Раздел 4. Применение производной функции к решению задач.

4.1 Понятие дифференциала.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если существует такое число A, что приращение Δy этой функции в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента, представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x_1 \qquad (2.1)$$

Где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0. При этом главная, линейная относительно Δx, часть этого приращения, т.е. $A \cdot \Delta x$, называется дифференциалом функции в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$.

Нетрудно показать (положив *y*=*x* в формуле (2.1)), что $dx=\Delta x$.
Функция *f(x)* дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$; при этом $A=f'(x_0)$. Поэтому $df(x_0)= f'x_0)dx$, или, если *f'(x)* существует на данном интервале *(a;b)*, то

$$dy= f'(x)dx, \quad x \in (a; b).$$

Отсюда $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, т.е. производная функции $y = f(x)$ в точке *x* равна отношению дифференциала этой функции в данной точке к дифференциалу независимой переменной.

Если приращение Δx аргумента *x* близко к нулю (т.е. достаточно мало), то приращение Δy функции приближенно равно ее дифференциалу, т.е. $\Delta y \approx dy$, откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{df(x0)}$$

Последняя формула удобна для приближенного вычилсения значения функции в точке по известному значению этой функции и ее производной в точке x_0.

4.2 Геометрический смысл и свойства дифференциала

Геометрически (см.рисунок 82) приращение функции *f(x)* в точке *x* – есть приращение ординаты точки кривой *(Δy=AC)*, а дифференциал *dy* функции в этой точке – приращение ординаты соответствующей точки на касательной *(dy=AB)*.

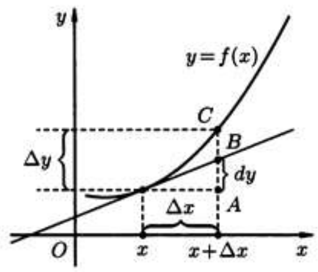

Рис. 82

Пусть *u(x)* и *v(x)* – некоторые функции, дифференцируемые в точке *x*. Тогда:

1. *dC=0*, где *C* – константа.

2. $d(\alpha u) = \alpha \cdot du,$ где $\alpha -$ константа.

3. $d(u \pm v) = du \pm dv.$

4. $d(u \cdot v) = udv + vdu.$

5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu-udv}{v^2}$, где $v(x) \neq 0$

6. Инвариантность формы дифференциала. Если $y = f\big(u(x)\big)$ – сложная функция, то

$$df(u) = f'(u)du, \text{ или } dy = y'_u \cdot du,$$

Т.е. форма дифференциала не меняется(инвариантна) независимо от того, рассматривается *y* как функция независимой переменной *x* или зависимой переменной u.

4.3. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция *y=f(x)* дифференцируема на интервале *(a,b)*. Тогда, как известно, в каждой точке этого интервала определен дифференциал *dy=f'(x)dx* функции *f(x)*, называемый также дифференциалом первого порядка (или первым дифференциалом).

Опр. Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) от функции *y=f(x)* в точке $x \in (a,b)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции *f(x)* в этой точке.

Дифференциал второго порядка обозначается d^2y или $d^2f(x)$. Таким образом, $d^2y = d(dy)$. Учитывая, что $dy = f'(x)dx$, где dx – не зависящая от *x* константа, получим

$$d^2y = f''(x)(dx)^2, \text{ или более кратко, } d^2y = f''(x)dx^2.$$

Аналогично определяются дифференциалы третьего и более порядков: $d^3y = d(d^2y), d^4y = d(d^3y)$, ...В общем случае, дифференциалом n-го порядка от функции *f(x)* в точке *x* называется дифференциал от дифференциала *(n-1)*-го порядка функции *f(x)* в этой точке:

$$d^my = d(d^{m-1}y),$$

Т.е. $d^my = f^{(n)}(x)(dx)^n$,или, более кратко, $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$. Отсюда следует, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}, \text{ в частности } f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Заметим, что для дифференциалов высших порядков свойство инвариантности (как для дифференциалов первого порядка) не имеет места.

