CÀLCUL DIFERENCIAL EN $\mathbb{R}^n$

15 de setembre de 2014

Índex

CAPíTOL 1

Producte escalar, norma i distància en un espai vectorial

1. L'espai vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ i l'espai afí $\mathbb{R}^n$

.

Recordem que el conjunt $\mathbb{R}^n = \{u = (x_1, \cdots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \cdots, n\}$ equipat amb les operacions suma $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida per

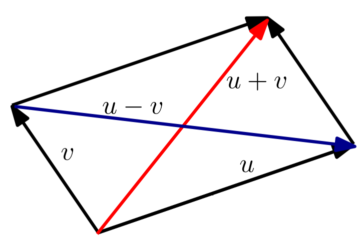
$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n),$$

i producte $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definit per

$$\lambda(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n),$$

és un espai vectorial. La notació habitual per designar aquest espai és $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, tot i que normalment només s'escriu $\mathbb{R}^n$.

Els elements d'un espai vectorial és diuen vectors. Utilitzarem la notació $0 \in \mathbb{R}^n$ per indicar l'element neutre de l'espai, és a dir $0 = (0, \cdots, 0)$.



El mateix conjunt $\mathbb{R}^n = \{p = (x_1, \cdots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \cdots, n\}$ el podem pensar com el conjunt de punts de l'espai n-dimensional. En aquest cas no tenim operacions, però podem definir translacions $T : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n, +, \cdot) \to \mathbb{R}^n$: si $p = (x_1, \cdots, x_n)$ i $u = (y_1, \cdots, y_n)$, llavors $T(p, u) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$, és a dir formalment $T(p, u) = p + u$. El conjunt $\mathbb{R}^n$ equipat amb aquest conjunt de translacions és un espai afí.

Observeu que donats dos punts qualsevols p, q, hi ha un únic vector $\overrightarrow{pq}$ que trasllada el punt p al punt q, i que en la pràctica es calcula restant a les coordenades de l'extrem q, les de l'origen p, és a dir $\overrightarrow{pq}$= "$q - p$". Així doncs podem identificar tot punt p amb el vector $\overrightarrow{0p}$.

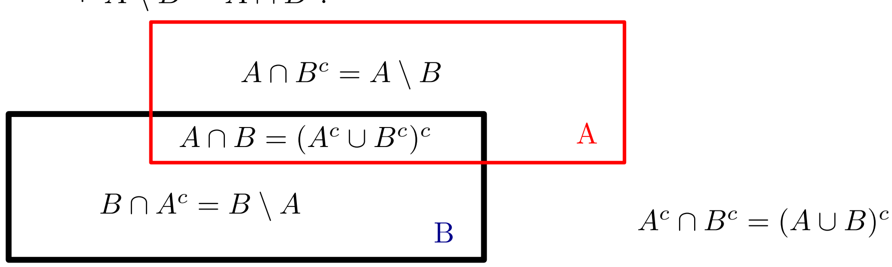
Tot i que els dos conceptes de $\mathbb{R}^n$ com a espai vectorial o com espai afí són diferents, en anàlisi s'acostuma a utilitzar-los de forma ambígua per tal d'alleugerir les notacions. Per exemple si tenim dos punts p i q de $\mathbb{R}^n$, no podem parlar de $2p - q$, ja que en l'espai afí no tenim definides les operacions suma i produce. No obstant $T(0, 2\,\overrightarrow{0p} - \overrightarrow{0q})$ = "$2p - q$". Així doncs, quan ens referin al punt $2p - q$, formalment hauríem de dir el punt $T(0, 2\,\overrightarrow{0p} - \overrightarrow{0q})$.

La visió algebraica ens permet operar amb els elements de $\mathbb{R}^n$, i normalment els espais que apareixen en l'anàlisi matemàtica són espais vectorials. Però la visió geomètrica és útil ja que permet representar gràficament determinats conjunts de vectors.

1.1. Notacions habituals.

- Utilitzarem les lletres x, y i z de forma ambigua. Si tenim una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, al escriure $f(x)$ hem de pensar que $x = (x_1, \cdots, x_n)$, i de forma anàloga amb $f(y)$ o $f(z)$. En canvi quan treballem amb funcions de $\mathbb{R}^2$ escriurem habitualment $f(x, y)$. En aquest cas (x, y) indicaran les coordenades d'un punt en el pla. En el cas de $\mathbb{R}^3$ també escriurem $f(x, y, z)$.

  Aquesta notació és la que s'utilitza habitualment i per tant cal acostumar-se a fer-la servir. Si penseu que significa el que escrivim mai hi ha confusió.
- Recordem algunes notacions habituals de conjunts.
  - Donats dos subconjunts no buits A i B de $\mathbb{R}^n$, no buits i $\lambda \in \mathbb{R}$, definim els següents subconjunts:
    * $A \cap B = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in A \text{ i } x \in B\}$.
    * $A \cup B = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in A \text{ o } x \in B\}$.
    * $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A\}$.
    * $A + B = \{z \in \mathbb{R}^n : z = x + y \ x \in A,\ y \in B\}$.
    * $A - B = \{z \in \mathbb{R}^n : z = x - y \ x \in A,\ y \in B\}$.
    * $\lambda A = \{z \in \mathbb{R}^n : z = \lambda x,\ x \in A,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
    * $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.
  - Si tenim una família (finita o infinita) de conjunts $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, per indicar la intersecció i la unió de tots ells escriurem $\displaystyle\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ o $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$.
  - Es compleixen les relacions següents:
    * $(A^c)^c = A$.
    * $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, o més generalment $\displaystyle\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha = \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha\right)^c$.
    * $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$, o més generalment $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha = \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha\right)^c$.
    * $A \setminus B = A \cap B^c$.



