Раздел 2. Числовые множества. Множество комплексных чисел.

2.1 Определение множества комплексных чисел

Когда-то давно, много тысяч лет назад, люди придумали натуральные числа. Это случилось тогда, когда возникла необходимость пересчитать множество людей в племени, множество животных, убитых на охоте, … Довольно скоро люди поняли, что одними натуральными им не обойтись и были придуманы дробные числа. Так, с течением времени, решая различные жизненные задачи, люди придумывали все новые числовые множества. Причем каждое следующее включало в себя предыдущее:

N – множество натуральных чисел: числа, используемые при счете предметов. (не всегда можно решить уравнение $a+x=b$).

Z – множество целых чисел: N + *0* + *числа, противоположные натуральным*. (не всегда можно решить уравнение $ax=b$).

Q – множество рациональных дробей ($\frac{m}{n}$, $m\in Z$, $n\in N$ – обыкновенные дроби, конечные десятичные дроби, бесконечные периодические десятичные дроби).

I – множество иррациональных чисел ($\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{7}$, … бесконечные непериодические десятичные дроби).

R – множество действительных чисел, включает в себя все предыдущие множества.

В R не всегда можно решить уравнение $x^2+a=b$. Значит, нужно новое множество, в котором всякое уравнение указанного типа было бы разрешимо. Таким числовым множеством является множество **C – комплексных чисел.**

$x^2+1=0$. $x^2=-1$. $x=\sqrt{-1}=i$ $i-$мнимая единица – число, квадрат которого равен -1: $(i)^2=-1$.

Множеством *C*-комплексных чисел называется множество символов вида: $a+bi$, где a и b – любые действительные числа, $(i)^2=-1$ и в котором выполняются следующие аксиомы:

А1: $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c; b=d$
А2: $i+0=0+i=i$
А3: $i\cdot 0=0\cdot i=0$
А4: $i\cdot 1=1\cdot i=i$
А5: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
А6: $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

Символы вида $a+bi$ называются комплексными числами

Любое действительное число можно представить в виде комплексного числа. Например, $3{,}7=3{,}7+0\cdot i$, следовательно, множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел: $R\subset C$.

Запись комплексного числа в виде $z=a+bi$ называется **алгебраической** формой комплексного числа. a – действительная часть комплексного числа (обозначается $a=\operatorname{Re} z$); b – мнимая часть комплексного числа (обозначается ($b=\operatorname{Im} z$)).

Обозначение i для мнимой единицы ввел Л.Эйлер в 1777 г.

2.2 Операции над комплексными числами в алгебраической форме

Два комплексных числа $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ называются ***равными*** тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, то есть: $z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=c, \\ b=d. \end{cases}$

Операции с комплексными числами в алгебраической форме выполняются по следующим правилам, аналогичным соответствующим правилам для многочленов (для любых $a+bi, c+di\in C$):

1) Сложение: $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$.

Пример 1. $(2+3i)+(5+i)=2+3i+5+i=(2+5)+(3+1)i=7+4i$;
$(-2+3i)-(1-8i)=-2+3i-1+8i=(-2-1)+(3+8)i=-3+11i$.

2) Умножение: $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

Пример 2. $(-1+3i)(2+5i)=-2-5i+6i+15i^2=-2+i+15\cdot(-1)=-2-15+i=-17+i$.

Пусть дано комплексное число $z=a+bi$. **Сопряженным** для него называется комплексное число $\bar{z}=a-bi$

Пример 3. $z=3+2i \quad \bar{z}=3-2i; \quad z=6i \quad \bar{z}=-6i; \quad z=-2+3i \quad \bar{z}=-2-3i; \quad z=3 \quad \bar{z}=3.$

Сумма и произведение двух комплексных сопряженных чисел есть действительное число:

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a \qquad z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=(a^2+b^2)+(-ab+ab)i=a^2+b^2$$

3) Чтобы разделить одно комплексное число на другое в алгебраической форме нужно умножить числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i.$$

Замечание: эти операции можно выполнять как действия с двучленами.

