Раздел 6. Плоскость в пространстве

Каждая плоскость в пространстве Oxyz определяется линейным алгебраическим уравнением первой степени с тремя неизвестными. И наоборот: каждое линейное уравнение первого порядка с тремя неизвестными определяет некоторую плоскость в пространстве.

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку $Mo(x_o; y_o; z_o)$ перпендикулярно вектору n=(A; B; C):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C\{z - z_0) = 0. \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) называют также уравнением пучка (связки) плоскостей. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую, образованную пересечением плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + + C_2z + D_2 — 0$ имеет вид

$$A_гx + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (2.2)$$

2. Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = O \ (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0). \quad (2.3)$$

Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется нормальным вектором этой плоскости. В частности, вектор n=(A; B; C) — нормальный вектор плоскости, заданной уравнением (2.3) Частные случаи уравнения (2.3):

$Ax + By + Cz = 0$ $(D = 0)$ — плоскость проходит через начало координат;

$Ax + By + D = 0$ $(C = 0)$ — плоскость параллельна оси Oz (аналогичный смысл имеют уравнения $Ax + Cz + B = 0$, $By + Cz + D = 0$);

$Ax + By = 0$ $\{D = C = 0)$ — плоскость проходит через ось Oz ($Ax + Cz + D = 0$, $By + Cz + D = 0$ — через ось Oy и Ox соответственно);

$Ax + D = 0(B = C = 0)$ — плоскость параллельна плоскости Oyz ($Cz + D = 0$, $By + D = 0$ — параллельно плоскости Oxy и Oxz соответственно) ;

$Ax = 0$, т. е. $x = 0$ $(B = C = D = 0)$ — плоскость совпадает с плоскостью Oyz ($y = 0$, $г = 0$ — уравнения плоскостей Oxz и Oxy соответственно) .

3. Уравнение плоскости в отрезках:

где a, b, c — абсцисса, оридината и аппликата точек пересечения плоскостью координатных осей Ox, Oy и Oz соответственно.

4. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) в векторной форме имеет вид

$$(\bar{r} - \bar{r}_1) \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \cdot (\bar{r}_3 - \bar{r}_1) = 0, \quad (2.6)$$

где r, r_1, r_2, r_3 — радиус-векторы точек $M(x;y;z)$, M_1, M_2 и M_3 соответственно.

5. Нормальное уравнение плоскости:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0, \quad (2.7)$$

где p — длина перпендикуляра OK, опущенного из начала координат на плоскость; α, β, γ — углы, образованные единичным вектором e, имеющего направление перпендикуляра OK (рис. 51), с осями Ox, Oy и Oz ($\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \lambda=1$).

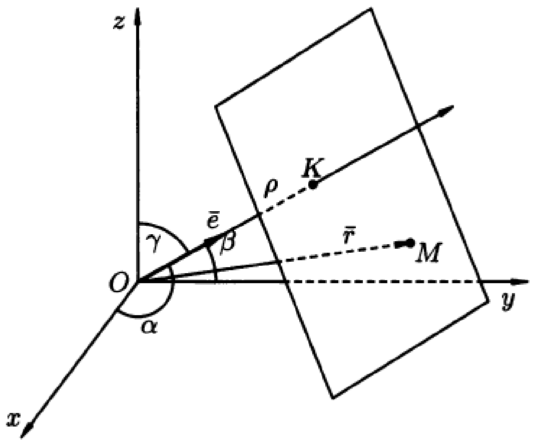

Рис. 51

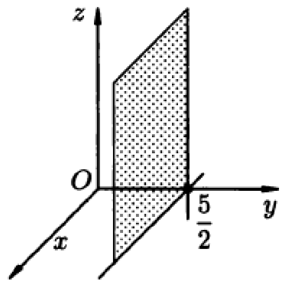

Рис. 52

Уравнение (2.7) в векторной форме имеет вид

$$\bar{r} \cdot \bar{e} - p = 0. \tag{2.8}$$

Общее уравнение плоскости (2.3) приводится к нормальному виду (2.7) путем умножения на нормирующий множитель

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,; \tag{2.9}$$

знак перед дробью берется противоположным знаку свободного члена D (в общем уравнении плоскости).