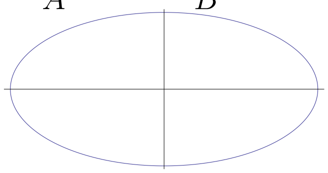
1.2. Figures geomètriques elementals.

Les equacions següents es corresponen amb còniques i quàdriques amb eixos paral·lels als eixos de coordenades:

A, B i C són nombres reals diferents de 0.

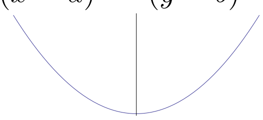
El·lipse centrada en (a, b)

$$\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} = 1$$



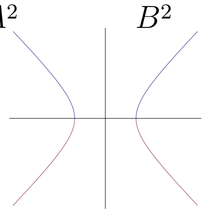
Paràbola de vèrtex (a, b)

$$A(x-a)^2 - (y-b) = 0$$



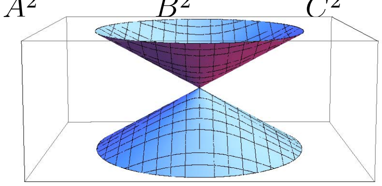
Hipèrbola centrada en (a, b)

$$\frac{(x-a)^2}{A^2} - \frac{(y-b)^2}{B^2} = 1$$



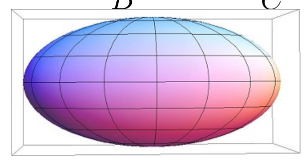
Con el·líptic amb vèrtex en (a, b, c)

$$\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} - \frac{(z-c)^2}{C^2} = 0$$



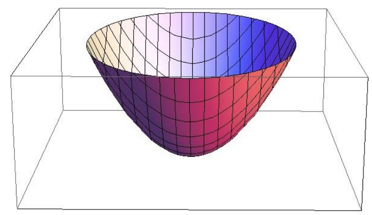
El·lipsoid centrat en (a, b, c)

$$\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} + \frac{(z-c)^2}{C^2} = 1$$



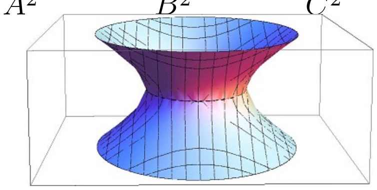
Paraboloid el·líptic de vèrtex (a, b, c)

$$A(x-a)^2 + B(y-b)^2 - (z-c) = 0$$



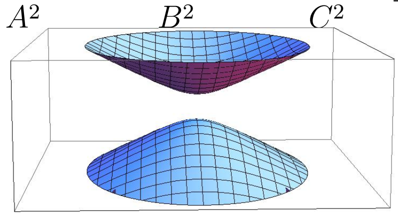
Hiperboloid el·líptic d'una fulla centrat en (a, b, c)

$$\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} - \frac{(z-c)^2}{C^2} = 1$$



Hiperboloid el·líptic de dues fulles centrat en (a, b, c)

$$\frac{(x-a)^2}{A^2} - \frac{(y-b)^2}{B^2} - \frac{(z-c)^2}{C^2} = 1$$



Canviant les variables x, y, z podem obtenir més equacions. Per exemple $x^2 - y = 0$ és l'equació d'una paràbola. Per tant $x - y^2 = 0$ també ho és.

2. Producte escalar, norma i distància

El **producte escalar (euclidià)** de dos vectors $x = (x_1, \cdots, x_n)$ i $y = (y_1, \cdots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ ve definit per

$$\langle x, y\rangle = x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Per a tot $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ i tot $\lambda \in \mathbb{R}$ aquest producte escalar compleix:

PE1: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
PE2: $\langle x, x\rangle \geq 0$, i $\langle x, x\rangle = 0$ si i només si $x = 0$.
PE3: $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$.
PE4: $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

Definició 1.1. *Un* ***producte escalar*** *en un espai vectorial real E és una aplicació* $\begin{array}{rcl} \langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & \langle x, y\rangle \end{array}$ *que compleix les quatre propietats anteriors per a tot $x, y, z \in E$ i tot $\lambda \in \mathbb{R}$.*
Un espai vectorial E amb un producte escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ és diu un ***espai prehilbertià****.*

A partir del producte escalar euclidià podem definir la **norma euclidiana** d'un vector $x \in \mathbb{R}^n$ de la forma

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}.$$

Definició 1.2. *Una* ***norma*** *en un espai vectorial real E és una aplicació* $\begin{array}{rcl} \|\cdot\| : E & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \|x\| \end{array}$ *que compleix*

N1: $\|x\| \geq 0$ *i* $\|x\| = 0$ *si i només si* $x = 0$.
N2: $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *per a tot* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i tot* $x \in E$.
N3: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *per a tot* $x, y \in E$ *(****desigualtat triangular****).*

Un espai vectorial E equipat amb una norma $\|\cdot\|$ es diu un ***espai normat****. Els vectors x que compleixen $\|x\| = 1$ es diuen* ***vectors unitaris****.*
Observeu que si $x \neq 0$, llavors $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ és un vector unitari.

Es clar que en el cas del producte escalar $x \cdot y$, si $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ es compleixen [N1] ($|x_k| \leq \|x\|$ per a tot $k = 1, \cdots, n$) i [N2] (recordeu que $\sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$).

La condició [N3] és pot demostrar a partir del teorema del cosinus.

