MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques, primer semestre, curs 2011-2012

Examen final del 25 de gener de 2012

Entrega problemes diferents en fulls diferents

Qualificacions: divendres, 3 de febrer, al Campus Virtual.

Revisions: dilluns, 6 de febrer, de 12h a 12h30m, i de 15h a 15h30m.

1 (a) Teoria: Propagació de l'error de les dades.

(b) Considerem el càlcul

$$z \equiv f(x, y) = \ln(x - \sqrt{y})$$

al domini $D = \{(x, y) | y > 0, x > +\sqrt{y}\}$. Suposem que les dades x i y són conegudes només aproximadament, amb un error absolut de la mateixa magnitud. Quin dels dos errors afecta més el resultat?(Atenció: això pot dependre de la part del domini on és (x, y)).

(c) En el mateix càlcul anterior, suposem ara que les dades no tenen error, però que cada càlcul individual (arrel quadrada, resta i logaritme neperià) té un error **relatiu** fitat per la precisió de la màquina $u << 1$. Trobeu una fita de l'error **absolut** en el resultat, en funció de x, y i u. En quina part del domini D és molt gran aquesta fita? (Atenció: Podeu usar aproximacions de primer ordre $h(a + d) \approx h(a) + h'(a)d$, si $|d| << 1$. Per exemple $\ln(a + d) \approx \ln(a) + \frac{1}{a}d$).

2 Volem calcular la inversa d'una matriu bidiagonal (inferior)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & \\ b_2 & a_2 & & & & & \\ & b_3 & a_3 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & b_{n-1} & a_{n-1} & \\ & & & & & b_n & a_n \end{pmatrix},$$

on $a_i \neq 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, i $b_i \neq 0$, $i \in \{2, \ldots, n\}$.

(a) Calculeu la factorització LU de A.

(b) Doneu un mètode per al càlcul dels elements de la matriu $A^{-1} = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, columna a columna, i calculeu el nombre d'operacions necessàries per tal d'invertir A.

A partir d'ara, suposarem $a_i = a$ $(i = 1 \div n)$, $b_i = b$ $(i = 2 \div n)$.

(c) Trobeu la inversa de A.

(d) Calculeu el nombre de condició de A amb la norma del suprem ($\| \ \|_\infty$).

(e) Si $|b| \geq |a|$ i n és gran, raoneu si A és ben o mal condicionada.

3 Sigui $f : [0,1] \to R$ una funció derivable amb continuïtat tantes vegades com calgui, i sigui $M_k = \max_{x\in[0,1]} |f^{(k)}(x)|$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

(a) Calculeu $p \in P_2$ tal que $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ i $p(1) = f(1)$.

(b) Doneu una fita numèrica de $|f(x) - p(x)|$, en funció d'alguna M_k, que valgui per a qualsevol $x \in [0,1]$.

(c) Calculeu els coeficients c_0, c_0' i c_1 per tal que la fórmula d'integració numèrica

$$\int_0^1 f(x)dx \approx c_0 f(0) + c_0' f'(0) + c_1 f(1)$$

sigui exacta quan f sigui un polinomi de grau 2 qualsevol.

(d) Trobeu una fita numèrica de l'error en la fórmula anterior en funció d'alguna M_k.

4 Teoria. Demostreu el següent teorema:

Siguin $I = [a,b]$ i $g : I \to R$ tals que

(i) $g(I) \subseteq I$,

(ii) $\exists K \in (0,1)$ tal que $|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$ $(\forall x, y \in I)$.

Aleshores es verifica:

1. Existeix un únic element $\alpha \in I$ tal que $g(\alpha) = \alpha$.
2. $\forall x_0 \in I$, si generem $(x_n)_{n\geq 0}$ mitjançant $x_{n+1} = g(x_n)$ $(n \geq 0)$ llavors $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.
3. $\forall n \geq 0$ es verifica la fita de l'error $|x_n - \alpha| \leq \frac{K^n}{1-K}|x_1 - x_0|$.

5 (a) Sigui $f : R \to R$ una funció suficientment derivable amb continuïtat, i α un zero de multiplicitat $p \geq 2$: $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, \ldots, f^{(p-1)}(\alpha) = 0, f^{(p)}(\alpha) \neq 0$. Sigui (x_n) una successió generada pel mètode de Newton-Raphson, aplicat a la funció f, tal que convergeix cap a α i $x_n \neq \alpha$ $(\forall n \geq 0)$. Demostreu que l'ordre de convergència és 1 i trobeu el coeficient asimptòtic de l'error.

(b) Trobeu l'ordre i el coeficient asimptòtic si afegim la hipòtesi $f^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, i modifiquem el mètode de Newton-Raphson de la manera següent:

$$x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \; .$$

(c) Aplicant el mètode de Newton-Raphson a una determinada funció obtenim la successió

i	x_i
0	0.5
1	0.333505
2	0.221832
3	0.147464
4	0.0980568
5	0.0652386
6	0.0434272

Sembla convergir cap a 0, però no quadràticament sinó linealment, indicant que $\alpha = 0$ és una arrel múltiple. Quina és la seva multiplicitat?