Раздел 1. Метод координат на плоскости и в пространстве

Понятие об аналитической геометрии

В *элементарной* (школьной) геометрии изучаются свойства прямолинейных фигур и окружности. Основную роль играют построения, вычисления же, хотя практическое значение их и велико, в теории играют подчиненную, вспомогательную роль. Выбор того или иного построения обычно требует изобретательности. Это и составляет главную трудность при решении задач методами элементарной геометрии.

Аналитическая геометрия возникла из потребности создать единообразные средства для решения геометрических задач с тем, чтобы применить их изучению важных для практики кривых линий различной формы.

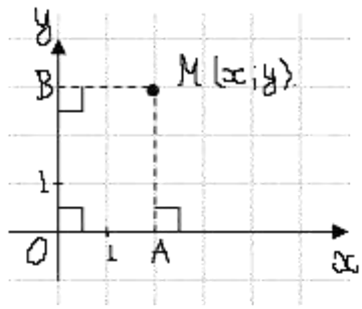
Эта цель была достигнута созданием ***координатного метода***. В нем ведущую роль играют вычисления, построения же имеют вспомогательное значение. Вследствие этого решение задач методами аналитической геометрии требует гораздо меньшей изобретательности.

Создание координатного метода было подготовлено трудами древнегреческих математиков, в особенности Аполлония (2-3 в. до н.э.). Систематическое развитие координатный метод получил в первой половине XVII века в работах П. Ферма и Р. Декарта. Они, однако, рассматривали только плоские линии. К систематическому изучению пространственных линий и поверхностей координатный метод был впервые применен Л. Эйлером (1707-1783).

Прямоугольная система координат на плоскости

Метод координат заключается в установлении соответствия между точками прямой (плоскости, пространства) и их координатами – действительными числами при помощи системы координат.

Две взаимно-перпендикулярные оси Ox и Oy , имеющие общее начало O и одинаковую масштабную единицу, образуют **прямоугольную систему координат на плоскости.**



Ось Ox называется осью **абсцисс**, ось Oy называется осью **ординат.** Обе вместе они называются **осями координат.**

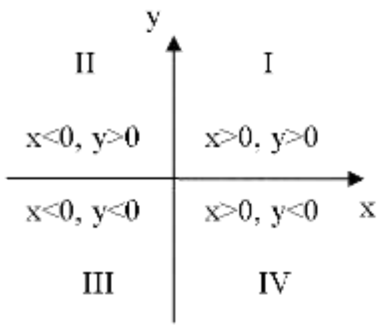
Точка O пересечения осей называется **началом координат**. Плоскость, в которой расположены оси Ox, Oy называется **координатной плоскостью** и обозначается Oxy.

Пусть M – произвольная точка плоскости. Опустим из нее перпендикуляры MA и MB на оси Ox и Oy. **Прямоугольными координатами** x и y **точки** M будем называть соответственно величины отрезков OA и OB : $x = OA,\ y = OB.$ Знаки чисел x и y указывают на какой (положительной или отрицательной) полуоси расположена соответствующая точка.

Координата x точки M называется ее **абсциссой,** координата y точки M – **ординатой**.

Тот факт, что точка M имеет координаты x и y, символически обозначают: $M(x;y)$. При этом первой в скобках указывают абсциссу, а второй – ординату. Начало координат имеет координаты $O(0;0)$.

Таким образом, при выбранной системе координат каждой точке M на плоскости соответствует единственная пара чисел $(x;y)$ – ее прямоугольные координаты. И, обратно, каждой паре чисел $(x;y)$ соответствует, и притом одна, точка M плоскости Oxy такая, что ее абсцисса равна x, а ордината – y.

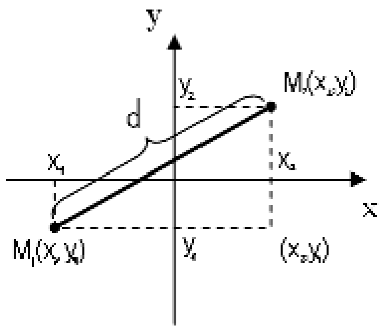


Итак, введение прямоугольной системы координат на плоскости позволяет установить однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством пар чисел, что дает возможность при решении геометрических задач применять алгебраические методы.