Пример 4. $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(1+i)^2}{1^2-i^2}=\frac{1+2i+i^2}{1-(-1)}=\frac{1+2i-1}{1+1}=\frac{2i}{2}-i$;

$$\frac{3+2i}{2+i}=\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{6-3i+4i-2i^2}{2^2-i^2}=\frac{6+i-2\cdot(-1)}{4-(-1)}=\frac{8+i}{5}=\frac{8}{5}+\frac{1}{5}i=1{,}6+0{,}2i.$$

Арифметические действия над комплексными числами подчиняются тем же законам, что и действия над действительными числами.

Если $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ и $z_3=e+fi$ – любые комплексные числа, то верны следующие равенства:

1) $z_1+z_2=z_2+z_1$ – коммутативный закон для сложения;

2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ – ассоциативный закон для сложения;

3) $z_1z_2=z_2z_1$ – коммутативный закон для умножения;

4) $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ – ассоциативный закон для умножения;

5) $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$ – дистрибутивный закон;

Число z^{-1}, обратное данному числу $z=a+bi$, можно найти по формуле:

$$z^{-1}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$$

Натуральные степени мнимой единицы i принимают лишь четыре значения: i, -1, $-i$ и 1, определяемые формулами: $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$, где $k=0,1,2,...$

При возведении комплексного числа $z=a+bi$ в натуральную степень n пользуются формулой бинома Ньютона: $(a+bi)^n=a^n+na^{n-1}(bi)+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}(bi)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}(bi)^3+...+(bi)^n$. В правой части этого равенства заменяют степени мнимой единицы по соответствующим формулам и приводят подобные члены, в результате получают некоторое комплексное число $c+di$.

Пример 5. Возвести в указанные степени данные комплексные числа: $(3+4i)^2$, $(1+2i)^3$, $(2+i)^4$.

$(3+4i)^2=3^2+2\cdot 12i+(4i)^2=9+24i-16=-7+24i$.

$(1+2i)^3=1^3+3\cdot 1\cdot 2i+3\cdot 1\cdot(2i)^2+(2i)^3=1+6i-12-8i=-11-2i$.

$(2+i)^4=2^4+4\cdot 2^3\cdot i+6\cdot 2^2\cdot i^2+4\cdot 2\cdot i^3+i^4=16+32i-24-8i+1=-7+24i$.

Квадратным корнем из комплексного числа называют комплексное число, квадрат которого равен данному комплексному числу: $\sqrt{a+bi}=u+vi$, если $(u+vi)^2=a+bi$.

Числа u и v определяются из равенств: $u^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, $v^2=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, причем u и v будут действительными, так как при любых a и b выражения $a+\sqrt{a^2+b^2}$ и $-a+\sqrt{a^2+b^2}$ являются положительными. Знаки u и v выбирают так, чтобы выполнялось равенство $2uv=b$.

Извлечение квадратного корня из комплексного числа всегда возможно и лает два значения, различающиеся лишь знаком.

Пример 6. Извлечь квадратный корень из числа $z = 9 + 40i$.

Обозначим $\sqrt{9+40i} = u + vi$. Так как в этом случае $a = 9$, $b = 40$, то получим:

$$u^2 = \frac{9+\sqrt{81+1600}}{2} = \frac{9+41}{2} = 25,\ v^2 = \frac{-9+41}{2} = 16.$$

Так как $uv = 20$, то $u_1 = -5$, $v_1 = -4$, $u_2 = 5$, $v_2 = 4$. Получаем два значения корня: $-5-4i$ и $5+4i$.

2.3 Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Пусть дано комплексное число $z = a + bi$.

Любое комплексное число $z = a + bi$ вполне определяется упорядоченной парой действительных чисел a и b.

Упорядоченная пара действительных чисел задает на плоскости в прямоугольной системе координат вполне определенную точку с координатами a и b, где a – абсцисса, b – ордината точки. Поэтому можно сказать, что геометрически комплексное число есть некоторая точка на плоскости.

