Раздел 3. Производная функции

3.1 Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента , когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначения: $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$ или $\frac{df(x_0)}{dx}$ или $f'|_{x=x_0}$

Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Вычисление производной называется *дифференцированием* функции.

3.2 Таблица производных

1. $(c)' = 0, c = const$;

2. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ (где $\alpha \in R$); в частности, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a\,, a > 0$; в частности, $(e^x)' = e^x$;

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$; в частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

5. $(\sin x)' = \cos x$;

6. $(\cos x)' = -\sin x$;

7. $(\text{t}g\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

8. $(\text{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\text{x}^2}}$;

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\text{x}^2}}$;

11. $(\text{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+\text{x}^2}$;

12. $(\text{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+\text{x}^2}$;

13. $(\text{sh}\, x)' = \text{ch}\, x$;

14. $(\text{ch}\, x)' = \text{sh}\, x$;

15. $(\text{th}\, x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$;

16. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

3.3 Основные правила дифференцирования

Пусть c – константа, а $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в некоторой точке x. Тогда функции $u(x) \pm v(x)$, $c \cdot u(x)$, $u(x) \cdot v(x)$ и $\frac{u(x)}{v(x)}$ (где $v(x) \neq 0$) также имеют производные в этой точке, причём

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv\prime}{v^2}$, в частности, $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv\prime}{v^2}$.

Пусть теперь функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = f(u)$ – в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f\big(\varphi(x)\big)$ также имеет производную в точке x_0, причем

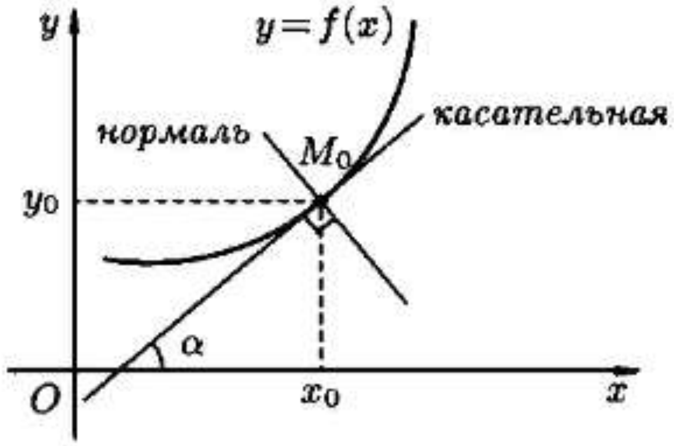
$$y'(x_0) = y'(u_0) \cdot u'(x_0)$$

3.4 Геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0. Тогда существует касательная к графику этой функции в точке $M_0(x_0; y_0)$, уравнение которой имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

При этом $f'(x_0) = \operatorname{tn} \alpha$, где α - угол наклона этой касательной к оси Ox.



Прямая, проходящая через точку касания, перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к кривой и имеет уравнение

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Если $f'(x_0) = 0$ (т.е. касательная горизонтальна), то нормаль вертикальна и имеет уравнение $x = x_0$.

Пусть даны две пересекающиеся в точке $M_0(x_0; y_0)$ кривые $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем обе функции имеют производные в точке x_0. Тогда *углом между* этими *кривыми* называется угол между касательными к ним, проведенными в точке M_0.

Этот угол φ можно найти из формулы

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1{}'(x_0)}{1 + f_1{}'(x_0) \cdot f_2{}'(x_0)}$$

3.5 Логарифмическая производная

При нахождении производных от показательно-степенной функции $u(x)^{v(x)}$, а также других громоздких выражений, допускающих логарифмирование (произведение, частное и извлечение корня), удобно применять логарифмическую производную.

Логарифмической производной от функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}$$

Используя логарифмическую производную, нетрудно вывести формулу для производной показательно-степенной функции $u(x)^{v(x)}$:

$$(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v$$

3.6 Производная неявной функции

Пусть функция $y = y(x)$, обладающая производной в точке x, задана неявно уравнением

$$F(x, y) = 0 \qquad (1.1)$$

Тогда производную $y'(x)$ этой функции можно найти, продифференцировав уравнение (1.1) (при этом y считается функцией от x) и разрешая затем полученное уравнение относительно y'.

3.7 Производные высших порядков

Производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ называется также *производной первого порядка.* В свою очередь производная от функции $f'(x)$ называется *производной второго порядка* от функции $f(x)$ (или второй производной) и обозначается $f''(x)$.

Аналогично определяется *производная третьего порядка* (или *третья производная*), обозначаемая $f'''(x)$ и т.д.

Производная $n-$ го порядка обозначается $f^{(n)}(x)$.

