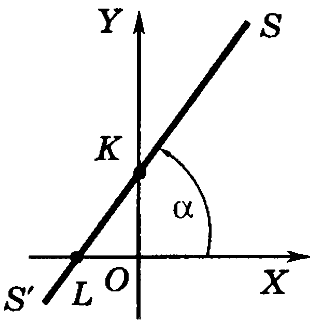
Раздел 4. Прямая на плоскости
4.1 Различные виды уравнения прямой

Каждая прямая на плоскости *Oxy* определяется линейным уравнением первой степени с двумя неизвестными. Обратно: каждое линейное уравнение первого порядка с двумя неизвестными определяет некоторую прямую на плоскости.



1. Всякую прямую, не параллельную оси координат, можно представить уравнением вида $y = kx + b$ (4.1), где k – угловой коэффициент прямой (то есть тангенс угла α, который прямая образует с положительным направлением оси *Ox*, $k = tg\alpha = tg\angle XLS$), b – ордината точки пересечения прямой с осью *Oy*, $b = OK$). Уравнение 4.1 называют ***уравнением прямой с угловым коэффициентом*** или уравнением, разрешенным относительно ординаты.

2. Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ (4.2) называется ***общим уравнением прямой***, где *A*, *B*, *C* – постоянные коэффициенты, причем *A* и *B* одновременно не обращаются в нуль ($A^2 + B^2 \neq 0$).

Вектор $\vec{n}(A;\ B)$ называется нормальным вектором прямой ($\vec{n}$ перпендикулярен прямой).

Частные случаи этого уравнения:

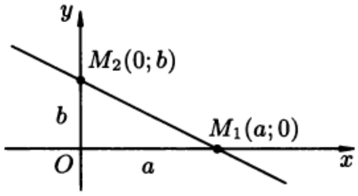
$Ax + By = 0$ ($C = 0$) – прямая проходит через начало координат;

$Ax + C = 0$ ($B = 0$) – прямая параллельна оси *Oy*;

$By + C = 0$ ($A = 0$) – прямая параллельна оси *Ox*;

$Ax = 0$ ($B = C = 0$) – прямая совпадает с осью *Oy*;

$By = 0$ ($A = C = 0$) – прямая совпадает с осью *Ox*.



3. ***Уравнение прямой в отрезках***: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, (4.3), где a и b длины отрезков (с учетом знаков), отсекаемых прямой на осях *Ox* и *Oy* соответственно.

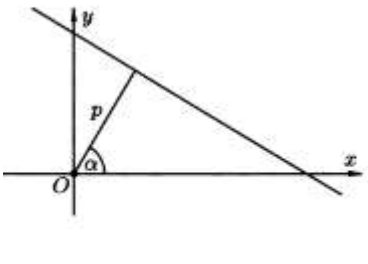
4. ***Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении***: $y - y_0 = k(x - x_0)$ (4.4), где k – угловой коэффициент прямой; $(x_0;\ y_0)$ – координаты данной точки. Уравнение (4.4) называют также ***уравнением пучка прямых*** с центром в точке $(x_0;\ y_0)$. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ имеет вид:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (4.5),$$

где λ – числовой множитель.

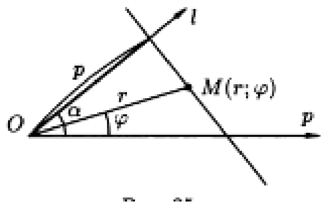
5. ***Уравнение прямой, проходящей через две данные точки*** $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, где $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ имеет вид $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ (4.6). Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки определяется по формуле $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Если $x_1 = x_2$, то уравнение прямой (4.6) имеет вид $x = x_1$; если $y_1 = y_2$, то: $y = y_1$.



6. ***Нормальное уравнение прямой*** имеет вид $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ (4.7), где p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α – угол, который этот перпендикуляр образует с положительным направлением оси *Ox*.

Общее уравнение прямой (4.2) можно преобразовать в нормальное уравнение (4.7) путём умножения на нормирующий множитель $\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$; знак перед дробью берётся противоположный знаку свободного члена С (в общем уравнении прямой).



