Раздел 1. Числовые функции, их свойства и графики

1.1 Определение числовой функции

1.1.1 В курсе алгебры основной школы было дано следующее определение числовой функции:

Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определенное число y из некоторого множества Y, то говорят, что ***задана функция y = f(x) с областью определения X и множеством значений Y****.*

Пишут $y = f(x),\ \ x \in X$.

1.1.2 Таким образом, для того, чтобы задать функцию, необходимо три компонента: два множества и правило их соответствия.

1.1.3 Переменная *x* называется ***независимой переменной***, или ***аргументом***, переменная *y* – ***зависимой переменной***, или ***значением функции (функцией)***.

1.1.4 Множество *X* называется *областью определения* функции, обозначается $D(f)$. Множество *Y* называется *множеством значений* функции, обозначается $E(f)$.

1.1.5 Если множество *X* специально не оговорено, то под областью определения функции понимается область допустимых значений аргумента *x*, то есть множество таких значений переменной *x*, при которых функция $y = f(x)$ вообще имеет смысл.

Пример 1. Найти область определения следующих функций: а) $y = -4x + 1$; б) $y = \dfrac{2-3x}{x^2-3}$; в) $y = \sqrt{3-2x}$; г) $y = 6x^3 - \sqrt{4x+1}$.

Решение.

а) Функция $y = -4x + 1$ относится к классу рациональных функций, для которых не существует ограничений, накладываемых на переменную *x*, поэтому областью определения этой функции является вся числовая прямая, то есть, $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$.

б) Функция $y = \dfrac{2-3x}{x^2-3}$ является дробно-рациональной, то есть она определена при всех значениях переменной *x*, которые не обращают знаменатель дроби в ноль (на ноль делить нельзя!). Поэтому из множества всех действительных чисел нужно исключить те значения *x*, при которых знаменатель дроби равен нулю. Для того чтобы найти все такие числа, решим уравнение:

$$x^2 - 3 = 0;$$

$$x^2 = 3;$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Таким образом, чтобы записать область определения функции $y = \dfrac{2-3x}{x^2-3}$, нужно из множества всех действительных чисел $R = (-\infty;\ +\infty)$ исключить числа $-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$. Получаем следующий результат: $D(f) = (-\infty;\ -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3};\ \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};\ +\infty)$

в) Так как извлекать квадратные корни можно только из неотрицательных чисел, то для функции $y = \sqrt{3-2x}$ область определения будет состоять только из тех значений *x*, при которых под корнем будет получаться неотрицательное число. Для того чтобы найти все такие числа, решим неравенство: $3 - 2x \geq 0$.

$3 - 2x \geq 0$; (вычтем из обеих частей неравенства число 3)

$-2x \geq -3$; (разделим обе части неравенства на -2, при этом знак неравенства изменится на противоположный)

$x \leq \dfrac{3}{2}$

Таким образом, областью определения функции $y = \sqrt{3-2x}$ будут все действительные числа, не превосходящие числа 1,5: $D(f) = (-\infty;\ 1{,}5]$.

г) Функция $y = f(x) = 6x^3 - \sqrt{4x+1}$ является разностью двух функций: $g(x) = 6x^3$ и $h(x) = \sqrt{4x+1}$, поэтому область определения функции $f(x)$ находится как пересечение областей определений функций $g(x)$ и $h(x)$. Найдем область определения для каждой из функций.

$D(g) = (-\infty;\ +\infty)$, так как это рациональная функция.

Для нахождения области определения функции $h(x)$ решим неравенство $4x+1 \ge 0$.

$$4x \ge -1;$$
$$x \ge -\frac{1}{4} = -0{,}25.$$

Значит, областью определения функции $h(x)$ является полуинтервал $[-0{,}25;\ +\infty)$.

Таким образом, областью определения функции $y = f(x)$ является пересечение множеств $(-\infty;\ +\infty)$ и $[-0{,}25;\ +\infty)$: $D(f) = (-\infty;\ +\infty) \cap [-0{,}25;\ +\infty) = [-0{,}25;\ +\infty)$.

1.1.6 ***Частным значением*** функции $y = f(x)$ при $x = x_0$, где $x_0 \in X$, называется то значение y_0, которое соответствует заданному значению x_0 (обозначается $f(x_0)$).

1.1.7 Чтобы найти значение функции при заданном значении x_0, надо в выражении функции всюду вместо x подставить значение x_0 и выполнить действия.

Пример 2. Дана функция $y = 2\sqrt{4-x} + \dfrac{3}{\sqrt{x+2}}$. Найти ее область определения и частные значения $f(0)$, $f(2)$ и $f(x-1)$.