3.8 Производная функций, заданных параметрически

Пусть функция $y=f(x)$ определена параметрически функциями $x=x(t)$ и $y=y(t)$. Тогда если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные в точке $t0$, причем $x'(t_0)\neq 0$, а функция $y=f(x)$ имеет производную в точке $x_0=x(t_0)$, то эта производная находится по формуле

$$y'(x_0)=\frac{y_t'(t_0)}{x_t'(t_0)} \text{ или } y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}$$

Вторая производная $y''(x)$ находится по формуле

$$y_{xx}''=\frac{y_t''\cdot x_t'-x_t''\cdot y_t'}{(x_t')^3}$$

<u>*Пример 1*</u>. Пользуясь основными правилами дифференцирования, найти $f'(x)$, если:

1) $f(x)=\frac{9}{\sqrt[3]{x^2}}-5^{x+1}$;
2) $f(x)=(x^4-x)\cdot(3\operatorname{tg}x-1)$.

<u>*Решение*</u>

1) Преобразуем функцию к виду

$$f(x)=9\cdot x^{-2/3}-5\cdot 5^x$$

Отсюда, используя таблицу производных, получим

$$f'(x)=\left(9\cdot x^{-2/3}-5\cdot 5^x\right)'=\left(9\cdot x^{-2/3}\right)'-(5\cdot 5^x)'=9\cdot\left(x^{-2/3}\right)'-5\cdot(5^x)'$$
$$=9\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-\frac{2}{3}-1}-5\cdot 5^x\ln 5=-6x^{-5/3}-5^{x+1}\ln 5$$

2) Воспользуемся формулой для производной произведения:

$$\begin{aligned} f'(x)&=[(x^4-x)\cdot(3\operatorname{tg}x-1)]'\\ &=(x^4-x)'(3\operatorname{tg}x-1)+(x^4-x)\cdot(3\operatorname{tg}x-1)'\\ &=(4x^3-1)(3\operatorname{tg}x-1)+(x^4-x)\cdot\frac{3}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

<u>*Пример 2*</u>. Применяя правило дифференцирования сложной функции, найти производную функции y:

1) $y = \sin^2 x$;
2) $y = \ln(\operatorname{arctg} 3x)$.

<u>*Решение*</u>

1) Данная функция является композицией двух имеющих производные функций $u = \sin x$ и $f(u) = u^2$. Так как $u' = \cos x$, а $f'(u) = 2u$, то с учетом правила дифференцирования сложной функции получим:

$$y'(x) = (u^2)'_x = 2u \cdot u' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

2) Функция $\ln(\operatorname{arctg} 3x)$ – композиция функций $u = \operatorname{arctg} 3x$ и $f(u) = \ln u$, откуда

$$y'(x) = (\ln u)'_x = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\operatorname{arctg} 3x} \cdot (\operatorname{arctg} 3x)'$$

Функция $\operatorname{arctg} 3x$, в свою очередь, является композицией двух функций $v = 3x$ и $g(v) = \operatorname{arctg} v$, поэтому для нахождения ее производной нам придется еще раз применить правило дифференцирования сложной функции:

$$(\operatorname{arctg} 3x)' = (\operatorname{arctg} v)'_x = \frac{1}{1+v^2} \cdot v' = \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3 = \frac{3}{1+9x^2}$$

Отсюда окончательно

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} 3x} \cdot (\operatorname{arctg} 3x)' = \frac{3}{(1+9x^2)\operatorname{arctg} 3x}$$

<u>*Пример 3*</u>. Используя логарифмическую производную, найти производные функций:

1) $y = x^{\sin x}$;
2) $y = \frac{(x-1)^3 \cdot \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

<u>*Решение*</u>

1) Прологарифмируем обе части равенства $y = x^{\sin x}$. Тогда $\ln y = \ln x^{\sin x}$, т.е. $\ln y = \sin x \cdot \ln x$. Теперь продифференцируем последнее равенство, при этом в левой части используем производную сложной функции, а в правой – производную произведения: $(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)'$, т.е. $\frac{y'}{y} = (\sin x)' \ln x + \sin x\,(\ln x)'$ или $\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$.

Отсюда $y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$ или, учитывая, что $y = x^{\sin x}$,

$$y' = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

2) Непосредственное дифференцирование данной дроби привело бы к громоздким вычислениям, зато применение логарифмической производной позволяет найти ответ без труда:

$$\ln y = \ln\frac{(x-1)^3(x+2)^{1/2}}{(x+1)^{2/3}}$$

Отсюда, используя формулы для логарифма произведения, частного и степени, получим:

$$\ln y = \ln(x-1)^3 + \ln(x+2)^{1/2} - \ln(x+1)^{2/3}$$

Т.е.

$$\ln y = 3\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{2}{3}\ln(x+1)$$

Осталось продифференцировать обе части полученного равенства:

$$(\ln y)' = \left(3\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{2}{3}\ln(x+1)\right)'$$

Или

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{2}{3(x+1)}$$

Откуда

$$y' = y\cdot\left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{2}{3(x+1)}\right)$$

Т.е.

$$y' = \frac{(x-1)^3\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\cdot\left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{2}{3(x+1)}\right)$$

