Поверхности второго порядка.

*Если в пространстве **R**^{3} ввести прямоугольную систему координат Oxyz, то каждая поверхность определяется некоторым уравнением F(x,y,z)=0,*

(x,y,z) – координаты любой точки поверхности. Если F(x,y,z) – многочлены не выше второй степени относительно совокупности переменных x,y,z, то уравнение F(x,y,z)=0 называется уравнением второго порядка, а поверхность изображаемая этим уравнением называется поверхностью второго порядка.

Если поверхность имеет специфическое расположение относительно системы координат (например, симметрична относительно некоторых координатных плоскостей, или имеет вершину в начале координат и пр.), то её уравнение имеет достаточно простой вид, который называется каноническим.

Канонический вид уравнений поверхностей второго порядка. Геометрическое изображение.

1). Сфера радиуса R с центром в начале координат (рис.56)

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ изображает сферу радиуса R с центром в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

2). Эллипсоид с полуосями a,b,c и центром в начале координат (рис. 57)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

При a=b=c=R эллипсоид превращается в сферу радиуса R.

3). Однополостный гиперболоид с полуосями a, b, c и осью Oz (рис. 58)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Сечения гиперболоида горизонтальными плоскостями z=h являются эллипсами

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$$

Сечения гиперболоида вертикальными плоскостями x=h или y=h являются гиперболами.

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2} \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}$$

4). Двуполостсный гиперболоид с полуосями a,b,c и осью Oz (рис.59)

$$\frac{x2}{a2}+\frac{y2}{b2}-\frac{z2}{c2}=-1.$$

Сечение гиперболоида горизонтальными плоскостями z=h, $|h|>$ c являются эллипсами

$$\frac{x2}{a2}+\frac{y2}{b2}=\frac{h2}{c2}-1.$$

Сечения гиперболоида вертикальными плоскостями x=h или y=h являются гиперболами.

$$\frac{y2}{b2}-\frac{z2}{c2}=-\frac{h2}{a2}-1 \quad \text{или} \quad \frac{x2}{a2}-\frac{z2}{c2}=-\frac{h2}{b2}-1.$$

5). Параболоид эллиптический с параметрами a,b,p и вершиной в начале координат (рис.60)

$$\frac{x2}{a2}+\frac{y2}{b2}=2pz.$$

Сечение параболоида горизонтальными плоскостями z=h (h>0 при h< 0 при

P<0) есть эллипсы

$$\frac{x2}{a2}+\frac{y2}{b2}=2ph.$$

Сечение параболоида вертикальными плоскостями x=h или y=h являются параболами.

$$\frac{y2}{b2}=2pz-\frac{h2}{a2} \quad \text{или} \quad \frac{x2}{a2}=2pz-\frac{h2}{b2}.$$

6). Параболоид гиперболический с параметрами a, b, p и вершиной начале координат (рис.61)

$$\frac{x2}{a2}-\frac{y2}{b2}=2pz.$$

Сечение параболоида горизонтальными плоскостями z=h представляют собой гиперболы

$$\frac{x2}{2a2ph}-\frac{y2}{2b2ph}=1$$

Сечение вертикальными плоскостями x=h и y=h являются параболами

$\frac{y2}{b2}=-2pz+\frac{x2}{a2}$ и $\frac{x2}{a2}=2pz+\frac{h2}{b2}.$

7). Конус эллиптический с вершиной в начале координат и осью Oz (рис.62)

$$\frac{x2}{a2}+\frac{y2}{b2}-\frac{z2}{c2}=1.$$

Если a=b, то конус круглый или круговой. Пересечение конуса горизонтальными плоскостями являются эллипсами

$$\frac{x2}{a2}+\frac{y2}{b2}=\frac{h2}{c2}$$

(при h=0 эллипс вырождается в точку).