Si $x = 0$ o bé $y = 0$ [N3] és certa. Suposem que els dos són diferents de 0. Aplicant el teorema del cosinus al triangle de vèrtexs 0, x i y es té $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos\theta_{x,y}$, on $\theta_{x,y}$ indica l'angle que formen els vectors x i y. Combinant la igualtat anterior amb $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2x \cdot y + \|y\|^2$ tenim la fórmula

$$\boxed{x \cdot y = \|x\|\|y\| \cos\theta_{x,y} \quad \text{(cosinus de l'angle que formen dos vectors no nuls)}}$$

i la desigualtat $\boxed{|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\| \qquad \text{(desigualtat de Cauchy-Schwarz)}}$

Utilitzant aquesta desigualtat s'obté

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2x\cdot y + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

que junt amb el fet que $\|x+y\| \geq 0$ i $\|x\| + \|y\| \geq 0$ prova [N3].

De la igualtat $x\cdot y = \|x\|\|y\| \cos\theta_{x,y}$ s'obté que dos vectors x, y no nuls són **ortogonals** (**perpendiculars**) només quan $x \cdot y = 0$.

Aquest concepte és pot generalitzar a espais vectorials amb un producte escalar.

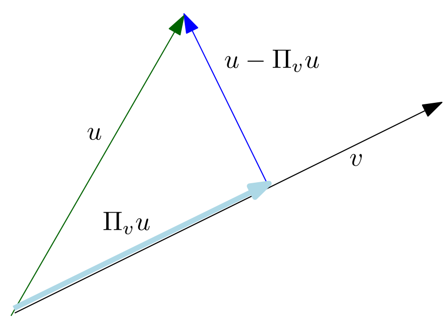
Definició 1.3. *Dos vectors x, y en un espai vectorial E amb un producte escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ són* ***ortogonals*** *si $\langle x, y\rangle = 0$. Per indicar que x i y són ortogonals escriurem $x \perp y$.*

Una tècnica utilitzada habitualment en mecànica és la descomposicioó de forces. Aquesta tècnica és basa en projectar ortogonalment un vector sobre un altre vector.

Definició 1.4. *Si x, $y \in E$, la* ***projecció ortogonal*** *de x sobre y és l'unic vector $\Pi_y x$ que compleix*

$$\Pi_y x = \lambda y \quad i \quad (x - \Pi_y x) \perp y.$$

Per tant, si $y \neq 0$ es compleix $\Pi_y x = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\, y$.



Exemple 1.5. *Calculeu la projecció ortogonal de $u = (2, 2, 0)$ sobre el vector $v = (2, 0, 2)$.*

$\Pi_v u = \frac{u\cdot v}{\|v\|^2} v = \frac{4}{8}(2, 0, 2) = (1, 0, 1)$.

En $\mathbb{R}^n$ hem vist com a partir del producte escalar euclidià podíem construïr una norma utilitzant la desigualtat de Cauchy-Schwarz. Aquests resultats són certs per a qualsevol producte escalar.

Proposició 1.6. *Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ és un producte escalar en un espai vectorial real E, llavors $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ és una norma en E.*

Lema 1.7 (Desigualtat de Cauchy-Schwarz)**.** *Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, llavors $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. A més la igualtat $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$ només s'obté quan $x = \lambda y$ o be $y = \lambda x$ per a un cert $\lambda \geq 0$.*

Un corol·lari de la desigualtat triangular és:

Corol·lari 1.8. *Si $\|x\|$ és una norma en espai vectorial E, per a tot $x, y \in E$ es compleix* $|\,\|x\| - \|y\|\,| \le \|x - y\|$.

Demostració. Utilitzant la desigualtat triangular es té $\|x\| = \|y + (x - y)\| \le \|y\| + \|x - y\|$ i per tant $\|x\| - \|y\| \le \|x - y\|$. Canviant x per y tenim $\|y\| - \|x\| \le \|y - x\| = \|x - y\|$, és a dir $\|x\| - \|y\| \ge -\|x - y\|$.
Combinat les dues desigualtats s'obté el resultat. $\square$

Exercici 1.9. *Si x i y són dos vectors en un espai prehilbertià, llavors es compleix:*

- **Teorema de Pitàgores:** *Si x i y són ortogonals,* $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- **Regla del paral·lelogram:** $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Fins ara hem estudiat normes definides a partir d'un producte escalar. No obstant hi ha normes que no provenen d'un producte escalar. Per exemple, en $\mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ i $\|x\|_\infty = \max_{k=1,\cdots,n} |x_k|$ són també dues normes, que compleixen

$$\|x\|_\infty \le \|x\| \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty,$$

és a dir

$$\boxed{|x_k| \le \max_{k=1,\cdots,n} |x_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| \le n \max_{k=1,\cdots,n} |x_k|.}$$

En l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ amb el producte escalar i la norma euclidians podem definir una distància entre vectors mitjançant $d(x, y) = \|x - y\|$. No obstant també podem definir una distància en l'espai afí $\mathbb{R}^n$ mitjançant la formula $dist(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$. És a dir, no cal que un conjunt E sigui un espai vectorial per tal de poder-hi definir una distància.

Definició 1.10. *Una distància en un conjunt X és una aplicació $d(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ complint*

D1: $d(x, y) = d(y, x)$
D2: $d(x, y) \ge 0$ *i* $d(x, y) = 0$ *si i només si* $x = y$
D3: $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$ ***(desigualtat triangular)***

per a tot $x, y, z \in X$.
Un conjunt X amb una distància és diu un espai mètric. Escriurem $(X, d(\cdot, \cdot))$.

Com en el cas de la norma, a partir de la desigualtat triangular s'obté

$$\boxed{|d(x, y) - d(y, z)| \le d(x, z)}.$$

Com a conseqüència de les propietats de la norma es té:

Lema 1.11. *Si tenim un espai vectorial normat E llavors $d(x, y) = \|x - y\|$ defineix una distància en E. A més aquesta distància és invariant per translacions, és a dir* $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

3. Topologia en $\mathbb{R}^n$.

Si no s'especifica el contrari, en $\mathbb{R}^n$ considerarem el producte escalar euclidià amb la corresponent norma i distància.