Пример1 Найти дифференциал функции $y = e^{x^3}$.
Так как $dy = y'dx$,то в данном случае $dy = \left(e^{x^3}\right)'dx = 3x^2 \cdot e^{x^3}dx$.

Пример2 Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - 3x + 1$ в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0{,}1$. Сначала найдем приращение Δy в общем виде:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = [(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1] - (x^2 - 3x + 1) =$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - x^2 + 3x - 1 = 2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2 =$$
$$= (2x-3)\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Из полученного выражения для приращения Δy видно, что его линейная часть в произвольной точке x_0 равна $(2x_0 - 3)\Delta x$. Тогда по определению дифференциал данной функции будет равен *dy=(2x-3)*Δ*x*, или, в более привычной записи, *dy=(2x-3)dx.*

Второе слагаемое в полученной записи для Δ*y*, т.е. $(\Delta x)^2$, есть бесконечно малая более высокого порядка, чем первое слагаемое.

Заметим, что можно найти *dy* и сразу (без вычислений Δ*y*) по формуле *dy=y'dx*, откуда

$dy = (x^2 - 3x + 1)'dx = (2x-3)dx$. Теперь найдем Δy и dy в точке $x_0 = 2$ если $\Delta x = 0{,}1$:

$\Delta y = (2 \cdot 2 - 3) \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 0{,}1 + 0{,}01 = 0{,}11, \qquad dy = 0{,}1.$

Пример3 Вычислить приближенно: 1) $\ln 1{,}02$; 2) $\sqrt{24}$

<u>1.</u> Воспользуемся приближенной формулой $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$
Тогда подставляя $f(x)=lnx$, получим $\ln(x_0+\Delta x)\approx \ln x_0+\frac{1}{x_0}\cdot\Delta x$
Полагая здесь $x_0=1$, $\Delta x=0{,}02$, найдем $\ln 1{,}02\approx \ln 1+\frac{1}{1}\cdot 0{,}02=0{,}02.$
Таким образом, $ln1{,}02\approx 0{,}02.$

<u>2.</u> Учитывая, что $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=25$, $\Delta x=-1$, получим $\sqrt{x_0+\Delta x}\approx\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot\Delta x$, т.е. $\sqrt{24}\approx\sqrt{25}+\frac{1}{2\sqrt{25}}\cdot(-1)=4{,}9.$ Окончательно $\sqrt{24}\approx 4{,}9.$

Пример4 Найти dy, d^2y и d^3y для функции $y=\sqrt[3]{x}$.
Поскольку $dy=y'dx=\left(\sqrt[3]{x}\right)'dx=\frac{1}{3}x^{-2/3}dx=\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$, то

$d^2y = d(dy) = d\left(\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)'(dx)^2 = \frac{1}{3}(x^{-2/3})'dx = -\frac{2}{9}x^{-5/3}dx^2 = -\frac{2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$.

Отсюда $d^3y=d(d^2y)=d\left(-\frac{2}{9}\frac{dx^2}{x^{5/3}}\right) = -\frac{2}{9}\left(x^{-5/3}\right)'dx^3 = \frac{10}{27}x^{-8/3}dx^3 = \frac{10dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$

Ир же самое можно было найти иначе, предварительно отыскав производные y', y'' и y''', а затем воспользоваться формулами: $d^2y=y''dx^2$, $d^3y=y'''dx^3$.

4.4. Теоремы о среднем. Правила Лопиталя. Формулы Тейлора.

Теоремы о среднем:

<u>*Теорема Ролля.*</u> Пусть функция *f(x)* непрерывна на отрезке *[a;b]*, дифференцируема на интервале *(a;b)* и принимает на концах отрезка равные значения (т.е. *f(a)=f(b)*). Тогда существует по крайней мере одна точка *c* на интервале *(a;b)* для которой *f'(c)=0*.

<u>*Теорема Лагранжа.*</u> Пусть функция *f(x)* непрерывна на отрезке *[a;b]* и дифференцируема на интервале *(a;b)*. Тогда на интервале *(a;b)* найдется такая точка *c*, что *f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)*.

