Раздел 1: Элементы теории множеств

Каждый с самого рождения бессознательно пользуется теорией множеств, так же как Мольеров Журден из «Мещанина во дворянстве» разговаривает прозой, сам того не ведая.

М. Стоун

1.1 Основные понятия теории множеств

В конце XIX века в математической науке возникла необходимость уточнить смысл таких ведущих понятий, как функция, непрерывность и т. д. Для этого нужно было строго определить, что такое натуральное число. Поиски ответа на эти сложные вопросы способствовали развитию новых математических идей, поэтому в конце XIX начале XX столетий происходил пересмотр старых представлений буквально во всех областях математических знаний. В результате в конце XIX века возникла новая область математики – теория множеств, одним из создателей которой был немецкий математик Георг Кантор (1845 – 1918). За небольшой срок теория множеств стала фундаментом всей математики.

Понятие множества является ключевым в математике, без которого невозможно изложение ни одного из ее разделов. Подсознательно первые представления о множестве у человека начинают формироваться с рождения, когда он погружается в многообразный мир окружающих его объектов и явлений. С первых же шагов мы не просто пополняем список знакомых нам объектов и явлений, а начинаем дифференцировать и классифицировать (горячие и холодные, сладкие и горькие, тяжелые и легкие и т. п.), объединяя тем самым объекты в некоторые совокупности.

В математике понятие ***множество*** используется для описания предметов или объектов. При этом предполагается, что предметы (объекты) данной совокупности можно отличить друг от друга и от предметов, не входящих в эту совокупность.

Создатель теории множеств Г. Кантор определил множество как «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или мыслью», а так же «множество есть многое мыслимое нами как единое». Эти слова не могут рассматриваться как математически строгое определение множества, такого определения не существует. Понятие множества относится к исходным (не определяемым), на основании которых строятся остальные понятия математики.

Множество – это совокупность каких-либо объектов. Так, можно говорить о множестве всех книг данной библиотеки, множестве всех вершин данного многоугольника, множестве всех натуральных чисел, множестве всех точек данной прямой и т. д. Объекты, входящие в данное множество называются *элементами множества.* Книги данной библиотеки, вершины данного многоугольника, натуральные числа, точки данной прямой являются элементами соответствующих множеств.

Множества обычно обозначаются большими буквами A, B, X, а их элементы – малыми буквами a, b, x.

Множество называется ***конечным***, если количество его элементов можно выразить целым неотрицательным числом (причем неважно, известно это число или нет, главное, оно существует), в противном случае множество называется ***бесконечным***.

Пример 1: Множество книг в библиотеке, множество студентов в группе являются конечными. Множество натуральных чисел, множество точек прямой являются бесконечными.

Количество элементов множества обозначается $|A|$.

Пример 2: Пусть B – *множество правильных многоугольников.* Тогда B = *{тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр}*. $|B| = 5$.

Запись $x \in X$, означает что объект x есть элемент множества X, читается «x принадлежит множеству X», «x входит в множество X». Если x не принадлежит множеству X, то пишут $x \notin X$.

Например, если через **N** обозначим множество натуральных чисел, то $3 \in \mathbf{N}$, $20 \in \mathbf{N}$, $0 \notin \mathbf{N}$, $\frac{3}{4} \notin \mathbf{N}$.

Если все элементы множества *A* принадлежат какому-то множеству *B*, то говорят, что множество *A* является *подмножеством* множества *B*. Записывают $A \subset B$ (множество A содержится во множестве B). Любое множество является подмножеством самого себя, т. е. справедливо утверждение $A \subset A$.

Если множество не содержит ни одного элемента, то его называют *пустым* и обозначают символом Ø. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Подмножества, которые содержат не все элементы множества B, называют ***собственными подмножествами*** множества B.

Пример 3: Дано множество $M = \{a; c; m\}$. Найти все его подмножества.

Решение:

$M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{c\}$, $M_3 = \{m\}$, $M_4 = \{a; c\}$, $M_5 = \{a; m\}$, $M_6 = \{c; m\}$, $M_7 = \{a; c; m\}$, $M_8 = \varnothing$.

Множества M_7 и M_8 называются ***несобственными подмножествами*** множества M.

Множества A и B называют *равными* ($A = B$), если. они состоят из одних и тех же элементов, т.е. $B \subset A$ и $A \subset B$.

Например, множества $A = \{3, 5, 7, 9\}$ и $B = \{7, 3, 9, 5\}$ равны, т. к. состоят из одинаковых элементов.

