Раздел 6. Делимость целых чисел

Пусть a и b целые числа. Говорят, что целое число a ***делится*** на целое число b , отличное от нуля, если существует целое число q, такое, что $a = b \cdot q$. Символически записывают $a \vdots b$. При этом a называют ***кратным*** числа b, а b – ***делителем*** числа a.

В теории целых чисел большую роль играет **теорема о делении с остатком:** ***для любых целых чисел a и b>0 существует единственная пара целых чисел q и z , удовлетворяющая условиям: a=b·q+z. Число q называют неполным частным, число z - остатком при делении a на b.***

Большое применение имеют следующие свойства делимости:

1. Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то $(a \pm c) \vdots b$.
2. Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.
3. Если $(a + b) \vdots c$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

Пусть даны целые числа $a_1, a_2, \dots , a_n$.

Целое число $\delta \neq 0$ называют общим делителем этих чисел, если каждое из них делится на δ.

Наибольшим общим делителем целых чисел $a_1, a_2, \dots , a_n$ называют такой их положительный общий делитель, который делится на любой другой их общий делитель. Символически наибольший общий делитель чисел $a_1, a_2, \dots , a_n$ обозначают $d = D(a_1, a_2, \dots , a_n)$.

Для отыскания наибольшего общего делителя двух целых чисел применяется алгоритм Евклида, который состоит в следующем.

Если a и b – натуральные, числа и a > b, то

$a=bq_0+r_1$, где $0 \le r_1 < b$,
$b=r_1q_1+r2$, где $0 \le r_2 < r_1$,
$r1=r_2q_2+r3$, где $0 \le r_3 < r_2$,
$r_2=r_3q_3+r_4$, где $0 \le r_4 < r_3$,
……………………………….
$r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}+r_n$, где $0 \le r_n < r_{n-1}$,
$r_{n-1}=r_nq_n$, где $r_n+1=0$.

Последний, отличный от нуля, остаток r_n и является наибольшим общим делителем чисел a и b.

Справедливо утверждение: ЕСЛИ d - НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ ЧИСЕЛ a И b ТО СУЩЕСТВУЮТ ТАКИЕ ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА x И y, ЧТО ax+by=d.

При нахождении наибольшего общего делителя нескольких чисел $a_1, a_2, \dots , a_n$ с помощью алгоритма Евклида сначала находится наи¬больший общий делитель d1, чисел a1 и a2, т.е. $d_1=D(a_1,a_2)$, затем $d_2=D(d_1,a_3)$, $d_3=D(d_2,a_4), \dots , d_{n-1}=D(d_{n-2},a_n)$, тогда $d_{n-1}=D(a_1, a_2, \dots , a_n)$.

Если $D(a_1, a_2, \dots , a_n)=1$, то числа $a_1, a_2, \dots , a_n$ называют взаимно простыми.

Справедливы следующие свойства взаимно простых чисел:

1. Если $a \cdot b \vdots c$ и $D(a,c)=1$, то $D(a,b \cdot c)=1$.
2. Если $D(a,b)=1$ и $D(a,c)=1$, то $D(a,b \cdot c)=1$.
3. Если $a \vdots b$, $a \vdots c$ и $D(b,c)=1$, то $a \vdots b \cdot c$

Пусть $a_1, a_2, \dots , a_n$ - целые числа, отличные от нуля. Целое число M называют общим кратным этих чисел, если оно делится на каждое из данных чисел.

Целое число m называют наименьшие общим кратным чисел $a_1, a_2, \dots , a_n$, если оно является их общим кратным, и если любое общее кратное этих чисел делится на m. Символически наименьшее общее кратное чисел $a_1, a_2, \dots , a_n$ обозначается $m = K(a_1, a_2, \dots , a_n)$.

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух целых чисел связаны соотношением:

$m = \frac{a \cdot b}{d}$, где $m = K(a,b)$, а $d=D(a,b)$.

При нахождении наименьшего общего кратного нескольких чисел $a_1, a_2, \dots , a_n$ сначала находят наименьшее общее кратное m_1 чисел a_1 и a_2 . Т.е. $m_1=K(a_1, a_2)$. Затем $m_2= K(m_1,a_3)$, $m3 = K(m_2,a_4), \dots , m_{n-1} = K(m_{n-2},a_n)$, тогда $m_{n-1}= K(a_1, a_2, \dots , a_n)$.

