Раздел 6. Определенный интеграл и его приложения

1. Понятие определённого интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b], a < b$. Выполним следующие действия.

1. С помощью точек $x_0 = a, x_1, ..., x_n = b\ (x_0 < x_1 < ... < x_n)$ разобьём отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков $[x_0;x_1],[x_1;x_2],...,[x_{n-1};x_n]$.
2. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1};x_i]$, i=1,2,…,n выберем произвольно точку $c_i \in [x_{i-1};x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т.е. величину $f(c_i)$.
3. Умножим найденное значение функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка: $f(c_i)\cdot\Delta x_i$.
4. Составим сумму S_n указанных произведений:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Сумма вида $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ называется ***интегральной суммой*** функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка: $\lambda = \max \Delta x_i (i = 1,2,...,n)$.

5. Найдём предел интегральной суммы, при $n \to \infty$ так, что $\lambda \to 0$.

Если при этом интегральная сумма S_n имеет предел I, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то число I называется определённым интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.

Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним* пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, отрезок $[a;b]$ - областью (отрезком) интегрирования.

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a;b]$ существует определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$, называется интегрируемой на этом отрезке.

Основные свойства определённого интеграла

1. $\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx$, где с – число
2. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Свойство 2 справедливо для любого конечного числа слагаемых.

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где a<c<b

Свойство 4 позволяет разбивать отрезок интегрирования на части. Свойство 4 называют аддитивностью определённого интеграла. Свойство применяют при вычислении площадей фигур.

Определённый интеграл применяют для решения геометрических и физических задач. Например, вычисление площадей фигур, объёмов тел вращения, работы переменной силы, расстояния при прямолинейном перемещении, длины дуги плоской кривой, объёма тел, площади поверхности вращения, статических моментов и координат центра тяжести плоской кривой и многие другие прикладные задачи.

2. Вычисление определённого интеграла

Для вычисления определённого интеграла от функции f(x) на отрезке $[a;b]$ применяют формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

т.о. для вычисления определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ надо найти соответствующий неопределённый интеграл, а затем вычислить разность значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Формулу Ньютона-Лейбница также записывают в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример. Вычислить $\int_1^2 x^2 dx$.

Найдём одну из первообразных для функции $f(x) = x^2$

$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$, т.е. $F(x) = \frac{x^3}{3}$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$$

Решение записывают в виде:

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1) = \frac{7}{3}$$

Пример. Вычислить $\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx$

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx = \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}(\cos 2\cdot\frac{\pi}{4} - \cos 0) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2}$$

Пример. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Для вычисления определённого интеграла **методом подстановки** (замены переменной) полезно находить пределы интегрирования для новой переменной. Приведём примеры.

Пример. Вычислить $\int_1^2 x\cdot e^{x^2}dx$

Пусть $t=x^2$, тогда $dt=(x^2)'dx=2xdx \Rightarrow \frac{dt}{2}=xdx$

Вычислим пределы интегрирования для новой переменной t.

Если $x=2$, то верхний предел интегрирования для новой переменной $t_{верхнее}=t_в=2^2=4$

Если $x=1$, то нижний предел $t_{нижнее}=t_н=1^2=1$

Решение записывают в виде:

$$\int_1^2 xe^{x^2}dx=\left|\begin{array}{l|l} t=x^2 & t_в=4 \\ dt=2xdx & t_н=1 \\ \frac{dt}{2}=xdx & \end{array}\right|=\int_1^4 e^t\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int_1^4 e^t dt=\frac{1}{2}e^t\Big|_1^4=\frac{1}{2}(e^4-e)$$

Пример. Вычислить $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos xdx}{2+\sin x}$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos xdx}{2+\sin x}=\left|\begin{array}{l} t=2+\sin x \\ dt=(2+\sin x)'dx=\cos xdx \\ t_в=2+\sin\frac{\pi}{2}=2+1=3 \\ t_н=2+\sin 0=2+0=2 \end{array}\right|=\int_2^3\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_2^3=\ln|3|-\ln|2|=\ln\frac{3}{2}$$

Для вычисления определённого интеграла методом по частям применяют формулу

$$\int_a^b u\cdot dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\cdot du$$