Пример 1: Построить плоскости, заданные уравнениями:

1) 2y - 5 = 0;

2) x + г - 1 = 0; 3) 3x + by + 6z - 12 = 0.

Решение:

1) Плоскость 2y - 5 = 0 параллельна плоскости Oxz (см. (2.3), частные случаи); она отсекает на оси Oy отрезок, равный ^ и имеет вид, изображенный на рисунке 52.

2) Плоскость x + z - 1 = 0 параллельна оси Oy (см (2.3)); она пересекает плоскость Oxz по прямой x + z = 1, отсекая на осях Ox и Oz отрезки, равные 1 (рис. 53).

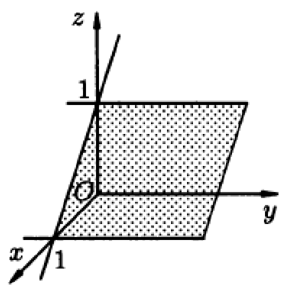

Рис. 53

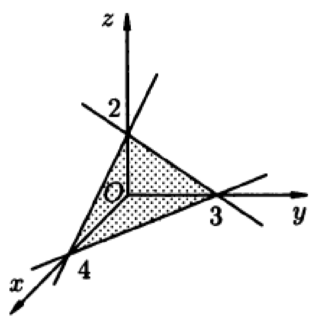

Рис. 54

3) Общее уравнение плоскости 3x + 4y + 6z — 12 = 0 перепишем в виде (2.4): 3x + 4y + 6z = 12, т.е. x4 + y3 + z2= 1. Эта плоскость отсекает на осях Ox, Oy, Oz отрезки, равные 4, 3, 2 соответственно (рис. 54).

Пример 2: Уравнение плоскости 2x — 6y + 3z —14 = 0 привести к нормальному виду.

Решение:

Умножим обе части уравнения на нормирующий множитель (2.9):

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2}}, \quad \text{т. е.} \quad \lambda = \frac{1}{7}.$$

Перед корнем взят знак «плюс», т.к. свободный член $C = -14$ заданного уравнения отрицателен. Имеем:

$$\frac{1}{7}(2x - 6y + 3z - 14) = 0 \cdot \frac{1}{7}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z - 2 = 0.$$

Здесь $p = 2$, т. е. расстояние от точки $O(0;0;0)$ до плоскости равно 2;

$$\cos\alpha = \frac{2}{7}, \quad \cos\beta = -\frac{6}{7}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{7}$$

$$\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{49} + \frac{36}{49} + \frac{9}{49} = 1\right).$$

Пример 3: Написать уравнение плоскости:

1) параллельной оси Oz и проходящей через точки M_1 (3; —1; 2) иM_2(-1;2;5);

2) проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору M_1M_2-

Решение:

1) Уравнение плоскости, параллельной оси Oz, имеет вид Ax + By + D = 0 (см (2.3), частные случаи). Так как плоскость проходит через точки M_1 и M_2, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению плоскости. Подставим их в уравнение Ax + By + D = 0. Получаем два уравнения

$$\begin{cases} 3A - B + D = 0, \\ -A + 2B + D = 0 \end{cases}$$

с тремя неизвестными A, B, D. Выразим неизвестные коэффициенты A и B через D: умножив первое уравнение на 2 и сложив почленно уравнения, находим 5A + 3D = 0, т. е. A = -35 B; тогда B = 3 (-35 D)+ D т.е. B = (-45 D) Подставляя найденные значения A и B в уравнение Ax + By + D = 0, получаем -35 Dx+ (-45 D)y +D = 0. После сокращения на (-15 D) уравнение искомой плоскости приобретает вид 3x + 4y — 5 = 0.

