Многочлены.

Многочленом от неизвестного *X* над множеством *P* называют сумму целых неотрицательных степенней неизвестного *X* с коэффициентами из множества *P*.

Пример: $f(\tilde{o}) = 2\tilde{o}^6 - 3\tilde{o}^3 + 4\tilde{o} - 1$ f(x) – многочлен шестой степени

$f(\tilde{o}) = 3\tilde{o}^4 - 4\tilde{o}^{-3} + 5\tilde{o}^{-2} + 4$ – не многочлен

$f(\tilde{o}) = 4\tilde{o}^3 - 5\tilde{o}^{\frac{1}{2}} + 8$ – не многочлен

Два многочлена от неизвестного *x* над множеством *P* называются равными, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного.

Чтобы сложить два многочлена, нужно сложить коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного.

Пример: Найти сумму многочленов $\eth(\tilde{o})$ и $q(\tilde{o})$, если $\eth(\tilde{o}) = 2\tilde{o}^3 + 3\tilde{o}^2 - 4\tilde{o} + 5$, $q(\tilde{o}) = 7\tilde{o}^3 - 3\tilde{o}^2 - 9$.

$\eth(\tilde{o}) + q(\tilde{o}) = (2\tilde{o}^3 + 3\tilde{o}^2 - 4\tilde{o} + 5) + (7\tilde{o}^3 - 3\tilde{o}^2 - 9) = (2+7)\tilde{o}^3 + (3-3)\tilde{o}^2 + (-4)\tilde{o} + (5-9) = 9\tilde{o}^3 - 4\tilde{o} - 4$.

При умножении многочлена $\eth(\tilde{o})$ на многочлен $q(\tilde{o})$ просто раскрывают скобки, руководствуясь правилом $\grave{A}\tilde{o}^{\ddot{i}} \times \hat{A}\tilde{o}^{\grave{o}} = (\grave{A} \times \hat{A})\tilde{o}^{\ddot{i}+\grave{o}}$, и приводят подобные слагаемые.

Пример: Найти произведение многочленов $\eth(\tilde{o})$ и $q(\tilde{o})$, если $\eth(\tilde{o}) = 2\tilde{o}^3 + 5\tilde{o}^2 + 4\tilde{o} + 3$, $q(\tilde{o}) = 7\tilde{o}^2 + 6$.

$\eth(\tilde{o})q(\tilde{o}) = (2\tilde{o}^3 + 5\tilde{o}^2 + 4\tilde{o} + 3)(7\tilde{o}^2 + 6) = 2\tilde{o}^3 \cdot 7\tilde{o}^2 + 2\tilde{o}^3 \cdot 6 + 5\tilde{o}^2 \cdot 7\tilde{o}^2 + 5\tilde{o}^2 \cdot 6 + 4\tilde{o} \cdot 7\tilde{o}^2 + 4\tilde{o} \cdot 6 + 3 \cdot 7\tilde{o}^2 + 3 \cdot 6$
$= 14\tilde{o}^5 + 12\tilde{o}^3 + 35\tilde{o}^4 + 30\tilde{o}^2 + 28\tilde{o}^3 + 24\tilde{o} + 21\tilde{o}^2 + 18 = 14\tilde{o}^5 + 35\tilde{o}^4 + 40\tilde{o}^3 + 51\tilde{o}^2 + 24\tilde{o} + 18$.

Решить уравнение – это значит найти такие значения неизвестного *x*, при которых многочлен, стоящий в левой части уравнения обращается в «0».

I. Наибольший общий делитель Алгоритм Евклида

Задача № 1. С помощью алгоритма Евклида найти наибольший общий делитель многочленов:
$f(\tilde{o}) = \tilde{o}^5 + 3\tilde{o}^4 - 12\tilde{o}^3 - 52\tilde{o}^2 - 52\tilde{o} - 12$ и $\phi(\tilde{o}) = \tilde{o}^4 + 3\tilde{o}^3 - 6\tilde{o}^2 - 22\tilde{o} - 12$.

