Лекция 12

12. Исследование нелинейных колебаний малой амплитуды. Метод Пуанкаре-Линштедта

Если для линейной системы

$$\dot{u} = a_{11}u + a_{12}v$$

$$\dot{v} = a_{21}u + a_{22}v$$

состояние равновесия $(0,0)$ имеет тип центр, собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

имеют вид $\lambda = \pm i\omega$. В этом случае *все* решения $u(t)$, $v(t)$ этой системы являются линейными комбинациями функций $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ и поэтому все они являются периодическими функциями с периодом $2\pi/\omega$.

Как известно, добавление к правым частям системы нелинейных членов может вообще изменить тип состояния равновесия, сделав его устойчивым или неустойчивым фокусом. В некоторых случаях (например, если система является гамильтоновой), состояние равновесия сохраняет тип "центр". Окрестность такого состояния равновесия также "заполнена" периодическими траекториями, соответствующими колебаниями малой амплитуды вблизи состояния равновесия. Вместе с тем, периоды этих колебаний могут между собой различаться.

Исследование малых колебаний вблизи состояния равновесия можно провести, используя асимптотические методы.

12.1. Секулярные члены

Рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{u} + u + u^3 = 0 \tag{1}$$

Единственным состоянием равновесия является $u = \dot{u} = 0$. Это состояние равновесия является центром, в чем нетрудно убедиться, построив фазовый потрет данного уравнения.

Рассмотрим малую окрестность этого состояния равновесия. Пусть $\varepsilon > 0$ - малый параметр. Сделаем замену

$$u = \sqrt{\varepsilon} v$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), получаем

$$\ddot{v} + v + \varepsilon v^3 = 0 \tag{2}$$

Попробуем применить асимптотический анализ к данному уравнению "в лоб". Пусть

$$v(t) = v_0(t) + \varepsilon v_1(t) + \varepsilon^2 v_2(t) + \dots$$

Имеем

$$\begin{aligned} \ddot{v}_0 + \varepsilon \ddot{v}_1 + \varepsilon^2 \ddot{v}_2 \quad &+ \quad \dots + v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots + \dots \\ &+ \quad \varepsilon \left(v_0^3 + 3\varepsilon v_0^2 v_1 + \dots \right) = 0 \end{aligned}$$

Собирая члены, не содержащие ε (нулевой порядок теории возмущений), получаем

$$\ddot{v}_0 + v_0 = 0$$

Решения этого уравнения удобно записать в виде

$$v_0(t) = A e^{it} + \overline{A} e^{-it}$$

(черта означает комплексное сопряжение). Такая запись гарантирует действительность решения и упрощает дальнейшие выкладки. Заметим, что если выбрать $A = e^{i\varphi}/2$, где φ - действительное число, то $v_0(t) = \cos(t + \varphi)$.

В первом порядке теории возмущений получаем неоднородное уравнение

$$\ddot{v}_1 + v_1 = -A^3 e^{3it} - \overline{A}^3 e^{-3it} - 3A^2 \overline{A} e^{it} - 3A\overline{A}^2 e^{-it} \tag{3}$$

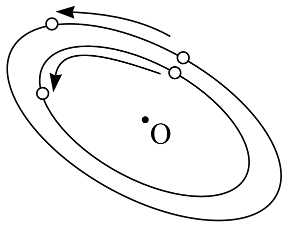

Рис.1.

Частное решение этого уравнения легко подобрать, используя "рецепты" из курса дифференциальных уравнений.

$$v_1(t) = \frac{1}{8}A^3e^{3it} + \frac{1}{8}\overline{A}^3e^{-3it} + \frac{3}{2i}A^2\overline{A}te^{it} - \frac{3}{2i}A\overline{A}^2te^{-it} \tag{4}$$

Это решение, однако, не является ни периодическим, ни вообще ограниченным. Члены вида $\sim te^{\pm it}$ в выражении (4) порождаются слагаемыми вида $\sim e^{\pm it}$ в правой части (3). Эти слагаемые отвечают случаю *резонанса*: показатели экспоненты $\pm i$ являются корнями характеристического многочлена однородной задачи, $\lambda^2+1=0$. Общее решение неоднородного уравнения является суммой частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Так как все решения однородного уравнения ограничены, заключаем, что *никакое из решений уравнения (4) не является ограниченным, следовательно, не является периодическим.* Любое из этих решений представляет собой осцилляции с неограниченно растущей амплитудой. Правда, этот рост достаточно медленный: выписав разложение для $v(t)$ в виде

$$\begin{aligned} v(t) &= Ae^{it} + \overline{A}e^{-it} + \\ &+ \varepsilon\left(\frac{1}{8}A^3e^{3it} + \frac{1}{8}\overline{A}^3e^{-3it} + \frac{3}{2i}A^2\overline{A}te^{it} - \frac{3}{2i}A\overline{A}^2te^{-it}\right) + \ldots \end{aligned}$$

видим, что ощутимым рост амплитуды осцилляций будет на временах порядка $\sim \varepsilon t$.