Множества, элементами которых являются числа, называются ***числовыми***. Примерами числовых множеств являются:

$N=\{1; 2; 3; ...; n; ...\}$ – множество натуральных чисел – множество чисел, использующихся при счете предметов;

$Z_0=\{0; 1; 2; ...; n; ...\}$ – множество целых неотрицательных чисел – множество натуральных чисел с нулем;

$Z=\{0; \pm1; \pm2; ...; \pm n; ...\}$ – множество целых чисел – множество целых неотрицательных чисели им противоположных;

$Q=\{\frac{m}{n}: m \in Z, n \in N\}$ – множество рациональных чисел – множество чисел, которые можно представить в виде обыкновенной дроби – множество конечных и бесконечных периодических десятичных дробей;

R – множество действительных чисел – объединение множеств рациональных и иррациональных чисел.

Между этими множествами существует соотношение: $N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R$.

Множество R содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью или бесконечной периодической дробью. Так, $\frac{1}{2}=0{,}5$ $(=0{,}5000\ldots)$, $\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$ – рациональные числа.

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными.* Иррациональное число выражается бесконечной непериодической дробью. Например, $\sqrt{2} = 1{,}4142356\ldots$, $\pi = 3{,}1415926\ldots$ – иррациональные числа.

1.2 Способы задания множеств

Понятие множества мы используем без определения. Но как узнать, является та или иная совокупность множеством или не является?

Считают, что множество определяется своими элементами, т.е. ***множество задано****, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит*.

Множество можно задать, ***перечислив все его элементы***. Например, если мы скажем, что множество A состоит из чисел 3, 4, 5, и 6, то мы задали это множество, поскольку все его элементы окажутся перечисленными. При этом возможна запись, в которой перечисляемые элементы заключаются в фигурные скобки: $A = \{3, 4, 5, 6\}$.

Однако если множество бесконечно, то его элементы перечислить нельзя. Трудно задать таким способом и конечное множество с большим числом элементов. В таких случаях применяют другой способ задания множества: *указывают характеристическое свойство его элементов.*

Характеристическое свойство – это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.

Рассмотрим, например, множество A двузначных чисел: свойство, которым обладает каждый элемент данного множества, – «быть двузначным числом». Это характеристическое свойство дает возможность решать вопрос о том, принадлежит какой-либо объект множеству A или не принадлежит. Так, число 45 содержится в множестве A, поскольку оно двузначное, а число 145 множеству A не принадлежит, так как оно не является двузначным.

Случается, что одно и то же множество можно задать, указав различные характеристические свойства его элементов. Например, множество квадратов можно задать как множество прямоугольников с равными соседними сторонами и как множество ромбов с прямым углом.

В тех случаях, когда характеристическое свойство элементов множества можно представить в символической форме, возможна соответствующая запись множества. Например, множество A натуральных чисел, меньших 7, можно задать так: $A = \{x| x \in \mathbf{N}$ и $x < 7\}$. При такой записи буквой x обозначается элемент множества A. для этих целей можно использовать и другие буквы латинского алфавита.

Пример 5: Даны множества: $M = \{2; 3; 5; 7\}$, $N = \{-5; -4; -3; -2\}$, $F = \{x| x \in Z, -6 < x < -1\}$, $D = \{x| x \in N, x < 10, x$ *– простое число*$\}$. Какие множества равны между собой?

Решение: Множества F и D заданы характеристическими свойствами. Для того, чтобы сравнить их между собой и с остальными множествами, сформулируем их характеристические свойства словами, а затем зададим их перечислением элементов.

F – множество целых чисел, больших «-6» и меньших «-1». Этому свойству удовлетворяют числа -5, -4, -3, и -2. Из этих чисел состоит множество *N*. Значит, *F* = *N*.

D – множество натуральных чисел, которые меньше 10 и являются простыми. Этому свойству удовлетворяют числа 2, 3, 5 и 7. Из этих чисел состоит множество *M*. Следовательно, *D* = *M*.

1.3 Операции над множествами

1.3.1 Пересечение множеств

Рассмотрим два множества: $X = \{0, 1, 3, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$.

Числа 1 и 3 и только они принадлежат одновременно обоим множествам *X* и *Y*. Составленное из них множество {1, 3} содержит все общие для множеств *X* и *Y* элементы.

