

Раздел 5. Линии второго порядка

Линии, определяемые алгебраическими уравнениями второй степени относительно переменных x и y , т.е. уравнениями вида $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ (5.1), называются *кривыми второго порядка*.

5.1 Окружность

Окружностью называется множество всех точек плоскости, удалённых от заданной точки A этой же плоскости на одно и то же расстояние $R > 0$.

Точка A называется *центром*, а R – *радиусом* окружности.

В прямоугольной системе координат уравнение окружности имеет вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (5.2)$$

где $(a; b)$ – координаты её центра, (рис. 31). Уравнение (5.2) называется **каноническим уравнением окружности**. В частности, если $a=0$ и $b=0$ (т.е. центр окружности совпадает с началом координат), то уравнение (5.2) имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (5.3)$$

Общее уравнение второй степени (5.1) определяет окружность, если $A = C \neq 0$ и $B = 0$.

Пример 5.1. Найти координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$.

Решение: выделяя полные квадраты в левой части данного уравнения, приведём его к виду (5.2): $x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 8y + 16 - 16 - 16 = 0$, т.е. $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 6^2$. Центр окружности находится в точке $(2; -4)$, а радиус равен 6.

Пример 5.2. Написать уравнения касательных к окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$, проведённых из точки $M(0; 3)$.

Решение. Уравнения касательных будем искать в виде уравнения прямых с угловыми коэффициентами: $y = kx + b$. Так как прямая проходит через точку M , то её уравнение принимает вид $y = kx + 3$. Уравнение окружности приведём к каноническому виду (5.2): $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$. Для нахождения общих точек прямой и окружности решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = kx + 3, \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 = 25. \end{cases}$$

Имеем $(x-3)^2 + (kx+3+2)^2 = 25$, т.е. $x^2 - 6x + 9 + k^2x^2 + 10kx + 25 = 25$, поэтому $(k^2+1)x^2 + (10k-6)x + 9 = 0$. Так как прямая касается окружности, то это уравнение имеет единственное решение. Следовательно, его дискриминант равен нулю, т.е. $(5k-3)^2 - 9(k^2+1) = 0$, или $16k^2 - 30k = 0$, откуда $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{15}{16}$. Значит, $y = 3$ и $y = \frac{15}{16}x + 3$ – искомые уравнения.

Пример 5.3. Написать уравнение окружности, проходящей через точки: $(-1; 3)$, $(0; 2)$, $(-1; 1)$.

Уравнение окружности ищем в виде (5.2).

Подставляя в это уравнение координаты точек, получим три уравнения для определения неизвестных величин:

$$\begin{cases} (-1-a)^2 + (3-b)^2 = R^2, \\ a^2 + (2-b)^2 = R^2, \\ (1-a)^2 + (-1-b)^2 = R^2. \end{cases}$$

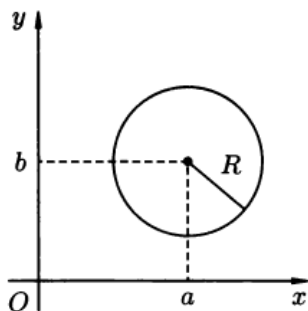


Рис. 31

Из первых двух уравнений получаем $(-1-a)^2 + (3-b)^2 = a^2 + (2-b)^2$, т.е. $1 + 2a + a^2 + 9 - 6b + b^2 = a^2 + 4 - 4b + b^2$, поэтому $a - b = -3$; из второго и третьего уравнений системы получаем: $a^2 + (2-b)^2 = (1-a)^2 + (-1-b)^2$, отсюда $a - 3b = -1$. Решая систему уравнений $\begin{cases} a - b = -3, \\ a - 3b = -1 \end{cases}$, находим $a = -4$, $b = -1$. Подставляя эти значения a и b во второе уравнение первоначальной системы, находим: $16 + 9 = R^2$, т.е. $R^2 = 25$. Искомое уравнение: $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Заметим, что уравнение окружности можно искать в виде $x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$. Так как данные три точки принадлежат окружности, то, подставив их координаты в записанное уравнение, получим систему трёх уравнений:

$$\begin{cases} 10 - 2D + 6E + F = 0, \\ 4 + 4E + F = 0, \\ 2 + 2D - 2E + F = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдём, $D = 4$, $E = 1$, $F = -8$ и искомое уравнение окружности $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0$.

