Раздел 7. Функции нескольких переменных

1. Понятие функции двух и более переменных

Многие явления, происходящие в природе, экономике, общественной жизни нельзя описать с помощью функции одной переменной. Например, рентабельность предприятия зависит от прибыли, основных и оборотных фондов. Для изучения такого рода зависимостей и вводится понятие функции нескольких переменных.

В данном разделе рассматриваются функции двух переменных, так как все основные понятия и теоремы, сформулированные для функций двух переменных, легко обобщаются на случай большего числа переменных.

Пусть $\{M\}$ – множество упорядоченных пар действительных чисел (x, y).

Определение 1. Если каждой упорядоченной паре чисел $(x, y) \in \{M\}$ по некоторому закону f поставлено в соответствие единственное действительное число z, то говорят, что задана ***функция двух переменных*** $z = f(x, y)$ или $z = z(x, y)$. Числа x, y называются при этом независимыми переменными или аргументами функции, а число z – зависимой переменной.

Например, формула $V = \pi R^2 h$, выражающая объем цилиндра, является функцией двух переменных: R – радиуса основания и h – высоты.

Пару чисел (x, y) иногда называют точкой $M(x, y)$, а функцию двух переменных – функцией точки $f(M)$.

Значение функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ обозначают $z_0 = f(x_0, y_0)$ или $z_0 = f(M_0)$ и называют частным значением функции двух переменных.

Совокупность всех точек $M(x, y)$, в которых определена функция $z = f(x, y)$, называется областью определения этой функции. Для функции двух переменных область определения представляет собой всю координатную плоскость или ее часть, ограниченную одной или несколькими линиями.

Например, область определения функции $z = x^2 + y^2$ – вся плоскость, а функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ – единичный круг с центром в начале координат ($1 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$).

2. Предел и непрерывность функции двух переменных

Понятия предела и непрерывности функции двух переменных аналогичны случаю одной переменной.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка плоскости. δ – окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ называется множество всех точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. Другими словами, δ – окрестность точки M_0 – это все внутренние точки круга с центром в точке M_0 и радиусом δ.

Определение 2. Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$ (или в точке $M_0(x_0, y_0)$), если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (зависящее от ε) такое, что для всех $x \neq x_0$, $y \neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon$.

Обозначается предел следующим образом: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$ или $\lim\limits_{M \to M_0} f(x, y) = A$.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$.

Решение. Введем обозначение $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, откуда $r^2 = x^2 + y^2$. При $x \to 0,\ y \to 0$ имеем, что $r \to 0$. Тогда

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)} = \lim_{r \to 0} \frac{r}{\ln(1 - r^2)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{r \to 0} \frac{r'}{(\ln(1 - r^2))'} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{1}{\left(1 \Big/ 1 - r^2 \right) \cdot (-2r)} = \infty .$$

Определение 3. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если: 1) $f(x, y)$ определена в точке $M_0(x_0, y_0)$ и ее окрестности; 2) имеет конечный предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$; 3) этот предел равен значению функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, т.е. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в некоторой области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Точки, в которых условие непрерывности не выполняется, называются точками разрыва этой функции. В некоторых функциях точки разрыва образуют целые линии разрыва. Например, функция $z = \dfrac{3}{xy}$ имеет две линии разрыва: ось Ox ($y = 0$) и ось Oy ($x = 0$).

Пример 2. Найти точки разрыва функции $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 9}$.

Решение. Данная функция не определена в тех точках, в которых знаменатель обращается в нуль, т. е. в точках, где $x^2 + y^2 - 9 = 0$ или $x^2 + y^2 = 9$. Это окружность с центром в начале координат и радиусом $r = 3$. Значит, линией разрыва исходной функции будет окружность $x^2 + y^2 = 9$.

3. Частные производные первого порядка. Полный дифференциал

Пусть задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx, а аргумент y оставим неизменным. Тогда функция z получит приращение $f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$, которое называется частным приращением z по переменной x и обозначается $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично, фиксируя аргумент x и придавая аргументу y приращение Δy, получим частное приращение функции z по переменной y:

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Величина $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ называется *полным приращением* функции z в точке $M(x, y)$.

Определение 4. Частной производной функции двух переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю (если этот предел существует). Обозначается частная производная так: $z'_x,\ z'_y$ или $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, или $f'_x(x, y),\ f'_y(x, y)$.