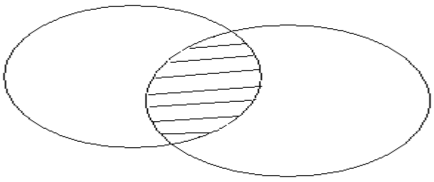
Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству *A*, и множеству *B*, называется *пересечением* множеств *A* и *B*, и обозначается $A \cap B$. $A \cap B = \{x \in A$ и $x \in B\}$.

Таким образом, множество {1, 3} является пересечением рассмотренных множеств *X* и *Y*: $\{0, 1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 3\}$.

В том случае, когда множества *A* и *B* не имеют общих элементов, говорят, что их пересечение пусто и пишут: $A \cap B = \varnothing$.

Пересечение любого множества *A* с пустым множеством есть пустое множество: $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Алгебраические операции над множествами и их свойства излагаются обычно с применением *кругов Эйлера* или *диаграмм Венна (или диаграмм Эйлера-Венна)*.

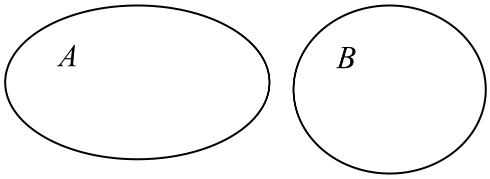


Пересечением множеств *A* и *B,* у которых есть общие элементы, будет заштрихованная область.

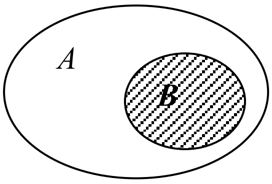
$A \cap B$

Если множества не имеют общих элементов, то их пересечение будет выглядеть так:

$A \cap B = \varnothing$



Если одно из множеств является подмножеством другого, то их пересечение будет выглядеть так:



$B \subset A$

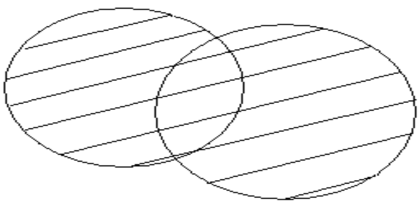
1.3.2 Объединение множеств

Вновь возьмём множества $X = \{0, 1, 3, 5\}$ и $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ и наряду с ними рассмотрим множество {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Это множество содержит все элементы множества *X* и все элементы множества *Y* и не содержит никаких других элементов.

Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих или множеству *A* или множеству *B*, называется *объединением* множеств *A* и *B,* обозначается *A* U *B*. *A* U *B* = *{ x* ∈ *A* или *x* ∈ *B }*

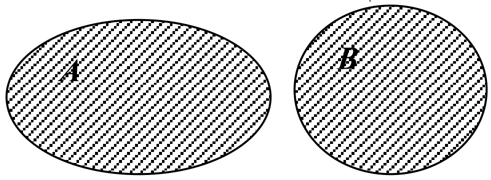
Итак, $\{0, 1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Если изобразить множества *A* и *B* при помощи кругов Эйлера, то объединение данных множеств изобразится заштрихованной областью.



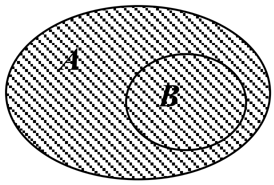
A U *B*

Если множества не имеют общих элементов, то их объединение выглядит так:



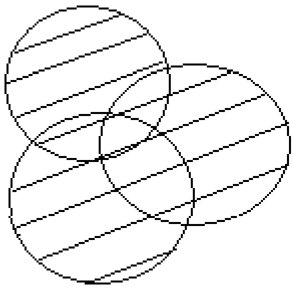
A U *B*

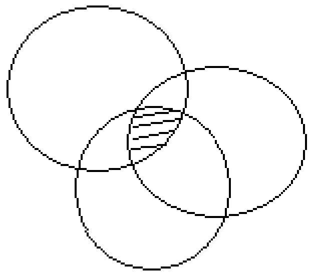
Если одно из множеств является подмножеством другого, то их объединение будет выглядеть так:



A U *B*

Часто приходится рассматривать объединение и пересечение трёх и более множеств. Объединение множеств *A, B* и *C* есть множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств *A, B* или *C;* пересечение множеств *A, B* и *C* есть множество всех элементов, принадлежащих и множеству *A*, и множеству *B,* и множеству *C*.





A U B U C *A* ∩ *B* ∩ *C*

Например, объединение множеств остроугольных, тупоугольных и прямоугольных треугольников есть множество всех треугольников.