Решение.

1. Найдем область определения функции. Она состоит из суммы двух функций $g(x) = 2\sqrt{4-x}$ и $h(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x+2}}$. Функция $g(x)$ определена для тех значений x, при которых выражение, стоящее под знаком квадратного корня, принимает неотрицательные значения. Поэтому в ее область определения входят все значения переменной x, которые являются решением неравенства $4 - x \ge 0$. Решаем его: $-x \ge -4$; $x \le 4$. Таким образом, областью определения функции $g(x)$ является промежуток $(-\infty;\ 4]$.

Функция $h(x)$ определена для тех значений переменной x, при которых подкоренное выражение является неотрицательным и одновременно знаменатель дроби не обращается в нуль. То есть для нахождения области определения функции $h(x)$ нужно решить неравенство $x + 2 > 0$. Получим: $x > -2$. Значит, областью определения функции $h(x)$ является промежуток $(-2;\ +\infty)$.

Итак, областью определения функции $y = f(x)$ будет множество, состоящее из тех значений переменной x, которые одновременно принадлежат и множеству $(-\infty;\ 4]$, и множеству $(-2;\ +\infty)$: $D(f) = (-\infty;\ 4] \cap (-2;\ +\infty) = (-2;\ 4]$.

2. Найдем частные значения функции $y = f(x)$ при $x = 0$, $x = 2$ и $x = x-1$.

$$f(0) = 2\sqrt{4-0} + \frac{3}{\sqrt{0+2}} = 2\sqrt{4} + \frac{3}{\sqrt{2}} = 2\cdot 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} = 4 + \frac{3}{\sqrt{2}};$$

$$f(2) = 2\sqrt{4-2} + \frac{3}{\sqrt{2+2}} = 2\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{4}} = 2\sqrt{2} + \frac{3}{2} = 2\sqrt{2} + 1{,}5;$$

$$f(x-1) = 2\sqrt{4-(x-1)} + \frac{3}{\sqrt{x-1+2}} = 2\sqrt{4-x+1} + \frac{3}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{5-x} + \frac{3}{\sqrt{x+1}}.$$

1.1.8 Графиком функции называется множество всех точек плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

1.2 Способы задания функции одной переменной

1.2.1 Существует несколько способов задания функции:

1. Аналитический. В этом способе функциональная зависимость между переменными x и y выражается формулой, которая указывает совокупность тех математических операций, которые должны быть выполнены, чтобы по заданному значению аргумента найти соответствующее значение функции. При аналитическом задании функции обычно не указывается область определения (например, $y = x^4$, $S = vt$).

Функцию не следует отождествлять с формулой, с помощью которой она задана. Например, функции $y = x^2$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$ и $y = x^2$, $x \in [1;\ 3]$, выраженные одной и той же формулой $y = x^2$, различны, так как имеют разные области определения.

С другой стороны, одна и та же функция может быть задана разными формулами на различных участках области определения.

Рассмотрим, например, функцию $y = \begin{cases} 2, & x \le 0, \\ x+2, & x > 0. \end{cases}$ Здесь две формулы задают одну функцию, определенную на всей числовой прямой: при $x \le 0$ значения этой функции определяются по первой формуле ($f(x) = 2$), а при $x > 0$ – по второй ($f(x) = x + 2$).

Аналитический способ задания удобен тем, что значения функции можно вычислить при любых значениях аргумента, взятых из области определения. Этот способ является основным в математическом анализе, однако он часто оказывается неудобным для расчетов, так как сопряжен с необходимостью выполнения в каждом случае многочисленных, часто трудоемких вычислений.

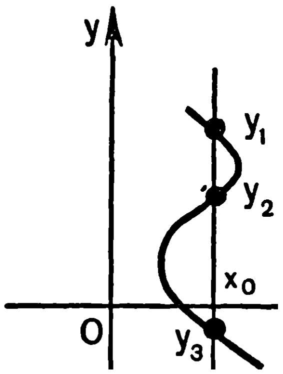
2. Табличный. Он широко применяется на практике. При этом способе определяются значения функции для большого числа выбранных значений аргумента и составляются таблицы этих значений (например, тригонометрические, логарифмические таблицы и др.). Когда же опытным путем описывается функциональная зависимость между переменными величинами, то составляются таблицы величин – аргумента и функции, причем в этом случае значения функции считаются приближенными.

