# Máquinas de Turing

IIC3242

# Complejidad Computacional

Objetivo: Medir la complejidad computacional de un problema.

Vale decir: Medir la cantidad de recursos computacionales necesarios para solucionar un problema.

- Tiempo
- Espacio
- ...

Para hacer esto primero tenemos que introducir la noción de problema.

# Problemas de decisión

Alfabeto $\Sigma$: Conjunto finito de símbolos.

- Ejemplo: $\Sigma = \{0, 1\}$.

Palabra $w$: Secuencia finita de símbolos de $\Sigma$.

- Ejemplo: $w = 01101$.

$\Sigma^*$: Conjunto de todas las palabras construidas con símbolos de $\Sigma$.

Lenguaje $L$: Conjunto de palabras.

- Ejemplo: $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

# Problemas de decisión

Problema de decisión asociado a un lenguaje $L$: Dado $w \in \Sigma^*$, decidir si $w \in L$.

## Ejemplo

Podemos ver SAT como un problema de decisión. Suponga que $P = \{p, q\}$:

- $\Sigma = \{p, q, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (, )\}$
  Algunas palabras de $\Sigma^*$ representan fórmulas, mientras que otras tales como $\neg\neg$ y $p\neg q \wedge \wedge \vee q$ no representan fórmulas.
- SAT $= \{w \in \Sigma^* \mid w$ representa una fórmula y $w$ es satisfacible$\}$.

# Complejidad de un problema de decisión

La complejidad de un lenguaje $L$ es la complejidad del problema de decisión asociado a $L$.

¿Cuándo decimos que $L$ puede ser solucionado eficientemente?

- Cuando existe un algoritmo eficiente que decide $L$.

**Ejercicio**

Muestre que $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ es un palíndromo}\}$ puede ser resuelto eficientemente.

¿Cuándo decimos que $L$ es un problema difícil?

- Cuando **no existe** un algoritmo eficiente que decide $L$.

# Máquinas de Turing

¿Cómo podemos demostrar que un problema es difícil?

- Para hacer esto, primero tenemos que formalizar la noción de algoritmo.

¿Qué es un algoritmo? ¿Podemos formalizar este concepto?

- Máquinas de Turing: Intento por formalizar este concepto.

¿Podemos demostrar que las máquinas de Turing capturan la noción de algoritmo?

- No, el concepto de algoritmo es intuitivo.

# Máquinas de Turing

¿Por qué creemos que las máquinas de Turing son una buena formalización del concepto de algoritmo?

- Porque cada programa de una máquina de Turing puede ser implementado.
- Porque todos los algoritmos conocidos han podido ser implementados en máquinas de Turing.
- Porque todos los otros intentos por formalizar este concepto fueron reducidos a las máquinas de Turing.
  - Los mejores intentos resultaron ser equivalentes a las máquinas de Turing.
  - Todos los intentos "razonables" fueron reducidos eficientemente.
- Tesis de Church: **Algoritmo = Máquina de Turing.**

# Máquinas de Turing: Formalización

## Definición

*Máquina de Turing (Determinista):* $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$

- $Q$ *es un conjunto finito de estados.*
- $\Sigma$ *es un alfabeto tal que* $\vdash, \mathtt{B} \not\in \Sigma$.
- $\Gamma$ *es un alfabeto tal que* $\Sigma \cup \{\vdash, \mathtt{B}\} \subseteq \Gamma$.
- $q_0 \in Q$ *es el estado inicial.*
- $F \subseteq Q$ *es un conjunto de estados finales.*
- $\delta$ *es una función parcial:*

$$\delta \quad : \quad Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{I, N, D\}.$$

$\delta$ *es llamada función de transición.*

# Máquinas de Turing: Funcionamiento

La cinta de la máquina de Turing es infinita hacia la derecha.

- El símbolo $\vdash$ es usado para demarcar la posición 0 de la cinta.