Замечание. Наибольший общий делитель двух многочленов находится однозначно с точностью до постоянного множителя, поэтому условились в качестве наибольшего общего делителя многочленов брать тот, у которого старший коэффициент равен 1. Так как постоянные множители не влияют на делимость многочленов, то в процессе применения алгоритма Евклида, чтобы исключить дробные коэффициенты, можно делимые и делители умножить на любое, отличное от нуля, число.

Решение: Разделим с остатком многочлен $f(\tilde{o})$ на многочлен $\phi(\tilde{o})$. Процесс деления будем осуществлять «углом».

$x^5+3x^4-12x^3-52x^2-52x-12$	$x^4+3x^3-6x^2-22x-12$
$x^5+3x^4-6x^3-22x^2-12x$	X
$-6x^3-30x^2-40x-12$	

Итак, $r_1(\tilde{o}) = -6\tilde{o}^3 - 30\tilde{o}^2 - 40\tilde{o} - 12$.

Делим $\phi(\tilde{o})$ на $r_1(\tilde{o})$. Чтобы избежать дробных коэффициентов, умножим $\phi(\tilde{o})$ на 3, а $r_1(\tilde{o})$ на $-\frac{1}{2}$

$3\phi(\tilde{o}) = 3\tilde{o}^4 + 9\tilde{o}^3 - 18\tilde{o}^2 - 66\tilde{o} - 36$

$-\frac{1}{2}r_1(\tilde{o}) = 3\tilde{o}^3 + 15\tilde{o}^2 + 20\tilde{o} + 6$.

$3x^4+9x^3-18x^2-66x-36$	$3x^3+15x^2+20x+6$
$3x^4+15x^3+2x^2+6x$	$x-2$
$-6x^3-38x^2-72x-36$	
$-6x^3-30x^2-40x-12$	
$-8x^2-32x-24$	

Имеем: $r_2(\tilde{o}) = -8\tilde{o}^2 - 32\tilde{o} - 24$

Делим $-\frac{1}{2}r_1(\tilde{o})$ на $-\frac{1}{8}r_2(\tilde{o})$.

$3x^3+15x^2+20x+6$	x^2+4x+3
$3x^3+12x^2+9x$	$3x+3$
$3x^2+11x+6$	
$3x^2+12x+9$	
$-x-3$	

Получили, что $r_3(\tilde{o}) = -\tilde{o} - 3$. Умножив $r_3(\tilde{o})$ на -1, делим $\tilde{o}^2 + 4\tilde{o} + 3$ на $\tilde{o} + 3$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^2+4x+3 & x+3 \\ \cline{2-2}
x^2+3x & x+1 \\ \cline{1-1}
x+3 & \\
x+3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Таким образом, четвертый остаток $r_4(\tilde{o})$ равен нулю. Значит наибольший общий делитель многочленов f(x) и φ(x) равен x+3.

Ответ: D(f(x),φ(x))=x+3.

Задача №2 Пользуясь алгоритмом Евклида подобрать полиномы u(x) и v(x) так, чтобы

f(x)u(x)+φ(x)v(x)=d(x),

где d(x)=D(f(x),φ(x)),

$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$,

$\varphi(x)=x^3+x^2-x-1$.

При решении данного примера используют алгоритм Евклида, но этот произвол, состоящий в умножении многочленов на постоянные множители, допускать нельзя, так как здесь используются и частные, которые при данном произволе искажаются.

Найдем сначала наибольший общий делитель многочленов f(x) и φ(x).

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+x^3-3x^2-4x-1 & x^3+x^2-x-1 \\ \cline{2-2}
x^4+x^3-x^2-x & x \\ \cline{1-1}
-2x^2-3x-1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+x^2-x-1 & -2x^2-3x-1 \\ \cline{2-2}
x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \\ \cline{1-1}
-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1 & \\
-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4} & \\ \cline{1-1}
-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-2x^2-3x-1 & -\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} \\ \cline{2-2}
-2x^2-2x & -\frac{8}{3}x-\frac{4}{3} \\ \cline{1-1}
-x-1 & \\
-x-1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Итак, $d(x)= x+1= -\frac{4}{3}\, r_2(x)$.

