

## Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2013-2014

### Examen Parcial

- Feu els problemes en fulls separats.
- Justifiqueu detalladament les respostes.

(1) (a) (1.5 punts) Definiu els conceptes de punt interior i conjunt obert. Proveu que la unió finita o infinita de conjunts oberts és un conjunt obert. És cert que la intersecció infinita de conjunts oberts és un obert?

(b) (2 punts) Considereu el conjunt  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4x + y^2 \geq 0, y \leq 0\}$ .

- Representeu-lo gràficament.
- Determineu l'interior, l'adherència i la frontera de  $A$ .
- És compacte el conjunt  $A$ ?

(2) (3 punts) Per a  $\gamma > 0$ , estudieu la continuïtat en  $\mathbb{R}^2$  de la funció

$$f_{\gamma}(x, y) = \begin{cases} \frac{|x-1|^{\gamma} y^5}{((x-1)^4 + y^2)^4}, & \text{si } (x, y) \neq (1, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (1, 0). \end{cases}$$

(3) (a) (1.5 punts) Per a una funció  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , definiu el concepte de funció diferenciable en un punt  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $f(x, y) = (x^2 \sin(3x + y - 3), \cos(xy - y), x^2)$ , calculeu la seva diferencial en el punt  $p = (1, 0)$ .

(b) (2 punts) Per a quins valors de  $\gamma > 0$  la funció

$$f_{\gamma}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^3}{(x^2 + y^2)^{\gamma}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

és diferenciable en  $(0, 0)$ ?