Пример. Вычислить $\int_0^{\pi}x\sin 2xdx$

$$\int_0^{\pi}x\sin 2xdx=\left|\begin{array}{ll} u=x & du=x'dx=dx \\ dv=\sin 2x & v=\int\sin 2x=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right|=-\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi}-$$

$$-\int_0^{\pi}-\frac{1}{2}\cos 2xdx=-\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi}=(-\frac{\pi}{2}\cos 2\pi++\frac{0}{2}\cos 0)+\frac{1}{4}(\sin 2\pi-\sin 0)=-\frac{\pi}{2}\cdot 1+0+\frac{1}{4}(0-0)=-\frac{\pi}{2}$$

Пример . Вычислить $\int_1^e x\ln xdx$

$$\int_1^e x\ln xdx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x & du=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx & v=\int xdx=\frac{x^2}{2} \end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-$$

$$-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e=(\frac{e^2}{2}\ln e-$$

$$-\frac{1}{2}\ln 1)-\frac{1}{4}(e^2-1)=(\frac{e^2}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 0)-\frac{1}{4}(e^2-1)=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{2e^2-e^2+1}{4}=\frac{1}{4}(e^2+1).$$

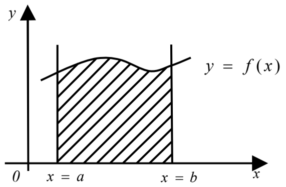
3. Вычисление площадей плоских фигур

Геометрический смысл определённого интеграла: определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.

Определим криволинейные трапеции с основаниями на оси ох и оси оу и соответствующие формулы для вычисления их площадей.

Определение. Фигура, ограниченная графиком непрерывной функции $f(x)\geq 0$, прямыми $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ и осью ох, называется криволинейной трапецией (с основанием на оси ох).

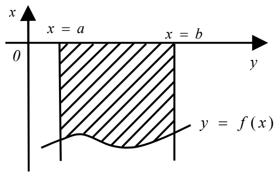
Площадь криволинейной трапеции (рис.1) с основанием на оси ох вычисляется по формуле



$$S=\int_a^b f(x)dx$$

Рис. 1.

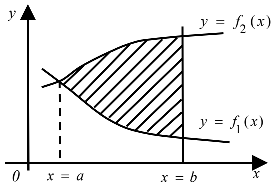
Если $f(x)<0$, т.е. криволинейная трапеция расположена ниже оси ох (рис.2), то её площадь вычисляется по формуле



$$S=-\int_a^b f(x)dx$$

Рис. 2.

Если для всех $x\in[a;b]$ выполняется условие $f_2(x)\geq f_1(x)$, т.е. $f_2(x)-f_1(x)\geq 0$, то площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$, $a<b$ (рис.3), вычисляется по формуле



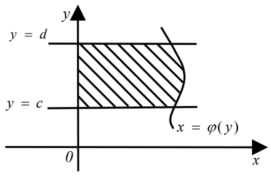
$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$$

Рис. 3.

Заметим, что одна из прямых (или обе) могут «стягиваться» в точку.

Определение. Фигура, ограниченная графиком непрерывной функции $\varphi(y)\geq 0$, прямыми $y=c$, $y=d$, $c<d$, и осью оу, называется криволинейной трапецией (с основанием на оси оу).

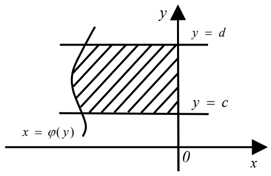
Площадь криволинейной трапеции с основанием на оси оу (рис.4) вычисляется по формуле:



$$S=\int\limits_c^d \varphi(y)dy$$

Рис. 4.

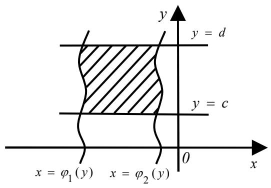
Если $\varphi(y)<0$, т.е. криволинейная трапеция расположена левее оси оу (рис.5), то её площадь вычисляют по формуле



$$S=-\int\limits_c^d \varphi(y)dy$$

Рис. 5.

