Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2013-2014
Examen Final - Part 1

(1) (**5 punts**)

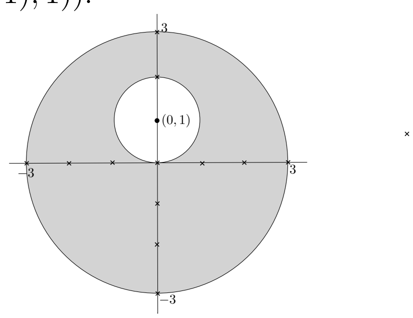
(a) Utilitzant les definicions de funció contínua i d'obert, proveu que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és una funció contínua i V és un obert de $\mathbb{R}^m$, llavors el conjunt $f^{-1}(V)$ és un obert de $\mathbb{R}^n$.
Mireu els apunts.

(b) Considereu el conjunt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

(i) Representeu-lo gràficament.
(ii) Determineu l'interior, l'adherència i la frontera de A.
(iii) És A compacte?

Solució:

(i) Utilitzant que $2y \leq x^2 + y^2$ és equivalent a $1 \leq x^2 + (y-1)^2$, tenim que $A = B'((0,0),3) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B((0,1),1))$.



(ii) Com hem dit abans $A = B'((0,0),3) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B((0,1),1))$. Sabem que $B'((0,0),3)$ és un tancat en $\mathbb{R}^2$ i que $B((0,1),1)$ és un obert de $\mathbb{R}^2$. Per tant $\mathbb{R}^2 \setminus B((0,1),1)$ és tancat i per ser A la intersecció de dos tancats és tancat. Així doncs $\overline{A} = A$.
El conjunt $O = B((0,0),3) \setminus B'((0,1),1) = B((0,0),3) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B'((0,1),1)) \subset A$ és obert (és intersecció de dos oberts, el segon per ser el complementari d'un tancat).
Així doncs $O \subset A^o$ ja que A^o és l'obert més gran contingut en A.
Sabem que la frontera d'una bola de centre p i radi r és l'esfera $S(p,r)$ (en el nostre cas circumferència). Utilitzant que $A \setminus O = S((0,0),3) \cup S((0,1),1)$, tenim que els punts de $A \setminus O$ és poden aproximar per punts del complementari de A. Si $P \in S((0,0),3)$ per punts del complementari de la bola $B'((0,0),3)$, per exemple $q_k = (1 + 1/k)P$, $k \in \mathbb{N}$. Si $P \in S((0,1),1)$ per punts de $B((0,1),1)$, per exemple $q_k = Q + (1 - 1/k)\overrightarrow{QP}$ on $Q = (0,1)$. Per tant els punts de $A \setminus O$ pertanyen a la frontera de A.
Així doncs $A^o = O$ i $Fr(A) = A \setminus O$.

(iii) Recordem que un conjunt A és compacte en $\mathbb{R}^n$ si és tancat i acotat.
Qué és tancat ho hem vist en l'apartat anterior. També és acotat ja que $A \subset B'((0,0),3)$. Per tant A és compacte.

(2) (5 punts)

(a) Considerem la funció

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{10}y^3}{3x+y}, & \text{si } \ 3x+y\neq 0,\\ 0, & \text{si } \ 3x+y=0.\end{cases}$$

És contínua en el punt $(0,0)$? I en el punt $(1,-2)$?

Solució:
Triant $y=-3x+x^m$, per a $x\neq 0$ és té $f(x,-3x+x^m)=\frac{x^{13}(-3+x^{m-1})^3}{x^m}\not\to 0$ quan $x\to 0$ si $m\geq 13$. Per tant f no és contínua en $(0,0)$.
En el punt $(1,-2)$ la funció f és contínua, ja que el quocient de funcions contínues (en el nostre cas funcions polinòmiques que ho són) és una funció contínua en els punts on el denominador no s'anul·la.

(b) Per a $m\in\mathbb{N}$, definim les funcions

$$f_m(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^m}{(x^2+y^2)^4}, & \text{si } \ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } \ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Per a quins valors de m la funció f_m és diferenciable en el punt $(0,0)$?

Solució:

- Estudiem primer l'existència de les derivades parcials en $(0,0)$.
  - Tenim $g_m(x)=f_m(x,0)=0$, i per tant $(f_m)_x(0,0)=g_m'(0)=0$ per a tot $m\in\mathbb{N}$.
  - Tenim $h_m(y)=f_m(0,y)=y^{m-8}$ si $y\neq 0$ i $h_m(0)=f_m(0,0)=0$ si $y=0$. Així doncs h_m només és derivable si $m\geq 9$ (en els altres casos ni tan sols és contínua en $y=0$) i en aquest cas $(f_9)_y(0,0)=h_9'(0)=1$ i $(f_m)_y(0,0)=h_m'(0)=0$ si $m>9$.