5.2 Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой же плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса с центром в начале координат:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.4)$$

где a — большая полуось, b — малая полуось эллипса. Координаты фокусов: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, где c — половина расстояния между фокусами (рис. 32). Числа a , b и c связаны соотношением

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (5.5)$$

Точки A , B , C и D — называются вершинами эллипса, точка O — центром эллипса, расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки M эллипса до его фокусов называются *фокальными радиусами* этой точки.

Эксцентриситетом ε эллипса называется отношение фокусного расстояния $2c$ (расстояние между фокусами) к

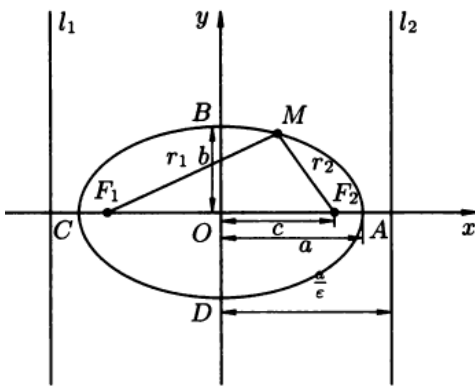


Рис. 32

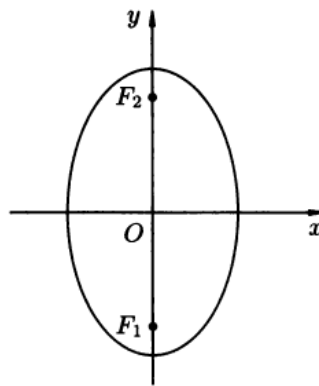


Рис. 33

большой оси $2a$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (\varepsilon < 1, \text{ т.к. } c < a). \quad (5.6)$$

Фокальные радиусы определяются формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x, \quad (r_1 + r_2 = 2a). \quad (5.7)$$

Директрисами эллипса называются прямые l_1 и l_2 , параллельные малой оси эллипса и отстоящие от неё на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$; уравнения директрис:

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \quad (5.8)$$

Замечания.

- 1) Если $a = b$, то уравнение (5.4) определяет окружность $x^2 + y^2 = a^2$;
 - 2) если фокусы эллипса лежат на оси Oy , то эллипс имеет вид, изображенный на рисунке 33.
- В этом случае:

$$b > a, \quad c^2 = b^2 - a^2, \quad (5.9)$$

$$\varepsilon = \frac{c}{b}, \quad (5.10)$$

уравнения директрис $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$;

- 3) уравнение эллипса с осями, параллельными координатным, имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (5.11)$$

где $(x_0; y_0)$ – координаты центра эллипса (рис. 34);

- 4) уравнения

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

являются параметрическими уравнениями эллипса.

Пример 5.4 Показать, что уравнение $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$ определяет эллипс, найти его оси, координаты центра и эксцентриситет.

Решение. Преобразуем данное уравнение кривой.

Так как $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 4(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 4y) - 32$, то дополним каждую скобку до полного квадрата: $4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3(y^2 + 4y + 4 - 4) - 32 = 4(x-1)^2 - 4 + 3(y+2)^2 - 12 - 32$, тогда исходное уравнение можно переписать в виде $4(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 48$. Разделим обе части уравнения на 48. Получим $\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$. Получили уравнение вида (5.11), его центр симметрии имеет координаты $(1; -2)$. Из уравнения находим: $a^2 = 12$, $a = 2\sqrt{3}$ и $b^2 = 16$, $b = 4$ ($b > a$). Поэтому $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}$.

Пример 5.5. Дано уравнение эллипса $4x^2 + 49y^2 = 1176$. Найти:

- 1) длины его полуосей;
- 2) координаты фокусов;
- 3) эксцентриситет эллипса;
- 4) уравнения директрис и расстояние между ними;
- 5) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса $F_1 = 12$.

Решение. Запишем уравнение эллипса в виде (5.4), разделив обе части на 1176: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$.

- 1) Отсюда $a^2 = 49$, $b^2 = 24$, т.е. $a = 7$, $b = 2\sqrt{6}$.
- 2) Используя соотношение (5.5), находим $c^2 = 7^2 - (2\sqrt{6})^2 = 25$, $c = 5$. Следовательно, $F_1(-5; 0)$ и $F_2(5; 0)$.
- 3) По формуле (5.6) находим: $\varepsilon = \frac{5}{7}$.