7. Уравнение прямой в полярных координатах имеет вид $r\cos(\varphi-\alpha)=p$, (4.8), r, φ, α, p – изображены на рисунке (полярная система координат). r – расстояние от начала координат до точки *M*, φ – угол между полярной осью и *OM*, p – расстояние от начала координат до искомой прямой, α – угол между полярной осью и перпендикуляром из точки *O* на прямую.

Пример 4.1. Построить прямую, заданную уравнением $2x-y-4=0$.

1) Для построения прямой достаточно знать координаты двух её произвольных точек. Полагая в уравнении прямой, например, $x=0$, получим $y=-4$. Имеем одну точку $A(0;\ -4)$. Полагая $x=1$, получим $y=-2$. Отсюда вторая точка $B(1;\ -2)$. Осталось построить точки *A* и *B* и провести через них прямую (рис. 26).

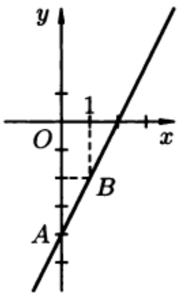


Рис. 26

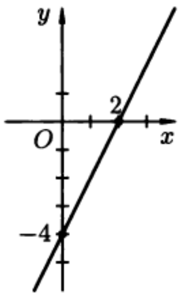


Рис. 27

2) Задачу можно решить иначе, используя уравнение прямой в отрезках. Приведём уравнение к виду (4.3). Для этого перенесём свободный член (-4) в правую часть уравнения и обе его части разделим на 4. Получаем $2x-y=4$, $\frac{2x}{4}-\frac{y}{4}=1$, т.е., $\frac{x}{2}+\frac{y}{-4}=1$ – уравнение прямой в отрезках на осях. На оси *Ox* отложим 2 единицы вправо (от начала координат); на оси *Oy* отложим 4 единицы вниз. Получаем две точки на осях, через которые проводим прямую (рис.27).

Пример 4.2. Уравнение прямой $4x-3y+12=0$ представить в различных видах (с угловым коэффициентом, в отрезках, в виде нормального уравнения).

Для получения уравнения прямой с угловым коэффициентом разрешим заданное уравнение относительно *y*. Получим $3y=4x+12$ и далее $y=\frac{4}{3}x+4$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом; здесь $k=\frac{4}{3}$, $b=4$.

Для получения уравнения прямой в отрезках перенесём свободный член $C=12$ вправо и разделим обе части уравнения на -12. В результате получим $\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1$ – уравнение в отрезках на осях; здесь $a=-3$, $b=4$.

Приведём исходное уравнение к нормальному виду (4.7).

Для этого умножим обе части уравнения $4x-3y+12=0$ на нормирующий множитель $\lambda=\frac{1}{-\sqrt{4^2+(-3)^2}}$, т.е. $\lambda=-\frac{1}{5}$. Перед корнем взят знак «минус», т.к.свободный член ($C=12$) имеет знак «плюс». Получим $-\frac{1}{5}(4x-3y+12)=0$, т.е. $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{12}{5}=0$; здесь $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ($\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=1$), $p=\frac{12}{5}$, т.е. расстояние от $O(0;\ 0)$ до прямой равно 2,4.

Пример 4.3. Написать уравнение прямой, проходящей через точки: а) $A(0;\ 2)$, $B(-3;\ 7)$; б) $A(2;\ 1)$, $B(4;\ 1)$.

Решение: а) Используем уравнение (4.6). Полагая в нём $x_1=0$, $y_1=2$, $x_2=-3$, $y_2=7$, получим $\frac{y-2}{7-2}=\frac{x-0}{-3-0}$, или $\frac{y-2}{5}=\frac{x}{-3}$, т.е. $-3y+6=5x$ или $5x+3y-6=0$.

б) Решаем аналогично: $\frac{y-1}{1-1}=\frac{x-2}{4-2}$. Так как $y_1=y_2$, заключаем, что $y-1=0$, $y=1$ есть уравнение прямой, проходящей через точки *A* и *B*.

Пример 4.4. Из пучка прямых определяемых уравнением $y+3=k(x-2)$ выделить ту, которая проходит через точку $A(-2;\ 5)$.