2) Используем уравнение (2.3) плоскости. Вектор M_1M_2 имеет координаты M_1M_2 = (—1 — 3; 2 — (—1); 5 — 2) или M_1M_2 = (—4;3;3). Так как искомая плоскость перпендикулярна вектору M_1M_2, он является ее нормалью и, следовательно, значения параметров A, B, и C в (2.3) равны —4, 3 и 3 соответственно. Уравнение плоскости, таким образом, имеет вид

—4x + 3y + 3z + D = 0.

Точка M_1(3; —1; 2) по условию задачи лежит в плоскости. Следовательно, подстановкой координат точки M\ в уравнение плоскости получим тождество:

-4·3 + 3·(-1)+ 3·2 + D = 0.

Отсюда находим, что D = 9. Уравнение искомой плоскости:

—4x + 3y + 3z + 9 = 0

Пример 4: Составить уравнение плоскости, проходящей через точку Mo(2;3; —4) и параллельной векторам a = (—3; 2; —1) и Ь = = (0;3;1).
Решение:
Воспользуемся уравнением (2.1) плоскости. Имеем A(x - 2) + B (y - 3) + C(z + 4) = 0.

Найдем A, B и C. Так как плоскость параллельна векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то в качестве ее нормального вектора $\bar{n} = (A; B; C)$ можно взять вектор $\bar{n} \doteq \bar{a} \times \bar{b}$. Находим вектор $\bar{n}$ по формуле $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$:

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 9\bar{k} + 3\bar{i} + 3\bar{j} = 5\bar{i} + 3\bar{j} - 9\bar{k};$$

значит, $A = 5$, $B = 3$, $C = -9$. Искомое уравнение плоскости есть $5(x-2) + 3(y-3) - 9(z+4) = 0$, т. е. $5x + 3y - 9z - 55 = 0$.

Замечание. Приведем второе решение задачи. Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка искомой плоскости. Составим вектор $\overline{M_0M} = (x-2; y-3; z+4)$. Так как векторы $\overline{M_0M}$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ компланарны, то их смешанное произведение равно нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+4 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем $5x + 3y - 9z - 55 = 0$.

Пример 5: Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1(l;0;-1), M_2(2;2;3), M_3(0;-3;1).
Решение:
Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют в пространстве единственную плоскость. Ее уравнение будем искать в виде (2.3). Так как точки M_1, M_2 и Mз лежат в одной плоскости, векторы M_1M_2 и M_1M_3 также лежат в ней (см. рис. 55)

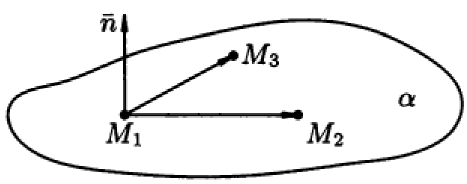

Рис. 55

Векторное произведение векторов M_1M_2 и M_1M_3 перпендикулярно плоскости а, в которой они лежат. Следовательно, в качестве нормали n к плоскости а можно взять вектор
n = M_1M_2 x M_1M_3. Находим координаты векторов M_1M_2, M_1M_3 и n:

$$\overline{M_1M}_2 = (2-1; 2-0; 3-(-1)) = (1;2;4);$$
$$\overline{M_1M}_3 = (0-1; -3-0; 1-(-1)) = (-1;-3;2);$$
$$\bar{n} = \overline{M_1M}_2 \times \overline{M_1M}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$\bar{i}(4-(-3)\cdot 4) - \bar{j}(1\cdot 2-(-1)\cdot 4) + \bar{k}(1\cdot(-3)-2\cdot(-1)) =$$
$$16\bar{i} - 6\bar{j} - \bar{k}; \quad \bar{n} = (16;-6;-1).$$

Таким образом, параметры A, B и C плоскости, заданной уравнением (2.3) равны 16, —6 и —1 соответственно. Уравнение искомой плоскости, следовательно, имеет вид

$$16x - 6y - z + D = 0.$$

Точка M_1(l;0;— 1) по условию лежит в плоскости. Следовательно, подстановка координат точки M_1 в уравнение плоскости обратит его в тождество. Имеем:

16-1-6-0-(-1) + £> = 0.

