4.4 Modelo Matemático del UNThermal

El esquema representado en figura 4.13 presenta de forma simplificada el UNThermal para obtener su modelo mátemático. Tal como revisamos en la sección 2.2.3, el diseño

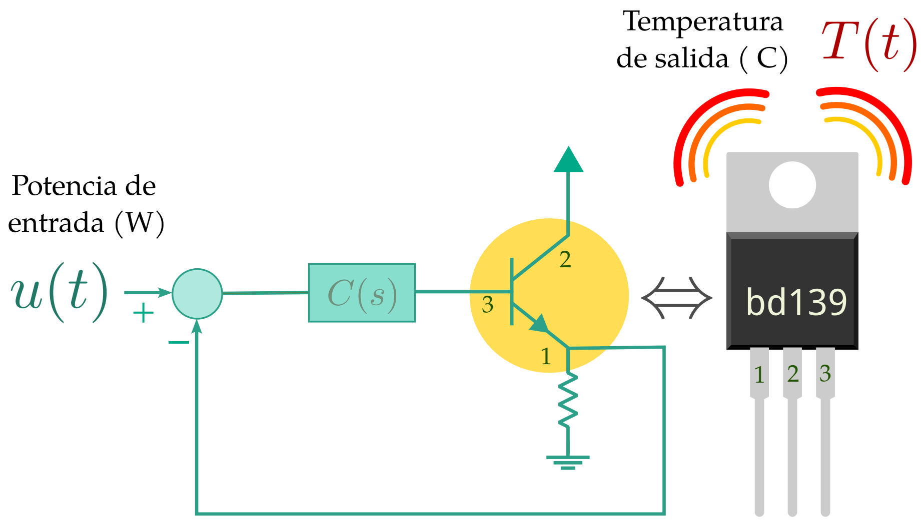

Figura 4.13: Modelo del UNThermal.

electrónico de fuente de corriente hace que podamos concebir que la entrada del sistema, denotada $u(t)$, es una señal proporcional a la potencia. La respuesta transitoria de la fuente de corriente es muy rápida, de manera que podemos considerar que la conversión tensión-potencia es instantánea y se rige por la ecuación 2.5. Esto es, la potencia eléctrica en el transistor es $P_T(t) = 2.475\,u(t)$.

Consideremos ahora la salida de temperatura (denotada como $T(t)$), el modelo dinámico que describe su comportamiento está dado por la siguiente ecuación:

$$mC_p\dot{T} = \mu A\,(T_\infty - T) + \varepsilon\,\sigma A\,\left(T_\infty^4 - T^4\right) + \beta\,u(t-\tau_D). \tag{4.20}$$

Las variables y parámetros de esta ecuación se definen así:

$u(t)$: Potencia eléctrica aplicada al transistor (W).
$T(t)$: Temperatura de salida medida en el transistor $(^\circ K)$.
τ_D : Retardo de transporte del sistema térmico (s).
m : Masa del conjunto transistor–sensor (Kg).
C_p : Capacidad calorífica específica; (J/Kg-K).
A : Superficie de contacto con la atmosfera (m^2).
μ : Coeficiente global de transferencia por conducción y convección (W/m^2-K)
σ : Constante de Stefan–Boltzmann $((W/m^2-K^4)$

Para simplificar la notación y crear un modelo más apropiado para identificación de sistemas, vamos a escribir la ecuación (4.20) en términos de un conjunto menor de parámetros p_1, p_2 y p_3, como sigue:

$$\dot{T} = p_1\,(T_\infty - T) + p_2\,\left(T_\infty^4 - T^4\right) + p_3\,u(t-\tau_D). \tag{4.21}$$

En que los parámetros p_1, p_2 y p_3 se definen así:

$$p_1 = \frac{\mu A}{m C_p}; \qquad p_2 = \frac{\varepsilon \sigma A}{m C_p}; \qquad p_3 = \frac{\beta}{m C_p}.$$

4.4.1 Modelo linealizado

Consideremos una temperatura de operación especifíca que ha sido seleccionada para controlar en el UNThermal. Denotemos por T_{OP} la temperatura de operación y por u_{OP} al valor de potencia de entrada que produce T_{op} en estado estacionario. Podemos construir un modelo lineal *en torno* a este punto de operación mediante el siguiente procedimiento.