Оси координат разбивают плоскость на 4 части, их называют **четвертями, квадрантами или координатными углами** и нумеруют римскими числами I, II, III, IV.

Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

1. Расстояние между двумя точками.



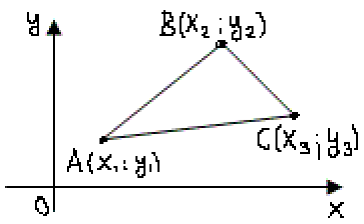
<u>Теорема 1.</u> Для любых двух точек $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ плоскости расстояние d между ними выражается формулой:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ . \quad (1.1)$$

Например, если даны точки $A(3;\ 5)$ и $B(-7;\ 2)$, то расстояние между ними:

$$AB=d=\sqrt{(-7-3)^2+(2-5)^2}=\sqrt{(-10)^2+(-3)^2}=\sqrt{100+9}=\sqrt{109}\Rightarrow AB=\sqrt{109}\ .$$

2. Площадь треугольника.



<u>Теорема 2.</u> Для любых точек $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$; $C(x_3;y_3)$, не лежащих на одной прямой, площадь треугольника ABC выражается формулой:

$$S=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|.\quad (1.2)$$

Например, найдем площадь треугольника, образованного точками $A(1;\ 1)$, $B(6;\ 4)$ и $C(8;\ 2)$.

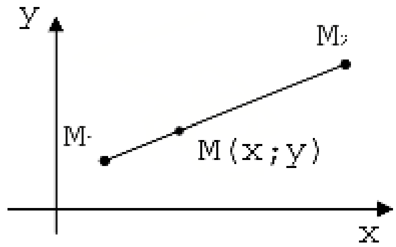
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|(6-1)(2-1)-(8-1)(4-1)\right|=\frac{1}{2}\left|5\cdot1-7\cdot3\right|=\frac{1}{2}\left|5-21\right|=\frac{1}{2}\left|-16\right|=\frac{1}{2}\cdot16=8\ .$$

Замечание. Если площадь треугольника равна нулю, это означает, что точки лежат на одной прямой.

3. Деление отрезка в заданном отношении.

Пусть на плоскости дан произвольный отрезок M_1M_2 и пусть M – любая точка этого отрезка, отличная от точек концов. Число λ, определенное равенством $\lambda = \dfrac{|M_1M|}{|MM_2|}$, называется **отношением,** в котором точка M делит отрезок M_1M_2.

Задача о делении отрезка в данном отношении состоит в том, чтобы по данному отношению λ и данным координатам точек M_1 и M_2 найти координаты точки M.



__Теорема 3.__ **Если точка $M(x;y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то координаты этой точки определяются формулами:** $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$ **(1.3), где $(x_1;y_1)$ – координаты точки M_1, $(x_2;y_2)$ – координаты точки M_2.**

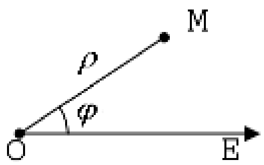
__Следствие:__ **Если $M(x;y)$ – середина отрезка M_1M_2, где $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, то** $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ **(1.4) (т.к. $|M_1M| = |MM_2| \Rightarrow \lambda = 1$).**

Например. Даны точки $M_1(1;1)$ и $M_2(7;4)$. Найти координаты точки $M(x;y)$, которая в два раза ближе к M_1, чем к M_2

Решение: Искомая точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = 1:2 = 0{,}5$ так как $M_1M = 2MM_2 \Rightarrow \lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$, тогда $x = \dfrac{1+0{,}5\cdot 7}{1+0{,}5} = \dfrac{1+3{,}5}{1.5} = \dfrac{4{,}5}{1{,}5} = 3$, $y = \dfrac{1+0{,}5\cdot 4}{1+0{,}5} = \dfrac{1+2}{1{,}5} = \dfrac{3}{1{,}5} = 2$, получили $M(3;2)$.

Полярные координаты

Наиболее важной после прямоугольной системы координат является полярная система координат. Она состоит из некоторой точки O, называемой **полюсом**, и исходящего из нее луча OE – **полярной оси**. Кроме того, задается единица масштаба для измерения длин отрезков.