Если для всех $y\in[c;d]$ выполняется условие $\varphi_2(y)\ge\varphi_1(y)$, т.е. $\varphi_2(y)-\varphi_1(y)\ge 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками непрерывных функций $x=\varphi_2(y)$, $x=\varphi_1(y)$ и прямыми $y=c$, $y=d$, $c<d$ (рис.6), вычисляется по формуле



$$S=\int\limits_c^d (\varphi_2(y)-\varphi_1(y))dy$$

Рис. 6.

Заметим, что одна из прямых (или обе) могут «стягиваться» в точку.

Если плоская фигура не является криволинейной трапецией указанных видов, то её разбивают на криволинейные трапеции прямыми, параллельными оси оу или ох и применяют соответствующие формулы.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $x=2$, $y=0$, $x=0$.

Построим линии, ограничивающие фигуру.

$y=x^2+1$ – парабола, симметричная относительно оси оу, вершина (0;1).

$x=2$ – прямая, проходящая через точку (2;0), параллельная оси оу.

$y=0$ – аналитическое выражение оси ох.

$x=0$ – аналитическое выражение оси оу.

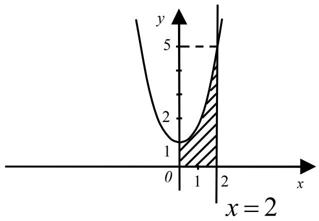


Рис. 7.

Построенная фигура (рис.7) является криволинейной трапецией с основанием на оси ох, поэтому её площадь вычисляется по формуле

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx\cdot$$

$f(x)=x^2+1$, $a=0$, $b=2$.

Тогда $S=\int\limits_0^2(x^2+1)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2+\left.x\right|_0^2=\frac{8}{3}+2=2\frac{2}{3}+2=4\frac{2}{3}$ (кв. ед.).

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x+2y-8=0$, $y=1$, $y=3$, $x=0$.

Построим линии ограничивающие фигуру.

$x+2y-8=0$ – прямая; если $x=0$, то $2y-8=0 \Rightarrow y=4$,

если $y=0$, то $x-8=0 \Rightarrow x=8$.

Прямая проходит через точки (0; 4), (8; 0).

$y=1$ – прямая, параллельная оси ох.

$y=3$ – прямая, параллельная оси ох.

$x=0$ – ось оу.

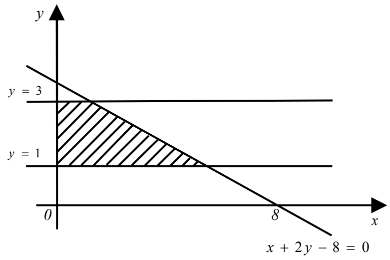


Рис. 8.

Фигура (рис.8) является криволинейной трапецией с основанием на оси оу, поэтому $S=\int_c^d \varphi(y)dy$.

$x+2y-8=0 \Rightarrow x=8-2y \Rightarrow \varphi(y)=8-2y$

$c=1, d=3$

Тогда $S=\int_1^3 (8-2y)dy = 8y\Big|_1^3 - 2\frac{y^2}{2}\Big|_1^3 = 8(3-1)-(3^2-1^2)=$

$=16-8=8$ (ед^2).

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y=x^2-4x, y=0$.

Построим линии ограничивающие фигуру.

$y=x^2-4x$ - парабола, симметричная относительно оси OY. Т.к. $y=x^2-2\cdot 2x+4-4=(x-2)^2-4$, то вершина $(2;4)$.

Координаты вершины также можно определить по формуле

$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\cdot 1}=2,$

$y_0=2^2-4\cdot 2=-4.$

$y=0$ - ось OX.

Найдем координаты точек пересечения графиков (рис.9) функций.

$\begin{cases} y=x^2-4x, \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$

$x=0, x=4$

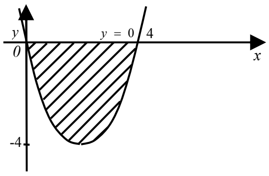


Рис. 9.

Т.о. $0 \le x \le 4$, на этом отрезке функция $x^2 - 4x < 0$, поэтому $S = -\int_a^b f(x)dx$.

$f(x) = x^2 - 4x,\ a = 0,\ b = 4$.

Тогда $S = -\int_0^4 (x^2 - 4x)dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_0^4 + 4\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = 10\frac{2}{3}$ (ед^2).