Еще операции над множествами можно показать с помощью детского анекдота: Однажды лев, царь зверей, собрал зверей на поляне и повелел им разделиться на умных и красивых. После того, как пыль улеглась, лев увидел на поляне две большие группы зверей и мартышку, прыгающую между ними. На вопрос: почему она прыгает туда, сюда, мартышка ответила: «Что мне, разорваться, что ли?». Так вот, мартышка из анекдота – это пример пересечения *умных* зверей и *красивых.* А объединением умных и красивых зверей является все множество зверей.

Объединение и пересечение множеств обладают многими свойствами, аналогичными свойствам суммы и произведения чисел:

№ п/п	Свойство операций над множествами	Свойство арифметических операций	Название свойства
1	$A\bigcup B=B\bigcup A$	$a+b=b+a$	Коммутативность
2	$A\bigcap B=B\bigcap A$	$a\cdot b=b\cdot a$	
3	$(A\bigcup B)\bigcup C=B\bigcup(A\bigcup C)$	$(a+b)+c=a+(b+c)$	Ассоциативность
4	$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$	
5	$(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$	$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$	Дистрибутивность

Однако эта аналогия не всегда имеет место. Например, для множеств справедливы равенства:

6. (A U C) ∩ (B U C) = (A ∩ B) U C.
7. A U A = A.
8. A ∩ A = A.

Соответствующие равенства для чисел верны не всегда.

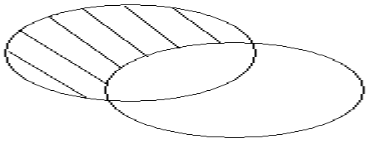
Заметим, что, если в выражении есть знаки пересечения и объединения множеств, и нет скобок, то сначала выполняют пересечение, так как считают, что пересечение более «сильная» операция, чем объединение.

1.3.3 Вычитание множеств

Если заданы два множества, то можно не только найти их пересечение и объединение, но и вычесть из одного множества другое. Результат вычитания называют разностью и определяют следующим образом.

***Разностью* множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B, обозначается $A \setminus B$. $A \setminus B = \{x \in A$ *и* $x \notin B\}$.**

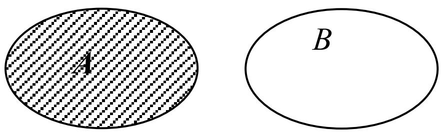
$X \setminus Y = \{0, 1, 3, 5\} \setminus \{1, 2, 3, 4\} = \{0, 5\}$. Если мы найдем разность множеств Y и X, то результат будет выглядеть так: $Y \setminus X = \{2; 4\}$. Таким образом, разность множеств не обладает переместительным (коммутативным) свойством.



Если изобразить множества A и B при помощи кругов Эйлера, то разность данных множеств изобразится заштрихованной областью.

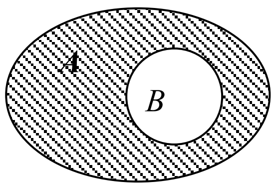
$A \setminus B$

Если множества не имеют общих элементов, то их разность будет изображаться так:



$A \setminus B$

Если одно из множеств является подмножеством другого, то их разность будет изображаться так:



$A \setminus B$

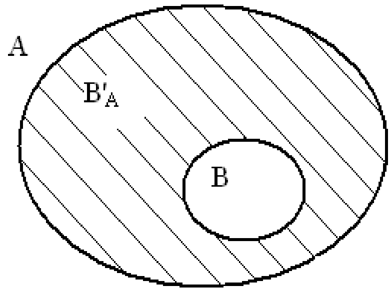
Пересечение – более «сильная» операция, чем вычитание. Поэтому порядок выполнения действий в выражении $A \setminus B \cap C$ такой: сначала находят пересечение множеств B и C, а затем полученное множество вычитают из множества A. Что касается объединения и вычитания множеств, то их считают равноправными. Например, в выражении A \ B U C надо сначала выполнить вычитание (из A вычесть B), а затем полученное множество объединить с множеством C.

Вычитание множеств обладает рядом свойств:

1. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.
2. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
3. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

1.3.4 Дополнение

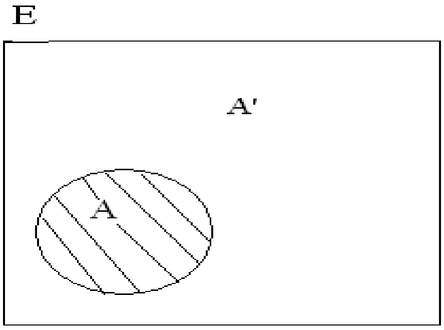
В случаях, когда одно из множеств является подмножеством другого, $A \setminus B$ называют *дополнением множества B до множества A*, и обозначают символом B'_A



Пусть $B \subset A$. *Дополнением* множества B до множества A называется множество, содержащее все элементы множества A, которые не принадлежат множеству B. $B \subset A$, $A \setminus B = B'_A$, $B'_A = \{x | x \in A$ и $x \notin B\}$.