Подставим координаты точки *A* в уравнение прямой: $5+3=k(-2-2)$, получим $k=8:(-4)=-2$. Следовательно, искомое уравнение прямой есть $y+3=-2(x-2)$, т.е. $2x+y-1=0$.

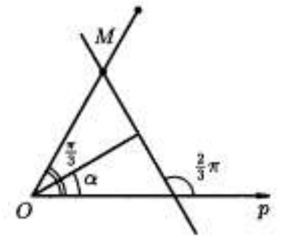


Рис. 29

Пример 4.5. Составить уравнение прямой в полярных координатах, если известно, что она проходит через точку $M\left(2;\ \frac{\pi}{3}\right)$ и наклонена к полярной оси под углом $\frac{2\pi}{3}$.

Решение: воспользуемся уравнением (4.8). Опустим из точки *O* перпендикуляр на прямую (см. рис. 29), очевидно, что $\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$. Тогда длин перпендикуляра p находим из прямоугольного треугольника: $p=OM\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$, т.е. $p=\sqrt{3}$.

Следовательно, уравнение искомой прямой есть $r\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$.

4.2 Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, расстояние от данной точки до данной прямой

Под углом между прямыми в плоскости понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованными этими прямыми.

Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, то угол φ между ними вычисляется по формуле: $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ (4.9).

Условие параллельности прямых l_1 и l_2 имеет вид $k_1=k_2$ (4.10), а условие их перпендикулярности $k_1=-\frac{1}{k_2}$ (4.11) (или $k_1k_2=-1$).

Если прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$,то величина φ угла между ними вычисляется по формуле: $tg\varphi=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|$ (4.12). Условие их параллельности $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ (или $A_1B_2-A_2B_1=0$ (4.13). Условие их перпендикулярности $A_1A_2+B_2B_1=0$ (4.14).

Для нахождения общих точек прямых l_1 и l_2 необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2=0,\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}y=k_1x+b_1,\\ y=k_2x+b_2.\end{cases} \quad (4.15)$$

При этом:

Если $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$, то имеется единственная точка пересечения прямых.

Если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ – прямые l_1 и l_2 не имеют общей точки, т.е. параллельны.

Если $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ – прямые имеют бесконечное множество общих точек, т.е. совпадают.

Расстоянием d от точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Расстояние d определяется по формуле: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (4.16)

Расстояние от точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямой $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ вычисляется по формуле $d=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|$ (4.17).

Пример 4.6. Найти угол между прямыми: 1) $y=2x-3$ и $y=\dfrac{1}{2}x+5$; 2) $2x-3y+10=0$ и $5x-y+4=0$; 3) $y=\dfrac{3}{4}x-2$ и $8x+6y+5=0$; 4) $y=5x+1$ и $y=5x-2$.

Решение:

1) Воспользуемся формулой (4.9). Подставляя в неё значения $k_1=2$ и $k_2=\dfrac{1}{2}$, находим

$$tg\varphi=\left|\frac{\frac{1}{2}-2}{1+2\cdot\frac{1}{2}}\right|=\left|\frac{-\frac{3}{2}}{2}\right|=\frac{3}{4},\ \varphi=arctg\frac{3}{4}\ (\varphi\approx 37^0).$$

2) Подставим значения $A_1=2$, $B_1=-3$, $A_2=5$, $B_2=-1$ в формулу (4.12):
$$tg\varphi=\left|\frac{2\cdot(-1)-5\cdot(-3)}{2\cdot 5+(-3)\cdot(-1)}\right|=\left|\frac{-2+15}{10+3}\right|=1,\ \varphi=\frac{\pi}{4};$$

3) Здесь $k_1=\dfrac{3}{4}$, найдём k_2. Для этого перейдём от $6y=-8x-5$ к эквивалентному равенству $y=-\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{6}$. Здесь $k_2=-\dfrac{4}{3}$. Так как $k_1k_2=-1$,то данные прямые (см.(4.11)) перпендикулярны.

