Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2013-2014
Examen Final - Part 1

- **Feu els problemes en fulls separats.**
- **Justifiqueu detalladament les respostes.**

(1) (**5 punts**)

(a) Utilitzant les definicions de funció contínua i d'obert, proveu que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és una funció contínua i V és un obert de $\mathbb{R}^m$, llavors el conjunt $f^{-1}(V)$ és un obert de $\mathbb{R}^n$.

(b) Considereu el conjunt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, 2y \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

(i) Representeu-lo gràficament.

(ii) Determineu l'interior, l'adherència i la frontera de A.

(iii) És A compacte?

(2) (**5 punts**)

(a) Considerem la funció

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^{10}y^3}{3x + y}, & \text{si} \quad 3x + y \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad 3x + y = 0. \end{cases}$$

És contínua en el punt $(0, 0)$? I en el punt $(1, -2)$?

(b) Per a $m \in \mathbb{N}$, definim les funcions

$$f_m(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^m}{(x^2 + y^2)^4}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Per a quins valors de m la funció f_m és diferenciable en el punt $(0, 0)$?

Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2013-2014
Examen Final - Part 2

- **Feu els problemes en fulls separats.**
- **Justifiqueu detalladament les respostes.**

(1) (**5 punts**)

(a) Enunicieu el teorema de la funció inversa.

(b) Proveu que si la funció $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és de classe $\mathcal{C}^1$ i $h'(0) \neq 0$, llavors la funció

$$f(x, y) = (h(2x - y), h(3x - 2y + 1))$$

és un difeomorfisme local en un entorn del punt $p = (1, 2)$.

(c) Proveu que l'equació

$$4x \cos(\pi z) + z^2 \cos y - e^{2y} = 0$$

defineix implícitament una funció $z = g(x, y)$ en un entorn del punt $p = (0, 0, 1)$.

(d) Calculeu l'equació del pla tangent a la gràfica de la funció g en el punt p.

(2) (**5 punts**)

(a) Calculeu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2x^2y+y^5} - 1 - 2x^2y - y^5 - 2x^4y^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

(b) Considerem la funció $f(x, y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2$

(i) Trobeu els extrems locals de f i classifiqueu-los.

(ii) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f sobre el conjunt

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$$

i calculeu-los.