Раздел 3. Матрицы

3.1 Основные понятия

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A=(a_{ij})$, где $i=\overline{1,m}$ (т.е. $i=1,2,3,\dots,m$) – номер строки, $j=\overline{1,n}$ (т.е. $j=1,2,3,\dots,n$) – номер столбца.

Матрицу A называют матрицей *размера* $m\times n$ и пишут $A_{m\times n}$. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее *элементами.* Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют главную диагональ.

Пример 1. Элемент a_{12} расположен в 1-й строке и 2-м столбце, а элемент a_{31} находится в 3-й строке и 1-м столбце.

Пример 2. Матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ имеет размер 2×4, так как она содержит 2 строки и 4 столбца. Матрица $B=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & -1 \\ 0{,}5 & 8 \end{pmatrix}$ имеет размер 3×2, так как она содержит 3 строки и 2 столбца.

Матрицы равны между собой, если равны <u>все</u> соответствующие элементы этих матриц, т.е. $A=B$, если $a_{ij}=b_{ij}$, где $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Матрица, у которой число сток равно числу столбцов, называется *квадратной*. Квадратную матрицу размера $n\times n$ называют матрицей *n-го порядка.*

Пример 3. Матрицы A и B из примера 2 называются прямоугольными. Матрица $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ – это квадратная матрица 3-го порядка. Она содержит 3 строки и 3 столбца.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной.* Обозначается буквой *E*.

Пример 4. $E_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица 3-го порядка.

Квадратная матрица называется *треугольной,* если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Обозначается буквой *O*.

В матричном исчислении матрицы *O* и *E* играют роль 0 и 1 в арифметике.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором* (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно). Их вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix}.$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т.е. $(5)_{1\times1}$ есть 5.

Матрица, полученная из данной, заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, *транспонированной* к данной. Обозначается A^T. Так, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ если $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $\left(A^T\right)^T=A$.

3.2 Операции над матрицами

Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$ такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$).

Пример 5. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+3 & -3+3 & 0+(-1) \\ 4+(-2) & 5+(-5) & 6+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Аналогично определяется разность матриц.

Умножение на число

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на число* k называется матрица $B_{m\times n}=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij}=ka_{ij}$ ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$).

Пример 6. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $k=2$, $2A=\begin{pmatrix} 2\cdot0 & 2\cdot(-1) & 2\cdot2 \\ 2\cdot3 & 2\cdot4 & 2\cdot5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Матрица $-A=(-1)\cdot A$ называется *противоположной матрице А.*

Разность матриц $A-B$ можно определить так: $A-B=A+(-B)$.

Операции сложения матриц и умножение матрицы на число обладают следующими *свойствами:*

1. $A+B=B+A$;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3. $A+O=A$;
4. $A-A=O$;
5. $1\cdot A=A$;
6. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
7. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A$;
8. $\alpha\cdot(\beta A)=(\alpha\beta)\cdot A$,

где A, B, C – матрицы, α и β – числа.

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют *канонической,* например $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 7. Привести к каноническому виду матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: Выполняя элементарные преобразования, получаем $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ (поменяли местами I и III столбцы) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (I строку сложили со II строкой и результат записали во вторую строку; после этого I строку сложили с III строкой и результат записали в третью строку) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix}$ (I столбец умножили на (-3), сложили со II столбцом и результат записали во II столбец; затем I столбец умножили на (-2), сложили с III столбцом и результат записали в III столбец; после этого I столбец снова умножили на (-2) и сложили с IV столбцом, а результат записали в IV столбец) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix}$ (III столбец умножили на (-2), сложили со II столбцом и результат записали во II столбец; III столбец разделили на 2 и результат записали в III столбец; III столбец умножили на (-1), сложили с IV столбцом и результат записали в IV столбец) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ (II строку умножили на 3, сложили с III строкой и результат записали в III строку) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (II столбец умножили на (-1), сложили последовательно с III и IV столбцами и результат записали соответственно в III и IV столбец) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Получили матрицу канонического вида.

<u>Произведение матриц</u>

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.*

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на матрицу* $B_{n\times p}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p}=(c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\cdots+a_{in}\cdot b_{nk},\ \text{где } i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,p},$$

т.е. элемент i-ой строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы В.

Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют. Легко показать, что $A\cdot E = E\cdot A = A$, где A – квадратная матрица, E – единичная матрица того же размера.

Пример 4.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathrm{x} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 6+3\cdot 7 & 1\cdot 4+2\cdot 0+3\cdot 1 \\ 1\cdot 3+0\cdot 6+(-1)\cdot 7 & 1\cdot 4+0\cdot 0+(-1)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 7 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрицы A и B называются *перестановочными* (*коммутирующими*), если $AB=BA$.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$;
2. $A\cdot(B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B)\cdot C = AC + BC$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$,

если, конечно, написанные суммы и произведения матриц имеют смысл.

Для операции транспонирования верны свойства:

1. $(A + B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;
2. $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$.

Если задан многочлен $f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0$, то *матричным многочленом* $f(A)$ называется выражение вида $a_n\cdot A^n+a_{n-1}\cdot A^{n-1}+\ldots+a_2\cdot A^2+a_1\cdot A+a_0\cdot E$, где $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n\ ðàç}$ для любого натурального n. Значением матричного многочлена $f(A)$ при заданной матрице A является матрица.

Элемент строки назовем *крайним*, если он отличен от нуля, а все элементы этой строки, находящиеся левее его, равны нулю. Матрица называется *ступенчатой*, если крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки.

Пример 5. В матрицах A и B отмечены крайние элементы каждой строки:

$$A=\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & \underline{-1} & 2 \\ 0 & \underline{3} & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ – не ступенчатая

$$B=\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & 7 \\ 0 & \underline{3} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{2} & 1 \end{pmatrix}$$ – ступенчатая