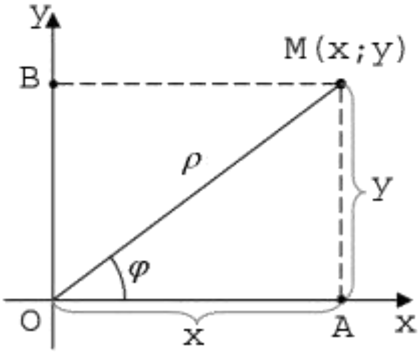
Пусть задана полярная система координат и пусть M – произвольная точка плоскости. Пусть ρ – расстояние от точки O до точки M; φ – угол, на который нужно повернуть полярную ось для совмещения с лучом OM.

Полярными координатами точки M называются числа ρ и φ. При этом число ρ считается первой координатой и называется **полярным радиусом**, число φ – второй координатой и называется **полярным углом.**

Обозначается $M(\rho;\varphi)$. Полярный радиус может иметь любое неотрицательное значение: $0 \le \rho < +\infty$. Обычно считают, что полярный угол изменяется в следующих пределах: $0 \le \varphi < 2\pi$. Однако в ряде случаев приходится определять углы, отсчитываемые от полярной оси по часовой стрелке.

Связь между полярными координатами точки и ее прямоугольными координатами.

Будем считать, что начало прямоугольной системы координат находится в полюсе, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью.



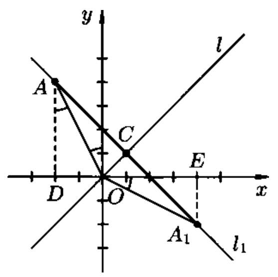
Пусть $M(x;y)$ – в прямоугольной системе координат и $M(\rho;\varphi)$ – в полярной системе координат. Определен OMA – прямоугольный треугольник с $\angle A = 90^\circ$. Тогда $\boxed{x = \rho\cos\varphi \quad y = \rho\sin\varphi}$ (1.5). Эти формулы выражают прямоугольные координаты через полярные.

С другой стороны, по теореме Пифагора $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ $\Rightarrow \boxed{\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad \varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}}$ (1.6) – эти формулы, выражают полярные координаты через прямоугольные.

Заметим, что формула $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ определяет два значения полярного угла φ, так как $\varphi \in [0;2\pi)$. Из этих двух значений угла φ выбирают тот, при котором удовлетворяются равенства $x = \rho\cos\varphi \quad y = \rho\sin\varphi$.

Например, найдем полярные координаты точки $M(2;2)$ $\quad \rho - ?\ \varphi - ?$. $\rho = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{2}{2} = \mathrm{arctg}1 = \dfrac{\pi}{4}$ или $\dfrac{5\pi}{4}$, т.к. $x = 2 > 0;\ \ y = 2 > 0 \ \Rightarrow M \in \mathrm{I}$ четверти $\Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Пример 1: Найти точку, симметричную точке $A(-2;\ 4)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.



Решение:

Проведем через точку A прямую l_1, перпендикулярную биссектрисе l первого координатного угла. Пусть $l_1 \cap l = C$. На прямой l_1 отложим отрезок CA_1, равный отрезку AC. Прямоугольные треугольники ACO и A_1CO равны между собой (по двум катетам). Отсюда следует, что $|OA| = |OA_1|$. Треугольники ADO и OEA_1 также равны между собой (по гипотенузе и острому углу). Заключаем, что $|AD| = |OE| = 4$, $|OD| = |EA_1| = 2$, т.е. точка имеет координаты $x = 4,\ y = -2$, т.е. $A_1(4;-2)$.

Отметим, что имеет место общее утверждение: точка A_1, симметричная точке $A(a;\ b)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, имеет координаты $(b;\ a)$, то есть $A_1(b;\ a)$.

Пример 2: Найти точку, в которой прямая, проходящая через точки $A(5;\ 5)$ и $B(1;\ 3)$, пересечет ось Ox.

Решение:

Координаты искомой точки C есть $(x;\ 0)$. А так как точки A, B и C лежат на одной прямой, то должно выполняться условие $(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)=0$ (формула (1.2), площадь треугольника ABC равна нулю!), где $(x_1;\ y_1)$ – координаты точки A, $(x_2;\ y_2)$ – точки B, $(x_3;\ y_3)$ – точки C. Получаем $(1-5)(0-5)-(x-5)(3-5)=0$, т.е. $20+2(x-5)=0$, $x-5=-10$, $x=-5$. Следовательно, точка C имеет координаты $x=-5$, $y=0$, т.е. $C(-5;\ 0)$.