3.1. Conjunts oberts i conjunts tancats. Interior i adherència d'un conjunt. Donat $x \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$, diem $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$. Aquest conjunt s'anomena **bola oberta** de centre x i radi r (més endavant justificarem la paraula oberta).

Donat un conjunt $A \subset \mathbb{R}^n$ no buit volem separar $\mathbb{R}^n$ en diferents subconjunts en funció de si la familia de boles $\{B(x,r)\}_{r>0}$ tallen A, A^c o tots dos.

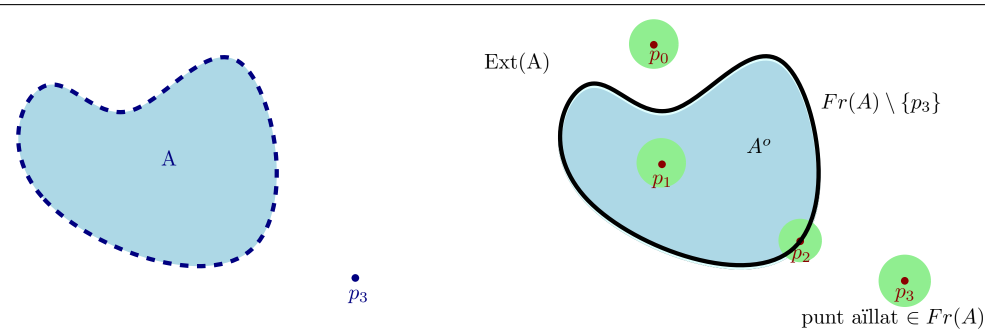
Definició 1.12. *Sigui A un subconjunt no buit de $\mathbb{R}^n$.*

- *Un punt $x \in \mathbb{R}^n$ és* ***adherent*** *a A si per a tot $r > 0$ es compleix $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$, és a dir, tota bola centrada en x talla A.*
  $\ast$ Els punts adherents és poden classificar en dos tipus en funció de si totes les boles $B(x,r)$ tallen A^c o no:
  - *Direm que $x \in \mathbb{R}^n$ és un* ***punt interior*** *a A si existeix $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$, és a dir per a un cert $r > 0$, $B(x,r)$ no conté punts de A^c.*
    L' ***interior*** *de A és el conjunt format per tots els punts interiors a A. El denotarem per A^o.*
  - *Direm que $x \in \mathbb{R}^n$ és un punt de la* ***frontera*** *de A si totes les boles $B(x,r)$ tallen A i A^c. El conjunt format pels punts frontera s'anomena frontera de A i el denotarem $Fr(A)$.*
    Clarament es compleix $Fr(A) = \overline{A} \setminus A^o$.

  Així doncs tindren, $\overline{A} = A^o \cup Fr(A)$ i $A^o \cap Fr(A) = \emptyset$.

  $\ast$ També es poden classificar en funció de si les boles tallen $A \setminus \{x\}$ o no:
  - *Direm que $x \in \mathbb{R}^n$ és un* ***punt d'acumulació*** *de A si tota bola $B(x,r)$conté punts de A diterents de x. El conjunt format pels punts d'acumulació de A el denotarem per A'.*
  - *Els punts del conjunt $\overline{A} \setminus A'$ és diuen* ***punts aïllats****. Així doncs x és un punt aïllat de A quan existeix $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A = \{x\}$.*

  Observeu que si P_I és el conjunt de punts aïllats, llavors $\overline{A} = A' \cup P_I$, $A' \cap P_I = \emptyset$.
- *Direm que $x \in \mathbb{R}^n$ és un* ***punt exterior*** *a A si $x \in (\overline{A})^c$, és a dir existeix $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A^c$. Al conjunt de punts exteriors a A li direm $Ext(A)$.*



Definició 1.13.
- *Un conjunt no buit A és **obert** si $A^o = A$, és a dir si tots els seus punts són interiors.*
- *Per definició el conjunt buit $\emptyset$ és un conjunt obert.*
- *Un conjunt A és un **conjunt tancat** si A^c és obert, és a dir si $A = \overline{A}$.*
- *Un conjunt A és **dens** en $\mathbb{R}^n$ si $\overline{A} = \mathbb{R}^n$.*
- *Un **entorn d'un punt** p és un conjunt A tal que $p \in A^o$.*

Per tal de tenir una idea intuitiva dels conceptes anteriors, feu els dos problemes següents. Més endavant veurem com provar aquests resultats.

Exercici 1.14. *Donat el conjunt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 4y^2 - 8y \leq 5\}$:*

(1) *Representeu-lo gràficament.*
(2) *Trobeu un punt interior, un d'exterior i un de la frontera del conjunt A.*
(3) *Quins creieu que són els conjunts A^o, $\overline{A}$ A' i $Fr(A)$.*

Exercici 1.15. *Repetiu el problema anterior amb el conjunt*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + 4y^2)(x^2 + y^2 - 4) \geq 0\}.$$

Exercici 1.16. *Dibuixeu un conjunt del pla que compleixi $\overline{A^o} \subsetneq \overline{A}$.*

Més endavant veurem més exemples de conjunts oberts i de conjunts tancats.

Un exemple senzill de conjunt dens és $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, ja que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$. En general $\mathbb{Q}^n$ és dens en $\mathbb{R}^n$, ja que $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}$. Observeu que $(\mathbb{Q}^n)^o = \emptyset$, $Fr(\mathbb{Q}^n) = \overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.