Чтобы выразить d(x) через многочлены f(x) и φ(x), выпазим сначала через них $r_2(x)$. Для этого найдем $r_2(x)$ из второго деления в алгоритме Евклида: $r_2(x)= \varphi(x) - r_1(x)\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

Подставив в это равенство вместо $r_1(x)$ его выражение, найденное из первого деления в алгоритме Евклида, получим:

$r_2(x)= \varphi(x) -(f(x) - \varphi(x)x)\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)= - f(x)\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + \varphi(x)\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x+1\right)= f(x)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)+ +\varphi(x)\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x+1\right)$

Учитывая, что $d(x)= -\frac{4}{3}\, r_2(x)$ имеем:

$$d(x) = f(x)\left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) + \varphi(x)\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right)$$

Получим, что $u(x)= \left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)$

$v(x)=\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right)$

2. Корни многочлена. Теорема Безу. Схема Горнера.

Задача №1

Найти кратность корня x=5 многочлена

$f(x) = x^5 - 15x^4 + 76x^3 - 140x^2 + 75x - 125.$

Число c называется корнем многочлена f(x), если f(c)=0.
Теорема. Число c тогда и только тогда является корнем многочлена f(x), когда f(x) ⋮ (x – c).

Число c называется k-кратным корнем многочлена f(x), если $f(x) ⋮ (x-c)^k$, но f(x) не делится на $(x-c)^{k+1}$.

Решение: Используя схему Горнера.

	a_0	a_1	a_2	…	a_n
c	$b_0=a_0$	$b_1=a_1+cb_0$	$b_2=a_2+cb_1$	…	$b_n=a_n+cb_{n-1}=f(c)$

Имеем:

	1	-15	76	-140	75	-125
5	1	-10	26	-10	25	0

Получим, что $f(x)=(x-5)(x^4-10x^3+26x^2-10x+25)$.
Число 5 является корнем f(x). Если 5 будет корнем и $\varphi(x)=x^4-10x^3+26x^2-10x+25$, то 5 будет корнем многочлена f(x) второй кратности или выше.
Проверим, будет ли 5 корнем φ(x) по схеме Горнера:

	1	-10	26	-10	25
5	1	-5	1	-5	0

φ(5)=0, следовательно, 5 – корень φ(x).
$f(x)=(x-5)^2(x^3-5x^2+x-5)$
Проверим, будет ли число 5 корнем многочлена $g(x)=x^3-5x^2+x-5$

	1	-5	1	-5
5	1	0	1	0

Число 5 является корнем g(x), отсюда имеем:
$g(x)=(x-5)(x^2+1)$, а $f(x)=(x-5)^3(x^2+1)$.
Число 5 корнем многочлена x^2+1 уже не является, следовательно, $f(x) ⋮ (x-5)^3$ но не делится на $(x-5)^4$, значит кратность корня 5 многочлена f(x) равна 3.
Процесс решения можно оформить следующим образом:

	1	-15	76	-140	75	-125
5	1	-10	26	-10	25	0
5	1	-5	1	-5	0	
5	1	0	1	0		
5	1	5	26≠0			

Число 5 являются трехкратным корнем многочлена
$f(x)=x^5-15x^4+76x^3-140x^2+75x-125$ т.е.
$f(x)=(x-5)^3(x^2+1)$.
Задача №2
Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен f(x)=x5+3x4+2x-4 по степени x-1, найти значения многочлена f(x) и всех его производных при x=1.
Решение: По формулам Тейлора имеем:
$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{f^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4+\frac{f^{V}(1)}{5!}(x-1)^5$ – разложение многочлена f(x) по степеням x-1.
Как видно из формулы, для решения задачи нужно найти значения многочлена f(x) и его производных при x=1. Это можно сделать, непосредственно находя производные многочлена f(x), а затем их значения при x=1.
Но для решения этой задачи можно использовать также и схему Горнера.
Запишем разложение многочлена f(x) по степеням (x-1) с неопределенными коэффициентами:
$f(x)=c_0+c_1(x-1)+c_2(x+1)^2+c_3(x+1)^3+c_4(x+1)^4+c_5(x+1)^5$.
Числа $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ равны соответственно остаткам от деления многочленов $f(x), q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x), q_5(x)$ на x-1, где $q_1(x)$ есть частное от деления f(x) на x-1, $q_2(x)$ есть частное от деления $q_1(x)$ на x-1 и т.д. Наконец $q_5(x)$ есть частное от деления $q_4(x)$ на x-1.
Все решение можно записать в таблицу:

	1	3	0	0	2	-4
1	1	4	4	4	6	2
1	1	5	9	13	19	
1	1	6	15	28		
1	1	7	22			
1	1	8				
1	1					

Отсюда: f(1)=2, $\frac{f'(1)}{1!}$ = 19, $\frac{f''(1)}{2!}$ = 28, $\frac{f'''(1)}{3!}$ = 22, $\frac{f^{IV}(1)}{4!}$ = 8, $\frac{f^{V}(1)}{5!} = 1$, тогда f(1)=2, $f'(1) = 19$, $f''(1) = 56$, $f'''(1) = 132$, $f^{IV}(1)$=192, $f^{V}(1) = 120$.

Подставляем найденные значения в формулу Тейлора, имеем:
$f(x)=2+19(x-1) + 28(x+1)^2 + 22(x+1)^3 + 8(x+1)^4 + (x+1)^5$.

3. Приводимые и неприводимые многочлены над множеством.

Задача №1

Разложить многочлен $f(x)=x^6-1$ на неприводимые множители над множеством рациональных , действительных и комплексных чисел.

Для рациональных, действительных и комплексных чисел обозначаются соответственно через Q, R,C.

Над множеством C неприводимы лишь полиномы первой степени, поэтому всякий многочлен n-ой степени разлагается над C на n линейных множителей. Над множеством R неприводимы полиномы первой степени ,и часть полиномов второй степени ,а именно те, дискриминант которых меньше нуля. Над множеством рациональных чисел Q могут быть неприводимыми любой степени.

Решение: Найдём сначала разложение над множеством C.

$X^6-1=(x^2)^3-1^3=(x^2-1)(x^4+x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$.

Чтобы разложить многочлен x4+x2+1 не приводимые множители над C, найдём его корни.x4+x2+1=0.Обозначим x2=y,тогда y2+y+1=0.

$y = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$;

$y_1 = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, $y_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$;

$x^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $x^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы извлечь корень из числа $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

Представим его в тригонометрической форме:$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$.

Тогда $\sqrt{\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2r\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2r\pi}{2}$.

При r=0 получим $x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

При r=1 получим $x_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Аналогично $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

$\sqrt{\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2r\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2r\pi}{2}$;

При r=0 получим $x_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

При r=1 получим $x_4 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Получим, что $x^4+x^2+1 = (x-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Тогда разложение многочлена x^6-6 над множеством C имеет вид: $x^6-6=(x-1)(x+1)(x-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$ $(x+\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Найдём разложение данного многочлена над множеством действительных чисел R.Для этого в полученном разложении перемножим множители , соответствующие сопряжённым корням.
Перемножим третий и шестой множители: $(x-\frac{1}{2}- i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1}{2}+ i\frac{\sqrt{3}}{2})=(x-\frac{1}{2})^2-(i\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = (x^2-x+1)$.

Аналогично перемножим четвёртый и пятый множители: $(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}- i\frac{\sqrt{3}}{2}) =$

$(x+\frac{1}{2})^2-\iota(i\frac{\sqrt{3}}{2})^2= (x^2+x+1)$.

Отсюда имеем разложение многочлена x^6-6 на неприводимые множители над множеством R: $x^6-6=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.
Это же разложение имеет многочлен $\varphi(\chi)= x^6-1$ и над множеством рациональных чисел.