Пример 4. Найти производную неявно заданной функции y:

$$x^3 + y^3 = \sin(x-2y)$$

Решение

Дифференцируя обе части уравнения и учитывая, что y – есть функция от x (поэтому, например, $(y^3)'_x = 3y^2\cdot y'$), получим:

$$3x^2 + 3y^2\cdot y' = \cos(x-2y)(1-2y')$$

Или

$$3x^2 + 3y^2\cdot y' = \cos(x-2y) - 2y'\cdot\cos(x-2y)$$

Отсюда находим y':

$$3y^3y' + 2y' \cdot \cos(x - 2y) = \cos(x - 2y) - 3x^2$$

Или

$$y'(3y^3 + 2\cos(x - 2y)) = \cos(x - 2y) - 3x^2$$

Т.е.

$$y' = \frac{\cos(x - 2y) - 3x^2}{3y^3 + 2\cos(x - 2y)}$$

Пример 5. Найти производную $y'(x)$ от следующей функции, заданной параметрически:

$$x = 2\cos t\,, y = 3\sin t$$

Решение

Производная функции $y(x)$ находится по формуле $y'(x) = \frac{y\prime(t)}{x\prime(t)}$, откуда в нашем случае

$$y'(x) = \frac{(3\sin t)'}{(2\cos t)'} = -\frac{3\cos t}{2\sin t} = -1{,}5\operatorname{ctg} t$$

Пример 6.

1) Написать уравнения касательной и нормали к параболе $y^2 = 4x$ в точке $M(1; 2)$.

2) Найти точки, в которых касательная к графику гиперболы $y = \frac{1}{x}$ параллельна прямой $y = -\frac{1}{4}x + 3$.

3) Найти угол, под которым пересекаются кривые

$$y = \frac{8}{x} \text{ и } x^2 - y^2 = 12$$

Решение

1) Найдем $y'(x)$ как производную неявной функции: $(y^2)' = (4x)'$, т.е. $2yy' = 4$, откуда $y' = \frac{2}{y}$. Значит, $y'(x_0) = y'(1) = 1$.

Отсюда получаем уравнение касательной в точке M:

$$y - 2 = x - 1, \text{ т.е. } y = x + 1$$

Теперь найдем уравнение нормали:

$$y - 2 = -(x - 1), \text{ т.е. } y = -x + 3$$

2) Угловой коэффициент данной прямой равен $-\frac{1}{4}$, поэтому производная к кривой в искомой точке x_0 также равна $-\frac{1}{4}$:

$$y'(x_0) = -\frac{1}{4}\text{ , т.е. } -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4}$$

Откуда $x^2 = 4$, или $x = \pm 2$.

3) Сначала найдем точку пересечения кривых, для чего подставим $y = \frac{8}{x}$ во второе уравнение: $x^2 - \left(\frac{8}{x}\right)^2 = 12$, или $t - \frac{64}{t} = 12$, где $t = x^2$. Решая последнее уравнение, найдем $t = 16$, откуда $x = \pm 4$, $y = \pm 2$. Таким образом, имеем 2 точки пересечения $M_1(4; 2)$ и $M_2(-4; -2)$.

Найдем угол φ_1 пересечения кривых в точке M_1, предварительно вычислив $y_1'(4)$ и $y_2'(4)$ из уравнений $y_1 = \frac{8}{x}$ и $x^2 - y_2^2 = 12$:

$$y_1' = -\frac{8}{x} \Rightarrow y_1'(4) = -\frac{8}{16} = -0{,}5;$$

$$(x^2 - y_2^2)' = (12)' \Rightarrow 2x - 2y_2 \cdot y_2' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2' = \frac{x}{y_2} \Rightarrow y_2'(4) = \frac{4}{2} = 2$$

Теперь окончательно найдем

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y_2'(4) - y_1'(4)}{1 + y_1'(4)y_2'(4)} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - 1}$$

Поскольку знаменатель дроби обратился в ноль, то это означает, что $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$. Аналогично находим угол $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ во второй точке пересечения данных кривых.

Пример 7. Найти:

1) $f'''(x)$, где $f(x) = \sin 3x$;
2) y''_{xx} для функции $y = y(x)$, заданной параметрически $x = t^2, y = t^3$.

Решение

1) Находим первую производную:

$$f'(x) = (\sin 3x)' = 3\cos 3x$$

Отсюда получим вторую производную –

$$f''(x) = (3\cos 3x)' = -9\sin 3x$$

А затем и искомую третью:

$$f'''(x) = (-9\sin 3x)' = -27\cos 3x$$

2) Воспользуемся формулой

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

Откуда

$$y''_{xx} = \frac{(t^2)' \cdot (t^3)'' - (t^3)' \cdot (t^2)''}{((t^2)')^3} = \frac{2t \cdot 6t - 3t^2 \cdot 2}{(2t)^3} = \frac{6t^2}{8t^3} = \frac{3}{4t}$$