Откуда находим, что D = —17. Уравнение плоскости, проходящей через заданные точки M_1, M_2 и Mз, имеет вид 16x—6y—z — 17 = 0.

Замечание. Приведенное решение задачи по сути является обоснованием формулы (2.5).

Угол между двумя плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей; расстояние от данной точки до данной плоскости

Углом между плоскостями в пространстве называется угол между нормальными векторами этих плоскостей. Если две плоскости Q_1 и Q_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2X + B_2y + C_2Z + D_2 = 0$, то величина угла φ между ними вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (2.10)$$

Величина наименьшего из двух смежных углов, образованных этими плоскостями, находится по формуле:

$$\cos\varphi = \left|\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\right|. \qquad (2.11)$$

Условие параллельности двух плоскостей Q_1 и Q_2 имеет вид:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \qquad (2.12)$$

условие перпендикулярности:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \qquad (2.13)$$

плоскости совпадают, когда:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \qquad (2.14)$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости Ax + By + Cz + D = O находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (2.15)$$

Если плоскость задана уравнением xcosα + ycosβ+ z cosγ — p = 0, то расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости может быть найдено по формуле:

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|. \qquad (2.16)$$

Пример 6: Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М(1; —3; —2) параллельно плоскости 3x — 2y + 4z — 3 = 0.

Решение:

Ищем уравнение плоскости в виде Ax + By + Cz + D = 0 (это вид 2.3). Две параллельные плоскости имеют общую нормаль. Координаты нормали заданной плоскости n = (3; —2; 4). Следовательно, уравнение искомой плоскости имеет вид 3x - 2y + 4z + D = 0.

Точка М(1; —3; —2) по условию лежит в искомой плоскости. Следовательно, подстановкой координат М в уравнение плоскости получим тождество: 3 • (1) — 2 • (—3) + 4 • (—2) + D = 0. Отсюда находим, что D = — 1. Уравнение искомой плоскости имеет вид 3x — 2y + 4z — 1 = 0.

Пример 7: Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости x — 2y + 2z + 5 = 0 и удаленной от точки М(3; 4; —2) на расстояние d = 5.

Решение:

Уравнение искомой плоскости ищем в виде x — 2y + 2z + D = 0. Найдем значение D. Так как точка М удалена от искомой плоскости на расстояние d = 5, то по формуле (2.15) записываем

$$5 = \frac{|3 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + D|}{\sqrt{1+4+4}} \qquad \text{или} \qquad 5 = \frac{|D-9|}{3},$$

т.е. 15 = ±(D — 9), откуда D = 24 и D = —6. Условию задачи удовлетворяют две плоскости x — 2y + 2z + 24 = 0 и x - 2y + 2z - 6 = 0

Пример 8: Составить уравнение плоскости, проходящей через точки Mi (—1; 3; 0) и Mг(2; 4; —1), перпендикулярно плоскости x - 2y + 3z - 10 = 0.

Решение:

Ищем уравнение плоскости в виде Ax + By + Cz + D = 0. Точки M_1 и M_2 лежат в искомой плоскости, следовательно, вектор M_1M_2 также лежит в ней. Его координаты: M_1M_2 = (2 — (—1); 4 — 3; —1 — 0) = (3; 1; —1).

Так как заданная и искомая плоскости перпендикулярны, вектор-нормаль заданной плоскости лежит в искомой. Координаты вектора-нормали заданной плоскости: n = (1; — 2; 3).