A partir de les definicions donades abans es compleix :

Lema 1.17. *Sigui A un subconjunt de $\mathbb{R}^n$.*

(1) *$\mathbb{R}^n$ i $\emptyset$ són conjunts oberts i tancats (de fet són els únics conjunts que són oberts i tancats simultàniament).*
(2) *$\mathbb{R}^n = A^o \cup Fr(A) \cup Ext(A)$ i A^o, $Fr(A)$ i $Ext(A)$ són disjunts.*
(3) *$Ext(A) = (\overline{A})^c = (A^c)^o$ i per tant $\overline{A^c} = (A^o)^c$.*
(4) *$Fr(A) = (A^o \cup Ext(A))^c = (A^o)^c \cap (Ext(A))^c = \overline{A^c} \cap \overline{A}$.*
(5) *Si $A \subset B$ llavors $A^o \subset B^o$ i $\overline{A} \subset \overline{B}$.*
(6) *A és obert si i nomes si A^c és tancat.*
(7) *A^o és el conjunt obert més gran contingut en A, és a dir si $C \subset A$ és obert, llavors $C \subset A^o$.*
(8) *$Ext(A)$ és el conjunt obert més gran contingut en A^c.*
(9) *$\overline{A}$ és el conjunt tancat més petit que conté A.*

El lema següent és útil per estudiar l'interior, la adherència i la frontera d'un conjunt.

Lema 1.18. *Sigui A un conjunt no buit de $\mathbb{R}^n$. Si existeix un conjunt tancat B i un conjunt obert C complint :*

(1) *$C \subset A \subset B$.*
(2) *$D = B \setminus C \subset Fr(A)$.*

LLavors $\overline{A} = B$, $A^o = C$ i $Fr(A) = D$.

DEMOSTRACIÓ. Donat que $\overline{A}$ és el conjunt més petit que conté A i A^o és l'obert més gran contingut en A, tenim

$$\overline{A} \subset B = C \cup D \subset A^o \cup Fr(A) = \overline{A},$$

d'on s'obté $\overline{A} = B$. Utilitzant que A^o i $Fr(A)$ són disjunts i que $C \subset A^o$ i $D \subset Fr(A)$, s'obté $C = A^o$ i $Fr(A) = \overline{A} \setminus A^o = B \setminus C = D$. $\square$

Exemples importants de conjunts oberts o tancats són les boles i les esferes.

Lema 1.19. *Siguin $z \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$ i diem $A = B(z,r)$.*

(1) *A és un conjunt obert. Per aquest motiu $B(z,r)$ s'anomena **bola oberta** de centre z i radi r.*
(2) *$\overline{A} = A' = B'(z,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - z\| \leq r\}$. $B'(z,r)$ s'anomena **bola tancada** de centre z i radi r.*
(3) *$Fr(A) = S(z,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - z\| = r\}$. $S(z,r)$ és l'**esfera** de centre z i radi r.*

DEMOSTRACIÓ. Diem $B = B'(z,r)$, $C = B(z,r)$ i $D = S(z,r)$. Comprovarem les hipòtesis del Lema 1.18. Per definició $C = A \subset B = C \cup D$.

- C és obert: Hem de veure que donat $x \in B(z,r)$ existeix $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset B(z,r)$, és a dir que si $\|y - x\| < \varepsilon$, llavors $\|y - z\| < r$. Triant $\varepsilon < r - \|x - z\|$ es compleix, ja que $\|y - z\| \leq \|y - x\| + \|x - z\| < r$.
- B és tancat: Hem de veure que $B^c = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - z\| > r\}$ és obert. Per tant cal veure que si $x \in B^c$ llavors existeix $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset B^c$, és a dir que si $\|y - x\| < \varepsilon$, llavors $\|y - z\| > r$. Triant $\varepsilon < \|x - z\| - r$ es compleix, ja que $\|y - z\| \geq \|x - z\| - \|y - x\| > \|x - z\| - \varepsilon > r$.
- $D \subset Fr(A)$: Si $x \in D$ cal veure que tota bola $B(x,\varepsilon)$ conté punts de A i de A^c. Per veure que conté punts de A hem de trobar y tal que $\|y - z\| < r$ i $\|y - x\| < \varepsilon$. Busquem y de la forma $y = x - \delta(x - z)$ amb $\delta > 0$. En aquest cas $\|y - z\| = |1 - \delta| r$ i $\|y - x\| = \delta r$. Triant $0 < \delta < \min\{1, \varepsilon/r\}$ es compliran les condicions.

  Veure que $B(x,\varepsilon)$ conté punts de A^c és més senzill, ja que $x \in A^c$.

Així doncs $B(x,r)$ és obert, $\overline{B(x,r)} = B'(x,r)$ i $Fr(B(x,r)) = S(x,r)$.

Queda només veure que $B'(z,r)$ és el conjunt de punts d'acumulació de $B(z,r)$, és a dir que si $x \in B'(x,r)$, tota bola $B(x,\varepsilon)$ conté algun punt de A diferent de x. Per tant cal trobar y tal que $\|y - z\| < r$ i $0 < \|y - x\| < \varepsilon$.

Si $x = z$, triem $0 < \delta < \min\{r, \varepsilon\}$ i $y = z + \delta w$ on w és un vector unitari qualsevol. Si $x \neq z$, triem com abans $y = x - \delta(x - z)$ amb $0 < \delta < \min\{1, \varepsilon/r\}$. $\square$

Proposició 1.20. *La unió i intersecció de conjunts oberts o tancats compleix.*

(1) *La unió (finita o infinita) de conjunts oberts és un conjunt obert.*
(2) *La intersecció finita de conjunts oberts és un conjunt obert.*
(3) *La intersecció (finita o infinita) de conjunts tancats és un conjunt tancat.*
(4) *La unió finita de conjunts tancats és un conjunt tancat.*

DEMOSTRACIÓ. (1) Suposem que tenim una familia $\{A_\alpha\}_\alpha$ de conjunts oberts. Volem veure que $A = \cup_\alpha A_\alpha$ també és obert, és a dir que per a cada $x \in A$ existeix $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$.