Пример 3. Рассмотрим взаимосвязь между ценой некоторого продукта *p* и величиной спроса на этот продукт *d*, которая может быть представлена таблицей:

p (руб.)	100	120	140	160	180	…
d (тыс. шт.)	20	18	16	14	12	…

Как видно из таблицы, спрос убывает с возрастанием цены.

3. Графический. При этом способе зависимость значения функции от аргумента задается графиком. В средней школе обычно рассматривают только числовые функции, область определения которых состоит из действительных чисел и значения которых являются действительными числами. Графиком такой функции *f* называется множество точек *P* = (*x*; *y*) числовой плоскости, координаты которых *x* и *y* удовлетворяют равенству $y = f(x)$.



Примером графической зависимости может служить медицинская электрокардиограмма.

Заметим, что не всякое множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции. Например, на кривой, изображенной на рисунке, значению $x = x_0$ соответствуют три значения *y* (y_1, y_2 и y_3), и, следовательно, такое соответствие функцией не является.

Для того, чтобы множество точек координатной плоскости являлось графиком некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы любая прямая, параллельная оси Oy , пересекалась с указанным графиком не более чем в одной точке.

4. Словесный. В этом случае функция описывается правилом ее составления. Примером такой функции является функция Дирихле: $f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если } x \ - \ \textit{рационально}, \\ 0, & \textit{если } x \ - \ \textit{иррационально}. \end{cases}$

1.3 Классификация функций одной переменной

1.3.1 В зависимости от характера действий, которые надо производить над значением аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции, устанавливается следующая классификация функций:

1. Целые рациональные функции, или **многочлены**. Так называются функции от аргумента *x*, в которых над значением аргумента *x* и некоторыми постоянными (числами) выполняются операции: сложения, умножения, вычитания, деления, возведения в натуральную степень (и притом конечное число раз).

Общий вид целой рациональной функции (многочлена *n*-й степени):

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n ,$$

где n – натуральное или равное нулю число; a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n – коэффициенты (действительные числа).

Область определения и область значения целых рациональных функций – вся числовая прямая, то есть $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$, $E(f)=(-\infty;\ +\infty)$.

Примерами таких функций являются: линейная ($y=kx+b$), квадратичная ($y=ax^2+bx+c$).

2. Дробно-рациональные функции. Так называются функции, представимые в виде частного от деления двух целых рациональных функций: $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены (целые рациональные функции). Примером дробно-рациональной функции является функция $y=\dfrac{3x-4}{2x^2-1}$.

3. Рациональные функции – совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций.

4. Иррациональные функции. Так называют функции, над аргументом x которых кроме обычных пяти арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень) производится еще операция извлечения корня конечное число раз и результат не является рациональной функцией. Например, функция $y=\sqrt{\dfrac{x^2-3x}{x+4}}+\sqrt[3]{x}$ является иррациональной.

5. Совокупность рациональных и иррациональных функций образует множество **алгебраических функций**.

6. Трансцендентные функции. Так называются любые неалгебраические функции. Например, тригонометрические функции, логарифмические и показательные.

1.4 Монотонность функции

1.4.1 Функция $f(x)$ называется ***возрастающей*** на данном числовом промежутке *X*, если большему значению аргумента $x\in X$ соответствует большее значение функции $f(x)$, то есть для любых x_1 и x_2 из промежутка *X*, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2)>f(x_1)$.

1.4.2 Функция $f(x)$ называется ***убывающей*** на данном числовом промежутке *X*, если большему значению аргумента $x\in X$ соответствует меньшее значение функции $f(x)$, то есть для любых x_1 и x_2 из промежутка *X*, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2)<f(x_1)$.

Пример 4. 1) Доказать, что функция, заданная формулой $f(x)=3x+1$, возрастающая. 2) Доказать, что функция, заданная формулой $f(x)=\dfrac{2}{x}$, где $x>0$, убывающая.

Решение. 1) В соответствии с определением возрастающей функции возьмем из области определения функции $f(x)=3x+1$ два значения аргумента x_1 и x_2 так чтобы $x_1>x_2$ и сравним значения функции для этих значений аргумента. Для этого последовательно выполним необходимые действия:

1. домножим обе части неравенства на 3: $3x_1>3x_2$;
2. прибавим к обеим частям неравенства 1: $3x_1+1>3x_2+1$.

Теперь в левой части неравенства стоит значение функции в точке x_1, а в правой – в точке x_2: $f(x_1)>f(x_2)$. Так как большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то функция $f(x)=3x+1$ возрастает на всей области определения.