Таким образом, по определению имеем:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$
$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Частные производные функции $z = f(x, y)$ вычисляются по тем же правилам и формулам, что и функция одной переменной, при этом учитывается, что при дифференцировании по переменной x, переменная y считается постоянной, а при дифференцировании по переменной y постоянной считается переменная x.

Пример 3. Найти частные производные функций: а) $z = x^3 - 5x^2 y + 3xy^2 - y^3$; б) $z = \dfrac{x}{y} + e^{x-2y}$.

Решение. а) Чтобы найти z'_x считаем y постоянной величиной и дифференцируем z как функцию одной переменной x:

$$z'_x=(x^3-5x^2y+3xy^2-y^3)'_x=(x^3)'_x-(5x^2y)'_x+(3xy^2)'_x-(y^3)'_x=$$
$$=3x^2-5\cdot 2x\cdot y+3\cdot 1\cdot y^2-0=3x^2-10xy+3y^2.$$

Аналогично, считая x постоянной величиной, находим z'_y:

$$z'_y=(x^3)'_y-(5x^2y)'_y+(3xy^2)'_y-(y^3)'_y=0-5x^2\cdot 1+3x\cdot 2y-3y^2=$$
$$=-5x^2+6xy-3y^2.$$

б) $z'_x=\left(\dfrac{x}{y}\right)'_x+\left(e^{x-2y}\right)'_x=\dfrac{1}{y}\cdot x'_x+e^{x-2y}\cdot(x-2y)'_x=\dfrac{1}{y}+e^{x-2y}$;

$$z'_y=\left(\frac{x}{y}\right)'_y+(e^{x-2y})'_y=x\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'_y+e^{x-2y}\cdot(x-2y)'_y=x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)+e^{x-2y}\cdot(-2)=$$
$$=-\frac{x}{y^2}-2e^{x-2y}.$$

Определение 5. Полным дифференциалом функции $z=f(x,y)$ называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных, т.е.

$$dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y.$$

Учитывая, что дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т.е. $dx=\Delta x,\ dy=\Delta y$, формулу полного дифференциала можно записать в виде

$$dz=z'_x dx+z'_y dy \text{ или } dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Пример 4. Найти полный дифференциал функции $z=\ln(x^2+y^2)$.

Решение. Так как $z'_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $z'_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$, то по формуле полного дифференциала находим

$$dz=\frac{2x}{x^2+y^2}dx+\frac{2y}{x^2+y^2}dy.$$

4. Частные производные высших порядков

Частные производные z'_x и z'_y называют частными производными первого порядка или первыми частными производными.

Определение 6. Частными производными второго порядка функции $z=f(x,y)$ называются частные производные от частных производных первого порядка.

Частных производных второго порядка четыре. Они обозначаются следующим образом:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \; z''_{xy} = (z'_x)'_y \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \; z''_{yy} = (z'_y)'_y \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и более высоких порядков. Например, для функции $z = f(x, y)$ имеем:

$$z'''_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \; z'''_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Частные производные второго или более высокого порядка, взятые по различным переменным, называются смешанными частными производными. Для функции $z = f(x, y)$ таковыми являются производные z''_{xy} и z''_{yx}. Заметим, что в случае, когда смешанные производные z''_{xy} и z''_{yx} непрерывны, то имеет место равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Пример 5. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^3 - 5x^2 y + 3xy^2 - y^3$.

Решение. Частные производные первого порядка для данной функции найдены в примере 3:

$z'_x = 3x^2 - 10xy + 3y^2; \quad z'_y = -5x^2 + 6xy - 3y^2$

Дифференцируя z'_x и z'_y по переменным х и у, получим

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (3x^2 - 10xy + 3y^2)'_x = 6x - 10y,$$
$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (3x^2 - 10xy + 3y^2)'_y = -10x + 6y;$$
$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (-5x^2 + 6xy - 3y^2)'_x = -10x + 6y;$$
$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (-5x^2 + 6xy - 3y^2)'_y = 6x - 6y.$$

5. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия существования экстремума

Определение 7. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой минимума (максимума) функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$, ($f(x_0, y_0) > f(x, y)$).

Точки минимума и максимума функции $z = f(x, y)$ называются ***точками экстремума***, а значения функции в этих точках – ***экстремумами функции*** (минимумом и максимумом соответственно).

Заметим, что минимум и максимум функции имеют локальный характер, так как значение функции в точке M_0 сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к M_0.

Теорема 1. (необходимые условия экстремума). Если (x_0, y_0) – точка экстремума дифференцируемой функции $z = f(x, y)$, то ее частные производные z'_x и z'_y в этой точке равны нулю: $z'_x(x_0, y_0) = 0,\ z'_y(x_0, y_0) = 0$.