**Supuesto**

- Si $\delta(q, \vdash)$ está definido: $\delta(q, \vdash) = (q', \vdash, X)$, con $X \in \{D, N\}$
- Si $a \in \Gamma \setminus \{\vdash\}$ y $\delta(q, a)$ está definido: $\delta(q, a) = (q', b, X)$, con $b \in \Gamma \setminus \{\vdash\}$.

$\Sigma$ es el alfabeto de entrada y $\Gamma$ es el alfabeto de la cinta.

- Una palabra $w \in \Sigma^*$ de entrada de largo $n$ es colocada en las posiciones 1, ..., $n$ de la cinta.
- Las posiciones siguientes ($n + 1$, $n + 2$, ...) contienen el símbolo B.

# Máquinas de Turing: Funcionamiento

Al comenzar a funcionar, la máquina se encuentra en el estado $q_0$ y su cabeza lectora está en la posición 1 de la cinta.

En cada instante la máquina se encuentra en un estado $q$ y su cabeza lectora está en una posición $p$.

- Si el símbolo en la posición $p$ es $a$ y $\delta(q, a) = (q', b, X)$, entonces:
  - La máquina escribe el símbolo $b$ en la posición $p$ de la cinta.
  - Cambia de estado desde $q$ a $q'$.
  - Mueve la cabeza lectora a la posición $p - 1$ si $X = I$, y a la posición $p + 1$ si $X = D$. Si $X = N$, entonces la cabeza lectora permanece en la posición $p$.

# Máquinas de Turing: Aceptación

Los estados de $F$ son utilizados como estados de aceptación.

- Una palabra $w$ es aceptada por una máquina $M$ si y sólo si la ejecución de $M$ con entrada $w$ se detiene en un estado de $F$.

**Definición**

*Lenguaje aceptado por una máquina de Turing $M$:*

$$L(M) \quad = \quad \{w \in \Sigma^* \mid M \textit{ acepta } w\}.$$

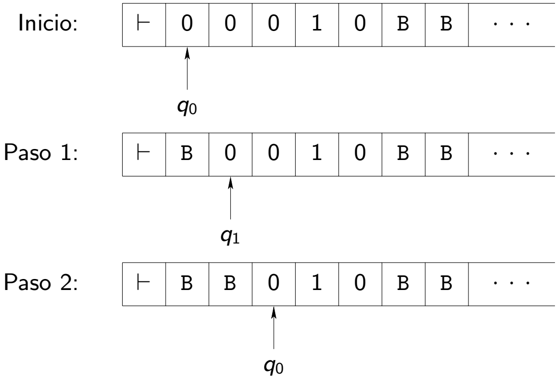
# Máquinas de Turing: Ejemplo

Queremos construir una máquina que verifique si el número de 0s en una palabra es par: $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$

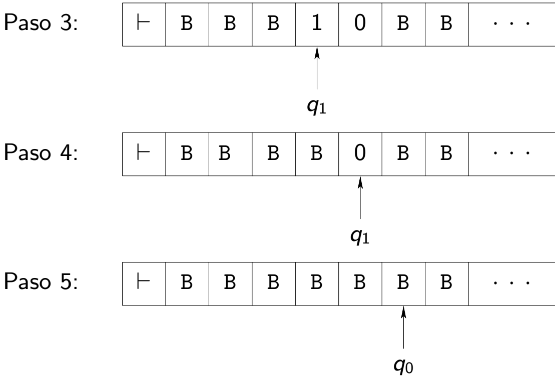
- $Q = \{q_0, q_1\}$.
- $\Sigma = \{0, 1\}$.
- $\Gamma = \{0, 1, \vdash, \texttt{B}\}$.
- $F = \{q_0\}$.
- $\delta$ es definida como:

$$
\begin{array}{rcl}
\delta(q_0, 0) & = & (q_1, \texttt{B}, D) \\
\delta(q_0, 1) & = & (q_0, \texttt{B}, D) \\
\delta(q_1, 0) & = & (q_0, \texttt{B}, D) \\
\delta(q_1, 1) & = & (q_1, \texttt{B}, D)
\end{array}
$$

Supongamos que $w = 00010$:



# Máquinas de Turing: Ejecución




Conclusión: La máquina acepta $w = 00010$.