Пример 3: В полярной системе координат заданы точки $M_1(r_1;\ \phi_1)$, $M_2(r_2;\ \phi_2)$. Найти: а) расстояние между точками M_1 и M_2; б) площадь треугольника *OM₁M₂ (O –* полюс).

Решение:

а) Воспользуемся формулами (1.1) и (1.5):

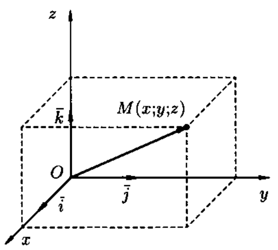
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(r_2\cos\phi_2-r_1\cos\phi_1)^2+(r_2\sin\phi_2-r_1\sin\phi_1)^2}=$$
$$\sqrt{r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2(\cos\phi_1\cos\phi_2+\sin\phi_1\sin\phi_2)}=\sqrt{r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2\cos(\phi_1-\phi_2)},$$

то есть, $d=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\phi_1-\phi_2)}$.

б) пользуясь формулой для площади треугольника со сторонами a и b и углом α между ними ($S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$), находим площадь треугольника OM_1M_2. $S=\frac{1}{2}r_1r_2\sin(\phi_2-\phi_1)$.

Метод координат в пространстве

Положение любой точки в пространстве можно однозначно определить с помощью прямоугольной системы координат. Эта система включает три взаимно перпендикулярные оси, пересекающиеся в одной точке *O – начале координат.* Одну из осей называют *осью абсцисс* (ось *Ox*), другую – *осью ординат* (*Oy*), третью – *осью аппликат* (*Oz*). Плоскости *XOY, XOZ* и *YOZ* называются координатными плоскостями. Какой-либо отрезок принимается за *единицу масштаба* для всех трех осей. Положительные направления на осях выбираются так, чтобы поворот на 90^0, совмещающий положительный луч *OX* с положительным лучом *OY*, казался проходящим против часовой стрелки, если смотреть со стороны луча *OZ*. Такая система координат называется *правой*.



Положение любой точки *M* в пространстве можно определить тремя координатами следующим образом. Через *M* проводим плоскости, параллельные плоскостям *XOY*, *XOZ* и *YOZ*. В пересечении с осями получаем точки, например, *P*, *Q* и *R* соответственно. Числа *x* (*абсцисса*), *y* (*ордината*), *z* (*аппликата*), измеряющие отрезки *OP*, *OQ* и *OR* в избранном масштабе, называются *прямоугольными координатами* точки *M*. Они берутся положительными или отрицательными в зависимости от того, лежат ли соответствующие отрезки на положительной или отрицательной полуоси. Каждой тройке чисел (*x*; *y*; *z*) соответствует одна и только одна точка пространства, и наоборот.

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ вычисляется по формуле: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ (1.6)

Координаты (*x*; *y*; *z*) точки *M, делящей в заданном отношении* $\lambda\left(\lambda=\frac{AM}{MB}\right)$ отрезок *AB*, ($A(x_1;\ y_1;\ z_1), B(x_2;\ y_2;\ z_2)$) определяются по формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\quad(1.7)$$

В частности, при $\lambda = 1$ (точка M делит отрезок AB пополам), получаются формулы для определения координат середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \ z = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad (1.8)$$

Пример 4: На оси Oy найти точку, равноудаленную от двух точек $A(2;\ 3;\ 1)$ и $B(-1;\ 5;\ -2)$.

Решение: Точка M, лежащая на оси Oy, имеет координаты $M(0;\ y;\ 0)$. По условию задачи $|AM|$ = $|BM|$. Найдем расстояния $|AM|$ и $|BM|$, используя формулу (1.6):

$$|AM| = \sqrt{(0-2)^2 + (y-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{y^2 - 6y + 14}$$

$$|BM| = \sqrt{(0+1)^2 + (y-5)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{y^2 - 10y + 30}$$

Получим уравнение: $\sqrt{y^2 - 6y + 14} = \sqrt{y^2 - 10y + 30}$.

Отсюда находим, что $4y = 16$, т. е. $y = 4$. Искомая точка есть $M(0; 4; 0)$.