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$

Построим линии, ограничивающие фигуру.

$y = x^2$ – парабола, симметричная относительно оси оу, вершина (0;0).

$y = x + 2$ – прямая, если $x = 0$, то $y = 2$,

если $y = 0$, то $x = -2$.

Найдём точки пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 = x + 2 \\ x^2 - x - 2 = 0 \\ x = -1, x = 2 \end{array}$$

Т.о. $-1 \le x \le 2, a = -1, b = 2$

$f_1(x) = x^2, f_2(x) = x + 2, f_2(x) > f_1(x)$ (рис.10).

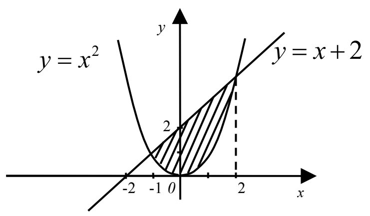


Рис. 10.

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} -$$

$$-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(4-1) + 2(2+1) - \frac{1}{3}(8+1) = \frac{3}{2} + 6 - 3 = 4{,}5 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

4. Вычисление объёмов тел вращения

Объём тела, образованного вращением вокруг оси ох криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $y = f(x)$, отрезком оси абсцисс $a \le x \le b$ и прямыми $x = a, x = b$, вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx}.$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси оу криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $x = \varphi(y)$, отрезком оси ординат $c \le y \le d$ и прямыми $y = c, y = d$, вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy}.$$

Пример. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси ох фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}, x = 4, y = 0$.

Построим ограничивающие линии.

$y=\sqrt{x}$ - ветвь параболы, расположенная выше оси *OX*, т.к. $x \geq 0$;
$x=4$ - прямая, параллельная оси *OY*;
$y=0$ - ось *OX*.

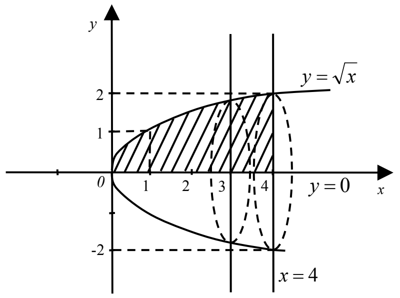


Рис. 11.

При вращении криволинейной трапеции (рис.11) вокруг оси ох образуется тело вращения.

Т. к. по условию криволинейная трапеция вращается вокруг оси ох, то объём тела вращения вычислим по формуле $V_x = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$.

По условию $y=\sqrt{x}$, т.е. $f(x)=\sqrt{x}$, тогда $f^2(x)=(\sqrt{x})^2=x.$ При этом $0 \leq x \leq 4$, т.е. $a=0, b=4.$

Тогда $V_x = \pi \int\limits_0^4 xdx = \pi \cdot \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^4 = \dfrac{\pi}{2}(4^2-0) = 8\pi$ (ед^3.)

Пример. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси оу фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{2}{x}, y=1, y=4, x=0.$

Построим ограничивающие линии.

$y=\dfrac{2}{x}$ - гипербола, ветви которой расположены в I и III координатных углах;

$y=1$ - прямая, параллельная оси *OX*;

$y=4$ - прямая, параллельная оси *OX*;

$x=0$ - ось *OY*.

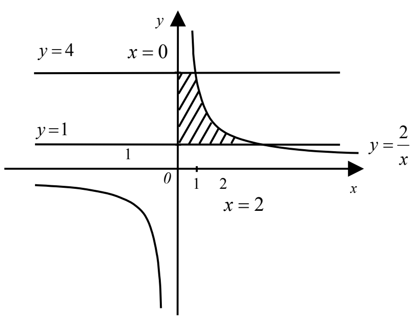


Рис. 12.

При вращении криволинейной трапеции (рис.12) вокруг оси оу образуется тело вращения.

Т.к. по условию криволинейная трапеция вращается вокруг оси оу, то объём тела вращения вычислим по формуле $V_y = \pi \int\limits_c^d \varphi^2(y)dy$.

По условию $y=\dfrac{2}{x} \Rightarrow x=\dfrac{2}{y}$, т.е. $\varphi(y)=\dfrac{2}{y}$, тогда $\varphi^2(y)=\dfrac{4}{y^2}$.