Точки, в которых частные производные первого порядка равны нулю, называются критическими или стационарными. В критических точках функция $z = f(x, y)$ может иметь экстремум, а может и не иметь.

Теорема 2. (достаточное условие экстремума). Пусть функция $z = f(x, y)$: а) определена в некоторой окрестности критической точки (x_0, y_0), в которой $z'_x(x_0, y_0) = 0$ и $z'_y(x_0, y_0) = 0$; б) имеет непрерывные частные производные второго порядка $z''_{xx}(x_0, y_0) = A$; $z''_{xy}(x_0, y_0) = B$; $z''_{yy}(x_0, y_0) = C$. Тогда, если $\Delta = AC - B^2 > 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум: максимум, если A<0; минимум, если A>0; если $\Delta = AC - B^2 < 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) экстремума не имеет. В случае $\Delta = AC - B^2 = 0$ вопрос о наличии экстремума остается открытым.

При исследовании функции двух переменных на экстремум рекомендуется использовать следующую схему:

1. Найти частные производные первого порядка: z'_x и z'_y.
2. Решить систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases}$ и найти критические точки функции.
3. Найти частные производные второго порядка: z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}.
4. Вычислить значения частных производных второго порядка в каждой критической точке и, используя достаточные условия, сделать вывод о наличии экстремума.
5. Найти экстремумы функции.

Пример 6. Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 6xy$.

Решение.

1. Находим частные производные z'_x и z'_y:

$z'_x = 3x^2 - 6y$, $z'_y = 3y^2 - 6x$.

2. Для определения критических точек решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 - 2y = 0, \\ y^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим: $y = \dfrac{x^2}{2}$. Подставляя найденное значение у во второе уравнение, получим

$$\frac{x^4}{4} - 2x = 0,\ x^4 - 8x = 0,\ x(x^3 - 8) = 0,$$

откуда

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

Находим значения у, соответствующие значениям $x_1 = 0,\ x_2 = 2$. Подставляя значения $x_1 = 0,\ x_2 = 2$ в уравнение $y = \dfrac{x^2}{2}$, получим: $y_1 = 0,\ y_2 = 2$.

Таким образом, имеем две критические точки: $M_1(0,0)$ и $M_2(2,2)$.

3. Находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = (3x^2 - 6y)'_x = 6x;\ z''_{xy} = (3x^2 - 6y)'_y = -6;\ z''_{yy} = (3y^2 - 6x)'_y = 6y.$$

4. Вычисляем значения частных производных второго порядка в каждой критической точке. Для точки $M_1(0,0)$ имеем:

$$A = z''_{xx}(0,0) = 0,\ B = z''_{xy}(0,0) = -6,\ C = z''_{yy}(0,0) = 0.$$

Так как

$$\Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-6)^2 = -36 < 0,$$

то в точке M_1 экстремума нет.

В точке $M_2(2,2)$:

$$A = z''_{xx}(2,2) = 12,\ B = z''_{xy}(2,2) = -6,\ C = z''_{yy}(2,2) = 12$$

и, следовательно,

$$\Delta = AC - B^2 = 12 \cdot 12 - (-6)^2 = 144 - 36 = 108 > 0.$$

Значит, в силу достаточного условия экстремума, в точке M_2 функция имеет минимум, так как в этой точке $\Delta > 0$ и $A > 0$.

5. Находим значение функции в точке M_2:

$$z_{\min} = z(2,2) = 2^3 + 2^3 - 6 \cdot 2 \cdot 2 = -8.$$

6. Условный экстремум

В теории функций нескольких переменных иногда возникают задачи, когда экстремум функции нескольких переменных необходимо найти не на всей области определения, а на множестве, удовлетворяющем некоторому условию.

Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух переменных, аргументы х и у которой удовлетворяют условию $g(x, y) = C$, называемому уравнением связи.

Определение 8. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой условного минимума (максимума) функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности, удовлетворяющих условию $g(x, y) = C$, выполняется неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$, ($f(x_0, y_0) > f(x, y)$).

Если уравнение связи $g(x, y) = C$ можно разрешить относительно одной из переменных (например, выразить y через x: $y = \varphi(x)$), то задача отыскания условного экстремума функции двух переменных сводится к нахождению экстремума функции одной переменной. Для этого подставляют найденное значение $y = \varphi(x)$ в функцию двух переменных. В результате получают функцию одной переменной x: $z(x) = f(x, \varphi(x))$. Ее экстремум и будет условным экстремумом функции $z = f(x, y)$.