Сечение конуса вертикальными плоскостями x=h и y=h являются гиперболами

$$\frac{y2}{b2}-\frac{z2}{c2}=-\frac{h2}{a2} \qquad \frac{x2}{a2}-\frac{z2}{c2}=-\frac{h2}{b2}. \quad \text{при } h\neq 0$$

Или парой пересекающих прямых

$$\frac{y2}{b2}-\frac{z2}{c2}=0 \qquad \frac{x2}{a2}-\frac{z2}{c2}=0 \qquad \text{при} \quad h=0$$

К поверхностям второго порядка относятся цилиндры направляющие которых – линии второго порядка. Мы ограничимся пересечением цилиндров, направляющие – прямые , параллельные оси Oz.

8) Цилиндры:

(1) Эллиптический (рис.63)

$$\frac{x2}{a2}+\frac{y2}{b2}=1.$$

Если a=b=R, то цилиндр – круговой $x^2+y^2=R$.

(2) Гиперболический (рис.64)

$$\frac{x2}{a2}-\frac{y2}{b2}=1.$$

(3) Параболический (рис.65)

$$y2=2px.$$

Примечание . Если в каждом из приведённых канонических уравнений заменить $x=x_1-x_0$, $y=y_1-y_0$, $z=z_1-z_0$, где (x_0,y_0,z_0) – фиксированные числа, то новые уравнения представляют те же поверхности и они занимают в системе координат $O_1x_1y_1z_1$ такое же положение относительно плоскостей $x_1=x_0$, $y_1=y_0$, $z_1=z_0$ как поверхности, заданные канонически относительно координатных плоскостей x=0, y=0, z=0. Другими словами, приведённые формулы представляют параллельный сдвиг поверхности на вектор $OM=(x_0,y_0,z_0)$.

Метод параллельных сечений

Если задано уравнение той или иной поверхности, то возникает задача исследования её формы и расположения относительно координатных осей. Для решения этой задачи обычно применяют метод параллельных сечений: поверхность пересекается несколькими плоскостями, параллельными плоскостями координат. Форма и размер полученных сечений позволяют выяснить геометрическую форму самой поверхности.

Пересечение поверхности с плоскостью

Линию в пространстве R3 можно определить как пересечение двух плоскостей. Таким образом уравнение линии можно записать в виде системы

$$\begin{cases} F1(x,y,z) = 0, \\ F2(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Для исследования этой линии удобно воспользоваться цилиндром, проектирующем её на ту или иную координатную плоскость. Если, например, проектируем линию на плоскость Oxy, то исключим z из системы и получим уравнение φ (x,y)=0.Оно изображает направляющую проектирующего цилиндра на плоскость Oxy. В зависимости от того, будет ли φ (x,y)=0 эллипсом, гиперболой, параболой, парой прямых – изучаемая линия сохранит соответствующее название.

***5.5.1**. Сохранить уравнение сферы с центром в точке M_0(-5;3;2) и касающейся плоскости 2x-2y+z-4=0.*

Для составления уравнения сферы нужен её радиус. В данном случае R – расстояние от M_0 до плоскости:

R= $\frac{|(-5)\cdot 2-2\cdot 3+2-4|}{\sqrt{22+22+1}}$ *=6.*

Искомое уравнение : $(x+5)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=36$.

***5.5.2.** Составить уравнение сферы, касающейся двух параллельных плоскостей 6x-3y-2z-35=0 и 6x-3y-2z+63 =0, если её центр расположен на прямой* $\frac{x-11}{6}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z+3}{-2}$.

1) Определим точки M_1 и M_2 пересечения прямой с плоскостями (заметим что прямая перпендикулярна плоскостям). Для этого параметрическое уравнение прямой x = 11+6t, y=-4-3t, z=-3-2t подставляем в уравнения плоскостей, находим t и возвращаемся к этим уравнениям.

6(11+6t) – 3(-4-3t) – 2(-3-2t)-35=0,

t=-1, M_1 (5,-1,-1).

Аналогично находим M_2(-7,5,3).

2) Центр сферы M_0 - середина отрезка M_1M_2:M_0(-1,2,1).

Радиус сферы $R = M_0M_1 = \sqrt{36+9+4} = 7$.

3) Уравнение сферы $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=49$.

5.5.4. *Составим уравнение сферы ,проходящей через четыре точки* $O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(1;0;-1)$.