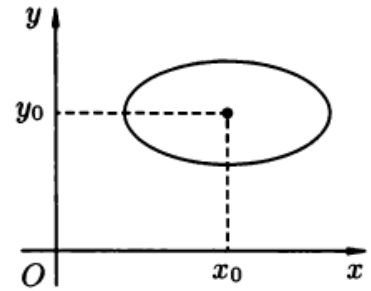


Рис. 34

4) Уравнения директрис (5.8) имеют вид $x = \pm \frac{7}{5}$, т. е. $x = \frac{49}{5}$ и $x = -\frac{49}{5}$; расстояние между

$$\text{ними } d = \frac{49}{5} - \left(-\frac{49}{5}\right) = \frac{98}{5} = 19,6.$$

5) По формуле $r_1 = a + \varepsilon x$ находим абсциссу точек, расстояние от которых до точки F_1 равно 12: $12 = 7 + \frac{5}{7}x$, т.е. $x = 7$.

Подставляя значения x в уравнение эллипса, найдём ординаты этих точек: $24 \cdot 49 + 49y^2 = 1176$, $49y^2 = 0$, $y = 0$. Условию задачи удовлетворяет точка $A(7; 0)$.

Пример 5.6. Составить уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(2; -4\sqrt{3})$ и $M_2(-1; 2\sqrt{15})$.

Решение. Уравнение эллипса ищем в виде (5.4).

Так как эллипс проходит через точки M_1 и M_2 , то их координаты удовлетворяют уравнению эллипса: $\frac{4}{a^2} + \frac{48}{b^2} = 1$ и $\frac{1}{a^2} + \frac{60}{b^2} = 1$. Умножая второе равенство на (-4) и складывая с первым, находим $-\frac{192}{b^2} = -3$, т.е. $b^2 = 64$. Подставляя найденное значение b^2 в первое уравнение, получаем $\frac{4}{a^2} + \frac{48}{64} = 1$, откуда $a^2 = 16$. Таким образом, искомое уравнение эллипса есть $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$.

Пример 5.7. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Oy , а малая ось равна $2\sqrt{3}$.

Решение. Каждый из фокусов равноудалён от центра эллипса и от ближайшего конца фокальной оси. Уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b > a$. По условию задачи $2a = 2\sqrt{3}$, т.е. $a = \sqrt{3}$, и $c = \frac{b}{2}$. Так как $c^2 = b^2 - a^2$ (5.9), то получаем: $\frac{b^2}{4} = b^2 - 3$, т.е. $b^2 = 4$. Таким образом, уравнение эллипса есть $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

5.3 Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек этой же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.12)$$

где a — действительная, b — мнимая полуось гиперболы. Числа $2a$ и $2b$ называются соответственно *действительной* и *мнимой* осями гиперболы. Координаты фокусов: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, c — половина расстояния между фокусами (рис.35). Числа a , b и c , связаны соотношением $c^2 = a^2 + b^2$. (5.13)

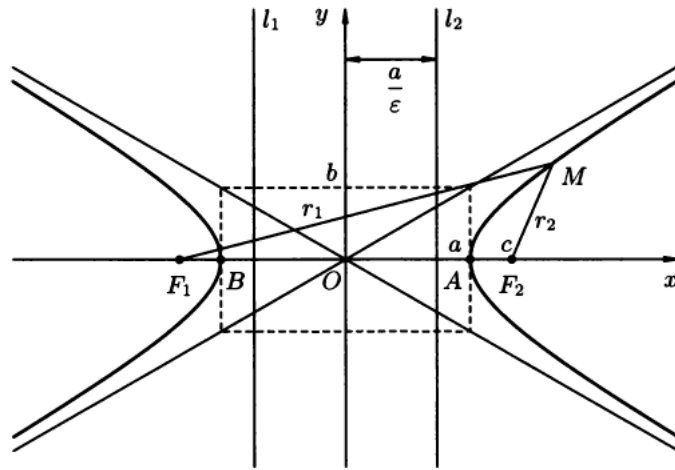


Рис. 35

Точки A и B называются вершинами гиперболы, точка O – центром гиперболы, расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки M гиперболы до её фокусов называются фокальными радиусами этой точки.

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ($\varepsilon > 1$, т.к. $c > a$). (5.14) называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Фокальные радиусы определяются формулами:

для точек правой ветви гиперболы: $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = -a + \varepsilon x$; (5.15)

для точек левой ветви: $r_1 = -a - \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$. (5.16)

Прямоугольник, центр которого совпадает с точкой O , а стороны равны и параллельны осям гиперболы, называется *основным прямоугольником* гиперболы. Диагонали основного прямоугольника гиперболы лежат на двух прямых, называемых *асимптотами* гиперболы; они определяются уравнениями

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \quad (5.17)$$

Две прямые l_1 и l_2 , параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от неё на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами* гиперболы.