Задача №2

Разложить многочлен $f(X)=x^4+10$ на неприводимые множители над множествами C, R, Q.
Решение: чтобы найти разложение многочлена над множеством C, найдём его корни. Для этого извлечём корень четвёртой степени из -10.
$\sqrt[4]{-10} =\sqrt[4]{10(\cos\pi + i\sin\pi)} =\sqrt[4]{10}(\cos\frac{\pi+2r\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2r\pi}{4})$.Придавая r значения 0,1,2,3, получим четыре корня :
$X_1 = \sqrt[4]{10}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$, $X_1 = \sqrt[4]{10}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$, $X_1 = \sqrt[4]{10}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$, $X_1 = \sqrt[4]{10}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$.
Теперь можно записать разложение многочлена $f(x) = x^4+10$ над множеством C : $x^4+10 = (x - \frac{\sqrt[4]{40}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}) (x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}) (x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}) (x - \frac{\sqrt[4]{40}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})$.Перемножая первый и четвёртый множители ,а затем второй и третий, получим разложение многочлена f(x) над множеством :
$(x - \frac{\sqrt[4]{40}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}) (x - \frac{\sqrt[4]{40}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}) =(x - \frac{\sqrt[4]{40}}{2})^2 - (i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})^2 =x^2-\sqrt[4]{40}x+\sqrt{10}$.
$(x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}) (x = \frac{\sqrt[4]{40}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}) =(x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2})^2 - (i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})^2 =x^2+\sqrt[4]{40}x+\sqrt{10}$.
$x^4+10 = (x^2-\sqrt[4]{40}x+\sqrt{10})(x^2+\sqrt[4]{40}x+\sqrt{10})$.
Над множеством рациональных чисел Q данный многочлен неприводим, так как существует простое число p=2 /или 5/,на которое первый коэффициент 1 не делится ,все остальные коэффициенты делятся, а свободный член 10,делится на 2 ,не делится на 2^2
/критерий Эйзенштейна/.

4. Многочлены над множеством действительных чисел.

Задача №1

Построить полином наименьшей степени над множеством действительных чисел со старшим коэффициентом a0=2,имеющий следующие корни : -1- двукратный ,(3-i) – простой корень.
Решение: Известно ,что если многочлен f(X) с действительными коэффициентами имеет комплексный корень a+вi, то он имеет также корень a-вi, т.е. комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены. Следовательно, корнем искомого многочлена f(X) должно быть такое число 3+i .
Так как нужно построить многочлен наименьшей степени с корнями -1 ,-1, 3+i, 3-I,то можно сделать вывод ,что f(X) будет иметь четвёртую степень. Учитывая что старший коэффициент $a_0=2$, находим:
$f(X)=2(X+1)^2(X-3+i)(x-3-i)=2(x^2+2x+1)(x^2-6x+10)=2x^4-8x^3-2x^2+28x+20$.
Для решения этой задачи можно использовать и форму Виета.
Искомый многочлен имеет вид:
$F(X)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$.
Если $\alpha1, \alpha2, \alpha3, \alpha4$ его корни ,то $\alpha1+\alpha2+\alpha+\alpha4= -\frac{a1}{a0}$,

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4= -a_1/a_0$,
$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4=a_2/a_3$,
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4= - a_3/a_0$,
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = a_4/a_0$.
В нашем случае $\alpha_1= -1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 3-i$, $\alpha_4 = 3+i$; $a_0 = 2$.
Тогда $-1+(-1)+3-i-3+3-i= -a_1/2$. Отсюда $a_1= -2$;
$1-3+i-3-i-3+i-3-i+10= a_1/2$, $a_3 = 28$;

$10 = a_4/2$, $a_4 = 20$.
$F(x) = 2x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 28x + 20$.

5. Уравнения третьей и четвёртой степени

Заадача№1

Решить уравнение третьей степени по формуле Кардано:
$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

Решение :Приведём уравнение к виду , не содержащему второй степени неизвестного. Для этого воспользуемся формулой
$x = y - \frac{a}{3}$, где а коэффициент при x^2.

Имеем : $x = y + 1$.
$(y+1)^3 - 3(y+1)^2 - 3(y+1) - 1 = 0$.
Раскрыв скобки и приведя подобные члены ,получим:
$y^3 - 6y - 6 = 0$.
Для корней кубического уравнения $y^3 + py + q = 0$ имеется формула Кардано:
$y_i = \alpha i + \beta i$ (i=1,2,3,),где $\alpha i -$ значение радикала

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q2}{4} + \frac{p3}{27}}}, \quad \beta i = -\frac{p}{3\alpha i}.$$

Пусть $\alpha 1$ –одно /любое/ значение радикала α. Тогда два других значения находятся следующим образом:

$\alpha_2 = \alpha_1\varepsilon_1$, $\alpha_3 = \alpha_1\varepsilon_2$, где $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ - корень третьей степени из единицы.