Уравнение сферы ищем в виде

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Где (a, b, c) *– координаты центра и – координаты центра и* R *– радиус неизвестные. Координаты данных точек превращают уравнение сферы в верные равенства, т.е.*

$$\begin{cases} a2+b2+c2=R2, \\ (2-a)2+b2+c2=R2, \\ (1-a)2+(1-b)2+c2=R2, \\ (1-a)2+b2+(1+c)2=R2. \end{cases}$$

После возведения в квадрат, приведения подобных слагаемых получается система, из которой $a=1$, $b=0$, $c=0$, $R^2=1$.

Ответ. $(x-1)^2+y^2+z^2=1$.

5.5.6. *Найти точки пересечения поверхности* $\frac{x2}{16}+\frac{y2}{9}-\frac{z2}{4}=1$ *и прямой* $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

Параметрические уравнения прямой $x=4t$, $y=-3t$, $z=-2+4t$ *подставим в уравнение однополосного гиперболоида и определим значение* t: $\frac{16t2}{16}+\frac{9t2}{9}-\frac{(4t-2)2}{4}=1$, $(t-1)^2=0$, $t_{1,2}=1$.

Следовательно, $x=4$, $y=-3$, $z=-2$. *Прямая имеет с гиперболоидом две совпадающие точки пересечения, т. е. прямая касается поверхности гиперболоида в точке* $M1(4;-3;2)$.

5.5.7. *При каких значениях параметра* p *плоскость* $2x-2y-z=p$ *касается сферы* $x2+y2+z2=81$?

Если плоскость касается сферы, то расстояние от её центра до плоскости равно радиусу сферы, т. е . $\frac{|2\cdot 0-2\cdot 0-0-p|}{\sqrt{4+4+1}}=9$.

Отсюда $|p|=27$, *т.е.* $p=\pm 27$.

5.5.10. *Методом параллельных сечений исследовать поверхность, определяемую уравнением* $\frac{x2}{16}+\frac{y2}{9}-\frac{z2}{4}=-1$.

1) Перепишем уравнение в виде $\frac{x2}{16}+\frac{y2}{9}=\frac{z2}{4}$ -1. *И пересекаем поверхность плоскостями* $z=h$ *параллельными координатной плоскости Oxy.*

В сечениях получаются линии с уравнениями $\frac{x2}{16}+\frac{y2}{9}=\frac{h2}{4}$ -1.

При $|h|<2$ эти уравнения имеют изображения (мнимые эллипсы) при h $=\pm 2$ они изображают точки (0;0;2) и (0;0;-2), а при $|h|>2$ получаются эллипсы

$\frac{x2}{(4c)2}+\frac{y2}{(3c)2}$ *= 1, где c=*$\sqrt{\frac{h2}{4}-1}$.

С увеличением $|h|$ увеличиваются и полуоси эллипсов 4c и 3c, т. е. эллипсы расширяются (рис.66). Поверхность симметрична относительно плоскости Oxy.

2) Перепишем уравнение поверхности в виде $\frac{x2}{16}-\frac{z2}{9}$ *= -* $\frac{y2}{9}$ *-1 и пересечём её вертикальными плоскостями y=l. При каждом l $\in$ (- ∞; + ∞) соответствующие уравнения описывают гиперболы. В частности, при l=0 получаем гиперболу* $\frac{x2}{16}-\frac{z2}{4}$*= -1, расположенную в плоскости Oxz.*

3) Сечение поверхности плоскостями x=r также гиперболы

$$\frac{y2}{9}-\frac{z2}{4}=-1-\frac{r2}{16}.$$

Но из пп. 1) и 2) уже можно сделать вывод о строении поверхности : она состоит из эллипсов , <<нанизанных>> на гиперболу $\frac{y2}{9}-\frac{z2}{4}$*=-1 (ι =0). Поскольку два сечения, параллельных Oxz и Oyz – гиперболы, а одно – параллельное Oxy –эллипс, то поверхность называется гиперболоидом эллиптическим; для уточнения – двуполостный, ибо состоит из двух отдельных частей (над и под плоскостью Oxy).*

***5.5.12.** Определить линию пересечения поверхностей*

$(x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=36$ и 3x+y-z-9=0.