Si $x \in A$, llavors $x \in A_\alpha$ per a un cert α. Donat que A_α és obert, existeix $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A_\alpha \subset A$.

(2) Suposem que $A = \cap_{j=1}^m A_j$ amb A_j obert. Si algun $A_j = \emptyset$, llavors $A = \emptyset$ i per tant A és obert. Suposem que tots els A_j són no buits. Llavors donat $x \in A$, llavors $x \in A_j$ per a tot j. Per tant existeix $\varepsilon_j > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_j) \subset A_j$. Triant $\varepsilon = \min\{\varepsilon_j : 1 \leq j \leq m\} > 0$ és té $B(x, \varepsilon) \subset A$.

(3) Suposem que tenim una familia $\{B_\alpha\}_\alpha$ conjunts tancats. Per veure que $B = \cap_\alpha B_\alpha$ és tancat només cal veure B^c és obert. Aquest resultat és conseqüència del fet que $B^c = \cup_\alpha B_\alpha^c$ i la primera part amb $A_\alpha = B_\alpha^c$.

(4) Utilitzant que si $B = \cap_{j=1}^m B_j$ llavors $B^c = \cup_{j=1}^m B_j^c$, s'obté que B^c és tancat.

□

Observació 1.21. • *La intersecció infinita de conjunts oberts no és necessàriament obert. Per exemple si $A_j = (-1/j, 1/j)$, $j \in \mathbb{N}$, llavors $\cap_j A_j = \{0\}$ que no és obert.*

- *La unió infinita de conjunts tancats no és necessàriament tancada. Per exemple si $B_j = [-1 + 1/j, 1 - 1/j]$, $j \in \mathbb{N}$, llavors $\cup_j B_j = (-1, 1)$ que és obert.*
- *Les propietats (1) i (2) proven que el conjunt τ format per tots els subconjunts oberts de $\mathbb{R}^n$ és una topologia.*

*Una **topologia** τ_X en un conjunt X és un conjunt de subconjunts de X tals que $\emptyset$ i X pertanyen a τ_X, i la unió (finita o infinita) i la intersecció finita de conjunts de τ_X també pertanyen a τ_X.*

Corol·lari 1.22. *Sigui $\{A_i\}_i$ una familia de subconjunts de $\mathbb{R}^n$. Llavors es compleixen les següents inclusions*

$$\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)^o \subset \bigcap_\alpha A_\alpha^o \quad , \quad \left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)^o \supset \bigcup_\alpha A_\alpha^o$$

$$\overline{\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)} \subset \bigcap_\alpha \overline{A_\alpha} \quad i \quad \overline{\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)} \supset \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}.$$

Les inclusions anteriors poden ser estrictes.

DEMOSTRACIÓ. La primera inclusió s'obté a partir de $(\cap_\alpha A_\alpha)^o \subset A_\alpha^o$ per a tot α. Per veure que la inclusió pot ser estricta, només cal triar $A_j = (-1/j, 1/j) \subset \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. La inclusió serà una igualtat si $\cap_\alpha A_\alpha^o$ és un obert.

La segona inclusió s'obté a partir de $(\cup_\alpha A_\alpha)^o \supset A_\alpha^o$ per a tot α. La desigualtat estricta es pot obtenir triant $A_1 = [-1, 0]$ i $A_2 = (0, 1]$.

La tercera inclusió s'obté a partir de $\overline{(\cap_\alpha A_\alpha)} \subset \overline{A_\alpha}$ per a tot α. Per veure que la inclusió pot ser estricte, només cal triar $A_1 = [-1, 0]$ i $A_2 = (0, 1]$.

La darrera inclusió s'obté a partir de $\overline{(\cup_\alpha A_\alpha)} \supset \overline{A_\alpha}$ per a tot α. La inclusió estricta es pot obtenir triant $A_j = [-1 + 1/j, 1 - 1/j] \subset \mathbb{R}$. La inclusió serà una igualtat si $\cup_\alpha \overline{A_\alpha}$ és tancat. □

Lema 1.23. (1) *Si A és un obert de $\mathbb{R}^n$ i B és un obert de $\mathbb{R}^m$, llavors $A \times B$ és obert en $\mathbb{R}^{n+m}$.*
(2) *Si A és un tancat de $\mathbb{R}^n$ i B és un tancat de $\mathbb{R}^m$, llavors $A \times B$ és tancat en $\mathbb{R}^{n+m}$.*

DEMOSTRACIÓ. (1) Cal veure que tot $c = (a, b)$ amb $a \in A$ i $b \in B$ és interior a $A \times B$. Triem $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset A$ i $B(b, \varepsilon) \subset B$. LLavors $B(a, \varepsilon) \times B(b, \varepsilon) \subset A \times B$. Si veiem que $B(c, \varepsilon) \subset B(a, \varepsilon) \times B(b, \varepsilon)$ tindrem provat que c és interior. Cal veure que si $\|(x, y) - (a, b)\| = \|(x - a, y - b)\| < \varepsilon$, llavors $\|x - a\| < \varepsilon$ i $\|y - b\| < \varepsilon$, que es dedueix de les desigualtats $\|x - a\| \leq \|(x - a, y - b)\|$ i $\|y - b\| \leq \|(x - a, y - b)\|$.
(2) Si A és tancat A^c és obert i per l'apartat anterior $A^c \times \mathbb{R}^m$ és obert en $\mathbb{R}^{n+m}$. De forma anàloga $\mathbb{R}^m \times B^c$ és obert en $\mathbb{R}^{n+m}$. Utilitzant que $(A \times B)^c = (A^c \times \mathbb{R}^m) \cup (\mathbb{R}^n \times B^c)$ expresem $(A \times B)^c$ com unió de dos oberts i per tant és obert. □