Нормаль n_1 к искомой плоскости находим как векторное произведение лежащих в ней неколлинеарных векторов:

$$\bar{n}_1 = \overline{M_1M} \times \bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}(3-2) - \bar{j}(9+1) + \bar{k}(-6-1);$$

n_1= (1; —10; — 7). Уравнение искомой плоскости имеет вид x — 10y — 7z + D = 0. Подставляя координаты точки M_1 = (—1; 3; 0) (или M_2), лежащей в плоскости, в это уравнение, находим, что D = 31. Уравнение искомой плоскости имеет вид x - 10y - 7z + 31 = 0.

Прямая в пространстве. Различные виды уравнения прямой в пространстве

1. Канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку $(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору a = (m,n,p), имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ ; \qquad (3.1)$$

Всякий ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется направляющим вектором этой прямой. В частности, вектор a — (m,n,p) — направляющий для прямой, заданной уравнениями (3.1). Обращение в нуль одного из знаменателей уравнения (3.1) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases} \qquad (3.2)$$

2. Параметрические уравнения прямой:

где t — переменный параметр, t € R. В векторной форме уравнение (3.2) имеет вид:

$$\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{s}t, \qquad (3.3)$$

где $r_0=(x_0;y_0;z_0)$, s = (m;n;p).

3. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ м $M_2(x_2;y_2;z_2)$, где $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3.4)$$

4. Общее уравнение прямой:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (3.5)$$

(коэффициенты при переменных не пропорциональны). Направляющий вектор прямой (3.5) находится по формуле

$$\bar{s}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2 \qquad \text{или} \qquad \bar{s}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad (3.6)$$

т. е.

$$\bar{s}=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right).$$

Пример 9: Общее уравнение прямой

$$\begin{cases} x+2y-3z+2=0, \\ 2x-2y+z-5=0 \end{cases}$$

преобразовать к каноническому виду и определить величины углов, образованные этой прямой с координатными осями.

Решение:
Для решения этой задачи надо знать какую-либо точку прямой и ее направляющий вектор s. Выберем точку на прямой следующим образом: положим, например, z = 0; тогда для определения абсциссы x и ординаты y у этой точки получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 2 = 0, \\ 2x - 2y - 5 = 0, \end{cases}$$

из которой находим $x = 1$, $y = -\frac{3}{2}$. Итак, на прямой известна точка $\left(1; -\frac{3}{2}; 0\right)$. Направляющий вектор прямой находим по формуле (3.6):

$$\bar{s} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right) \quad \text{т. е.} \quad \bar{s} = (-4; -7; -6).$$

Тогда, согласно формуле (3.1),

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{-7} = \frac{z-0}{-6} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{7} = \frac{z}{6}$$

— искомое уравнение прямой.

Пример 10: Составить параметрические уравнения прямых, проведенных через точку $M_0(2; —1; —3)$ в каждом из следующих случаев:

1) прямая параллельна прямой $\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 2 - 4t, \\ z = t; \end{cases}$

2) прямая параллельна оси 0y
3) прямая перпендикулярна плоскости 3x + y — z - 8 = 0.

Решение:
1) Так как прямые параллельны, то они имеют один и тот же направляющий вектор s = (2; —4; 1). Согласно формулам (3.2) имеем искомое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -1 - 4t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$$

2) В качестве направляющего вектора оси Oy можно взять вектор s = (0; 1; 0), совпадающий с ортом j. Искомое уравнение прямой есть

$$x = 2 + 0 \cdot t\,, \qquad y = -1 + 1 \cdot t\,, \qquad z = -3 + 0 \cdot t\,,$$

$$\text{т. е.} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -1 + t, \\ z = -3. \end{cases}$$

3) Вектор n = (3;1;—1) перпендикулярен плоскости 3x + y – z – 8 = 0. Следовательно, в качестве вектора s можно взять вектор n, т.е. s = (3; 1; —1). Тогда параметрические уравнения прямой, перпендикулярной плоскости 3x + y — z — 8 = 0, примут вид

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -3 - t. \end{cases}$$