Их уравнения: $x = \frac{a}{\varepsilon}$ и $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ (5.18)

Замечания.

1) Если $a = b$, то гипербола (5.12) называется *равносторонней (равнобочной)*. Её уравнение принимает вид $x^2 - y^2 = a^2$ (5.19)

2) если фокусы гиперболы лежат на оси Oy , то уравнение гиперболы имеет вид $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. (5.20)

Эксцентриситет этой гиперболы равен $\varepsilon = \frac{c}{b}$, асимптоты определяются уравнениями $y = \pm \frac{b}{a} x$, а уравнение директрис $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$. Гипербола называется *сопряжённой* гиперболе (5.12); она имеет вид, изображенный на рисунке 36.

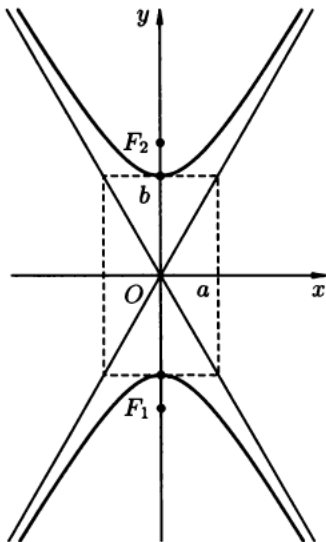


Рис. 36

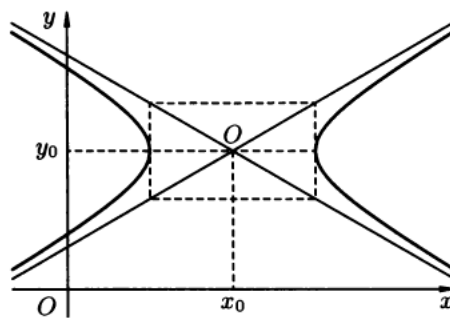


Рис. 37

3) уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным, имеет вид $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, (5.21) где $(x_0; y_0)$ – координаты центра гиперболы (рис. 37.)

Пример 5.8. Дано уравнение гиперболы $5x^2 - 4y^2 = 20$. Найти:

- 1) длины его полуосей;
- 2) координаты фокусов;
- 3) эксцентриситет гиперболы;
- 4) уравнение асимптот и директрис;
- 5) фокальные радиусы точки $M(3; 2,5)$.

Решение. Разделив обе части уравнения на 20, приведём уравнение гиперболы к каноническому виду (5.12):

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

Отсюда:

- 1) $a^2 = 4$, $b^2 = 5$, т.е. $a = 2$, $b = \sqrt{5}$;
- 2) Используя соотношение (5.13), находим $c^2 = 4 + 5$, т.е. $c = 3$. Отсюда находим фокусы гиперболы: $F_1(-3; 0)$ и $F_2(3; 0)$;
- 3) По формуле (5.14) находим $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
- 4) Уравнения асимптот и директрис найдём по формулам (5.17) и (5.18): $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$ и $x = \pm \frac{3}{2}$;
- 5) Точка M лежит на правой ветви гиперболы ($x = 3 > 0$), воспользуемся формулами (5.15): $r_1 = 2 + \frac{3}{2} \cdot 3 = 6,5$, $r_2 = -2 + \frac{3}{2} \cdot 3 = 2,5$.

Пример 5.9. Найти угол между асимптотами гиперболы, если её эксцентриситет равен 2.

Решение. Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y = \pm \frac{b}{a}x$. Найдём отношение $\frac{b}{a}$, воспользовавшись формулами (5.13) и (5.14) и условием $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Отсюда

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \varepsilon^2 - 1, \text{ т.е. } \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}. \text{ Имеем: } \frac{b}{a} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

Стало быть, уравнения асимптот гиперболы есть $y = \sqrt{3}x$ и $y = -\sqrt{3}x$. Угол ϕ между асимптотами найдём по формуле $\operatorname{tg} \phi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right| = \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 - 3} \right| = \sqrt{3}, \phi = 60^\circ$.

5.4 Парабола

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от заданной точки этой же плоскости, называемой *фокусом*, и заданной прямой, называемой *директрисой*.

Каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px, \quad (5.22)$$

где число $p > 0$, равное расстоянию от фокуса F до директрисы l , называется *параметром* параболы. Координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$. Точка $O(0; 0)$ называется *вершиной* параболы, длина r отрезка FM – *фокальным радиусом точки M* , ось Ox – *ось симметрии* параболы.