Exemple 1.24. • *El cilindre $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 9, -1 < z < 2\}$ és obert ja que $A = B((0, 0), 3) \times (-1, 2)$.*
• *El cilindre $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 9\}$ és tancat ja que $A = B'((0, 0), 3)\times\mathbb{R}$.*

4. Límits de successions de $\mathbb{R}^n$

En aquest apartat utilitzarem una notació amb superíndexs per indicar els termes d'una successió. És a dir $\{x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)\}_k$ serà una successió de $\mathbb{R}^n$.

Definició 1.25. *Una successió $\{x^k\}_k \subset \mathbb{R}^n$ té límit (convergeix cap a) $x = (x_1, \ldots, x_n)$, si $\lim_{k\to\infty} \|x^k - x\| = 0$, és a dir donat $\varepsilon > 0$ existeix un k_ε tal que $\|x^k - x\| < \varepsilon$ si $k > k_\varepsilon$. Com es habitual escriurem $\lim_{k\to\infty} x^k = x$, o bé $x^k \to x$ si $k \to \infty$, o simplement $x^k \to x$.*

El resultat següent ens permetrà obtenir propietats dels límits de successions en $\mathbb{R}^n$ a partir de les propietats dels límits de successions en $\mathbb{R}$.

Proposició 1.26. *Són equivalents:*
(1) $x^k \to x$
(2) $x_j^k \to x_j$ *per a tot* $1 \leq j \leq n$.

DEMOSTRACIÓ. Utilitzant les desigualtats

$$0 \leq |x_j^k - x_j| \leq \|x^k - x\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j^k - x_j| \tag{4.1}$$

i la regla del sandwich, s'obté el resultat. □

Observació 1.27. *La proposició anterior la podem escriure de la forma*

$$\lim_{k\to\infty}(x_1^k, \ldots, x_n^k) = \left(\lim_{k\to\infty} x_1^k, \ldots, \lim_{k\to\infty} x_n^k\right),$$

entenent que en la igualtat anterior l'existència del límit de l'esquerra implica l'existència dels de la dreta, i viceversa.

Per tant el càlcul de límits de successions de $\mathbb{R}^n$ és redueix al càlcul de n límits de successions en $\mathbb{R}$.

Exemple 1.28. $\lim_{k\to\infty}(1/k, k\sin(1/k)) = (0,1)$.

Corol·lari 1.29. *El límit si existeix és únic.*

Demostració. És conseqüència de la proposició anterior i de que el límit d'una successió de $\mathbb{R}$ és únic.

Directament: Si $x,\ y$ són dos límits de la mateixa successió tindrem

$$0 \le \|x-y\| \le \|x-x^k\| + \|x^k-y\| < \varepsilon \quad \text{si } k > K_\varepsilon$$

per a tot $\varepsilon > 0$. Per tant $\|x-y\| = 0$ i $x = y$. □

4.1. Caracteritzacions de $\overline{A}$, A' i $Fr(A)$ en termes de convergència de successions.

Proposició 1.30. *Sigui A un conjunt de $\mathbb{R}^n$ no buit. LLavors:*

(1) *Un punt $x \in \overline{A}$ si i només si existeix una successió de punts $\{y^k\}_k \subset A$ tal que $y^k \to x$.*
(2) *Un punt $x \in A'$ si i només si existeix una successió de punts $\{y^k\}_k \subset A\setminus\{x\}$ tal que $y^k \to x$.*
(3) *Un punt $x \in Fr(A)$ si i només si existeixen successions de punts $\{y^k\}_k \subset A$ i $\{z^k\}_k \subset A^c$, tals que $y^k \to x$ i $z^k \to x$.*

Observació 1.31. *La primera condició ens permet donar una tècnica per provar que un conjunt A és tancat:*

se suposa que tenim una successió $\{y^k\}_k \subset A$ que convergeix cap a $x \in \mathbb{R}^n$ i es prova que $x \in A$.

Demostració. (1) Si $x \in \overline{A}$ llavors per a cada $k \in \mathbb{N}$, existeix $y^k \in A \cap B(x, 1/k)$, i per tant $\|y^k - x\| < 1/k \to 0$ si $k \to +\infty$.

Viceversa, si $\{y^k\}_k \subset A$ i $y^k \to x$, llavors per a tot $\varepsilon > 0$ existeix k_ε tal que $\|y^k - x\| < \varepsilon$ si $k > k_\varepsilon$. Per tant per a tot $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset$.

(2) La demostració és idèntica a l'anterior. Si $x \in A'$ llavors per a cada $k \in \mathbb{N}$, existeix $y^k \in (A\setminus\{x\}) \cap B(x,1/k)$, i per tant $\|y^k - x\| < 1/k \to 0$ si $k \to +\infty$.

Viceversa, si $\{y^k\}_k \subset A\setminus\{x\}$ i $y^k \to x$, llavors per a tot $\varepsilon > 0$ existeix k_ε tal que $0 < \|y^k - x\| < \varepsilon$ si $k > k_\varepsilon$. Per tant per a tot $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap A\setminus\{x\}) \neq \emptyset$.

(3) Aquest resultat es dedueix del fet que $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ i de l'apartat (1).