Первая поверхность это сфера, вторая- плоскость. Они пересекаются или по окружности, или в одной точке , или вовсе не пересекаются .

Найдём расстояние d от центра сферы M_0(4;7;-1) до плоскости 3x+y-z-9=0.

$$d=\frac{|3\cdot4+7+1-9|}{\sqrt{3\_2+1+1}}=\frac{11}{\sqrt{11}}=\sqrt{11}.$$

Поскольку d <R (R=6- радиус сферы), то плоскость пересекает эту сферу по окружности.

Центр $O(x_1;y_1;z_1)$ этой окружности расположен на перпендикуляре M_0O, опущенным из центра сферы M_0 на заданную плоскость (рис.67).

Уравнение перпендикуляра M_0O в параметрической форме имеет вид

x = 4+3t, y=7+t, z=-1-y.

Подставим эти равенства в уравнение плоскости и находим t.

3(4+3t) + (7+t)- (-1-t)-9 =0, t=-1.

Подставим t= -1 в параметрические уравнения перпендикуляра M_0O.

Находим : x=1, y=6 , z=0, т. е. O(1;6;0) – центр окружности пересечения сферы и плоскости.

Из ΔOM_0A (рис.67) находим $r^2=R^2-d^2$, $r^2=36-11=25$,   r=5.

Таким образом получено, что кривая

$$\begin{cases}(x-4)2+(y-7)2+(z+1)2=36,\\ 3x+y-z-9=0\end{cases}$$

Представляя собой окружность радиуса 5 с центром в точке O(1;6:0).

***5.5.13**. Составить уравнения касательных плоскостей к сфере*

(x-2)2+ (y+1)2 + (z-3)2=6 в точках её пересечения с прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

Точки пересечения прямой со сферой получаются подстановкой равенств

x=1+t, y= -t, z=1+2t в уравнение сферы, определением t и подстановкой обратно в уравнение прямой .

Имеем $(1+t-2)^2 + (-t+1)^2 + (1+2t-3)^2=6$, $6(t-1)^2=6$, t1=0, $t^2=2$. Далее $x_1=1$, $y_1=0$, $z_1=1$, $x_2=3$, $y_2=-2$, $z_2=5$. Итак, $M_1(1;0;1)$, $M_2(3;-2;5)$ – точки пересечения прямой и сферы.

Составим уравнение первой касательной плоскости, проходящей через

$M_1(1;0;1)$. Её нормальный вектор $\overline{\mathrm{M0M1}}$, где $M_0(2;-1;3)$ центр сферы:

$\overline{\mathrm{M0M1}}$ = (-1;+1;-2) , а уравнение плоскости: - (x-1) + y-2(z-1)=0 или x=y+2z-15=0.

Уравнение второй плоскости по аналогии: x-y+2z-15=0.

Полученные плоскости параллельны потому, что данная прямая проходит через центр сферы $M_0(2;-1;3)$ (получается при t=1).

***5.5.14.** Установить, что плоскость y-2=0 пересекает эллипсоид*

$\frac{x2}{16}+\frac{y2}{8}+\frac{z2}{9}$=1 по эллипсу. Найти его полуоси и вершины.

Пересечение двух поверхностей в пространстве представляет некоторую линию, принадлежащую как одной так и другой поверхности. Уравнение этой линии в нашем случае имеет вид

$$\begin{cases}\frac{x2}{16}+\frac{y2}{8}+\frac{z2}{9}=1\\ y-2=0\end{cases}$$

Подставим y=2 в первое уравнение и получаем $\frac{x2}{16}+\frac{z2}{9}=\frac{1}{2}$.

Это уравнение эллипса, расположенного в плоскости y-2=0.