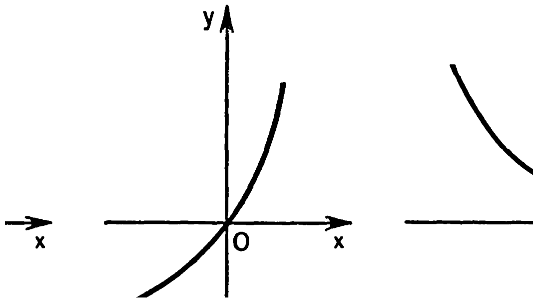
2) В соответствии с определением убывающей функции возьмем из области определения функции $f(x)=\dfrac{2}{x}$ два значения аргумента x_1 и x_2 так чтобы $x_1>x_2>0$ (по условию $x>0$) и сравним значения функции для этих значений аргумента. Для этого последовательно выполним необходимые действия:

1. по свойствам числовых неравенств: $\dfrac{1}{x_1}<\dfrac{1}{x_2}$ (например, если $4>2$, то $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{2}$);
2. домножим обе части неравенства на 2: $\dfrac{2}{x_1}<\dfrac{2}{x_2}$.

Теперь в левой части неравенства стоит значение функции в точке x_1, а в правой – в точке x_2: $f(x_1) < f(x_2)$. Так как большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то функция $f(x) = \dfrac{2}{x}$ убывает на промежутке $(0;\ +\infty)$.

1.4.3 Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется ***монотонной*** на этом промежутке.

1.4.3 О монотонности функции можно судить по ее графику. Например, функция, график которой изображен на рис. 8, возрастает при всех значениях переменной *x*. Функция, график которой изображен на рис. 9, убывает на промежутке $(-\infty;\ 0]$ и возрастает на промежутке $[0;\ +\infty)$.



1.5 Четные и нечетные функции

1.5.1 Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если она обладает следующими двумя свойствами: 1) область определения этой функции симметрична относительно точки *O* (то есть если точка a принадлежит области определения, то точка $-a$ также принадлежит области определения); 2) для любого значения *x*, принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

1.5.2 Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если она обладает следующими двумя свойствами: 1) область определения этой функции симметрична относительно точки *O* (то есть если точка a принадлежит области определения, то точка $-a$ также принадлежит области определения); 2) для любого значения *x*, принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Пример 5. Выяснить, будет ли функция четной или нечетной: 1) $y = 2x^2$; 2) $y = -3x^5 + x$; 3) $y = 12x + 1$.

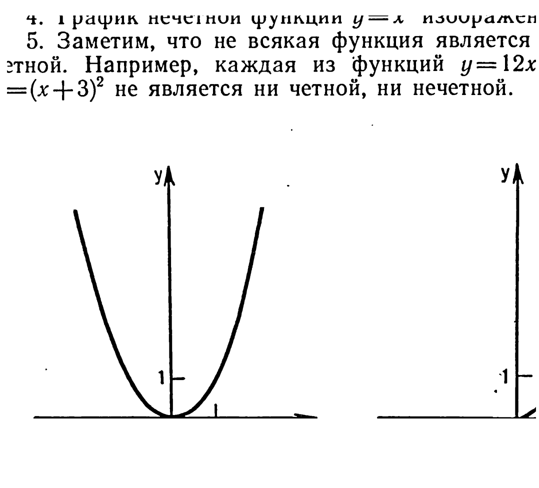
Решение. 1) В соответствии с определением четной (нечетной) функции, сначала нужно выяснить, является ли промежуток области определения симметричным. Найдем область определения функции $y = 2x^2$. Это рациональная функция (многочлен), её область определения $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$ является симметричной относительно начала координат (точка $x = 0$). Найдем выражение, соответствующее значению функции в точке $-x$: $f(-x) = 2\cdot(-x)^2 = 2x^2$. Таким образом, получаем, что $f(-x) = f(x) = 2x^2$ и функция $y = 2x^2$ является четной.

2) Проверяем симметричность области определения: функция $y = -3x^5 + x$ является рациональной, значит её область определения $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$ является симметричной относительно начала координат (точка $x = 0$). Найдем выражение, соответствующее значению функции в точке $-x$: $f(-x) = -3\cdot(-x)^5 + (-x) = -3\cdot(-x^5) - x = 3x^5 - x$. Полученное выражение не равно $f(x)$. Найдем $-f(x)$: $-f(x) = -(-3x^5 + x) = -(-3x^5) - x = 3x^5 - x$. Таким образом, получаем, что $f(-x) = -f(x) = 3x^5 - x$ и функция $y = -3x^5 + x$ является нечетной.

