

MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques, primer semestre, curs 2010-11

Segon examen parcial. 14 de gener de 2011

1.-

- a) Volem preparar una taula de la funció $f(x) = \sqrt{x}$ en punts equidistants de l'interval $x \in [1, 4]$:

$$x_i = 1 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad h = \frac{3}{n}.$$

Després podrem usar aquesta taula per a aproximar $f(x)$ mitjançant interpolació lineal: $\forall z \in [1, 4]$, una aproximació de $f(z)$ serà $P_1(z)$, on $P_1(x)$ és el polinomi interpolador de $f(x)$ en les dues abscisses de la taula més properes a z .

Quin és el mínim valor de n que ens assegura, per a qualsevol $z \in [1, 4]$, un error en l'aproximació que sigui menor o igual que $\frac{1}{2}10^{-8}$?

- b) Repetiu l'apartat anterior en el cas que la taula sigui de $f(x)$ i de $f'(x)$, i que, en lloc de $P_1(x)$, s'usa $P_3(x)$: polinomi interpolador d'Hermite en les dues abscisses.

2.- Sigui $f : R \rightarrow R$ una funció diferenciable tantes vegades com faci falta.

- a) Fixem un valor $a \in R$ qualsevol, i sigui $h > 0$ un pas de discretització. Deduïu els valors adequats de les constants $A, B, C \in R$ que donen una fórmula de derivació numèrica de la forma

$$\frac{Af(a) + Bf(a+h) + Cf(a+3h)}{h} = f'(a) + O(h^2).$$

- b) Suposem que una taula de valors de $f(x)$ és:

x	0	0.1	0.3	0.9
$f(x)$	1	1.05	1.14	1.38

Trobeu aproximacions de $f'(0)$ usant la fórmula de l'apartat a) per a dos valors diferents del pas h . Feu un pas d'extrapolació per a obtenir una aproximació millor.

3.- Considerem l'equació $f(x) = x - 3 \sin(x) - \frac{1}{2} = 0$.

- a) Demostreu que l'equació té exactament 3 solucions.
- b) Aproximeu, amb 6 decimals, la solució més gran pel mètode de Newton.
- c) Considerem les funcions $g_1(x) = 3 \sin(x) + \frac{1}{2}$ i $g_2(x) = \frac{3 + 14x + 18 \sin(x)}{20}$.
1. Demostreu que els punts fixos de $x = g_1(x)$ i $x = g_2(x)$ coincideixen amb els zeros de $f(x) = 0$.
 2. Quin dels dos esquemes de punt fix $x_{n+1} = g_{1,2}(x_n)$ és el millor per trobar el zero més gran de $f(x) = 0$? Justifica la resposta.

ENTREGUEU PROBLEMES DIFERENTS EN FULLS DIFERENTS

Notes: Divendres 21 de gener a les 11h, al Campus Virtual i al tauler del "xalet".

Revisions: Divendres 21 de gener de 12h a 13 h, al "xalet".