Поско4льку каноническое уравнение полученного эллипса имеет вид $\frac{x2}{8}+\frac{z2}{4.5}$*=1, то полуоси равны a=*$\sqrt{8}$ *и b=*$\sqrt{4.5}$*, а вершины эллипса расположены в точках* $A_1(0;2;-\sqrt{4.5})$ *и* $A_2(8;2;0)$ *- на большом диаметре,*

$B_1(0;2;-\sqrt{4.5})$ *и* $B_2(0;2;\sqrt{4.5})$ *– на меньшем диаметре.*

5.5.15. *Исследовать линию пересечения гиперболоида* $\frac{x2}{9}+\frac{y2}{4}-z^2=1$ *с плоскостью 4x-3y-12z-6=0, пользуясь её проекциями на координатные плоскости.*

Линия пересечения гиперболоида с плоскостью определяется системой

$$\begin{cases} \frac{x2}{9}+\frac{y2}{4}-z2=1 \\ 4x-3y-12z-6=0 \end{cases}$$

Выражаем из второго уравнения

$Z=\frac{4x-3y-6}{12}$ *и* $z^2=\frac{16x2+9y2+36-24xy-48x+36y}{144}$

И подставляем в первое уравнение. Получаем

$$9y^2+8xy+16x-12y-60=0.$$

Это уравнение проекции на плоскость Oxy линии пересечения гиперболоида с плоскостью. Вместе с тем это уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси Oz, направляющая которой есть исследуемая линия. Уравнение этой линии следует привести к каноническому виду известными формулами преобразования координат (поворот осей и сдвиг). В данном случае методом разложения на множители можно получить (y+2)(9y+8x-30)=0, т.е. наша линия представляет пару прямых y+2=0 и 8x+9y-30=0, которые пересекаются в точке

$$\begin{cases} y+2=0, \\ 8x+9y-30=0, \end{cases}$$

Т.е. $M_1(6;-2)$.

По аналогии с этим, проектируем искомую линию на плоскость Oxz. Получаем пару прямых x-3z=0 и 5x-9z-12=0, которые пересекаются в точке $M_2(6;2)$.

Наконец, на плоскость Oyz искомая линия проектируется в прямые y+2=0 и 5y+8z-6=0, которые пересекаются в точке $M_3(-2;2)$.

Если проекции на координатные плоскости данной линии являются пересекающимися прямыми, то сама линия представляет пару пересекающихся в точке M(6;-2;2) прямых. Координаты M получаются из координат её проекции M_1, M_2,M_3.

5.5.17. *Дан гиперболический параболоид x2-$\frac{y2}{4}$=z и одна из его касательных плоскостей: 10x-2y-z-21=0. Найти уравнение каждой из тех двух прямых, по которой плоскость касается с параболоидом.*

Уравнение искомых прямых задаются системой уравнений, которую последовательно преобразуем.

$$\begin{cases} 10x-2y-z-21=0, \\ x2-\frac{y2}{4}=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10x-2y-21 \\ x2-\frac{y2}{4}=10x-2y-21 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=10x-2y-21 \\ (2x-y-6)(2x+y-14)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{cases} 10x-2y-z-21=0, \\ 2x-y-6=0 \end{cases}\right. \quad (5.1)$$

$$\left[\begin{cases} 10x-2y-z-21=0, \\ 2x+y-14=0. \end{cases}\right. \quad (5.2)$$

Уравнение прямых (5.1) и (5.2) получены в общем виде. Приведём (5.1) к каноническому виду. Для этого найдём две точки на прямой (5.1):

z=0 : $\begin{cases} 10x-2y=21 \\ 2x-y=6 \end{cases} \Rightarrow$ *M_1($\frac{3}{2}$;-3;0);*

y=0 : $\begin{cases} 10x-z=21 \\ 2x-6=0 \end{cases} \Rightarrow$ *M_2(3;0;9).*

Составим уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2. $\overline{\mathrm{M1M2}}$ = ($\frac{3}{2}$;3;9) = $\frac{3}{2}$ *(1;2;6). Прямая (5.1) имеет вид* $\frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-9}{6}$ *или параметрически :*

x=9+6t. (Уравнение прямой определяется неоднозначно : например, при t=2 находим на этой прямой точку x_0=5, y_0= 4, z_0=21, а потому её уравнение можно записать и так $\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-21}{6}$ *). По аналогии, прямую (5.2) можно привести к виду* $\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-21}{14}$