3) Проверяем симметричность области определения: функция $y = 12x + 1$ является рациональной, значит её область определения $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$ является симметричной относительно начала координат (точка $x = 0$). Найдем выражение, соответствующее значению функции в точке $-x$: $f(-x) = 12\cdot(-x) + 1 = -12x + 1$. Полученное выражение не равно $f(x)$. Найдем $-f(x)$: $-f(x) = -(12x + 1) = -12x - 1$. Таким образом, получаем, что $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$ и функция $y = 12x + 1$ не является четной и не является нечетной.

1.5.3 График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 10).

1.5.5 График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 11).



1.5.6 Не всякая функция является четной или нечетной. Например, каждая из функций $y = 12x + 1$, $y = x^4 + x$, $y = (x+3)^2$ не является ни четной, ни нечетной.

1.6 Периодические функции

1.6.1 Функция f называется ***периодической*** если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения функции числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат этой области и выполняется равенство $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$. В этом случае число T называется ***периодом*** функции f.

1.6.2 Если T – период функции, то Tk, где $k \in Z$ и $k \neq 0$, также является периодом функции. Следовательно, всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. На практике обычно рассматривают наименьший положительный период (при $k = 1$).

1.6.3 Значения периодической функции через промежуток, равный периоду, повторяются. Это обстоятельство используется при построении графиков.

1. Числовые пр
знак (т. е. остается
ся промежутками
2. О промежут
ее графику. Расс
Здесь $f(x) > 0$ при
график расположе

1.7 Промежутки знакопостоянства и нули функции

1.7.1 Числовые промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (то есть остается положительной или отрицательной), называются промежутками знакопостоянства функции.

1.7.2 О промежутках знакопостоянства функции легко судить по ее графику. Рассмотрим, например, функцию $y = x$ (рис. 12). Здесь $f(x) > 0$ при $x \in (0;\ +\infty)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty;\ 0)$. В первом случае график расположен выше оси абсцисс, во втором – ниже ее.

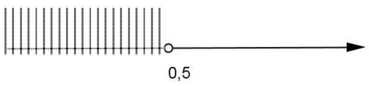
1.7.3 Значения аргумента x из области определения функции, при которых $f(x) = 0$, называются нулями функции. Значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, – это абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс (рис. 13).

омежутки, на которых функция со
положительной или отрицательной
знакопостоянства функции.
ках знакопостоянства функции лег
мотрим, например, функцию $y=$
$x \in R_+$, $f(x) < 0$ при $x \in R_-$. В пе
н выше оси Ox, во втором — ниж

Пример 6. Найти нули функции и промежутки знакопостоянства: 1) $y = 1 - 2x$; 2) $y = x^2 + 2x - 8$.

Решение. Чтобы найти нули функции, нужно решить уравнение $f(x) = 0$. Чтобы найти промежутки знакопостоянства, нужно решить неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

1) Нули функции $y = 1 - 2x$: $1 - 2x = 0 \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. Таким образом, единственным нулем функции $y = 1 - 2x$ является точка $\left(\dfrac{1}{2};\ 0\right)$. Найдем промежутки знакопостоянства. Для этого достаточно решить любое из неравенств $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$. Решим неравенство $f(x) > 0$: $1 - 2x > 0$; $-2x > -1$; $x < (-1):(-2)$; $x < 0{,}5$.

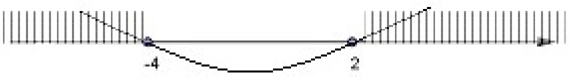


Значит, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty;\ 0{,}5)$, соответственно $f(x) < 0$ при $x \in (0{,}5;\ +\infty)$.

2) Нули функции $y = x^2 + 2x - 8$:

$x^2 + 2x - 8 = 0$; $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$; $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2 \pm 6}{2}$; $x_1 = \dfrac{-2-6}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4$, $x_2 = \dfrac{-2+6}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$. Таким образом, нулями функции являются точки $(-4;\ 0)$ и $(2;\ 0)$.

Промежутки знакопостоянства: решим неравенство $f(x) > 0$. $x^2 + 2x - 8 > 0$. $x^2 + 2x - 8 = 0$ при $x_1 = -4$ и $x_2 = 2$. Отмечаем точки на числовой прямой, изображаем схематически график квадратичной функции и заштриховываем части прямой, соответствующие знаку неравенства ($f(x) > 0$, значит, заштриховываем ту часть прямой, где парабола «сверху»):



Таким образом, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty;\ -4) \cup (2;\ +\infty)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (-4;\ 2)$.