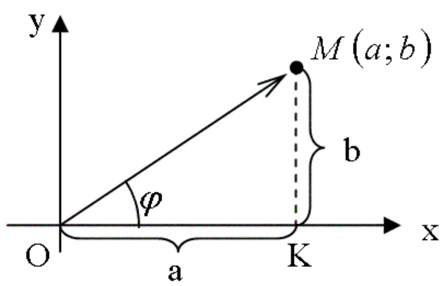
Положение любой точки на плоскости определяется заданием ее радиус-вектора, т.е. вектора, идущего из начала координат в данную точку.

Поэтому можно сказать, что любому комплексному числу $z = z + bi$ на плоскости соответствует вполне определенный радиус-вектор.

Пример 7. $z_1 = 2-3i;\ z_2 = 5i;\ z_3 = -4;\ z_4 = -3-4i;\ z_5 = -2i$

$z_1(2;-3);\quad z_2(0;5);\ z_3(-4;0)\ z_4(-3;-4);\ z_5(0;-2)$

2.4 Тригонометрическая форма комплексных чисел



Пусть дано комплексное число $z = a + bi$. Положение точки $M(a;b)$ на плоскости вполне определяется не только заданием ее декартовых координат a и b, но и заданием ее полярных координат r и φ, где r – длина радиус-вектора этой тачки, а φ – угол между положительным направлением оси OX и радиус вектором этой точки.

$$OMK:\ r = \sqrt{a^2+b^2},\ \angle K = 90^\circ,\ r \ge 0.$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r};\ \sin\varphi = \frac{b}{r}\ \Rightarrow a = r\cos\varphi;\ b = r\sin\varphi\ \Rightarrow$$

$$z = a + bi = r\cos\varphi + i\cdot r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ – тригонометрическая форма комплексного числа.

r – модуль комплексного числа $z = a + bi$.

Модулем комплексного числа z называют длину радиус-вектора точки, изображающей комплексное число или расстояние от начала координат до точки, изображающей комплексное число. $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

φ – аргумент комплексного числа $z = a + bi$.

Аргументом комплексного числа называют множество величин углов, образованных положительным направлением OX и радиус-вектором точки, изображающей z. $\varphi = arctg\frac{b}{a}$.

Главным значением аргумента называют значение, принадлежащее промежутку $(-\pi;\pi]$ (но можно использовать и промежуток $[0;\ 2\pi)$).

При отыскании аргумента комплексного числа z нужно учитывать, в какой четверти находится точка, соответствующая данному комплексному числу.

$z = 1 + i \quad a = 1,\ b = 1.\quad r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

φ – угол первой четверти, т.к. $a > 1, b > 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

2. 5 Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Пусть заданы два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ $\quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

1) $\quad z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Пример 8. $3(\cos 36^0 + i\sin 36^0)\cdot 3(\cos 54^0 + i\sin 54^0) = 2\cdot 3\cdot(\cos(36^0 + 54^0) + i\sin(36^0 + 54^0)) =$
$= 6(\cos 90^0 + i\sin 90^0) = 6(0 + i) = 6i$.

2) $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Пример 9. $\dfrac{3(\cos\pi + i\sin\pi)}{5\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)} = 0{,}6\left(\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 0{,}6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) =$

$0{,}6\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -0{,}3 + 0{,}3\sqrt{3}i$

3) $\quad z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

Пример 10. Найти шестую степень числа $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

$z^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\left(-\dfrac{6\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{6\pi}{4}\right)\right) = 2^3\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} - i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right) = 8(0 - i\cdot(-1)) = 8i$.

4) $\quad \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \quad k = 0;1;2;\ldots;(n-1)$

Пример 11. Найти $\sqrt[3]{-1}$.

Решение.

Представим число –1 в тригонометрической форме: $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$.

$z_k = \sqrt[3]{-1} = 1\cdot\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi k}{3}\right)\right),\ k = 0,\ 1,\ 2.$

Получаем последовательно три значения:

$k = 0$: $z_0 = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$k = 1$: $z_1 = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0 = -1$;

$k = 2$: $z_2 = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{4\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ. $\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, -1.