# El lenguaje aceptado por una máquina de Turing: Ejemplos

### Ejemplo

Para la máquina $M$ mostrada en las transparencias anteriores:

$$L(M) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contiene un número par de símbolos } 0\}.$$

### Ejercicio

Construya una máquina de Turing que acepte el lenguaje $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ es un palíndromo}\}$.

# Complejidad de un algoritmo

Una Máquina de Turing puede no detenerse en alguna entrada.

- Primera noción de algoritmo: MT que se detiene en todas las entradas.

¿Cómo se mide el tiempo de ejecución de un algoritmo?

Para una MT con alfabeto $\Sigma$:

- Paso de $M$: Ejecutar una instrucción de la función de transición.
- $tiempo_M(w)$: Número de pasos ejecutados por $M$ con entrada $w \in \Sigma^*$.

# Complejidad de un algoritmo

### Definición

*El tiempo de funcionamiento de una MT $M$ en el peor caso es definido por la función $t_M$:*

$$t_M(n) \quad = \quad \text{máx}\{ \; \mathit{tiempo}_M(w) \;\mid\; w \in \Sigma^* \text{ y } |w| = n \; \}.$$

### Ejercicio

Construya una máquina de Turing que funcione en tiempo $O(n^2)$ y acepte el lenguaje $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ es un palíndromo}\}$.

# Máquinas de Turing con varias cintas

## Definición

*MT con $k$ cintas:* $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$

- $Q$ *es un conjunto finito de estados.*
- $\Sigma$ *es un alfabeto tal que* $\vdash, \mathtt{B} \not\in \Sigma$.
- $\Gamma$ *es un alfabeto tal que* $\Sigma \cup \{\vdash, \mathtt{B}\} \subseteq \Gamma$.
- $q_0 \in Q$ *es el estado inicial.*
- $F \subseteq Q$ *es un conjunto de estados finales.*
- $\delta$ *es una función parcial:*

$$\delta \quad : \quad Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{I, N, D\}^k.$$

$\delta$ *es llamada función de transición.*

# Máquinas de Turing con $k$ cintas: Funcionamiento

La máquina tiene $k$ cintas infinitas hacia la derecha.

- El símbolo $\vdash$ es usado para demarcar la posición 0 de cada cinta.

$\Sigma$ es el alfabeto de entrada y $\Gamma$ es el alfabeto de las cintas.

- Una palabra $w \in \Sigma^*$ de entrada de largo $n$ es colocada en las posiciones $1, \ldots, n$ de la primera cinta.
- Las siguientes posiciones $(n + 1, n + 2, \ldots)$ de la primera cinta contienen el símbolo $\texttt{B}$.
- Las restantes cintas contienen el símbolo $\texttt{B}$ en las posiciones $1, 2, 3, \ldots$

# Máquinas de Turing con $k$ cintas: Funcionamiento

La máquina tiene una cabeza lectora por cinta.

- Al comenzar, la máquina se encuentra en el estado $q_0$, y cada cabeza lectora está en la posición 1 de su cinta.

En cada instante la máquina se encuentra en un estado $q$ y su cabeza lectora $i$ se encuentra en la posición $p_i$.

- Si el símbolo en la posición $p_i$ es $a_i$ y $\delta(q, a_1, \ldots, a_k) = (q', b_1, \ldots, b_k, X_1, \ldots, X_k)$, entonces:
  - La máquina escribe el símbolo $b_i$ en la posición $p_i$ de la $i$-ésima cinta.
  - Cambia de estado desde $q$ a $q'$.
  - Mueve la cabeza lectora de la $i$-ésima cinta a la posición $p_i - 1$ si $X_i = I$, y a la posición $p_i + 1$ si $X_i = D$. Si $X_i = N$, entonces la máquina no mueve la cabeza lectora de la $i$-ésima cinta.