По формуле (4.9) получаем $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

4) $k_1=5$, $k_2=5$, следовательно, прямые параллельны (см. (4.10)) и $\varphi=0$.

Пример 4.7. Через точку пересечения прямых $3x-2y+5=0$, $x+2y-9=0$ проведена прямая, параллельная прямой $2x+y+6=0$. Составить её уравнение.

Решение: найдём сначала точку M пересечения данных прямых. Для этого решим систему уравнений: $\begin{cases}3x-2y+5=0,\\ x+2y-9=0.\end{cases}$

Отсюда $4x=4$. И далее, $x=1$, $y=4$, т.е. $M(1;\ 4)$. Угловой коэффициент прямой $2x+y+6=0$ есть $k=-2$. Следовательно, угловой коэффициент k прямой параллельной данной, есть $k=-2$ (см. (4.10)). По направлению прямой ($k=-2$) и точке $M(1;\ 4)$, ей принадлежащей, запишем уравнение искомой прямой: $y-4=-2(x-1)$, т.е. $2x+y-6=0$.

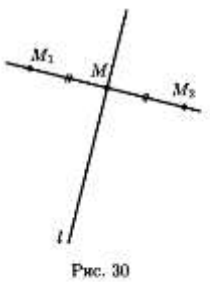


Рис. 30

Пример 4.8. Найти координаты точки M_2, симметричной точке $M_1(-3;\ 4)$ относительно прямой $4x-y-1=0$.

Решение: точки M_1 и M_2 лежат на прямой M_1M_2, перпендикулярной прямой $4x-y-1=0$, и одинаково удалены от этой прямой (см. рис. 30). Найдём уравнение прямой M_1M_2. Так как угловой коэффициент k_1 данной прямой равен 4, то угловой коэффициент k прямой M_1M_2 определяется равенствами

$k=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{4}$. Поэтому уравнение прямой M_1M_2 есть $y-4=-\frac{1}{4}(x+3)$, т.е. $x+4y-13=0$. Найдём координаты точки M – точка пересечения прямой M_1M_2 и данной прямой: $\begin{cases} x+4y-13=0, \\ 4x-y-1=0. \end{cases}$

Отсюда $x=1$, $y=3$, т.е. $M(1;\ 3)$. Точка $M(1;\ 3)$ делит отрезок M_1M_2 пополам. Из соотношений $1=\frac{-3+x}{2}$ и $3=\frac{4+y}{2}$ находим координаты x и y искомой точки M_2: $x=5$, $y=2$ и $M_2(5;\ 2)$.

Пример 4.9. Написать уравнение прямой l_2, проходящей через точку $A(0;\ 2)$ под углом $\frac{\pi}{4}$ к прямой $l_1: x-2y+3=0$.

Решение: угловой коэффициент прямой l_1 равен $\frac{1}{2}$, т.е. $k_1=\frac{1}{2}$. Обозначим через k угловой коэффициент прямой l_2. Тогда по формуле (4.9) имеем $tg\frac{\pi}{4}=1=\frac{k-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}k}$. Из этого уравнения находим $k_2=3$ и $k_3=-\frac{1}{3}$. Задача имеет два решения. Для каждого случая напишем уравнения прямой, проходящей через точку A в заданном уравнении: $y-2=3(x-0)$ и $y-2=-\frac{1}{3}(x-0)$, т.е. $3x-y+2=0$ и $x+3y-6=0$.

Пример 4.10. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x+4y-20=0$ и $6x+8y+5=0$.

Решение: Возьмём на первой прямой произвольную точку A. Пусть, например, $x=0$, тогда $y=5$, т.е. $A(0;\ 5)$. По формуле (4.16) находим расстояние d от точки A до второй прямой: $d=\frac{|6\cdot 0+8\cdot 5+5|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{45}{10}=4{,}5$.

Вопросы для контроля

1. Понятие уравнения прямой на плоскости.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и его компоненты.
3. Общее уравнение прямой и его виды.
4. Уравнение прямой в отрезках.
5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении и его компоненты.
6. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
7. Нормальное уравнение прямой и его компоненты.
8. Угол между двумя прямыми.
9. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
10. Расстояние от точки до прямой.