  Per tant les derivades parcials només existeixen si $m\geq 9$, i així doncs si $m<9$ f_m no és diferenciable en $(0,0)$.
- Per a $m\geq 9$ estudiem la diferenciabilitat de f_m en $(0,0)$. Per determinar si f és diferenciable en el punt $(0,0)$ cal estudiar el límit

$$L_m=\lim_{(x,y)\to(0,0)}F_m(x,y),$$

on

$$F_m(x,y)=\frac{f_m(x,y)-f_m(0,0)-(f_m)_x(0,0)x-(f_m)_y(0,0)y}{(x^2+y^2)^{1/2}}.$$

Si $L_m=0$ serà diferenciable i en cas contrari no ho serà.

  - $\underline{m=9}$: En aquest cas $F_9(x,y)=\dfrac{y^9-y(x^2+y^2)^4}{(x^2+y^2)^{9/2}}$. Si $y=x$, $F_9(x,x)=\dfrac{-15x^9}{2^{9/2}|x|^9}$ que no té lìmit si $x\to 0$. Per tant L_9 no existeix i f_9 no és diferenciable en $(0,0)$.
  - $\underline{m>9}$: En aquest cas

$$|F_m(x,y)|=\frac{|y|^m}{(x^2+y^2)^{9/2}}\leq(x^2+y^2)^{m/2-9/2}\to 0 \quad \text{si } (x,y)\to(0,0).$$

Per tant en aquest cas f és diferenciable en $(0,0)$ i la diferencial és $df_{(0,0)} = Df(0,0) = (0\ 0)$.

Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2013-2014
Examen Final - Part 2

(1) (**5 punts**)

(a) Enuncieu el teorema de la funció inversa. Mireu els apunts.

(b) Proveu que si la funció $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és de classe $\mathcal{C}^1$ i $h'(0)\neq 0$, llavors la funció

$$f(x,y)=(h(2x-y),h(3x-2y+1))$$

és un difeomorfisme local en un entorn del punt $p=(1,2)$.

Solució:

Cal veure que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ és de classe $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$ i que $det(df_p)=det(Df(p))\neq 0$.

Que f és de classe $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$ es dedueix del fet que és la composició de funcions polinòmiques amb una funció de classe $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}$.

Per la regla de la cadena es té

$$det(df_p)=det\begin{pmatrix}2h'(2x-y) & -h'(2x-y)\\ 3h'(3x-2y+1) & -2h'(3x-2y+1)\end{pmatrix}_{(1,2)}=det\begin{pmatrix}2h'(0) & -h'(0)\\ 3h'(0) & -2h'(0)\end{pmatrix}=-h'(0)^2\neq 0.$$

(c) Proveu que l'equació

$$4x\cos(\pi z)+z^2\cos y-e^{2y}=0$$

defineix implícitament una funció $z=g(x,y)$ en un entorn del punt $p=(0,0,1)$.

Solució:

Diem $f(x,y,z)=4x\cos(\pi z)+z^2\cos y-e^{2y}$.

Tenim que f és de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$ (és una suma de productes de funcions d'aquest tipus), que compleix $f(0,0,1)=0$ i $f_z(0,0,1)=[-4\pi x\sin(\pi z)+2z\cos y]_{(0,0,1)}=2\neq 0$.

Per tant, pel teorema de la funció implícita, l'equació $f(x,y,z)=0$ defineix implícitament una funció $z=g(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ en un entorn del punt $(0,0)$ que compleix $g(0,0)=1$.

(d) Calculeu l'equació del pla tangent a la gràfica de la funció g en el punt p.

Solució:

L'equació del pla tangent és $z=g(0,0)+g_x(0,0)x+g_y(0,0)y$.

Per tant cal calcular $g_x(0,0)$ i $g_y(0,0)$, que ho farem a partir de les equacions $(f(x,y,g(x,y)))_x=0$ i $(f(x,y,g(x,y)))_y=0$ avaluades en el punt $x=0$, $y=0$ i $g(0,0)=1$.

$$\begin{aligned}(f(x,y,g(x,y)))_x &= 4\cos(\pi g(x,y))-4\pi x g_x(x,y)\sin(\pi g(x,y))+2g(x,y)g_x(x,y)\cos y=0,\\ &\Rightarrow -4+2g_x(0,0)=0\Rightarrow g_x(0,0)=2\\ (f(x,y,g(x,y)))_y &= -4\pi x g_y(x,y)\sin(\pi g(x,y))+2g(x,y)g_y(x,y)\cos y-g(x,y)^2\sin y-2e^{2y}=0,\\ &\Rightarrow 2g_y(0,0)-2=0\Rightarrow g_y(0,0)=1.\end{aligned}$$

Així doncs l'equació del pla tangent és $z=1+2x+y$.

(2) (5 punts)

(a) Calculeu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2x^2y+y^5}-1-2x^2y-y^5-2x^4y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

Solució:

Observeu que el terme del denominador és $\|(x,y)\|^6$. Per tant cal calcular el polinomi de Taylor d'ordre 6 en el punt $(0,0)$ de la funció del numerador.