1.8 План исследования функции (по графику)

4.8.1 Найти область определения и область значения функции, $D(f)$, $E(f)$.
4.8.2 Определить, является ли функция четной или нечетной.
4.8.3 Определить, является ли функция периодической.
4.8.4 Найти нули функции.
4.8.5 Определить промежутки монотонности функции.
4.8.6 Определить промежутки знакопостоянства функции.

1.9 Линейная функция и ее график

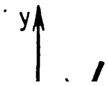
4.9.1 Функция, заданная формулой $y = kx + b$, где k и b – некоторые числа, называется линейной.
4.9.2 Областью определения линейной функции служит множество R всех действительных чисел, так как выражение $kx + b$ имеет смысл при любых значениях x.
4.9.3 График линейной функции $y = kx + b$ есть прямая линия. Для построения графика достаточно двух точек, например, $A(0;\ b)$ и $B\left(-\frac{b}{k};\ 0\right)$, если $k \neq 0$.

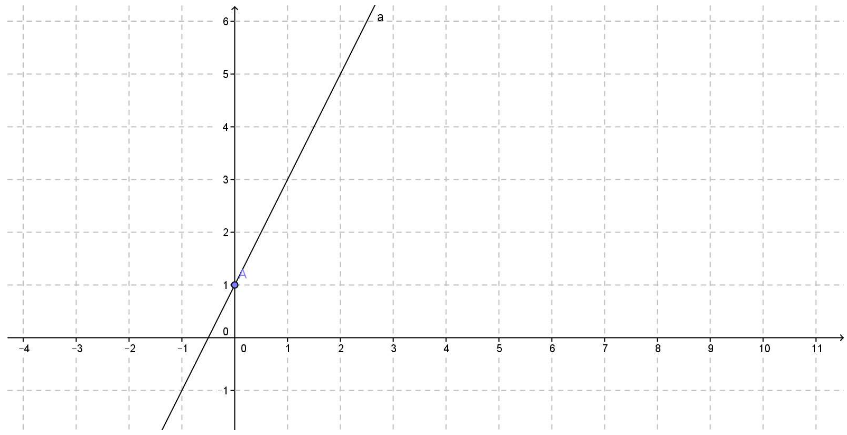
помощью пара
(см. § 1, п. 4).
6. Уравнение
го чтобы решить
строить график
ния с осью Ox

Пример 7. Построить график функции $y = 2x + 1$ и описать ее свойства.

Решение. Функция $y = 2x + 1$ – линейная, следовательно, графиком функции является прямая линия. Для построения прямой достаточно найти значения абсцисс и ординат двух точек:

x	0	-3
y	1	-5





Перечислим свойства функции $y = 2x + 1$:

1) Область определения $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$ (график функции ничем не ограничен по оси абсцисс ни слева, ни справа).
2) Множество значений $E(f) = (-\infty;\ +\infty)$ (график функции ничем не ограничен по оси ординат ни сверху, ни снизу).
3) Функция не является четной (график не симметричен относительно оси абсцисс), не является нечетной (график не симметричен относительно начала координат) и не является периодической (её значения не повторяются через определенные равные промежутки).
4) Функция монотонно возрастает на всей области определения (график функции «идет» снизу верх слева направо).
5) Единственным нулем функции является точка $(-0{,}5;\ 0)$ (в ней график функции пересекает ось абсцисс).
6) Промежутки знакопостоянства: $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty;\ 0{,}5)$ (график функции находится выше оси абсцисс), $f(x) < 0$ при $x \in (0{,}5;\ +\infty)$ (график функции располагается ниже оси абсцисс).

4.9.4 Коэффициент k характеризует угол, который образует прямая $y = kx$ с положительным направлением оси Ox (рис. 24), поэтому k называется угловым коэффициентом. Если $k > 0$, то этот угол острый; если $k < 0$ – тупой; если $k = 0$, то прямая совпадает с осью Ox.

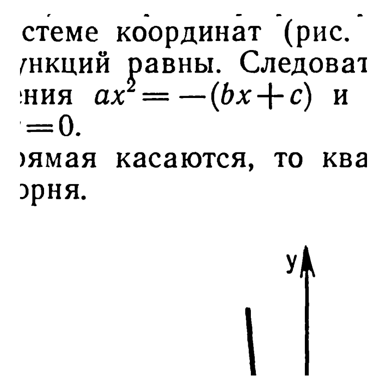
4.9.5 Уравнение вида $kx + b = 0$ называется линейным. Для того чтобы решить линейное уравнение графически, достаточно построить график функции $y = kx + b$ и найти точку его пересечения с осью Ox.