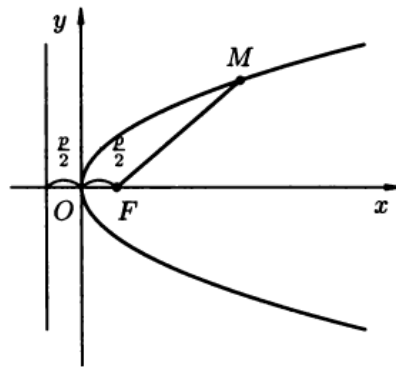


Рис. 39

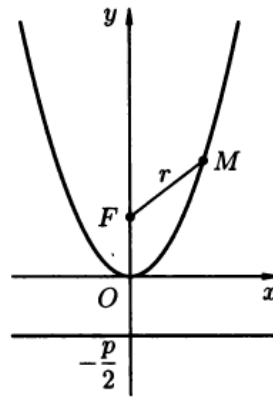


Рис. 40

Уравнение директрисы l параболы имеет вид $x = -\frac{p}{2}$ (3.23), фокальный радиус вычисляется по формуле $r = x + \frac{p}{2}$ (3.24).

В прямоугольной системе координат парабола, заданная каноническим уравнением (5.22), расположена так, как указано на рисунке 39.

Замечания.

1) Парабола, симметричная относительно оси Oy и проходящая через начало координат (рис. 40), имеет уравнение $x^2 = 2py$ (3.25).

Фокусом параболы (5.25) является точка $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ (3.26).

Уравнение директрисы этой параболы $y = -\frac{p}{2}$ (3.27).

Фокальный радиус точки M параболы $r = y + \frac{p}{2}$ (3.28).

2) На рисунках 41 и 42 изображены графики парабол $y^2 = -2px$ и $x^2 = -2py$ соответственно.

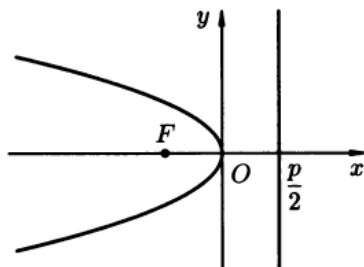


Рис. 41

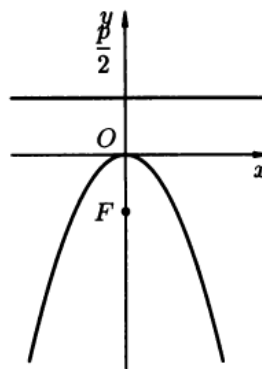


Рис. 42

3) На рисунках 43-46 приведены уравнения и графики парабол с осями симметрии, параллельными координатным осям.

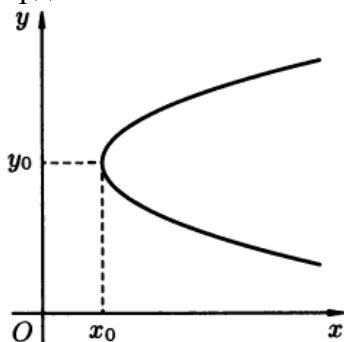


Рис. 43. $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

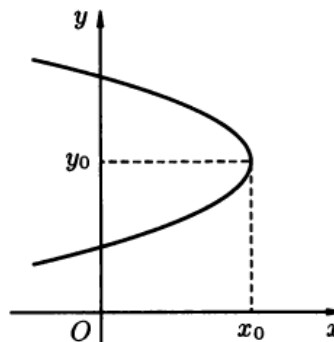


Рис. 44. $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$

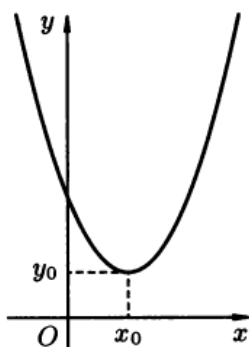


Рис. 45. $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

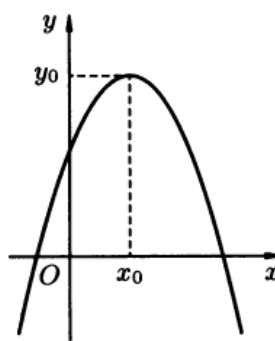


Рис. 46. $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$

Пример 5.10. Дана парабола $x^2 = 4y$. Найти координаты её фокуса, уравнение директрисы, длину фокального радиуса точки $M(4; 4)$.