Замечание. В более сложных случаях, когда уравнение связи $g(x, y) = C$ не разрешимо относительно одной из переменных, для отыскания условного экстремума используется метод множителей Лагранжа.

Пример 7. Найти экстремумы функции $z = 3x^2 - 6xy + 2y^2 - 7$ при условии, что ее аргументы удовлетворяют уравнению связи $y - 3x = -1$.

Решение. Из уравнения связи находим функцию $y = 3x - 1$ и подставляем ее в функцию z. Получим функцию одной переменной

$$z(x) = 3x^2 - 6x(3x - 1) + 2(3x - 1)^2 - 7$$

или

$$z(x) = 3x^2 - 6x - 5$$

Находим экстремум данной функции:

$z'(x) = 6x - 6$, $6x - 6 = 0$,

$x = 1$ – критическая точка первого рода (точка, подозрительная на экстремум). Так как $z''(x) = 6 > 0$, то в точке $x = 1$ функция $z(x)$ имеет локальный минимум. Из уравнения связи находим: $y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$. Следовательно, функция

$$z = 3x^2 - 6xy + 2y^2 - 7$$

в точке $M(1, 2)$ имеет условный минимум:

$$z_{\min} = z(1, 2) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 - 7 = -8.$$

7. Приближенные вычисления функций нескольких переменных

Для нахождения приближенного значения функции, в некоторых случаях удобно использовать формулу с использованием функции двух переменных:

$$Z(x; y) \approx Z(x_0; y_0) + \frac{\partial Z}{\partial x} \Big|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial Z}{\partial y} \Big|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} \cdot (y - y_0)$$

Пример 8. Вычислить: $\sqrt[3]{1{,}005} \cdot tg\ 46°$

Решение. Составим функцию двух переменных: $Z(x; y) = \sqrt[3]{x} \cdot tg\ y$

$x = 1{,}005 \quad y = 46°$

$x_0 = 1 \qquad y_0 = 45°$

1) $Z(x_0; y_0) = \sqrt[3]{1} \cdot tg\, 45° = 1$
2) $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot tg\, y$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} \Big| \begin{matrix} x = x_0 \\ y = y_0 \end{matrix} = \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} \cdot tg\, 45° = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

3) $\frac{\partial Z}{\partial y} = \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{cos^2 y}$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} \Big| \begin{matrix} x = x_0 \\ y = y_0 \end{matrix} = \sqrt[3]{1} \cdot \frac{1}{cos^2 45°} = 1 \cdot \frac{1}{2/4} = 2$$

Таким образом, $Z(x; y) = \sqrt[3]{1{,}005} \cdot tg\, 46° \approx 1 + \frac{1}{3}(1{,}005 - 1) + 2 \cdot 0{,}017$(пояснение: $46° - 45° = 1° = 0{,}017$ рад) $\approx 1{,}036$

8. Метод наименьших квадратов

В естествознании, технике и экономике часто приходится иметь дело с *эмпирическими формулами*, т.е. формулами, составленными на основе обработки статистических данных или результатов опытов. Одним из распространенных приемов построения таких формул является *метод наименьших квадратов.* Изложим идею этого способа, ограничиваясь случаями линейной и квадратичной зависимости. Пусть требуется установить зависимость между двумя величинами x и y, например, между стоимостью потребляемого сырья и стоимостью выпущенной продукции. Произведем обследование n видов продукции и представим результаты исследования в виде таблицы:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Из анализа таблицы нелегко обнаружить наличие и характер зависимости между x и y. Поэтому обратимся к графику. Допустим, что точки, взятые из таблицы (опытные точки) группируются около некоторой прямой линии. Тогда можно предположить, что между x и y существует линейная зависимость $\overline{y} = ax + b$, где a и b – коэффициенты, подлежащие определению, $\overline{y}$ – теоретическое значение ординаты. Проведя прямую «на глаз», можно графически найти b и $a = tg\alpha$, однако это будут весьма неточные результаты. Для нахождения a, и b применяют метод наименьших квадратов.