1.10 Квадратичная функция и ее график

4.10.1 Функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, где x, y – переменные, а a, b и c – заданные числа, причем $a \neq 0$, называется квадратичной.

4.10.2 Областью определения квадратичной функции является множество действительных чисел R.

4.10.3 Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх; если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз. Осью симметрии параболы служит прямая $x = -\dfrac{b}{2a}$.



4.10.4 Координаты вершины параболы определяются по формулам: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0) = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

4.10.5 Кроме координат вершины при построении графика квадратичной функции находят еще 2-3 дополнительные точки. Для этого, как правило, берут 2-3 значения переменной x справа от вершины и находят для них значения y. Остальные точки строят симметрично найденным относительно оси симметрии.

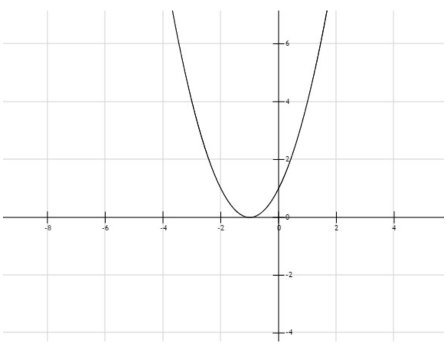
Пример 8. Построить график функции $y = x^2 + 2x + 1$ и описать ее свойства.

Решение. Функция $y = x^2 + 2x + 1$ является квадратичной, её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх (так как старший коэффициент $a = 1 > 0$). Для построения графика достаточно найти координаты вершины параболы и двух-трех дополнительных точек справа от вершины, остальные точки могут быть построены симметрично данным:

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2 \cdot 1} = -\dfrac{2}{2} = -1$, $\quad y_0 = f(x_0) = f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$. Таким образом, координаты вершины $(-1;\ 0)$. Найдем координаты дополнительных точек:

x	-1	0	1
y	0	1	4

График функции имеет вид:



С помощью графика функции опишем свойства функции:

1) Область определения $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$ (график функции ничем не ограничен по оси абсцисс ни слева, ни справа).
2) Множество значений $E(f) = [0;\ +\infty)$ (график функции ограничен по оси ординат снизу вершиной параболы).
3) Функция не является четной (график не симметричен относительно оси абсцисс), не является нечетной (график не симметричен относительно начала координат) и не является периодической (её значения не повторяются через определенные равные промежутки).

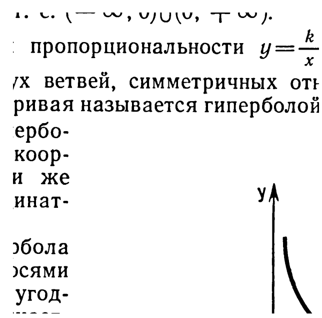
4) Функция возрастает на интервале $x \in \left(-1;\ +\infty\right)$ (график функции «идет» снизу верх слева направо). Функция убывает на интервале $x \in \left(-\infty;\ -1\right)$ (график функции «идет» сверху вниз слева направо).
5) Единственным нулем функции является точка $\left(-1;\ 0\right)$ (в ней график функции касается оси абсцисс).
6) Промежутки знакопостоянства: $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty;\ +\infty)$ (график функции находится выше оси абсцисс).

1.11 Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график

4.11.1 Если переменная y пропорциональна переменной x, то эта зависимость выражается формулой $y = kx$, где $k \neq 0$ – коэффициент пропорциональности. Графиком этой функции является прямая.

4.11.2 Если переменная y обратно пропорциональна переменной x, то эта зависимость выражается формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$ – коэффициент обратной пропорциональности.

4.11.3 Область определения функции $y = \frac{k}{x}$ есть множество всех чисел, отличных от нуля, то есть $\left(-\infty;\ 0\right) \cup \left(0;\ +\infty\right)$.



4.11.4 Графиком обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ является кривая, состоящая из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Такая кривая называется гиперболой (рис. 35). Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях; если $k < 0$, то во II и в IV координатных четвертях.

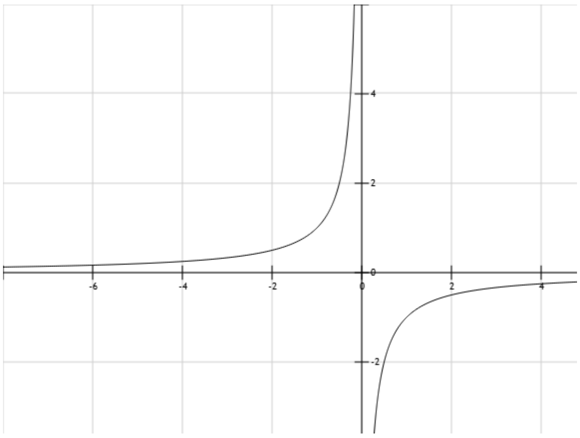
4.11.5 Гипербола не имеет общих точек с осями координат, а лишь сколь угодно близко к ним приближается.