Utilitzant que $t = 2x^2y + y^5$ compleix $|t| \leq C\|(x,y)\|^3$ per a (x,y) proper a $(0,0)$, i que $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + o_{t\to 0}(t^2)$ tenim

$$\begin{aligned} e^{2x^2y+y^5} &= 1 + 2x^2y + y^5 + \frac{(2x^2y+y^5)^2}{2!} + o_{(x,y)\to(0,0)}(\|(x,y)\|^6) \\ &= 1 + 2x^2y + y^5 + 2x^4y^2 + o_{(x,y)\to(0,0)}(\|(x,y)\|^6). \end{aligned}$$

Per tant $e^{2x^2y+y^5} - 1 - 2x^2y - y^5 - 2x^4y^2 = o_{(x,y)\to(0,0)}(\|(x,y)\|^6)$ i el límit que es demana és $l = 0$.

(b) Considerem la funció $f(x,y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2$

(i) Trobeu els extrems locals de f i classifiqueu-los.

(ii) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f sobre el conjunt

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$$

i calculeu-los.

Solució:

(a) La funció f és de classe $\mathcal{C}^\infty$ i les matrius Jacobiana i Hessiana són

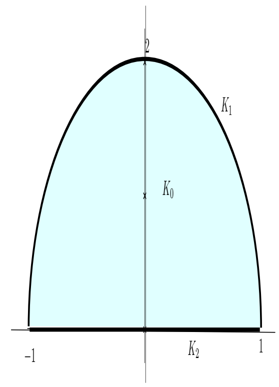
$$Jf = \begin{pmatrix} 3x^2 + 12x & 6y \end{pmatrix}, \quad Hf = \begin{pmatrix} 6x+12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Per tant els punts crítics de f (solucions de $Jf = (0\ 0)$) són $p_1 = (0,0)$ i $p_2 = (-4,0)$.

En p_1, $Hf(p_1)$ és una matriu diagonal amb tots els valors propis positius (els menors principals de $Hf(p_1)$ són $\Delta_1 = 12 > 0$ i $\Delta_2 = 72 > 0$). Per tant f té un mínim local en p_1.

En p_2, $Hf(p_2)$ és una matriu diagonal amb un valor propi positiu i un de negatiu (els menors principals de $Hf(p_2)$ són $\Delta_1 = -12 < 0$ i $\Delta_2 = -72 < 0$). Per tant f té un punt de sella en p_2.

(b) El conjunt $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ és tancat ja que és la intersecció d'una el·lipse tancada i un semiplà tancat.



(també es pot justificar utilitzant que l'antiimatge $h^{-1}(B)$ d'un conjunt tancat B per a una funció contínua és tancat, aplicat en el nostre cas a $h(x,y) = (4x^2+y^2, y)$ i $K = h^{-1}((-\infty, 4] \times [0, +\infty))$).

També és acotat ja que està contingut en una el·lipse i per tant en una bola.

Com que K és compacte i $f : K \to \mathbb{R}$ és contínua, pel teorema de Weierstrass sabem que f té extrems absoluts sobre K.

Calculem-los:

- Candidats a extrems alsoluts en $K_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+y^2 < 4, y > 0\}$:
  Són els punts crítics de f en K_0. Com que $p_1 = (0,0)$ ni $p_2 = (-4,0)$ pertanyen a K_0 no hi ha candidats.
- Candidats a extrems alsoluts en $K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+y^2 = 4, y > 0\}$. K_1 és un troç d'el·lipse i per tant una subvarietat de $\mathbb{R}^2$.
  Els punts crítics de la funció de Lagrange $F(x,y,\lambda) = x^3+6x^2+3y^2-\lambda(4x^2+y^2-4)$ són

$$\left.\begin{aligned} 3x^2+12x-8\lambda x &= 0 \\ 6y-2\lambda y &= 0 \\ -(4x^2+2y-4) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3x^2+12x-8\lambda x &= 0 \\ y &= 0 \\ 4x^2+2y-4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ o bé } \left.\begin{aligned} 3x^2+12x-8\lambda x &= 0 \\ \lambda &= 3 \\ 4x^2+y^2-4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

  Donat que $y > 0$ només ens interessa el cas $\lambda = 3$. Resolent el sistema s'obté $x = 0$ o bé $x = 4$ i $4x^2+y^2 = 4$, d'on s'obtenen les solucions $q_1 = (0,2) \in K_1$ i $r_1 = (0,-2) \notin K_1$.
- Candidats a extrems alsoluts en $K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+y^2 \leq 4, y = 0\}$.
  Observem que $K_2 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 1\}$ i que f restringida a K_2 és $g(x) = f(x,0) = x^3+6x^2$, $-1 \leq x \leq 1$.
  L'únic punt crític de g en l'interval $[-1,1]$ és $x = 0$. Per tant els extrems absoluts de g només poden assolir-se en $x = -1$ ($q_2 = (-1,0)$), $x = 0$ ($q_3 = (0,0)$) i $x = 1$ ($q_4 = (1,0)$).

Finalment utilizant que $f(q_1) = 12$, $f(q_2) = 5$, $f(q_3) = 0$ i $f(q_4) = 7$, s'obté:

El valor màxim de f sobre K és 12 i només s'assoleix en el punt $(0,2)$.

El valor mínim de f sobre K és 0 i només s'assoleix en el punt $(0,0)$.