Раздел 4. Определители

<u>Основные понятия</u>

Квадратной матрице А порядка n можно поставить в соответствие число detA (или |A|, или Δ), называемое ее *определителем*, следующим образом:

1. n=1. A=(a_1); detA=a_1.
2. n=2. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; detA=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$.
3. n=3. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; detA=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Определитель матрицы также называют *детерминантом*.

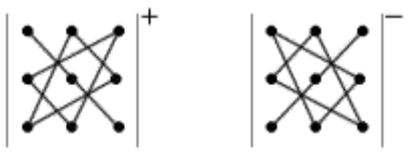
Для матрицы n x n определитель задаётся рекурсивно:

$\begin{vmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & an2 & \dots & ann \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\bar{M}_j^1$, где $\bar{M}_j^1$ – дополнительный минор к элементу a_{1j} . Эта формула называется **разложением по строке.**

П р и м е р. Найти определитель матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$=2·6–5·(–3)=12–(–15)=27.

При вычислении определителя третьего порядка удобно пользоваться *правилом треугольника* (или Саррюса)



П р и м е р. Найти определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 8 & -3 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

Решение: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 8 & -3 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \end{vmatrix}$=1·(–3) ·8 + 4·4·4 + 8·8·8 – 8·(–3) ·4 – 4·8·8 – (–1)·4·8=360

<u>Некоторые свойства определителей.</u>

Свойство 1. «Равноправность строк и столбцов». Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.

Например $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

В дальнейшем строки и столбцы будем называть *рядами определителя.*

Свойство 2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

Свойство 3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Свойство 4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Свойство 5. «Элементарные преобразования определителя». Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

Например $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+k\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+k\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+k\cdot a_{32} \end{vmatrix}$.

Следующее свойство определителя связано с понятиями минора и алгебраического дополнения.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n–1)-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij}.

Так, если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то $m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма $i+j$ – четное число, и со знаком «–», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot m_{ij}$. Так, $A_{11} = +m_{11}$, а $A_{32} = -m_{32}$.

Свойство 6. «Разложение определителя по элементам некоторого ряда». Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Так, например $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13}$.

Данное свойство содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

П р и м е р. Вычислите определитель матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение: для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т.к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=3\cdot(7\cdot3\cdot4+(-1)\cdot0\cdot2+5\cdot7\cdot1-(-1)\cdot3\cdot1-7\cdot7\cdot2-5\cdot0\cdot4)+$$
$$+(5\cdot3\cdot4+(-1)\cdot7\cdot2+5\cdot7\cdot8-(-1)\cdot3\cdot8-5\cdot7\cdot4-5\cdot7\cdot2)-$$
$$-(5\cdot0\cdot2+7\cdot1\cdot5+7\cdot3\cdot8-5\cdot0\cdot8-3\cdot1\cdot5-7\cdot7\cdot2)=122.$$

Невырожденные матрицы

Основные понятия.

Пусть A –квадратная матрица n-го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если определитель Δ=detA не равен нулю: Δ=detA$\neq$0. В противоположном случае (Δ=0) матрица A называется *вырожденной.*

Матрицей, *союзной к матрице A*, называется матрица

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A (оно определяется так же, как алгебраическое дополнение элемента определителя).

Обратная матрица.

Матрица A^{-1} называется *обратной* матрице A, если выполняется условие

$$A\cdot A^{-1}= A^{-1}\cdot A=E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A.

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Примем эту теорему без доказательства.

Обратную матрицу можно вычислить по формуле: $A^{-1}=\dfrac{A^*}{\det A}$.

Отметим *свойства* обратной матрицы:

1. $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det A}$;
2. $(A\cdot B)^{-1}= B^{-1}\cdot A^{-1}$;
3. $(B^{-1})^T=(B^T)^{-1}$.

П р и м е р. Найти A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

1) Находим detA: $\det A=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2+3=5$, $5\neq0$.

2) Находим A^*: $A_{11}=1$, $A_{12}=-(-1)=1$, $A_{21}=-3$, $A_{22}=2$, поэтому $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Находим A^{-1}: $A^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

4) Проверка: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5} & -\frac{6}{5}+\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5}+\frac{1}{5} & \frac{3}{5}+\frac{2}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$.

Ранг матрицы.

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали. На этом основан один из способов вычисления ранга матрицы. Обозначается r, $r(A)$ или rangA.

Отметим *свойства* ранга матрицы:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.

П р и м е р. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: Приведем матрицу к каноническому виду (см. пример в предыдущей теории).

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ то есть } A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен $r(A)=2$.

Нахождение ранга матрицы через миноры.

Рассмотрим матрицу A размера $m\times n$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов ($k<m$, $k<n$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются *минорами этой матрицы.*

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется *рангом матрицы.* Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется *базисным*. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

П р и м е р. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение: Нам требуется найти минор наивысшего порядка отличный от нуля. Все миноры третьего порядка равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Есть минор второго порядка, отличный от нуля, который стоит на пересечении 2 и 3 строки с 1 и 3 столбцами. $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15$, $-15 \neq 0$.

Теперь с помощью элементарных преобразований приведем матрицу $F = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ к каноническому виду.

$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ (I строку умножим на 1/3) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ (I строку умножили на (-1), сложили со II и результат записали во II строке) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ (I столбец умножили на (-2), сложили со II и результат записали во II столбце) ~ ~ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ (II строку умножим на (-1/5)) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Таким образом rangF=2, а значит и rangA=2.

Вопросы

1. Дайте определение определителя матрицы.
2. Дайте определение невырожденной матрицы.
3. Дайте определение союзной матрицы.
4. Дайте определение обратной матрицы.
5. Перечислите свойства обратной матрицы.
6. Перечислите свойства ранга матрицы.
7. Что называют алгебраическим дополнением, минором некоторого элемента матрицы?
8. Сколько всего миноров у квадратной матрицы n-го порядка?