При этом $1 \leq y \leq 4$, т.е. $c=1, d=4$.

Тогда $V_y = \pi\int\limits_1^4 \frac{4}{y^2}dy = 4\pi\int\limits_1^4 y^{-2}dy = 4\pi\frac{y^{-1}}{-1}\Bigg|_1^4 = -4\pi\frac{1}{y}\Bigg|_1^4 =$

$= -4\pi(\frac{1}{4}-1) = -4\pi(-\frac{3}{4}) = 3\pi$ (ед^3.)

Пример. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси ох фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y^2 = x$.

Построим ограничивающие линии.

$y = x^2$ - парабола с вершиной в точке $(0; 0)$, симметрична относительно оси OY;

$x = y^2$ - парабола с вершиной в точке $(0; 0)$, симметрична относительно оси OX.

$y = 4$ - прямая, параллельная оси OX;

$x = 0$ - ось OY.

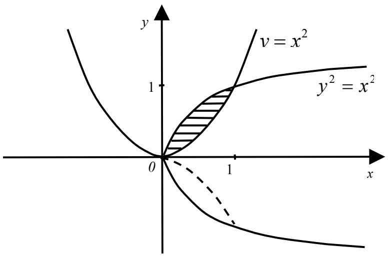


Рис. 13.

При вращении криволинейной трапеции (рис.13) вокруг оси OX образуется тело вращения.

По условию фигура вращается вокруг оси OX. Тогда искомый объём равен разности двух объёмов: объёма V_{x1}, полученного от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x, y = 0, x = 1,$ и объёма V_{x2}, полученного от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y = 0, x = 1.$ Т.о. $V_x = V_{x1} - V_{x2}$

Вычислим $V_{x1} = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Для V_{x1}: $y^2 = f^2(x) = x$, при этом $0 \le x \le 1$. Тогда

$V_{x1} = \pi\int\limits_0^1 xdx = \pi\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}$ (ед^3.)

Вычислим $V_{x2} = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$. Для V_{x2}: $y = x^2$,т. е $f(x) = x^2 \Rightarrow f^2(x) = x^4.$ Тогда

$V_{x2} = \pi\int\limits_0^1 x^4dx = \pi\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{5}$ (ед^3.)

Т.о. $V_x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{5\pi - 2\pi}{10} = 0{,}3\pi$ (ед^3.)

5. Решение некоторых физических задач с помощью определённого интеграла

Пусть материальная точка перемещается вдоль оси ох под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно оси. Тогда работа, произведённая силой F при перемещении точки из положения $x = a$ в положение $x = b\ (a < b)$ вычисляется по формуле:

$$A = \int\limits_a^b F(x)dx.$$

Пример. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м

По закону Гука упругая сила F, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т.е. $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. По условию сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0{,}01$ м, т.е. $100 = k \cdot 0{,}01 \Rightarrow k = 10000$. Тогда $F = kx = 10000x$

Вычислим работу:

$$A = \int_0^{0,05} 10000x\,dx = 10000\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0,05} = 5000x^2\Big|_0^{0,05} = 5000 \cdot 0{,}05^2 = 12{,}5 \text{ (Дж)}$$

Определённый интеграл применяют для вычисления пути S прямолинейного движения. Путь S, пройденный материальной точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, равен определённому интегралу от скорости $v(t)$:

$$S = \int_a^b v(t)\,dt$$

Пример . Вычислить путь, пройденный точкой за 4 секунды от начала движения, если скорость точки $v = 2t + 4$ (м/с).

По условию: $v(t) = 2t + 4, a = 0, b = 4$.

Тогда $S = \int_0^4 (2t+4)\,dt = 2\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^4 + 4t\Big|_0^4 = 4^2 + 4 \cdot 4 = 32$ (м/с).

Вопросы для самопроверки

1. Запишите определение определённого интеграла через предел интегральных сумм.
2. Сформулируйте основные свойства определённого интеграла.
3. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
4. Запишите формулу интегрирования по частям для определённого интеграла.
5. Запишите формулы для вычисления площадей плоских фигур.
6. Запишите формулы для вычисления объёмов тел вращения.
7. Запишите формулу для вычисления работы переменной силы.
8. Запишите формулу для вычисления пути прямолинейного движения.