Если положить $\beta_1 = -\frac{p}{3\alpha 1}$, то получим $\beta_2 = \beta_1\varepsilon_2$, $\beta_3 = \beta_1\varepsilon_1$

Подставляя полученные значение в формулу $y_i = \alpha i + \beta i$,найдём корни уравнения
$y_i + py + q = 0$:
$y_1 = \alpha_1 + \beta_1$,
$y_2 = -1/2(\alpha_1 + \beta_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1 - \beta_1)$,
$y_3 = -1/2(\alpha_1 + \beta_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1 - \beta_1)$,
В нашем случае $p = -6$, $q = -6$.

$$\alpha = \alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q2}{4} + \frac{p3}{27}}} = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 - (\frac{6}{3})^3}} = \sqrt[3]{4}$$

Одно из значений этого радикала равно $\sqrt[3]{4}$. Поэтому положим $\alpha_1 = \sqrt[3]{4}$. Тогда $\beta_1 = -\frac{p}{3\alpha 1} = -\frac{-6}{3\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2}$,

$y_1 = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$,
$y_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})$,
$y_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})$.

Наконец, находим значение x по формуле $x = y + 1$.
$x_1 = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$,
$x_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}) + 1$,
$x_3 = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}) + 1$.

Задача№2

Решить способом Феррари уравнение четвёртой степени :
$x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$.
Решение: Перенесём три последних члена в правую часть и оставшиеся два члена дополним до полного квадрата .
$x^4 - 4x^3 = -2x^2 + 4x - 1$,
$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 4x^2 - 2x^2 + 4x - 1$,

$(x^2-2x)^2=2x^2+4x-1$.
Введём новое неизвестное следующим образом:
$(x^2-2x+\frac{y}{2})^2=2x^2+4x-1+(x^2-2x)y+\frac{y2}{4}$,
$(x^2-2x+\frac{y}{2})^2=(2+y)x^2+(4-2y)x+(\frac{y2}{4}-1)$ /1/.

Подберём y так, чтобы и правая часть равенства была полным квадратом .Это будет тогда ,когда $B^2-4AC=0$, где $A=2+y$, $B=4-2y$, $C=\frac{y2}{4}-1$.

Имеем:$B^2-4AC=16-16y+4y^2-y^3-2y^2+4y+8=0$
Или $y^3-2y^2+12y-24=0$.
Мы получили кубическую резольвенту ,одним из корней которой является y=2. Подставим полученное значение y=2 в /1/,
Получим $(x^2-2x+1)^2=4x^2$.Откуда $(x^2-2x+1)^2-(2x)^2=0$ или $(x^2-2x+1-2x)(x^2-2x+1+2x)=0$.
Мы получим два квадратных уравнения:
$x^2-4x+1=0$ и $x^2+1=0$.
Решая их, находим корни первоначального уравнения:
$x_1=2-\sqrt{3}$, $x_2=2+\sqrt{3}$, $x^3=-I$, $x^4=i$.

6.Рациональные корни многочлена

Задача№1

Найти рациональные корни многочлена
$f(x)=8x^5-14x^4-77x^3+128x2+45x-18$.

Решение :Для того, чтобы найти рациональные корни многочлена ,пользуемся следующими теоремами.

Теорема 1. Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена f(x) с целыми коэффициентами ,то p есть делитель свободного члена, а q- делитель старшего коэффициента многочлена f(x).

Замечание: Теорема 1 даёт необходимое условие для того, чтобы рациональное число $\frac{p}{q}$**.** Было корнем многочлена ,но этого условия недостаточно , т.е. условие теоремы 1 может выполняться и для такой дроби $\frac{p}{q}$, которая не является корнем многочлена.

Теорема 2: Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена f(x) с целыми коэффициентами, то при любом целом m ,отличном от $\frac{p}{q}$, число f(m) делится на число p-qm, т.е $\frac{f(m)}{p-qm}$ целое число.

В частности полагая m=1, а затем m=-1, получим:
если $\frac{p}{q}$ корень многочлена, не равный ±1,то f(x) $\vdots$ (p-q) и f(-x):.(p+q) , т.е. $\frac{f(1)}{p-q}$, $\frac{f(-1)}{p+q}$ - целые числа.