Часто ограничиваются рассмотрением всевозможных подмножеств одного и того же множества, которое в этом случае называют *основным* или универсальным множеством. Обозначим основное множество буквой E. Для любого множества A, принадлежащего основному множеству E, справедливы равенства: $A \cup E = E$, $A \cap E = A$.

Множество элементов основного множества *E*, не принадлежащих множеству *A*, называется *дополнением* множества *A* до множества *E* или просто дополнением и обозначается *A′*.



Объединение множества A и его дополнения A' есть основное множество: $A \cup A' = E$.

Пересечение множества со своим дополнением пусто: $A \cap A' = \varnothing$.

Дополнение пустого множества есть основное множество: $\varnothing' = E$, а дополнение основного множества пусто: $E' = \varnothing$.

На рисунке основное множество E схематически изображено в виде прямоугольника, его подмножество A заштриховано, не заштриховано дополнение множества A'.

2.4 Формула Грассмана.

Теория множеств используется при решении задач следующего вида:

В группе зверей 15 умных, 13 – красивых, и 8 мартышек. Сколько зверей в группе?

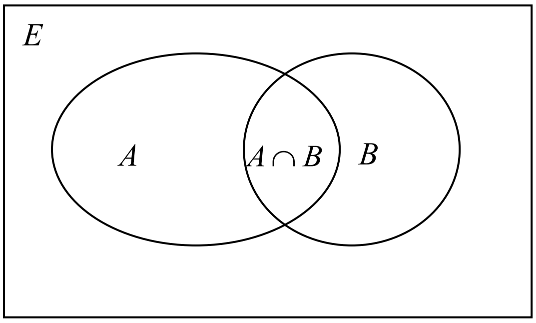
Решение:

Пусть U – множество умных зверей, K – множество красивых. Тогда множество мартышек будет обозначаться как $U \cap K$, а множество всех зверей – $U \cup K$. Значит, $|U| = 15$, $|K| = 13$ и $|U \cap K| = 8$. Требуется найти $|U \cup K|$. Так как мартышки входят как в множество умных, так и в множество красивых, то при простом сложении элементов множеств, мы мартышек посчитаем два раза. Тогда из суммы элементов множеств умных и красивых нужно одну часть мартышек вычесть. Получим формулу: $|U \cup K| = |U| + |K| - |U \cap K|$. Эта формула носит название *формулы Грассмана* для двух множеств. С помощью этой формулы найдем количество зверей: $|U \cup K| = 15 + 13 - 8 = 20$.

Пример 6: ***В классе 35 учеников. 20 человек посещают математический кружок, 11 – биологический. 10 человек не посещают кружков. Сколько биологов увлекается математикой?***

Решение:

Изобразим ситуацию, изложенную в задаче, с помощью кругов Эйлера:



Тогда $|E| = 35$, $|A| = 20$, $|B| = 11$, $|E \setminus (A \cup B)| = 10$. Требуется найти, чему равно $|A \cap B|$. Сначала найдем, чему равно $|A \cup B|$. $|A \cup B| = |E| - |E \setminus (A \cup B)| = 35 - 10 = 25$. Теперь подставим известные значения в формулу Грассмана:

$25 = 20 + 11 - |A \cap B|$. Выразим из этого уравнения $|A \cap B|$ и найдем, чему оно равно: $|A \cap B| = 20 + 11 - 25 = 31 - 25 = 6$. Таким образом, 6 учеников увлекаются и биологией, и математикой.

Контрольные вопросы:

1. Назовите основателя теории множеств.
2. Дайте определение множества, элемента множества.
3. Какие способы задания множеств вы знаете?
4. Какие множества называют равными?
5. Дайте определение подмножества. Чем отличаются собственные подмножества от несобственных?
6. Какие множества называются числовыми? Приведите примеры числовых множеств.
7. Пересечение, и объединение множеств. Примеры.
8. Вычитание и дополнение множеств. Примеры.
9. Какая из операций сильнее (выполняется раньше)?
10. Как изображаются операции над множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна?
11. Перечислите свойства операций над множествами.
12. Для решения каких задач используют формулу Грассмана?