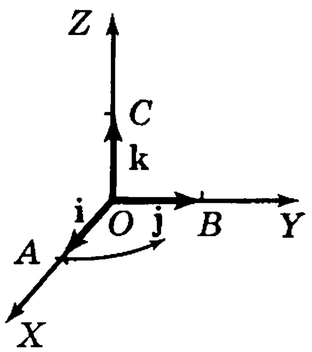
Раздел 3. Векторная алгебра в координатной плоскости

3.1 Основные векторы



Три взаимно перпендикулярные оси *OX*, *OY* и *OZ* образуют прямоугольную систему координат (раздел 2). Отложив на этих осях в положительном направлении отрезки *OA*, *OB* и *OC*, равные единице масштаба, получим три вектора: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Они называются ***основными векторами (ортами)*** и обозначаются соответственно $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

3.2 Координаты вектора на плоскости

Если $\vec{i}$, $\vec{j}$ – орты координатных осей прямоугольной системы координат *Oxy*, то любой вектор $\vec{a}$ единственным образом можно представить в виде их суммы (линейной комбинации) с коэффициентами a_x и a_y: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$. Коэффициенты a_x, a_y линейной комбинации называют координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$. Координаты a_x, a_y вектора $\vec{a}$ – это его проекции на соответствующие координатные оси. Вектор $\vec{a}$ с координатами a_x, a_y записывают в виде $\vec{a} = (a_x;\ a_y)$. Длина вектора $\vec{a}$ определяется по формуле $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями *Ox* и *Oy* углы α и β соответственно. Направление вектора $\vec{a}$ определяется с помощью направляющих косинусов: *cos*α, *cos*β для которых справедливы равенства $\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}$.

Пусть даны два вектора $\vec{a} = (a_x;\ a_y)$ и $\vec{b} = (b_x;\ b_y)$. Тогда:

1) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т. е. $\vec{a} = \vec{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \end{cases}$.
2) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т. е.: $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$.
3) При сложении векторов их одноименные координаты складываются, при вычитании – вычитаются, при умножении вектора на число – умножаются на это число: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x;\ a_y + b_y)$; $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda a_x;\ \lambda a_y)$.

Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат с произвольной точкой $M(x;\ y)$ называется радиус-вектором точки *M*. Координаты точки – это координаты ее радиус-вектора $\vec{r} = (x;\ y)$ или $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Если вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ задан точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, то его координаты a_x, a_y вычисляются по формулам $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (a_x;\ a_y)$ и $\vec{b} = (b_x;\ b_y)$ то их скалярное произведение находится по формуле: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

3.3 Координаты вектора в пространстве

Если $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ – орты координатных осей прямоугольной системы координат *Oxy*, то любой вектор $\vec{a}$ единственным образом можно представить в виде их суммы (линейной комбинации) с коэффициентами a_x и a_y: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$. Коэффициенты a_x, a_y, a_z линейной комбинации называют координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Координаты a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a}$ – это его проекции на соответствующие координатные оси. Вектор $\vec{a}$ с координатами a_x, a_y, a_z записывают в виде $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$. Длина вектора $\vec{a}$ определяется по формуле: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (1.1).

Вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями O_x, O_y и O_z углы α, β и γ соответственно. Направление вектора $\vec{a}$ определяется с помощью направляющих косинусов: *cosα*, *cosβ* и *cosγ* для которых справедливы равенства: $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$ (1.2).

Пусть даны два вектора $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$. Тогда:

1) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т. е. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}$
2) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т. е. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ (1.3)

При сложении векторов их одноименные координаты складываются, при вычитании – вычитаются, при умножении вектора на число – умножаются на это число:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x;\ a_y \pm b_y;\ a_z \pm b_z)$$
$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot a_x;\ \lambda \cdot a_y;\ \lambda \cdot a_z)$$

Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат с произвольной точкой $M(x;\ y;\ z)$ называется ***радиус-вектором*** точки *M*. Координаты точки – это координаты ее радиус-вектора $\vec{r} = (x;\ y;\ z)$ или $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Если вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ задан точками $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то его координаты a_x, a_y, a_z вычисляются по формулам: $a_x=x_2-x_1$, $a_y=y_2-y_1$, $a_z=z_2-z_1$: $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$ (1.4).

Пример 1: Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1;\ -2;\ 3)$, $B(3;\ 2;\ 1)$, $C(6;\ 4;\ 4)$. Найти его четвертую вершину D.