# MT con $k$ cintas: Aceptación y complejidad

Una palabra $w$ es aceptada por una MT $M$ con $k$ cintas si y sólo si la ejecución de $M$ con entrada $w$ se detiene en un estado final.

$$L(M) \;=\; \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ acepta } w\}.$$

Para una MT con $k$ cintas y alfabeto $\Sigma$:

- Paso de $M$: Ejecutar una instrucción de la función de transición.
- $tiempo_M(w)$: Número de pasos ejecutados por $M$ con entrada $w \in \Sigma^*$.
- Tiempo de funcionamiento $M$ en el peor caso:

$$t_M(n) \;=\; \text{máx}\{\ tiempo_M(w) \ \mid\ w \in \Sigma^* \text{ y } |w| = n\ \}.$$

# MT con $k$ cintas: Ejemplo

**Ejercicio**

Construya una MT $M$ con dos cintas que funcione en tiempo $O(n)$ y acepte el lenguaje $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ es un palíndromo}\}$.

**Solución:** Definimos $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$ de la siguiente forma:

- $Q = \{q_0, q_c, q_r, q_v, q_a\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $\Gamma = \{0, 1, \texttt{B}, \vdash\}$
- $F = \{q_a\}$

- Función $\delta$ es definida de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
(q_0, \mathtt{B}, \mathtt{B}) & \to & (q_a, \mathtt{B}, \mathtt{B}, N, N) & (q_r, 1, 0) & \to & (q_r, 1, 0, I, N) \\
(q_0, 0, \mathtt{B}) & \to & (q_c, 0, 0, D, D) & (q_r, 1, 1) & \to & (q_r, 1, 1, I, N) \\
(q_0, 1, \mathtt{B}) & \to & (q_c, 1, 1, D, D) & (q_r, \vdash, 0) & \to & (q_v, \vdash, 0, D, N) \\
(q_c, 0, \mathtt{B}) & \to & (q_c, 0, 0, D, D) & (q_r, \vdash, 1) & \to & (q_v, \vdash, 1, D, N) \\
(q_c, 1, \mathtt{B}) & \to & (q_c, 1, 1, D, D) & (q_v, 0, 0) & \to & (q_v, 0, 0, D, I) \\
(q_c, \mathtt{B}, \mathtt{B}) & \to & (q_r, \mathtt{B}, \mathtt{B}, I, I) & (q_v, 1, 1) & \to & (q_v, 1, 1, D, I) \\
(q_r, 0, 0) & \to & (q_r, 0, 0, I, N) & (q_v, \mathtt{B}, \vdash) & \to & (q_a, \mathtt{B}, \vdash, N, N) \\
(q_r, 0, 1) & \to & (q_r, 0, 1, I, N) & & &
\end{array}
$$

# Aceptación en distintos modelos

Un lenguaje $L$ es aceptado por una MT $M$ si $L = L(M)$.

- ¿Es posible aceptar más lenguajes si se usa cintas adicionales?

**Teorema**

*Si un lenguaje $L$ es aceptado por una MT $M_1$ con $k$ cintas, entonces $L$ es aceptado por una MT $M_2$ con una cinta.*

**Ejercicio**

Demuestre el teorema.

- ¿Cuál es la diferencia de complejidad entre $M_1$ y $M_2$?

# Complejidad en distintos modelos

Un lenguaje $L$ es aceptado por una MT $M$ en tiempo $O(t(n))$ si $L = L(M)$ y $t_M(n)$ es $O(t(n))$.

- La definición es idéntica para el caso de $\Omega(t(n))$ y $\Theta(t(n))$.

¿Es posible aceptar más rápido si se usa cintas adicionales?

**Teorema**

*Si un lenguaje $L$ es aceptado por una MT $M_1$ con $k$ cintas en tiempo $O(t(n))$, entonces $L$ es aceptado por una MT $M_2$ con una cinta en tiempo $O(t(n)^2)$.*

**Ejercicio**

Demuestre el teorema.