□

Exemple 1.32. *Considerem el conjunt $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, 1 < x^2+2y^2 \le 4\} \cup \{(0,0),(1,0)\}$.*

(1) PROVEM QUE $P_0 = (0,0)$ ÉS UN PUNT AÏLLAT: *Cal veure que P_0 no és pot aproximar per punts de A, és a dir que existeix una constant $\delta > 0$ tal que $\|p - P_0\| \geq \delta$ per a tot $p \in A \setminus \{P_0\}$.*

Si $p = (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$ és té $\|p - P_0\| = \|(x,y)\| = (x^2+y^2)^{1/2} > \frac{x^2+2y^2}{2} \geq \frac{1}{2}$ i per tant podem triar $\delta = 1/2$.

(2) PROVEM QUE $P_1 = (1,1)$ ÉS UN PUNT DE $\overline{A}$: *Cal triar una successió de punts $\{p_k\} \subset A$ tal que $p_k \to P_1$. Donat que $1 < 1^2 + 2\,1^2 = 3 \leq 4$, $P_1 \in A$, i per tant podem triar la successió constant on $p_k = P_1$.*

(3) PROVEM QUE $P_1 = (1,1)$ ÉS UN PUNT DE A': *Cal triar una successió de punts $\{p_k\} \subset A \setminus \{P_1\}$ tal que $p_k \to P_1$. Triant $p_k = (x_k, y_k) = (1 + 1/k, 1)$ es compleix $p_k \to P_1$ i $x_k^2 + 2y_k^2 = (1+1/k)^2 + 2$. Per tant $1 < x_k^2 + 2y_k^2 \leq 4$ si $k \geq 3$.*

(4) PROVEM QUE $P_2 = (1,0)$ ÉS UN PUNT DE $Fr(A)$: *Cal veure que $P_2 \in \overline{A} \cap \overline{A^c}$, és a dir que existeixen successions $\{p_k\} \subset A$ i $\{q_k\} \subset A^c$ tals que $p_k \to P_2$ i $q_k \to P_2$.*

Com a successió p_k podem triar $p_k = (1,0)$ ja que $(1,0) \in A$. Triem $q_k = (z_k, w_k) = (1 - 1/k, 0)$ amb $k \geq 2$. El fet que $q_k =\in A^c$ és dedueix de $0 < z_k^2 + 2w_k^2 = (1-1/k)^2 < 1$ si $k \geq 2$.

Exercici 1.33. *Proveu que si A és el conjunt de l' exemple anterior, llavors $P_3 = (2,0)$ és un punt de la frontera de A.*

Proveu que tots els punts $P = (a,b)$ que compleixen $a^2 + 2b^2 = 4$ són de la frontera de A.

5. Conjunts acotats i conjunts compactes

Definició 1.34. *Un conjunt $A \subset \mathbb{R}^n$ és* ***acotat*** *si existeix $r > 0$ tal que $\|x\| \leq r$ per a tot $x \in A$, és a dir si $A \subset B'(0,r)$.*

De forma equivalent es té:

Lema 1.35. *A és acotat si i només si existeix $M \geq 0$ tal que $|x_j| \leq M$ per a tot $x = (x_1, \cdots, x_n) \in A$ que també és equivalent a que existeixi $R > 0$ tal que $A \subset B(0,R)$.*

Exemple 1.36.
- *El conjunt $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^4 + y^6 < 4\}$ és acotat, ja $x^4 < 4$ i $y^6 < 4$ i per tant $x^2 + y^2 \leq 2 + \sqrt[3]{4}$.*
- *El conjunt $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy < 4\}$ no és acotat, ja que $\{(k, 1/k)\}_k \subset A$ i $\|(k,1/k)\| = \sqrt{k^2 + 1/k^2} \to \infty$ si $k \to \infty$.*

La definició de conjunt compacte en $\mathbb{R}^n$ està motivada pel teorema Bolzano-Weierstrass.

Teorema 1.37 (Bolzano-Weierstrass en $\mathbb{R}^n$)**.** *Tota successió acotada $\{x^k\}_k$ de $\mathbb{R}^n$ conté una parcial convergent.*

Definició 1.38. *Direm que un subconjunt K de $\mathbb{R}^n$ és* ***compacte per successions****, si qualsevol successió $\{x^k\}_k \subset K$ conté una parcial que convergeix cap a un element de K.*

Teorema 1.39. *Si K és un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ són equivalents:*

(1) *K és compacte per successions.*
(2) *K és tancat i acotat.*

Corol·lari 1.40. *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ és compacte i $A \subset \mathbb{R}^n$ és tancat, llavors $A \cap K$ és compacte. En particular si $A \subset K$, A és compacte, és a dir tot tancat inclòs en un compacte és compacte.*

Demostració. Clarament $A \cap K$ és tancat i acotat. $\square$

Corol·lari 1.41. *Si K és un compacte de $\mathbb{R}^n$ i K' és un compacte de $\mathbb{R}^m$, llavors $K \times K'$ és un compacte de $\mathbb{R}^{n+m}$.*

Demostració. Clarament $K \times K'$ és tancat i acotat. $\square$

5.1. La definició topològica de conjunt compacte. En aquest apartat comentarem uns resultats que es proven en les assignatures de topologia.

Definició 1.42. *Direm que un conjunt K és* ***compacte (compacte per recobriments)****, si tot recobriment per oberts $\{A_\alpha\}_\alpha$ de K (és a dir $K \subset \cup_\alpha A_\alpha$) conté un subrecobriment finit de K (és a dir existeix un nombre finit de índex α_j, $1 \leq j \leq J$ tals que $K \subset A_{\alpha_1} \cup \cdots \cup A_{\alpha_J}$).*

Un teorema que es demostra a topologia és

Teorema 1.43. *Si (X, d) és un espai mètric i K és un subconjunt de X, són equivalents:*

(1) *K és compacte.*
(2) *K és compacte per successions.*