Решение. Парабола задана каноническим уравнением (5.25). Следовательно, $2p = 4$, $p = 2$. Используя формулы (5.26), (5.27), (5.28) находим, что фокус имеет координаты $(0; 1)$, т.е. $F(0; 1)$; уравнение директрисы есть $y = -1$; фокальный радиус точки $M(4; 4)$ равен $r = 4 + 1 = 5$.

Пример 5.11. Найти вершину, фокус и директрису параболы $y = -2x^2 + 8x - 5$, построить эскиз графика.

Решение. Преобразуем уравнение $y = -2x^2 + 8x - 5$, выделив полный квадрат:

$$y = -2\left(x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right) = -2\left(x^2 - 4x + 4 - 4 + \frac{5}{2}\right) = -2\left((x-2)^2 - \frac{3}{2}\right) = -2(x-2)^2 + 3,$$

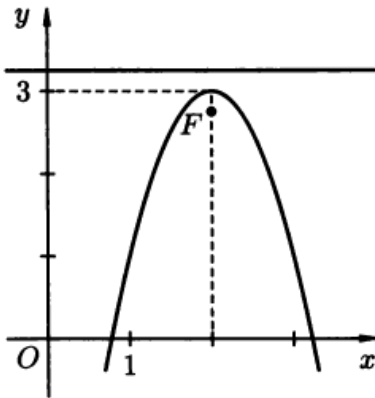


Рис. 47

т.е., $y = -2(x-2)^2 + 3$, или $(x-2)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)$. Уравнение параболы имеет вид, как на рис.46. Вершина параболы имеет координаты $(2; 3)$; $2p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$. Прямая $x = 2$ является осью симметрии параболы. Координаты фокуса $x = 2$, $y = 3 - \frac{1}{8} = 2\frac{7}{8}$, т.е. $F\left(2; 2\frac{7}{8}\right)$. Уравнение директрисы $y = 3 + \frac{p}{2} = 3 + \frac{1}{8}$, т.е. $y = 3\frac{1}{8}$. График изображён на рис. 47.

Пример 5.12. Найти уравнение касательной к параболе

$$y^2 = 4x, \text{ проведённой из точки } A(-2; -1).$$

Решение. Уравнение прямой будем искать в виде $y = kx + b$ (5.29).

Так как точка A принадлежит искомой касательной, то её координаты удовлетворяют уравнению 5.29. Получаем тождество $-1 = -2k + b$ (5.30).

Далее, прямая (5.29) и парабола $y^2 = 4x$ имеют единственную общую точку (касаются).

Следовательно, система уравнений $\begin{cases} y = kx + b, \\ y^2 = 4x \end{cases}$ имеет единственное решение. Решим её

относительно x и y . Это можно сделать различными способами, например, возвести правую и левую части первого уравнения в квадрат и подставить в левую часть полученного равенства вместо y^2 его выражение из второго уравнения. Получим $k^2x^2 + 2kbx + b^2 = 4x$. Это – квадратное уравнение, имеющее единственное решение в случае, когда дискриминант равен нулю. Таким образом, $\frac{D}{4} = (kb - 2)^2 - k^2b^2 = 0$ или $4kb = 4$, $b = \frac{1}{k}$ (5.31).

Теперь для параметров k и b прямой (5.29) имеем два условия: (5.30) и (5.31). Следовательно, искомые значения параметров находятся как решения системы из этих условий:

$$\begin{cases} -2k + b = -1 \\ b = \frac{1}{k} \end{cases}.$$

Подставляя вместо b в первое уравнение его выражение из второго, получим $-2k^2 + k + 1 = 0$, откуда находим, что $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{1}{2}$.

Система имеет два решения: $\begin{cases} k_1 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} k_2 = -\frac{1}{2} \\ b_2 = -2 \end{cases}$.

Следовательно, две прямые удовлетворяют условиям задачи. Их уравнения: $y = x + 1$ и $y = -\frac{x}{2} - 2$.

Вопросы для контроля:

1. Дать определение кривой второго порядка.

2. Дать определение окружности и всех её компонентов. Каноническое уравнение окружности.
3. Дать определение эллипса и всех его компонентов.
4. Каноническое уравнение эллипса. Другие формы уравнения эллипса.
5. Дать определение гиперболы и всех её компонентов.
6. Каноническое уравнение гиперболы. Другие виды уравнения гиперболы.
7. Дать определение параболы и всех её компонентов.
8. Каноническое уравнение параболы и его виды.