<u>*Теорема Коши.*</u> Пусть функция *f(x)* и *g(x)* непрерывны на отрезке *[a;b]* и дифференцируемы на интервале *(a;b)*, причем $g'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a;b)$. Тогда найдется такая точка с на этом интервале, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

Правила Лопиталя

<u>Первое правило Лопиталя</u>. Пусть функции *f(x)* и *g(x)* дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 кроме, быть может, самой этой точки, и $g'(x)\neq 0$ для всех $x\in U(x_0)$, $x\neq x_0$ Тогда если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ (в этом случае говорят, что в точке x_0 имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$) и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$,

$$\text{причем}\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Второе правило Лопиталя</u>. Пусть функция *f(x)* и *g(x)* дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, и $g'(x)\neq 0$ для $\forall x\in U(x_0), x\neq x_0$. Тогда если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ (т.е. в точке x_0 имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$) и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Если отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ в свою очередь представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ то правило Лопиталя (при условии выполнения соответствующих ограничений на функции $f'(x)$ и $g'(x)$ можно применять второй раз и т.д.

Формула Тейлора

Пусть функция *f(x)* имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные $f', f'', \dots, f^{(n)}$. Тогда для любой точки x из этой окрестности имеет место равенство

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \circ((x - x_0)^n) \text{ при } x \to x_0$$

Эта формула называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*.
Последнее слагаемое (т.е. остаточный член) в формуле Тейлора иногда записывают в виде $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ (в этом случае надо дополнительно предполагать существование $f^{(n+1)}(x)$ в данной окрестности точки x_0). Соответствующая формула тогда называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*. В случае $x_0 = 0$ формула Тейлора принимает вид $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \circ(x^n), \quad x \to 0$ и называется *формулой Маклорена*.
Полезно помнить разложения по формуле Маклорена некоторых важнейших элементарных функций:

$$\boldsymbol{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n)}$$

$$\boldsymbol{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ\left(x^{2n+2}\right),}$$

$$\boldsymbol{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \circ\left(x^{2n+1}\right),}$$

$$\boldsymbol{\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + \circ(x^n),}$$

$$\boldsymbol{(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - (n - 1))}{n!}x^n + \circ(x^n)}$$

Пример5 Найти пределы, используя правило Лопиталя: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x - \sin x}$

1. Поскольку $\ln\sin 3x$ и $\ln x$ стремятся к бесконечности при $x \to 0$, то в данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin 3x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{3x \cdot \cos 3x}{\sin 3x} = 3\lim_{x\to 0}\cos 3x \cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\frac{\sin 3x}{x})} = 3 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}} = 1$$

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

2. $\lim\limits_{x\to 0}x^3 = \lim\limits_{x\to 0}(x - \sin x) = 0$, поэтому имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x - \sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^3)'}{(x - \sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(3x^2)'}{(1 - \cos x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x} = 6 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = 6$.
В этом примере правило Лопиталя применялось дважды.

Пример6 Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1})$

1. Здесь имеет место неопределенность вида $0 \cdot \infty$, которую мы раскроем, предварительно сведя ее к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$; а далее воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+0}x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0+0}\frac{(\frac{1}{x})}{(-\frac{1}{x^2})} = -\lim_{x\to 0+0}x = 0$$

2. Имеем неопределенность $\infty - \infty$. Сведем ее к неопределенности $\frac{0}{0}$, приведя дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-lnx}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\frac{1}{x})'}{(\ln x+1-\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

Правило лопиталя в этом примере применялось дважды.