- ¿Es posible reducir la diferencia entre $M_1$ y $M_2$?

# Complejidad en distintos modelos

Sea $L = \{w \in \{0, 1, \#\}^* \mid w \text{ es un palíndromo}\}$.

- $L$ es aceptado por una MT con dos cintas en tiempo $O(n)$.
- ¿Puede ser $L$ aceptado en tiempo lineal por una MT con una cinta?

**Proposición**

*Sea $M$ una MT con una cinta. Si $L = L(M)$, entonces $M$ funciona en tiempo $\Omega(n^2)$.*

**Demostración:** Suponga que $L = L(M)$, donde $M$ es una MT con una cinta.

- Sin perdida de generalidad, suponemos que $M$ siempre recorre toda la palabra de entrada.

Para $w \in \{0, 1, \#\}^*$, sea $w^r$ la palabra obtenida al escribir $w$ en el sentido inverso.

Defina $L_n$ como el siguiente lenguaje (para $n$ divisible por 4):

$$L_n \quad = \quad \{w\#^{\frac{n}{2}}w^r \mid w \in \{0, 1\}^{\frac{n}{4}}\}.$$

Nótese que $L_n \subseteq L$.

Sea $w \in L_n$ y $\frac{n}{4} \leq i \leq \frac{3n}{4}$. Entonces $C_i(w)$ es la secuencia de estados $[q_1, \ldots, q_k]$ en que se encuentra $M$ después de moverse entre las posiciones $i$ e $i + 1$ (en cualquiera de las dos direcciones) en la ejecución que tiene a $w$ como entrada.

- $C(w) = \{C_i(w) \mid \frac{n}{4} \leq i \leq \frac{3n}{4}\}$.

**Lema**

*Si* $w_1, w_2 \in L_n$ *y* $w_1 \neq w_2$*, entonces* $C(w_1) \cap C(w_2) = \emptyset$*.*

**Demostración:** Suponga que el lema es falso. Entonces existen $i, j \in \{\frac{n}{4}, \ldots, \frac{3n}{4}\}$ tales que $C_i(w_1) = C_j(w_2)$.

Sean $u_1$ y $u_2$ las palabra formadas por los primeros $i$ símbolos de $w_1$ y los últimos $n - j$ símbolos de $w_2$, respectivamente.

Dado que $C_i(w_1) = C_j(w_2)$, se tiene que $u_1 u_2$ es aceptado por $M$.

- ¿Cómo se demuestra esto?

Pero $u_1 u_2$ no es un palíndromo, por lo que tenemos una contradicción. □

# Complejidad en distintos modelos

Para $w \in L_n$, sea $s_w$ la secuencia más corta en $C(w)$.

- $S_n = \{s_w \mid w \in L_n\}$.

Por el lema sabemos que $s_{w_1} \neq s_{w_2}$ si $w_1 \neq w_2$.

- Por lo tanto: $|S_n| = |L_n| = 2^{\frac{n}{4}}$

Sea $m$ el largo de la secuencia mas larga en $S_n$.

- Cantidad de posibles secuencias de largo a lo más $m$:

$$\sum_{i=0}^{m} |Q|^i = \frac{|Q|^{m+1} - 1}{|Q| - 1}.$$

De lo anterior concluimos que: $\frac{|Q|^{m+1}-1}{|Q|-1} \geq 2^{\frac{n}{4}}$.

- ¿Por qué?

Se tiene entonces que $m$ es $\Omega(n)$.

- Por lo tanto existe $w_0 \in L_n$ para el cual $|s_{w_0}|$ es $\Omega(n)$.

Entonces: Todas las secuencias en $C(w_0)$ son de largo $\Omega(n)$.

Conclusión: Con entrada $w_0$, la máquina $M$ toma tiempo $\Omega(n^2)$.

- Puesto que $M$ tiene que generar $\frac{n}{2}$ secuencias de estados de largo $\Omega(n)$.

$\square$