Замечание: Теорема 2 даёт ещё одно необходимое условие для рациональных корней многочлена. Это условие удобно тем, что оно легко проверяется практически. Находим сначала f(1) и f(-1), а затем для каждой испытываемой дроби проверяем указанное условие. Если хотя бы одно из чисел $\frac{f(1)}{p-q}$, $\frac{f(-1)}{p+q}$ дробное, то $\frac{p}{q}$ корнем многочлена f(x) не является.

Решение: По теореме 1 корни данного многочлена следует искать среди несократимых дробей, числители которых являются делителями 18, а знаменателями 8. Следовательно, если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ есть корень f(x), то p равно одному из чисел : ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18; q равно одному из чисел
±1, ±2,±4, ±8.

Учитывая, что $\frac{-p}{-q}=\frac{p}{q}$, $\frac{p}{-q}=\frac{-p}{q}$, знаменатели дробей будем брать лишь положительными.

Итак, рациональными корнями данного многочлена могут быть следующие числа: ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{9}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{3}{4}$, $\pm\frac{9}{4}$, $\pm\frac{1}{8}$, $\pm\frac{3}{8}$, $\pm\frac{9}{8}$.

Воспользуемся вторым необходимым.

Так как $f(1)=72$, $f(-1)=120$,отсюда в частности следует, что 1 и -1 не являются корнями $f(x)$. Теперь для каждой возможной дроби $\frac{p}{q}$ будем проверять условия теоремы 2 при $m=1$ и $m=-1$, т. е. будем устанавливать, целыми или дробными являются числа : $\frac{f(1)}{p-q} = \frac{72}{p-q}$ и $\frac{f(-1)}{p+q} = \frac{120}{p+q}$

Результаты сведём в таблицу, где буквы”ц” и “д” означают соответственно, целым или дробным является число $\frac{f(1)}{p-q}$ или $\frac{f(-1)}{p+q}$

P	2	-2	3	-3	6	-6	9	-9	18	-18	1	-1	3	-3	9	-9	1	-1	3	-3	9	-9	1	-1	3	-3	9	-9
Q	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8	8	8
$\frac{72}{p-q}$	ц	ц	ц	ц	д	д	ц	д	д	д	ц	ц	ц	д	д	д	ц	д	ц	д	д	д	д	ц	д	д	ц	д
$\frac{120}{p+q}$	ц	ц	ц	ц			ц				ц	ц	ц				ц		д					д			д	

Из полученной таблицы видно, что $\frac{72}{p-q}$ и $\frac{120}{p+q}$ являются целыми лишь в тех случаях, когда $\frac{p}{q}$ равно одному из чисел: 2, -2, 3, -3, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$.

По следствию из теоремы Безу число α- корень $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x) \vdots (x-\alpha)$.
Следовательно, для проверки оставшихся девяти целых чисел можно применить схему Горнера деление многочлена на двучлен.

	8	-14	-77	128	45	-18
2	8	2	-73	-18	9	0
2	8	18	-37	-92	-172≠0	

2 – корень.
Отсюда имеем : $x=2$ – простой корень $f(x)$. Остальные корни данного многочлена совпадают с корнями многочлена.
$F_1(x) = 8x^4+2x^3-73x^2-18x+9$.
Аналогично проверим остальные числа.

	8	2	-73	-18	9
-2	6	-14	-45	72	-139≠0
3	8	26	5	-3	0
3	8	50	155	462≠0	
-3	8	2	-1	0	
-3	8	-22	65≠0		
9	8	74	665≠0		
½	8	6	2≠0		
-1/2	8	-2	0		
-1/2	8	6≠0			
3/2	8	10≠0			
1/4	8	0			

-2 – не корень, 3 – корень, -3 –корень, 9 – не корень, ½ - не корень , -1/2 –корень, 3/2 – не корень, ¼ - корень.
Итак, многочлен $f(x)= 8x^5-14x^4-77x^3+128x^2+45x-18$ имеет пять рациональных корней:{2, 3, -3, -1/2, ¼}.