Пример7 Найти пределы: 1) $\lim_{x\to 0} x^x$ 2) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$

1. В этом случае имеем неопределенность вида 0^0. Неопределенности этого вида, также как и неопределенности вида 1^∞, ∞^0 можно найти , предварительно вычислив предел от логарифма функции. Итак, обозначим $y=x^x$ Тогда $\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\ln(x^x)=\lim_{x\to 0}x\ln x=0$ (*Пример 6*)
Таким образом, $\ln\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\ln y=0$, откуда $\lim_{x\to 0}y=1$, т.е. $\lim_{x\to 0}x^x=1$

2. Здесь неопределенность вида 1^∞. Обозначив $y=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$, найдем $\lim_{x\to 0}\ln y$:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\cos x))'}{x'}=\lim_{x\to 0}(-\operatorname{tg}x)=0$$

Отсюда $\ln\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\ln y=0$, т.е. $\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1$

Пример8 Разложить многочлен $P(x)=x^4-x^3+5x^2-4x+1$ по степеням *x-1*, используя формулу Тейлора. Так как $P^{(n)}(x)\equiv 0$ при $n\geq 5$, то в разложении данного многочлена по формуле Тейлора будут только слагаемые вида $\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)$, где $k\leq 4$

Поэтому $P(x)=P(1)+\frac{P'(1)}{1!}(x-1)+\frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{P^{(IV)}(1)}{4!}(x-1)^4$

Учитывая, что *P(1)=2, P'(1)=7, P''(1)=16, P'''(1)=18,* $P^{IV}(1)=24$, получим окончательно

$$P(1)=2+7(x-1)+8(x-1)^2+3(x-1)^3+(x-1)^4$$

4.5. Исследование функций и построение графиков.

Условия монотонности функции

Если функция *f(x)* дифференцируема на интервале *(a;b)*[1] и для любого *x* из интервала *(a;b)* выполнено неравенство $f'(x)>0(f'(x)<0)$ то f(x) возрастает (соответственно убывает) на этом интервале.

Условие же $\forall x\in(a;b)\colon f'(x)\geq 0(f'(x)\leq 0)$ равносильно тому, что функция f(x) не убывает (соответственно, не возрастает) на интервале (a;b), т.е. $\forall x_1,x_2\in(a;b)$из $x_1<x_2$ следует $f(x_1)\leq f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1)\geq f(x_2)$) .

Экстремумы функции

Точка x_0 называется точкой локального максимума (локального минимума), если существует такая окрестность $U(x_0)$ этой окрестности, что $f(x)\leq f(x_0)$ $\forall x\in U(x_0)$, $x\neq x_0$ (соответственно, $f(x)\geq f(x_0)$, $\forall x\in U(x_0)$, $x\neq x_0$)

Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума, а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

Теорема Ферма (необходимое условие экстремума). Если x_0 – точка локального экстремума для функции *f(x)*, то в этой точке производная функции либо равна нулю ($f'(x_0) = 0$), либо не существует.

Точки области определения непрерывной функции *f(x)*, в которых ее производная не существует или равна нулю, называются критическими точками функции.

В силу теоремы Ферма экстремумы функции находятся среди ее критических точек.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть функция f(x) имеет в точке x_0 и дифференцируема в некоторой ее окрестности (кроме, быть может, самой точки x_0). Тогда, если *f'(x)* меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 = точка локального экстремума(если с «+» на «-» - локальный максимум, если же с «-» на «+» - локальный минимум)

Второе достаточное условие экстремума. Пусть функция *f(x)* имеет в точке x_0 производные первого и второго порядков. Тогда, если $f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка локального экстремума. В частности, если $f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума, а если $f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума.

Если $x_1, x_2, \dots, x_n$ – критические точки непрерывной на отрезке *[a;b]* функции *f(x)* то наибольшее и наименьшее значения этой функции есть соответственно наибольшее и наименьшее значения этой функции есть соответственно наибольшее и наименьшее из чисел $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots f(x_n), f(b)$.

Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба.

Функция *f(x)*, определенная на интервале *(a;b)*, называется выпуклой вверх(выпуклой вниз) на этом интервале, если точки любой дуги графика функции расположены выше (соответственно, ниже) хорды, стягивающей эту дугу (рис.83, а и б)

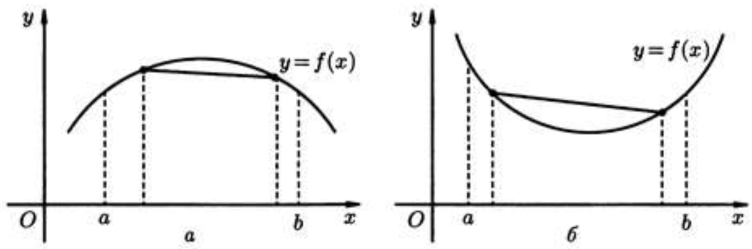

Рис. 83

Иногда выпуклость вверх (соответственно, выпуклость вниз) называют просто выпуклостью (соответственно, вогнутостью).

График выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале *(a;b)* функции также называют выпуклым вверх (соответственно, выпуклым вниз).

Можно дать другое, эквивалентное, определение выпуклости вверх (выпуклости вниз): функция *f(x)* называется выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале *(a;b)*, если график этой функции при $x \in (a; b)$ расположен ниже (соответственно, выше) касательной, проведенной в любой его точке (рис.84, а и б).

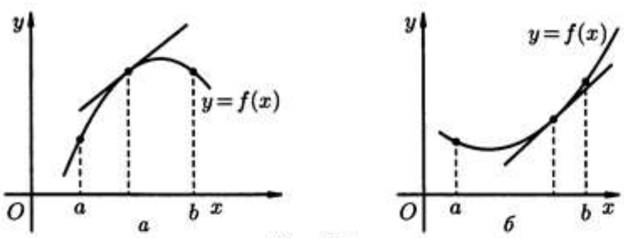

Рис. 84

Достаточное условие выпуклости вверх(вниз). Пусть функция f(x) имеет вторую производную на интервале (a;b). Тогда, если $f''(x) \leq 0$ (соответственно, $f''(x) \geq 0$) на этом интервале, то функция *f(x)* выпукла вверх(соответственно, выпукла вниз) на нем.

Пусть функция *f(x)* дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда если при переходе через точку x_0 функция меняет направление выпуклости, то эта точка называется точкой перегиба функции *f(x)*. Точка $(x_0, f(x_0))$ при этом называется точкой перегиба графика функции *f(x)* (рис.85, а и б).

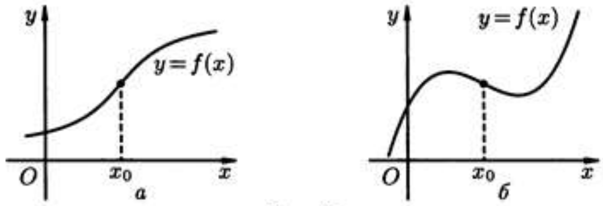

Рис. 85

Необходимое условие точки перегиба. Если x_0 - точка перегиба функции f(x), то в этой точке вторая производная функция либо равна нулю $(f''(x_0) = 0)$, либо не существует.

Точки, в которых вторая производная функции равна нулю или не существует, называются критическими точками 2-го рода.

Точки перегиба следует искать среди критических точек 2-го рода.
Первое достаточное условие точки перегиба. Пусть функция f(x) непрерывна в точке x_0 и имеет вторую производную в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может, самой точки x_0). Тогда если при переходе через точку x_0вторая производная меняет знак, то x_0 - точка перегиба.

Второе достаточное условие точки перегиба. Пусть в точке x_0 функция *f(x)* имеет производные до третьего порядка включительно. Тогда если $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 - точка перегиба этой функции.

Асимптоты

Прямая линия *m* называется асимптотой графика функции $y = f(x)$ если расстояние *d* от точки *M*, лежащей на этом графике, до прямой *m* стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику от начала координат в бесконечность (рис.86 а, б и в.).

Приведенное здесь наглядное описание асимптоты не является, вообще говоря, строгим математическим определением.