Resultado 4.4.1 — Modelos linealizados. Consideremos un sistema no lineal dado por la ecuación de estado

$$\dot{x} = f(x,u). \tag{4.22}$$

Supongamos que el punto de operación x_{OP} se produce con la entrada u_{OP}, esto es:

$$0 = \dot{x} = f(x_{OP}, u_{OP}). \tag{4.23}$$

Para obtener un modelo linealizado en el punto de operación realizamos estos pasos:

1. Encontramos el punto de operación completo por medio de la ecuación (4.23).
2. Definimos las variables de desviación en torno del punto de equilibrio como:

$$\begin{aligned} u_D(t) &= u(t) - u_{OP}, \\ x_D(t) &= x(t) - x_{OP}. \end{aligned}$$

3. La ecuación lineal de estado en términos de las variables de desviación es:

$$\dot{x}(t)_D = A\,x(t)_D + B\,u_D(t).$$

En que, para un sistema no lineal de primer orden, A y B están dadas por:

$$A = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_{OP},u=u_{OP}}, \tag{4.24}$$

$$B = \left.\frac{df}{du}\right|_{x=x_{OP},u=u_{OP}}. \tag{4.25}$$

Siguiendo el procedimiento 4.4.1 para el modelo de la ecuación (4.21), el estado estacionario se produce cuando la temperatura llega al punto de operación T_{OP} y se mantiene allí constante.

El valor de u_{OP} se obtiene usando la condición (4.23) en la ecuación (4.21), así:

$$0 = \dot{T}_{OP} = p_1\,(T_\infty - T_{OP}) + p_2\,\left(T_\infty^4 - T_{OP}^4\right) + p_3\,u_{OP}. \tag{4.26}$$

Despejando el valor de u_{OP} en la ecuación (4.26) obtenemos:

$$u_{OP} = \frac{p_1\left(T_{OP} - T_\infty\right) + p_2\left(T_{OP}^4 - T_\infty^4\right)}{p_3} \tag{4.27}$$

Ahora, vamos a definir las variables de desviación del punto operación u_D y T_D:

$$u_D(t-\tau_D) = u(t-\tau_D) - u_{OP},$$
$$T_D = T(t) - T_{OP}.$$

A continuación calculamos los parámetros A y B mediante las ecuaciones (4.24) y (4.25), tomando el lado derecho de la ecuación (4.21) como valor de f. Así, tenemos que:

$$A = \frac{df}{dT} = -\left(p_1 + 4\,p_2\,T_{OP}^3\right),$$
$$B = \frac{df}{du} = p_3.$$

Finalmente, el modelo linealizado para el sistema térmico está dado por:

$$\dot{T}_D(t) = -\left(p_1 + 4\,p_2\,T_{OP}^3\right) T_D(t) + p_3\,u_D(t-\tau_D) \tag{4.28}$$

Resultado 4.4.2 — Función de transferencia del UNThermal. Tomando transformada de laplace en el modelo lineal en la ecuación (4.28) obtenemos la siguiente función de transferencia para el UNThermal:

$$\frac{T_D(s)}{U_D(s)} = \frac{p_3}{s + p_1 + 4\,p_2\,T_{OP}^3}\,e^{-\tau_D s}.$$

Esta última ecuación la podemos escribir como:

$$\frac{T_D(s)}{U_D(s)} = \frac{\alpha}{\tau s + 1}\,e^{-\tau_D s}, \tag{4.29}$$

con los parámetros α y τ definidos así:

$$\tau = \frac{1}{p_1 + 4\,p_2\,T_{OP}^3}; \qquad \alpha = \frac{p_3}{p_1 + 4\,p_2\,T_{OP}^3}.$$