MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2014-2015

PRÀCTICA 5

Exercici 1 [Eliminació gaussiana sense pivotatge]

Feu una funció de capçalera

```
int gauss (int n, double **A, double *b, double tol)
```

per a resoldre un sistema lineal $n \times n$, $Ax = b$, amb les característiques següents:

- Rep la dimensió n, la matriu A, el vector b i la tolerància *tol* ($1.e-12$, per exemple).
- Retorna l'enter 0 si ha pogut resoldre $Ax = b$, o l'enter -1 en cas contrari.
- Primer usa el mètode d'eliminació gaussiana (sense pivotatge) per a transformar la matriu A a triangular superior (el vector b també es modifica). En les posicions inferiors a la diagonal principal (on hi hauria de quedar zeros), s'hi guarden els multiplicadors.
- L'eliminació no ha de continuar si, en algun pas, el pivot té valor absolut inferior a la tolerància *tol*.
- Suposant que s'ha pogut fer l'eliminació gaussiana, després cal resoldre el sistema triangular final pel mètode de substitució endarrera (no us descuideu de comprovar que a_{nn} ha de ser no nul). La solució es posa en el mateix vector b.

Exercici 2 [Aplicacions]

Per tal de comprovar la correcció de la vostra funció, proveu-la invocant-la des d'un programa *main* on doneu dades de sistemes dels qualsi coneixeu la solució.

En particular, resoleu un sistema lineal amb la matriu de Hilbert:

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1} \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n \ ,$$

i amb el terme independent

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \ ,$$

de manera que la solució hauria de ser $x = (1, 1, \ldots, 1)^t$.

Feu-ho per a $n = 1, 2, \ldots, 14$. En cada cas calculeu la $\| \ \|_\infty$ de l'error de la solució trobada (definició: $\|(z_1, z_2, \ldots, z_n)\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |z_i|$).

Exercici 3 [Residu]

Modifiqueu el programa *main* per a calcular també el *vector residu* de la solució trobada (definició: si y és el vector solució calculat del sistema $Ax = b$, el seu vector residu és $b - Ay$).

Atenció: Com que les dades A i b han canviat durant el procés de resolució, cal fer-ne còpies al començament, per tal de poder calcular el residu després d'haver trobat la solució aproximada.

Exercici 4 [Resolució numèrica d'una equació integral]

Aquest exercici és voluntari. A més, abans de programar, és millor fer alguns desenvolupaments en paper.

Es considera l'equació integral

$$y(x) = x + \int_0^1 \sin(xt)y(t)dt \quad ,$$

on la incògnita és la funció $y(t) \;\; \forall t \in [0,1]$.

Un mètode numèric per a resoldre-la aproximadament consisteix a discretitzar-la i a usar integració numèrica (trapezis, per exemple). Es trobaran aproximacions y_i dels valors $y(t_i)$, només per a un conjunt finit de punts t_i.

Fixem $N > 0$ i definim $h = 1/N$, $x_i = t_i = ih \;\; \forall i = 0, 1, \ldots, N$. Escrivim l'equació per a cada valor $x = x_i$. I, en cada cas, aproximem la integral pel mètode dels trapezis

$$\int_0^1 g(t)dt \approx \frac{h}{2}\left(g(t_0) + 2\sum_{j=1}^{N-1} g(t_j) + g(t_N) \right) \quad .$$

Caldrà usar $g(t) = \sin(x_i t)y(t)$.

S'obté un sistema lineal $(N+1) \times (N+1)$ amb incògnites $y(t_j) \;\; j = 0, 1, 2, \ldots, N$. Resoleu-lo usant la funció de l'exercici 1. Feu-ho per a diversos valors de N i pinteu les diverses solucions usant *gnuplot*.