Натуральное число а, большее 1 , называют простым, если оно имеет только два различных натуральных делителя (единицу и само р).

Натуральное число а, большее 1 , называют составным, если оно имеет более двух различных натуральных делителей.

Число 1 имеет только один натуральный делитель - единицу, поэтому оно и не простое и не составное.

Справедливы следующие утверждения:

1. Наименьший натуральный делитель составного числа а , отличный от 1 , есть число простое и не превосходит. Это позволяет при отыскании простых делителей числа а испытывать только числа, не превосходящие.

2. Если a - натуральное число, а p - простое число, то либо a делится на p , либо a и p взаимно просты.
3. Если произведение двух или нескольких натуральных чисел делится на простое число p , то хотя бы один из сомножителей делится на p .
4. Всякое натуральное число a>1 либо простое, либо может быть представлено, и притом единственным образом, с точностью до порядка следования сомножителей в виде произведения простых чисел: $A=p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$ (основная теорема арифметики)
5. Некоторые сомножители могут повторяться. Пусть, например, p_1 встречается α_1 раз, $p_2 - \alpha_2$ раз, … p_k - α_k раз, тогда разложение числа *a* на простые множители можно записать следующим образом:

$\grave{a} = \eth_1^{\alpha_1} \cdot \eth_2^{\alpha_2} \cdot \eth_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot \eth_{\hat{i}}^{\alpha_i}$. Множители обычно располагают в порядке возрастания. Представление натурального числа a в указанном виде называют **каноническим**.

Задача: Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное для следующих трёх чисел: 6732, 2380, 2210

Решение: Первый способ. Найдём наибольший общий делитель первых двух чисел 6732 и 3280 , используя алгоритм Евклида.

6732 | 2380
4760 | 2
2380 | 1972
1972 | 1
1972 | 408
1632 | 4
408 | 340
340 | 1
340 | 68
340 | 5
0

Последний, отличный от нуля, остаток равен 68, следовательно, D(6723,3280)=68

2210 | 68
2176 | 32
68 | 34
68 | 2
0

D(2210,68)=34

Таким образом D(6732, 2380, 2210)=34

Найдём K(6732, 2380, 2210) используя формулу $K(a,b) = \frac{a \cdot b}{D(a,b)}$, найдём K(6732, 2380)

$K(6732, 2380) = \frac{6732 \cdot 2380}{68} = 235620$

$K(6732, 2380, 2210) = K(235620, 2210) = \frac{235620 \cdot 2210}{D(235620, 2210)}$

Найдем D(235620, 2210)

235620 | 2210
234260 | 106
2210 | 1360
1360 | 1
1360 | 850
850 | 1
850 | 510
510 | 1
510 | 340
340 | 1
340 | 170
340 | 2
0

D(235620, 2210) = 170

$K(6732, 2380, 2210) = \frac{235620 \cdot 2210}{170} = 3063060$

Второй способ: Разложим данные числа на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 6732 & 2 \\ 3366 & 2 \\ 1683 & 3 \\ 561 & 3 \\ 187 & 11 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2380 & 2 \\ 1190 & 2 \\ 595 & 5 \\ 119 & 7 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2210 & 2 \\ 1105 & 5 \\ 221 & 13 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$6732 = 2^2\cdot3^2\cdot11\cdot17$ $\quad 2380 = 2^2\cdot5\cdot7\cdot17$ $\quad 2210 = 2\cdot5\cdot13\cdot17$

D(6732, 2380, 2210) = $2\cdot17 = 34$

K(6732, 2380, 2210) = $22\cdot32\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17 = 6732\cdot5\cdot7\cdot13=3063060$

Цепные дроби

Выражение вида

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\dots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}}$$

где q_0-любое целое число,$q_1,q_2,\dots q_n$-натуральные числа и $q_n>1$, называют **конечной цепной дробью**.

Справедливы утверждения.

Всякая цепная дробь является разложением рационального числа.

Всякое рациональное число разлагается в конечную цепную дробь, т. е.

$$a/b=q_0++ \cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\dots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}}$$

Символически записывают так $a/b=[q_0;q_1;q_2;\dots,q_n]$.