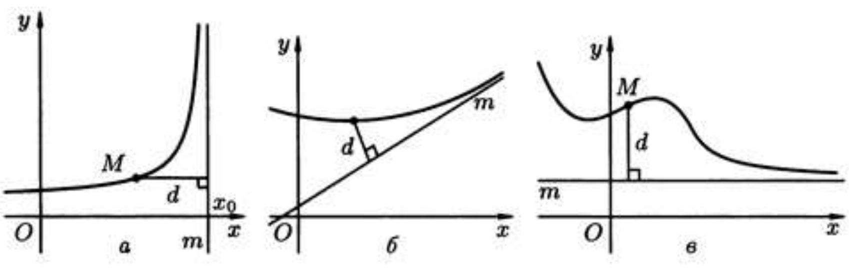

Рис. 86

Асимптоты бывают трех видов: вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции *f(x)*, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ равен бесконечности (рис.86 а).

Прямая *y=kx+b* называется наклонной асимптотой графика функции *f(x)* при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (kx + b)\big) = 0$ (соответственно, $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - (kx + b)\big) = 0$) (рис.86 б)

Прямая y=kx+b является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b$$

(Соответственно, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = b$)

Частным случаем наклонной асимптоты (при k=0) является горизонтальная асимптота (рис.86 в).

Прямая y=b является горизонтальной асимптотой графика функции *f(x)* при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ (соответственно $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$).

Построение графиков функций

При построении графика функции целесообразно пользоваться следующей схемой:

1) Найти область определения функции
2) Исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность
3) Найти участки непрерывности функции, а также точки разрыва с указанием вида разрыва
4) Найти точки пересечения графика с осями координат
5) Найти интервалы знакопостоянства функции
6) Найти асимптоты
7) Найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции
8) Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба

Пример9 Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 = 6x^2 + 5$.
Функция определена на всей числовой оси, а ее производная равна $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3(x-2)(x+2)$. Функция *f(x)* возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x) > 0$, т.е. $(x-2)(x+2) > 0$, откуда $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. Аналогично, данная функция убывает в точности когда $f'(x) < 0$, т.е. $(x-2)(x+2) < 0$, откуда $x \in (-2; 2)$.
Таким образом, функция *f(x)* возрастает на интервалах $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$, а убывает на интервале (-2;2).

Пример10 Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$.
Функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой, причем $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x-1)(x-5)$. Критические точки $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Воспользуемся вторым достаточным условием экстремума, для чего найдем *f ''(1)* и *f ''(5):*

$$f''(x) = 6x - 18 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -12, \ f''(5) = 12$$

Поскольку $f'(1) = 0$, а $f''(1) < 0$, то $x = 1$ - точка локального максимума, причем *f(1)=7.*
Аналогично, так как $f'(5) = 0$, а $f''(5) > 0$, то $x = 5$ - точка локального минимума, а $f(5) = -25$

Пример11 Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
Функция определена и дважды дифференцируема на всей действительной оси. Находим вторую производную: $f''(x) = \frac{6\left(x^2-\frac{1}{3}\right)}{(x^2+1)^3}$. Отсюда получим: функция выпукла вверх тогда и только тогда, когда $f'' < 0$, т.е. $x^2 - \frac{1}{3} < 0$, или $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Функция выпукла вниз тогда и только тогда, когда $x^2 - \frac{1}{3} > 0$, т.е. $x \in (-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$. Таким образом, функция выпукла вверх на $(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$, выпукла вниз на $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и на $(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$. Откуда ясно, что точки $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ являются точками перегиба данной функции.

Пример12 Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.
Функция непрерывна всюду, кроме точки *x=1*, в которой она терпит разрыв второго рода, причем $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x-1} = +\infty$. Отсюда следует, что прямая *x=1* – вертикальная асимптота и других вертикальных асимптот нет.

Проверим, есть ли у графика функции наклонные асимптоты. Находим $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1} = 1$, откуда $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1} = 0.$
Таким образом прямая *y=x* – наклонная асимптота графика функции при $x \to +\infty$. Аналогично получим, что эта прямая является наклонной асимптотой и при $x \to -\infty$.
Поскольку угловой коэффициент k наклонной асимптоты не равен нулю, то график функции не имеет горизонтальных асимптот.

