

**MÈTODES NUMÈRICS I**  
**Grau de Matemàtiques. Curs 2014-2015**

**PRÀCTICA 3**

**Exercici 1** [Problemes ben/mal condicionats]

Un *problema és ben (mal) condicionat* quan, canviant poc les dades, canvia poc (molt) el resultat. O sigui, la condició d'un problema té relació amb la sensibilitat de la solució respecte a les dades.

Considerem el *problema de valors inicials* (PVI)

$$\begin{cases} y'(x) &= cy(x) + 1 & x \in [0, 10] \\ y(0) &= \alpha \end{cases}$$

en els casos  $c = +2$  i  $c = -2$ . Volem trobar  $y(10)$  en funció de  $\alpha$ , en un entorn de  $\alpha = 1$ .

Es pot comprovar que la solució del PVI és

$$y(x) = \left( \alpha + \frac{1}{c} \right) e^{cx} - \frac{1}{c} .$$

Tant per al cas  $c = 2$  com per al cas  $c = -2$ , feu el següent: sigui  $y_{exact}$  el valor de  $y(10)$  quan  $\alpha = 1$  i sigui  $y_{approx}$  el valor de  $y(10)$  quan  $\alpha \approx 1$ . Compareu la variació en  $y(10)$  amb la variació en  $\alpha$ . O sigui, feu una taula de dues columnes amb valors  $(\alpha - 1)$  i  $(y_{approx} - y_{exact})$ .

Quin dels dos casos ( $c = \pm 2$ ) és ben condicionat i quin és mal condicionat?

**Exercici 2** [Mètode estable/inestable]

Un *mètode numèric és inestable* quan l'acumulació dels errors fa que el resultat aproximat sigui molt dolent.

Considerem el PVI anterior en el cas concret

$$\begin{cases} y'(x) &= -2y(x) + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

La seva solució exacta és  $y(x) = \frac{1}{2}(e^{-2x} + 1)$ .

Ens *inventem* un mètode numèric per a calcular aproximadament  $y(10)$ . Fixem un valor natural gran  $N$ , sigui  $h = 10/N$  i definim  $x_n = nh \quad \forall n = 0, 1, \dots, N$ . Tenint en compte l'aproximació de segon ordre

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + O(h^2) ,$$

podem escriure

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_{n-1}) + 2hy'(x_n) = y(x_{n-1}) + 2h(-2y(x_n) + 1) .$$

Per tant, considerem la recurrència

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2h(-2y_n + 1) .$$

El valor  $y_N$  serà el valor aproximat de  $y(10)$  que busquem. Com que la recurrència és de segon ordre, cal conèixer  $y_0$  i  $y_1$ . La condició inicial ens dóna directament  $y_0 = 1$ . Per a  $y_1$ , prenem el valor exacte  $y_1 = \frac{1}{2}(e^{-2h} + 1)$ .

Feu una taula de l'error  $y(10) - y_N$  en funció del pas  $h$ .