Пример 5: Отрезок AB разделен на 3 равные части. Найти координаты точек деления, если известны точки $A(-2;\ 4;\ 1)$ и $B(2;\ -4;\ -3)$.

Решение:

Обозначим точки деления отрезка AB в следующем порядке: C и D. По условию задачи $|AC|$ = $|CD|$ = $|DB|$. Поэтому точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$. Пользуясь формулами (1.7), находим координаты точки C:

$$x_C = \frac{-2 + \frac{1}{2} \cdot 2}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}, \ y_C = \frac{4 + \frac{1}{2} \cdot (-4)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}, \ z_C = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot (-3)}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

Имеем, $C\left(-\frac{2}{3};\ \frac{4}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$.

По формулам (1.8) находим координаты точки D – середины отрезка CB:

$$x_D = \frac{-\frac{2}{3} + 2}{2} = \frac{2}{3}, \ y_D = \frac{\frac{4}{3} - 4}{2} = -\frac{4}{3}, \ z_D = \frac{-\frac{1}{3} - 3}{2} = -\frac{5}{3}.$$

То есть точка D имеет координаты: $\left(\frac{2}{3};\ -\frac{4}{3};\ -\frac{5}{3}\right)$.

Пример 6: В точках $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $A_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, $A_4(x_4;\ y_4;\ z_4)$ сосредоточены соответственно массы m_1, m_2, m_3, m_4. Найти координаты центра тяжести системы этих масс.

Решение:

Как известно из курса физики центр тяжести масс m_1 и m_2, помещенных в точках A и B, делит отрезок AB на части, обратно пропорциональные массам, сосредоточенным на концах отрезка ($\lambda = \frac{m_2}{m_1}$). Исходя из этого, найдем сначала центр тяжести $M_1(x';\ y';\ z')$ системы двух масс m_1 и m_2, помещенных в точках A_1и A_2:

$$x'=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}\cdot x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{x_1m_1+x_2m_2}{m_1+m_2},\ y'=\frac{y_1+\frac{m_2}{m_1}\cdot y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{y_1m_1+y_2m_2}{m_1+m_2},\ z'=\frac{z_1+\frac{m_2}{m_1}\cdot z_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{z_1m_1+z_2m_2}{m_1+m_2}.$$

Центр тяжести системы трех масс m_1 и m_2 и m_3 ($\lambda=\frac{m_3}{m_1+m_2}$) находим аналогично:

$$x''=\frac{x'+\frac{m_3}{m_1+m_2}\cdot x_3}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+x_3m_3}{m_1+m_2+m_3},\ y''=\frac{y_1m_1+y_2m_2+y_3m_3}{m_1+m_2+m_3},\ z''=\frac{z_1m_1+z_2m_2+z_3m_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

Находим, наконец, центр тяжести системы трёх масс m_1, m_2, m_3 и m_4:

$$\lambda=\frac{m_4}{m_1+m_2+m_3}$$

$$x=\frac{x_1m_1+x_2m_2+x_3m_3+x_4m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4},\ y=\frac{y_1m_1+y_2m_2+y_3m_3+y_4m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4},\ z=\frac{z_1m_1+z_2m_2+z_3m_3+z_4m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}.$$

Вопросы для контроля:

1. Опишите прямоугольную систему координат на плоскости и все ее компоненты.
2. Как определяются координаты произвольной точки плоскости?
3. Напишите формулу для нахождения расстояния между двумя точками на плоскости.
4. Как найти координаты точки, делящей в заданном отношении отрезок?
5. Напишите формулы координат середины отрезка.
6. Напишите формулу, по которой вычисляется площадь треугольника, если известны координаты его вершин.
7. Опишите полярную систему координат.
8. Что называют полярным радиусом? В каких пределах он измеряется?
9. Что называют полярным углом? Пределы его измерения?
10. Как найти прямоугольные координаты точки, для которой известны полярные координаты?
11. Как найти полярные координаты точки, для которой известны прямоугольные координаты?
12. Как найти расстояние между точками в полярной системе координат?
13. Опишите прямоугольную систему координат в пространстве и все ее компоненты.
14. Как определить координаты точки в пространстве?
15. Запишите формулу для нахождения расстояния между двумя точками в пространстве.
16. Запишите формулы для нахождения координат точки, делящей отрезок в данном отношении для трехмерной системы координат.