MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2014-2015

PRÀCTICA 7

Exercici 1 [Mètode de les diferències finites per a problemes de valors a la frontera lineals]

Problema. Es considera l'equació diferencial lineal de segon ordre

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x) \ , \ x \in [0,1] \ ,$$

amb condicions de contorn $y(0) = \alpha$, $y(1) = \beta$.

Les funcions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ i els escalars α i β són dades conegudes. La incògnita és la funció $y(x)$ en el domini $x \in [0,1]$. Se suposa que les dades són adequades per tal que aquesta funció existeixi i sigui única.

Mètode numèric. Idea. Usant diferenciació numèrica es transformarà el problema donat en un sistema lineal tridiagonal. La seva resolució donarà aproximacions y_i dels valors exactes $y(x_i)$, només en un conjunt discret de punts x_i.

Sigui $n > 0$. Es defineixen $h = 1/(n+1)$ i $x_i = ih \ , \ i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$.

Ja es coneixen $y(x_0) = \alpha$ i $y(x_{n+1}) = \beta$. Cal aproximar la resta de valors $y(x_i)$. S'usen les aproximacions per diferències finites de les derivades:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2) \ , \qquad y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2) \ .$$

Substituint aquestes expressions en l'equació inicial, introduint la notació

$$a_i = a(x_i) \ , \quad b_i = b(x_i) \ , \quad c_i = c(x_i) \ , \quad d_i = d(x_i) \ ,$$

suprimint els termes $O(h^2)$ i canviant les $y(x_i)$ per y_i, s'obtenen les relacions

$$a_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + b_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + c_i y_i = d_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n \ ,$$

amb $y_0 = \alpha$ i $y_{n+1} = \beta$.

Això correspon al sistema lineal tridiagonal

$$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ r_2 & p_2 & q_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & r_{n-1} & p_{n-1} & q_{n-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & r_n & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = -h^2 \begin{pmatrix} d_1 + r_1\alpha/h^2 \\ d_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ d_{n-1} \\ d_n + q_n\beta/h^2 \end{pmatrix} ,$$

on $p_i = 2a_i - c_i h^2$, $q_i = -a_i - b_i h/2$, $r_i = -a_i + b_i h/2$.

Implementació de l'algorisme. Cal fer un programa en C:

- Les dades $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ i $d(x)$ s'avaluaran en funcions adequades, i els valors α i β es poden assignar usant #define.
- Cal fer una funció de capçalera:

  ```
  int tridiag( int n, double *p, double *q, double *r, double *y)
  ```

  per a resoldre sistemes tridiagonals donats mitjançant 4 vectors: 3 que contenen la informació essencial de la matriu (p, q i r), i 1 que conté el terme independent (y).

  Primer es farà la factorització LU de la matriu i després es resoldran 2 sistemes triangulars (de fet, bidiagonals). No cal usar més memòria:

  - la subdiagonal de L es pot guardar en el mateix vector r,
  - la diagonal principal de U es pot guardar en el mateix vector p,
  - la diagonal per sobre de la principal de U és, de fet, el mateix vector q,
  - les resolucions dels sistemes triangulars amb matrius L i U es poden posar en el mateix vector y.

  Podeu comprovar que les fórmules són:

  - $\forall i = 2, 3, \ldots, n \ : \ r_i = r_i/p_{i-1} \ , \ \ p_i = p_i - r_i q_{i-1} \ ,$
  - $\forall i = 2, 3, \ldots, n \ : \ y_i = y_i - r_i y_{i-1} \ ,$
  - $y_n = y_n/p_n \ , \ \ \forall i = n-1, n-2, \ldots, 1 \ : \ y_i = (y_i - q_i y_{i+1})/p_i \ .$

  Si, en algun dels quocients, el denominador és massa pròxim a 0 (segons una toleràcia determinada), els càlculs no continuaran i la funció retornarà un valor diferent de 0.

  Si s'ha pogut resoldre el sistema, la solució estarà en el vector y i la funció retornarà el valor 0.

- El programa *main* ha de llegir el valor de n, generar adequadament els vectors amb les dades, invocar la funció `tridiag` i, si aquesta ha funcionat correctament, escriure els valors (x_i, y_i).

Finalment, useu l'aplicació gnuplot per a pintar els punts trobats. Compareu els resultats per a diversos valors de n.

Exemples de dades:

- $a(x) = x^2 + 1$, $b(x) = 2x$, $c(x) = -1$, $d(x) = x^2$, $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.6$ (la solució exacta és $y(x) = (x^2 + 2)/5$).
- $a(x) = x^2 + 1$, $b(x) = 2x$, $c(x) = \sin(x)$, $d(x) = \cos(x)$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$.