Пример 9. Построить график функции $y = -\frac{1}{x}$ и описать ее свойства.

Решение. Функция $y = -\frac{1}{x}$ похожа на обратную пропорциональность $y = \frac{1}{x}$. Знак «–» означает, что график функции $y = \frac{1}{x}$ будет симметрично отображен относительно оси абсцисс. Графиком обратной пропорциональности является гипербола, расположенная в I и III координатной четвертях, следовательно, гипербола, соответствующая исходной функции $y = -\frac{1}{x}$ будет располагаться во II и IV координатных четвертях. Гиперболу строим по точкам, при этом достаточно найти координаты точек для одной ветви гиперболы, а вторую ветвь гиперболы построить симметрично относительно начала координат.

x	0,5	1	2	4
y	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$

График функции $y = -\frac{1}{x}$:

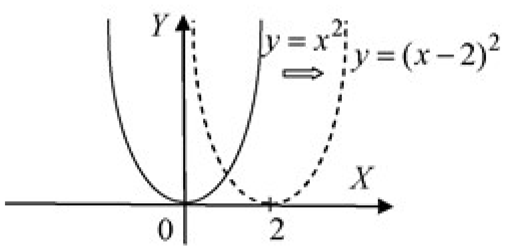
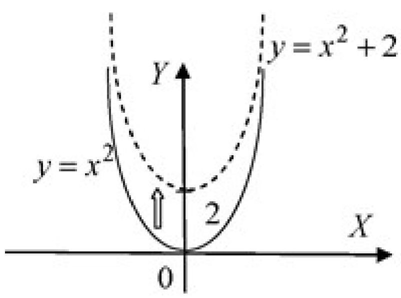


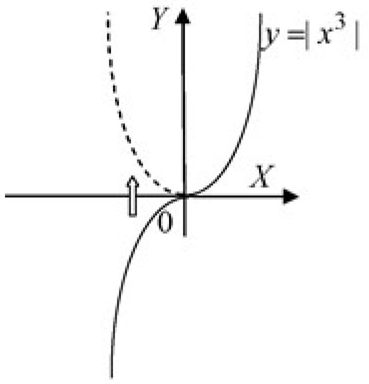
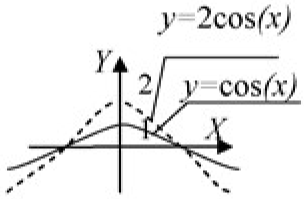
С помощью графика функции опишем свойства функции:

1) Область определения $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ (график функции не проходит через точки с абсциссой 0, так как на 0 делить нельзя).
2) Множество значений $E(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ (график функции не проходит через точки с ординатой 0, так как при делении на 0 результат получить нельзя).
3) Функция не является четной (график не симметричен относительно оси абсцисс), *но является нечетной (график симметричен относительно начала координат)* и не является периодической (её значения не повторяются через определенные равные промежутки).
4) Функция возрастает на каждом из промежутков области определения (график функции «идет» снизу верх слева направо в каждой из своих частей).
5) Нулей функция не имеет(график функции неограниченно приближается к каждой из осей, но не пересекает их).
6) Промежутки знакопостоянства: $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ (график функции находится выше оси абсцисс). $f(x) < 0$ при $x \in (0;\ +\infty)$ (график функции располагается ниже оси абсцисс).

1.12 Построение графика функции путем сдвига и деформации другой известной функции

Правила построения графиков функций сдвигами и деформациями графиков известных функций и их примеры

Правила построения графиков функций	**Пример**
y = f(x + a) - сдвиг графика y = f(x) на |a| единиц вдоль оси OX (вправо, если a > 0, и влево, если a < 0)	
y = f(x) + b - сдвиг графика y = f(x) на |b| единиц вдоль оси OY (вверх, если b > 0, и вниз, если Ь < 0)	

y=|ƒ(x)| - зеркальное отражение графика y = ƒ(x) от оси OX для x < 0	
y = kƒ(x) - растяжение (сжатие) графика y = ƒ(x) вдоль оси OY в k раз (1/k раз) при к > 1 (при 0 < k < 1)	
y = ƒ(mx) - сжатие (растяжение) графика по оси OX в m раз (1/m раз) при m > 1 (при 0 < m < 1)