Перепишем уравнение искомой прямой в виде $ax + b - \overline{y} = 0$. Точки, построенные на основе опытных данных, вообще говоря, не лежат на этой прямой. Поэтому если подставить в уравнение прямой вместо x и $\overline{y}$ заданные величины x_i и y_i, то окажется, что левая часть уравнения равна какой-то малой величине $\varepsilon_i = \overline{y_i} - y_i$, а именно: для первой точки: $ax_1 + b - y_1 = \varepsilon_1$, для второй – $ax_2 + b - y_2 = \varepsilon_2$, для последней – $ax_n + b - y_n = \varepsilon_n$. Величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, не равные нулю, называются *погрешностями*. Геометрически это разность между ординатой точки на прямой и ординатой опытной точки с той же абсциссой. Погрешности зависят от выбранного положения прямой, т.е. от a и b. Требуется подобрать a и b таким образом, чтобы эти погрешности были возможно меньшими по абсолютной величине. Способ наименьших квадратов состоит в том, что a и b выбираются из условия, чтобы сумма квадратов погрешностей $u=\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_n^2$ была минимальной. Если эта сумма квадратов окажется минимальной, то и сами погрешности будут в среднем малыми по абсолютной величине. Подставим в выражение для u вместо ε_i их значения.

$u=(ax_1+b-y_1)^2+(ax_2+b-y_2)^2+\cdots+(ax_n+b-y_n)^2$, или $u=u(a,b)$, где x_i, y_i известные величины, a и b – неизвестные, подлежащие определению. Выберем a и b так, чтобы $u(a,b)$ имело наименьшее значение. Необходимые условия экстремума $\frac{\partial u}{\partial a}=0$, $\frac{\partial u}{\partial b}=0$.

Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial a}=2(ax_1+b-y_1)x_1+\ldots+2(ax_n+b-y_n)x_n;\ \frac{\partial u}{\partial b}=2(ax_1+b-y_1)+\ldots+2(ax_n+b-y_n).$$

Получаем систему:

$$\begin{cases}(ax_1+b-y_1)x_1+\cdots+(ax_n+b-y_n)x_n=0,\\ (ax_1+b-y_1)+\cdots+(ax_n+b-y_n)=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}$$

Эта система называется *нормальной системой метода наименьших квадратов*. Из нее находим a и b и затем подставляем их в эмпирическую формулу $\overline{y}=ax+b$.

Пусть теперь точки на графике располагаются вблизи некоторой параболы так, что между x и y можно предположить квадратичную зависимость: $\overline{y}=ax^2+bx+c$, тогда $ax_1^2+bx_1+c-y_1=\varepsilon_1$, …, $ax_n^2+bx_n+c-y_n=\varepsilon_n$.

Тогда $u=\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots+\varepsilon_n^2=(ax_1^2+bx_1+c-y_1)^2+\cdots+(ax_n^2+by_n+c-y_n)^2$. Здесь $u=u(a,b,c)$ – функция трех независимых переменных a, b, c. Необходимые условия экстремума $\frac{\partial u}{\partial a}=0$, $\frac{\partial u}{\partial b}=0$, $\frac{\partial u}{\partial c}=0$ в этом случае примут следующий вид:

$$\begin{cases}a\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i+cn=\sum_{i=1}^{n}y_i\end{cases}.$$

Получили нормальные уравнения способа наименьших квадратов для квадратичной зависимости $\overline{y}=ax^2+bx+c$, коэффициенты которой находим, решая систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Отыскание уравнения прямой по эмпирическим данным называется *выравниванием по прямой*, а отыскание уравнения параболы – *выравниванием по* *параболе*. В экономических расчетах могут встретиться также и другие функции. Довольно часто встречаются эмпирические формулы, выражающие обратно пропорциональную зависимость, графически изображаемую гиперболой. Тогда говорят о *выравнивании по гиперболе* и т.д.

Метод наименьших квадратов оказывается весьма эффективным при исследовании качества промышленной продукции в зависимости от определяющих его факторов на основе статистических данных текущего контроля качества продукции, в задачах моделирования потребительского спроса.

Пример 9. Темпы роста y производительности труда по годам в промышленности республики приведены в таблице.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	100	156	170	184	194	295	220	229

Предполагая, что зависимость y от x линейная: $y = ax + b$, найти a и b.

Решение. Вычислим коэффициенты нормальной системы уравнений: $\sum_{i=1}^{8} x_i = 36,\ \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 204,\ \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 7230,\ \sum_{i=1}^{8} y_i = 1458$.

Следовательно, имеем систему $\begin{cases} 204a + 36b = 7230 \\ 36a + 8b = 1458 \end{cases}$, решая которую, получим:

$a \approx 5{,}93$; $b \approx 110{,}57$. Итак, получили уравнение искомой прямой: $y = 15{,}93x + 110{,}57$.