При этом n-называют длиной цепной дроби, а число $q_0;q_1;q_2;\dots,q_n$ -неполным частным. Неполные частные $q_0;q_1;q_2;\dots,q_n$ находятся из алгоритма Евклида, применённого к числам a и b.

Дроби $P_0/Q_0=q_0/1$, $P_1/Q_1=q_0+\frac{1}{q_1}$, $P_2/Q_2=q_0+\cfrac{1}{q_1+\frac{1}{q_2}}$, … , $P_n/Q_n=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\dots+\frac{1}{q_n}}}$

Называются подходящими дробями конечной цепной дроби соответственно нулевого, первого, второго,…,n-го порядков, причём $P_n/Q_n=a/b$.

Для вычисления числителей и знаменателей подходящих дробей применяются следующие рекуррентные формулы:

$P_{-1}=1$, $P_0=q_0$,

$Q_{-1}=0$, $Q_0=1$, а при $R\geq1$

$P_k=q_kP_k+P_{k-2}$, $Q_k=q_kQ_{k-1}+Q_{k-2}$

Используя эти формулы, все подходящие дроби удобно находить по следующей схеме:

q_k			q_0	q_1	q_2	…	q_n
P_k	0	1	$P_0=q_0$	$P_1=q_1q_0+1$	$P_2=q_2P_1+P_0$	…	$P_n=q_nP_{n-1}+P_{n-2}$
Q_k	1	0	$Q_0=1$	$Q_1=q_1$	$Q_2=q_2Q_1+Q_0$	…	$Q_n=q_nQ_{n-1}+Q_{n-2}$

Числителем и знаменателем двух соседних подходящих дробей связаны соотношением: $P_{k-1}Q_k-Q_{k-1}=(-1)^k$.

Подходящие дроби P_k/Q_k несократимы, т. е. $D(P_k,Q_k)=1$.

Задача №1

Представить следующие обыкновенные дроби в виде конечных цепных дробей: а) 134/51, б) 691/1811, в) -37/145

Решение: а) Используя алгоритм Евклида, получим:

$$\begin{array}{rrr|l} & & 134 & 51 \\ \cline{4-4} & & 102 & 2\text{-}q_0 \\ \cline{3-3} & 51 & 32 & \\ \cline{3-3} & 32 & 1\text{-}q_1 & \\ \cline{2-2} 32 & 19 & & \\ \cline{2-2} \end{array}$$

19 | $1-q_2$
19 | 13
13 | $1-q_3$
13 | 6
12 | $2-q_4$
6 | 1
6 | $6-q_5$
0

$n=5$, $134/51=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6}}}}}$

т.е. 134/51=[2;1,1,1,2,6]
б) 691<1811,
поэтому $691=1811\cdot 0+691$
т.е. $q_0=0$.

1811 | 691
1382 | $2-q_1$
691 | 429
429 | $1-q_2$
429 | 262
262 | $1-q_3$
262 | 167
167 | $1-q_4$
167 | 95
95 | $1-q_5$
95 | 72
72 | $1-q_6$
72 | 23
69 | $3-q_7$
23 | 3
21 | $7-q_8$
3 | 2
2 | $1-q_9$
2 | 1
2 | $2-q_{10}$
0

$n=10$
691/1811=[0;2,1,1,1,1,1,3,7,1,2]

Задача№2

Преобразовать в обыкновенную дробь конечную цепную дробь [2;5,3,2,1,4,2,3] и найти её подходящие дроби.

Решение: Составим таблицу для нахождения подходящих дробей.

q_k			2	5	3	2	1	4	2	3
P_k	0	1	2	11	35	81	116	545	1206	4163
Q_k	1	0	1	5	16	37	53	249	551	1902

Итак, [2;5,3,,2,1,4,2,3,]=4163/1902.

$\frac{P0}{Q0}=\frac{2}{1};\ \frac{P1}{Q1}=\frac{11}{5};\ \frac{P2}{Q2}=\frac{35}{16};\ \frac{P3}{Q3}=\frac{81}{37};\ \frac{P4}{Q4}=\frac{116}{53};\ \frac{P5}{Q5}=\frac{545}{249};\ \frac{P6}{Q6}=\frac{1206}{551};\ \frac{P7}{Q7}=\frac{4163}{1902}$