1 Векторные и матричные нормы

1. По определению норма должна удовлетворять следующему набору свойств:

   (a) $\|x\| \geq 0$;

   (b) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

   (c) $\|cx\| = |c|\|x\|$;

   (d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

   Покажите, что одно из этих свойств следует из двух других.

2. Покажите, что при $0 < p < 1$ величина $\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$ задает функцию в $\mathbb{C}^n$, которая удовлетворяет всем свойствам нормы, кроме одного. Приведите пример.

3. Приведите примеры неэквивалентных норм.

4. Для векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство $\|x + y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$. Докажите, что x и y линейно зависимы. Верно ли это, если $\|x + y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p$, $p \neq 2$?

5. Докажите, что замкнутый шар $B = \overline{B}(0; 1)$ для любой нормы в $\mathbb{R}^n$ обладает следующими свойствами:

   (a) B — компактное множество относительно 2-нормы;

   (b) если $x, y \in B$ и $0 \leq \alpha \leq 1$, то $\alpha x + (1 - \alpha)y \in B$ (выпуклость);

   (c) если $x \in B$ и $|\alpha| \leq 1$, то $\alpha x \in B$ (уравновешенность);

   (d) $\exists r > 0 : \{y : \|y\|_2 < r\} \subset B$.

   Докажите, что если в $\mathbb{R}^n$ взять произвольное множество B, обладающее свойствами (a)-(d), то существует норма, для которой $B = \overline{B}(0; 1)$.

6. Дана матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Докажите, что множество

   $$\{y = Ax,\ x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T,\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0\}$$

   замкнуто.

7. Пусть $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$. Покажите, что оптимальные коэффициенты эквивалентности p_1 и p_2 гельдеровых нормы таковы, что

   $$\|x\|_{p_2} \leq \|x\|_{p_1} \leq n^{\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)} \|x\|_{p_2}$$

8. *Полунормой* называется функционал, который удовлетворяет всем свойствам нормы, кроме того, что он может быть равен нулю на ненулевых элементах. Приведите примеры полунормы в $\mathbb{C}^n$, не являющейся нормой. Докажите, что любая полунорма $f(x)$ в $\mathbb{C}^n$ может быть представлена как

   $$f(x) = \|Sx\|$$

   для некоторой нормы $\|\cdot\|$ и матрицы S.

9. *Преднормой* называется функционал $f(x)$ в конечномерном пространстве, который удовлетворяет следущим свойствам:

   (a) $f(x) \geq 0$ и $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ (положительность);

   (b) $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$ (однородность);

   (c) $f(x)$ непрерывна (непрерывность).

   Докажите, что любая норма является преднормой, а шар $\{x : f(x) \leq 1\}$ и сфера $\{x : f(x) = 1\}$ по преднорме являются компактными множествами.

10. Пусть $f(x)$ — преднорма в конечномерном пространстве. Функционал

$$f^D(y) = \max_{f(x)=1} \operatorname{Re}(y^* x) = \max_{f(x)=1} |y^* x|$$

   называется *двойственной нормой* к f. Покажите, что f^D определена корректно, двойственная норма является нормой и выполнено обобщение неравенства Коши-Буняковского-Шварца

$$|y^* x| \leq f(x) f^D(y).$$

11. Пусть норма $\|\cdot\|$ задана на $\mathbb{C}^n$. Докажите, что для p-нормы дуальной является q-норма, где p и q образуют гельдеровскую пару:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

   Кроме того, пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ сохраняет p-норму:

$$\|Ax\|_p = \|x\|_p, \quad \forall x \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

   Докажите, что в этом и только в этом случае матрица A^T сохраняет q-норму:

$$\|A^T x\|_q = \|x\|_q, \quad \forall x \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

12. Покажите, что $\|\cdot\| = \|\cdot\|^D$ тогда и только тогда, когда $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

13. Пусть $f(x)$ является преднормой в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. Обозначим через B единичный шар по преднорме f, а B'' единичный шар по f^{DD}:

$$B = \{x : f(x) \leq 1\}, \quad B'' = \{x : f^{DD}(x) \leq 1\}$$

   Покажите, что

   (a) $f^{DD}(x) \leq f(x)$, то есть $B \subset B''$;

   (b) B'' является замыканием выпуклой оболочки B;

   (c) если f является нормой, то $f^{DD} = f$ и $B = B''$.

14. Докажите, что норма Фробениуса не является операторной нормой.

15. Докажите формулы

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

16. Пусть A — подматрица матрицы B. Докажите, что $\|A\|_p \le \|B\|_p$.

17. Элементы матриц A и B неотрицательны и $a_{ij} \le b_{ij}$ для всех i, j. Верно ли, что $\|A\|_p \le \|B\|_p$?

18. Покажите, что если матричная норма равномерно не превосходит некоторой индуцированной матричной нормы, то она совпадает с ней. Напомним, что матричная норма должна дополнительно удовлетворять свойству $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$, а индуцированная норма имеет вид

$$\|A\|_\alpha = \max_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

для некоторой нормы $\|\cdot\|$ (норма в числителе и знаменателе одна и та же). Требуется показать, что если для некоторой матричной нормы $\|\cdot\|_M$ и индуцированной матричной нормы $\|\cdot\|_\alpha$ выполнено, что $\|A\|_M \le \|A\|_\alpha$ для любой матрицы A, то нормы $\|\cdot\|_M$ и $\|\cdot\|_\alpha$ совпадают. (Подсказка: докажите утверждение для случая, когда $\|\cdot\|_M$ также является индуцированной, а затем постройте норму индуцированную $\|x\|_z = \|xz^*\|_M$).