Решение:

Обозначим координаты вершины D через x, y, z, т. е. $D(x;\ y;\ z)$. Так как $ABCD$ – параллелограмм, то имеем: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Находим координаты векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{BC}=(6-3;\ 4-2;\ 4-1)$,т.е. $\overrightarrow{BC}=(3;\ 2;\ 3)$; $\overrightarrow{AD}=(x-1;\ y+2;\ z-3)$. Из равенства векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ следует, что $x-1=3$, $y+2=2$, $z-3=3$. Отсюда находим: $x=4$х, $y=0$, $z=6$. Итак, $D(4;\ 0;\ 6)$.

Пример 2: Найти координаты вектора $\vec{a}$, если известно, что он направлен в противоположную сторону к вектору $\vec{b}=5\vec{i}-4\vec{j}+2\sqrt{2}\vec{k}$, и его модуль равен 5.

Решение:

Можно записать, что $\vec{a}=5\cdot\vec{a}^{\,0}$. Так как вектор $\vec{a}$ направлен в противоположную сторону к вектору $\vec{b}$, то $\vec{a}^{\,0}=-\vec{b}^{\,0}$. Найдем орт $\vec{b}^{\,0}$. Из равенства $\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\vec{b}^{\,0}$ находим $\vec{b}^{\,0}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Но $|\vec{b}|=\sqrt{5^2+(-4)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=7$. Значит, $\vec{b}^{\,0}=\dfrac{5}{7}\vec{i}-\dfrac{4}{7}\vec{j}+\dfrac{2\sqrt{2}}{7}\vec{k}$.

Следовательно, $\vec{a}^{\,0}=-\dfrac{5}{7}\vec{i}+\dfrac{4}{7}\vec{j}-\dfrac{2\sqrt{2}}{7}\vec{k}$ и $\vec{a}=5\cdot\vec{a}^{\,0}=5\cdot\left(-\dfrac{5}{7}\vec{i}+\dfrac{4}{7}\vec{j}-\dfrac{2\sqrt{2}}{7}\vec{k}\right)$, т.е. $\vec{a}=-\dfrac{25}{7}\vec{i}+\dfrac{20}{7}\vec{j}-\dfrac{10\sqrt{2}}{2}\vec{k}$.

Пример 3: Вектор $\vec{a}$ составляет с осями Ox и Oy углы α = 60° и β = 120°. Найти его координаты, если $|\vec{a}|=2$.

Решение:

Пусть x, y, z – координаты вектора $\vec{a}$, то есть $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$. Координаты вектора $\vec{a}$ найдем из соотношений $\cos\alpha=\dfrac{x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta=\dfrac{y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma=\dfrac{z}{|\vec{a}|}$. Предварительно найдем $\cos\gamma$.

Так как, то $\cos^2\gamma=1-\cos^2 60-\cos^2 120$, то есть $\cos^2\gamma=\dfrac{1}{2}$. Отсюда находим, что $\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ или $\cos\gamma=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Условию задачи удовлетворяют два вектора $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$: $\overrightarrow{a_1}$ с направляющими косинусами $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\cos\beta=-\dfrac{1}{2}$, $\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\overrightarrow{a_2}$ с направляющими косинусами $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\cos\beta=-\dfrac{1}{2}$, $\cos\gamma=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Имеем: $\dfrac{1}{2}=\dfrac{x_1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}=\dfrac{y_1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{z_1}{2}$, $\dfrac{1}{2}=\dfrac{x_2}{2}$, $-\dfrac{1}{2}=\dfrac{y_2}{2}$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{z_2}{2}$. Отсюда находим: $x_1=1$, $y_1=-1$, $z_1=\sqrt{2}$ и $x_2=1$, $y_2=-1$, $z_2=-\sqrt{2}$. То есть $\overrightarrow{a_1}=(1;\ -1;\ \sqrt{2})$ и $\overrightarrow{a_2}=(1;\ -1;\ -\sqrt{2})$.

Пример 4: При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ и $\vec{b} = \beta\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны?

Решение:

Так как $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\dfrac{-2}{\beta} = \dfrac{3}{-6} = \dfrac{\alpha}{2}$ (см. условие (1.3)). Отсюда находим, что $\alpha = -1$, $\beta = 4$.

Пример 5: Разложить вектор $\vec{c} = (9;\ 4)$ по векторам $\vec{a} = (1;\ 2)$ и $\vec{b} = (2;\ -3)$.

