en en el punt $(0, 0)$.

Tenim $f_\gamma(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{|x|^{2\gamma}}, & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$

Per tant $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f_\gamma(x, 0) - f_\gamma(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{|x|^{2\gamma}}$ només existeix si $\gamma < 3/2$ i en aquest cas val 0 (si $\gamma \geq 3/2$ els límits per la dreta i per l'esquerra no coincideixen).

Anàlogament $\displaystyle\lim_{y \to 0} \frac{f_\gamma(0, y) - f_\gamma(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{-y^2}{|y|^{2\gamma}} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \gamma < 1 \\ -1, & \text{si} \quad \gamma = 1 \end{cases},$

i per a $\gamma > 1$ el límit no existeix.

Així doncs:

- Si $0 < \gamma < 1$, llavors $\frac{\partial f_\gamma}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f_\gamma}{\partial y}(0,0) = 0$.
- Si $\gamma = 1$, llavors $\frac{\partial f_\gamma}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f_\gamma}{\partial y}(0,0) = -1$.
- Si $\gamma > 1$ no existeixen totes dues derivades parcials i per tant $f_\gamma$ no és diferenciable en $(0,0)$.

Per a $0 < \gamma \leq 1$ estudiem la difereciabilitat de $f_\gamma$ en $(0,0)$.

Sabem que si

$$l_\gamma = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_\gamma(x,y) - f_\gamma(0,0) - \frac{\partial f_\gamma}{\partial x}(0,0)\, x - \frac{\partial f_\gamma}{\partial y}(0,0)\, y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

existeix i val 0, llavors $f_\gamma$ és diferenciable en $(0,0)$ i en qualsevol altre cas no ho és.

Per a $0 < \gamma < 1$, es té $l_\gamma = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^3}{(x^2+y^2)^{\gamma+1/2}}$.

Utilitzant les acotacions $|x| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$ i $|y| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$, tenim

$$\left| \frac{x^4 - y^3}{(x^2+y^2)^{\gamma+1/2}} \right| \leq (x^2+y^2)^{3/2-\gamma} + (x^2+y^2)^{1-\gamma} \to 0 \quad \text{si} \quad (x,y) \to (0,0)$$

que prova que $l_\gamma = 0$ (hem aplicat la regla del sandwich).

Si $\gamma = 1$, $l_1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^3 + y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. En aquest cas el límit anterior segons el subconjunt $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ és $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 - x^3}{2^{3/2}|x|^3}$ que no existeix.

Per tant si $\gamma > 0$, llavors $f_\gamma$ és diferenciable en $(0,0)$ només quan $\gamma < 1$.