Пример13 Провести полное исследование функции $y = \frac{x^3}{4-x^2}$ и построить ее график.
Область определения *D(f)* функции – вся числовая ось, за исключением точек *x=-2* и *x=2*, т.е. $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$. Функция непериодическая, исследуем ее на четность и нечетность: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = -\frac{x^3}{4-x^2} = -f(x)$. Следовательно, данная функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. Поэтому далее исследуем функцию только при $x \geq 0$. Найдем точки пересечения графика с осями координат: с осью *Oy* график пересекается при *x=0*, откуда *y=f(0)=0*, т.е. *M(0;0)* – точка пересечения с осью *Oy*; с осью *Ox* график пересекается, если *f(x)=0*, т.е. $\frac{x^3}{4-x^2} = 0$, откуда *x=0*. Таким образом, *M(0;0)* – единственная точка пересечения графика с осями координат. Находим интервалы знакопостоянства функции:

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^3}{4-x^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(4-x^2) > 0$$

И так как мы рассматриваем только случай $x \geq 0$, то получаем $0 < x < 2$.
Аналогично $f(x) < 0$ при $x > 2$. Далее $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{x^3}{4-x^2} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{x^3}{4-x^2} = -\infty$
Т.е. прямая *x=2* – вертикальная асимптота. Отсюда, в силу симметрия, следует, что прямая *x=2* – также вертикальная асимптота. Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4-x^2} = -1$$
$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{4-x^2} + x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{4-x^2} = 0$$

Т.е. прямая y=-x – наклонная асимптота при $x \to +\infty$ (то же и при $x \to -\infty$)ю Горизонтальных асимптот график не имеет. Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции, исследуя первую производную:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{4-x^2}\right)' = \frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2(2\sqrt{3}-x)(2\sqrt{3}+x)}{(4-x^2)^2}$$

Отсюда видно, что при $x \geq 0$ (рис.87) функция имеет максимум в точке $x = 2\sqrt{3}$ $\left(\text{при чем } f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} \approx -5{,}2\right)$ возврастает на $(0; 2)$ и $\left(2; 2\sqrt{3}\right)$
и убывает на $(2\sqrt{3}; +\infty)$

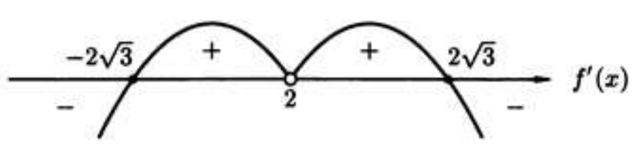

Рис. 87

Чтобы определить интервала выпуклости и точки перегиба, вычислим вторую производную:

$$f''(x) = \frac{8x(12 + x^2)}{(4 - x^2)^3}$$

Отсюда ясно, что при $x \geq 0$ функция выпукла вверх (т.е. $f'' < 0$) на $(2; +\infty)$ и выпукла вниз (т.е. $f'' > 0$) на $(0; 2), x = 0$ – точка перегиба.

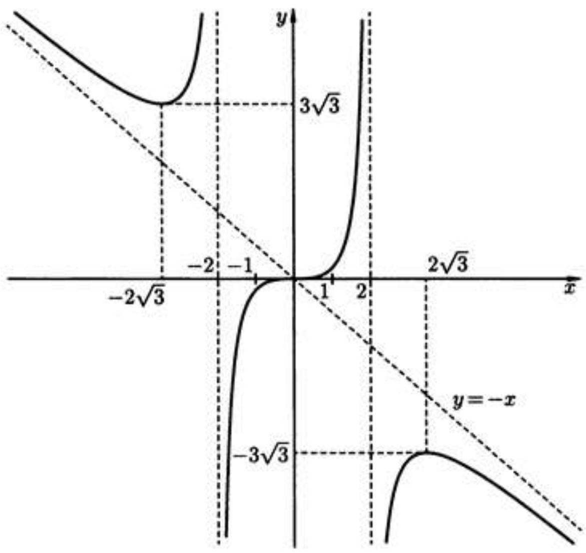

Рис. 88

Учитывая накопленную информацию, сторим график функции при $x \geq 0$, а затем симметрично отражаем его относительно начала координат. (рис.88)