Решение:

Требуется представить вектор $\vec{c}$ в виде $\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}$, где λ_1 и λ_2 – числа. Найдем их, используя определение равенства векторов. Имеем: $\vec{c} = 9\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ и равенство $9\vec{i} + 4\vec{j} = \lambda_1\left(\vec{i} + 2\vec{j}\right) + \lambda_2\left(2\vec{i} - 3\vec{j}\right)$, то есть $9\vec{i} + 4\vec{j} = (\lambda_1 + 2\lambda_2)\vec{i} + (2\lambda_1 - 3\lambda_2)\vec{j}$. Отсюда следует, что $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 9, \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 4 \end{cases}$, то есть $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$, следовательно, $\vec{c} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$.

3.4 Векторное произведение векторов

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$, или $\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$ (3.2).

Для вычисления площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ применяется формула $S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ (3.3).

Векторное произведение может быть выражено формулой $\vec{a} \times \vec{b} = S \cdot \vec{e}$ (3.4), где $\vec{e}$ – орт направления $\vec{a} \times \vec{b}$.

Пример 6: Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 2;\ 1)$, $C(-2;\ 1;\ 2)$.

Решение:

Площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, то есть $S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$. Имеем: $\overrightarrow{AB} = (2;\ 0;\ 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-3;\ -1;\ 2)$. Тогда по формуле (3.2) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \right)$, то есть $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1;\ -7;\ -2)$. Следовательно, $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + 49 + 4} = \dfrac{\sqrt{54}}{2} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

3.5 Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Обозначение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Таким образом: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$.

Геометрически смешанное произведение интерпретируется как число, равное объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ как на ребрах. Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ положительно, если данные векторы образуют правую тройку, и отрицательно – если левую.

Свойства смешанного произведения:

1. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$, т. е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов;
2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, т. е. смешанное произведение не меняется при перестановке знаков векторного и скалярного умножения;
3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=\vec{c}\vec{b}\vec{a}$ т.е. смешанное произведение меняет знак на противоположный при перемене мест любых двух векторов-сомножителей;
4. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$, если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны (в частности, если любые два из перемножаемых вектора коллинеарны).

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими координатами $\vec{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b}=(b_x;\ b_y;\ b_z)$, $\vec{c}=(c_x;\ c_y;\ c_z)$ то $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_z & c_z \end{vmatrix}$ (4.1).

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ $\vec{c}$ – правая тройка; $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$ – левая.

Объем V_1 параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и объем V_2, построенной на них треугольной пирамиды, находятся по формулам

$$V_1=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|, \qquad (4.2)$$

$$V_2=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \quad (4.3)$$

Пример 7: Доказать, что четыре точки $A_1(3;\ 5;\ 1)$, $A_2(2;\ 4;\ 7)$, $A_2(1;\ 5;\ 3)$, $A_4(4;\ 4;\ 5)$ лежат в одной плоскости.

Решение:

Достаточно показать, что три вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, имеющие начало в одной из данных точек, лежат в одной плоскости (то есть компланарны). Находим координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$\overrightarrow{A_1A_2}=(2-3;\ 4-5;\ 7-1)=(-1;\ -1;\ 6)$;

$\overrightarrow{A_1A_3}=(1-3;\ 5-5;\ 3-1)=(-2;\ 0;\ 2)$;

$\overrightarrow{A_1A_4}=(4-3;\ 4-5;\ 5-1)=(1;\ -1;\ 4)$.

Проверяем условие компланарности векторов (свойство 4 смешанного произведения векторов):

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0+12-2-0-8-2=0.$$

Следовательно, векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$ компланарны, а значит, точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат в одной плоскости.

Вопросы для контроля

1. Дайте понятие основных векторов (ортов).
2. Линейная комбинация вектора на плоскости и в пространстве. Координаты вектора на плоскости и в пространстве.
3. Формулы для нахождения длины вектора, заданного своими координатами на плоскости и в пространстве.
4. Условия равенства и коллинеарности векторов на плоскости и в пространстве.
5. Операции над векторами, заданными своими координатами на плоскости и в пространстве (сложение, вычитание, умножение на число, скалярное произведение).
6. Направление вектора на плоскости и в пространстве.
7. Радиус-вектор точки на плоскости и в пространстве.
8. Координаты вектора, заданного координатами его концов на плоскости и в пространстве.
9. Векторное произведение векторов, заданных своими координатами. Свойства векторного произведения.
10. Смешанное произведение векторов. Свойства смешанного произведения.
11. Формула для нахождения смешанного произведения векторов, заданных своими координатами. Применение смешанного произведения векторов для нахождения объема параллелепипеда и треугольной пирамиды.
12. Условие компланарности векторов.