Члены, отвечающие за рост решений теории возмущений, называются секулярными (от латинского saecularis - вековой). Происхо-

ждение термина связано с астрономическими исследованиями, в которых влияние этих членов оказывается существенным на временах порядка веков.

Возникновение секулярных членов связано со следующим обстоятельством. В отличие от линейного случая, период малоамплитудного решения в нелинейном случае, зависит от амплитуды. Можно привести такую аналогию. Представим себе две частицы, находящиеся на "соседних орбитах" в фазовой плоскости, причем период движения на этих орбитах различен. Даже если в начальный момент $t = 0$ частицы находились рядом, со временем частицы "разбегутся" в силу различия периодов (см. Рис.1).

Для того, чтобы выписать правильное разложение, необходимо раскладывать в ряд по малому параметру не только саму функцию $u(t)$, но и ее период. Это удобно делать используя метод *Пуанкаре-Линштедта.*

12.2. Метод Пуанкаре-Линштедта

Опишем метод Пуанкаре-Линштедта на примере рассмотренного выше уравнения (1). После перехода к уравнению (2), сделаем замену $\tau = \omega t$ и будем считать, что $v(\tau)$ имеет период 2π. Имеем

$$\omega^2 v'' + v + \varepsilon v^3 = 0 \tag{5}$$

где штрих означает производную по τ. Запишем

$$v(\tau) = v_0(\tau) + \varepsilon v_1(\tau) + \varepsilon^2 v_2(\tau) + \dots$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$$

и подставим эти разложения в уравнение (5).

$$\big(\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1 + \varepsilon^2(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2) + \dots\big) \cdot (v_0'' + \varepsilon v_1'' + \dots) +$$

$$+ v_0 + \varepsilon v_1 + \dots + \varepsilon v_0^3 + 3\varepsilon^2 v_0^2 v_1 = 0$$

В нулевом порядке по ε имеем

$$\omega_0^2 v_0'' + v_0 = 0$$

Так как решение является 2π-периодичным, $\omega = 1$ и

$$v_0(\tau) = Ae^{i\tau} + \overline{A}e^{-i\tau}$$

Если $A = e^{i\varphi}/2$, то $v_0(t) = \cos(t+\varphi)$. Далее, в первом порядке по ε получаем

$$v_1'' + v_1 = -2\omega_1 v_0'' - v_0^3 \tag{6}$$

Подставим выражение для v_0 в правую часть (6)

$$\begin{aligned} v_1'' + v_1 = 2\omega_1 &\left(Ae^{i\tau} + \overline{A}e^{-i\tau}\right) - \\ &-A^3e^{3i\tau} - \overline{A}^3e^{-3i\tau} - 3A^2\overline{A}e^{i\tau} - 3A\overline{A}^2e^{-i\tau} = \\ &= \left(2\omega_1 A - 3A^2\overline{A}\right)e^{i\tau} + \left(2\omega_1 A - 3A\overline{A}^2\right)e^{-i\tau} - A^3e^{3i\tau} - \overline{A}^3e^{-3i\tau} \end{aligned}$$

Теперь имеется возможность выбором ω_1 занулить в правой части члены $\sim e^{\pm i\tau}$, и, тем самым, "убить" секулярные члены в решении. Для этого нужно положить

$$\omega_1 = \frac{3}{2}|A|^2$$

Выбирая, как и раньше, $A = e^{i\varphi}/2$, получаем $v_0(\tau) = \cos(\tau+\varphi)$, $\omega_1 = 3/8$. Частное решение уравнения для v_1 при этом ω_1 имеет вид

$$v_1(\tau) = \frac{1}{32}\cos 3(\tau+\varphi)$$

Общее решение этого уравнения является суммой общего решения однородного уравнения $B\cos(\tau+\varphi)$ и приведенного частного решения неоднородного уравнения. Случай $B \neq 0$ сводится к случаю $B = 0$ путем переопределения параметра ε: $\varepsilon \to \varepsilon + B\varepsilon^2$, (поправка второго порядка добавляется к члену первого порядка по ε). Такое переопределение параметра ε не затронет коэффициенты, найденные ранее. Имеем

$$v(t) = \cos(\omega t+\varphi) + \frac{\varepsilon}{32}\cos 3(\omega t+\varphi) + \ldots \tag{7}$$

$$\omega = 1 + \frac{3\varepsilon}{8} + \ldots \tag{8}$$

Вернемся к исходной задаче описания малой окрестности точки "центр".

Обозначив $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, получаем окончательные формулы

$$\begin{aligned} u(t) &= \delta\cos(\omega t+\varphi) + \frac{\delta^3}{32}\cos 3(\omega t+\varphi) + \ldots \\ \omega &= 1 + \frac{3\delta^2}{8} + \ldots \end{aligned}$$

Пример 2. Рассмотрим осциллятор с квадратичной нелинейностью

$$\ddot{u} + u + u^2 = 0 \tag{9}$$

Единственным состоянием равновесия является $u = \dot{u} = 0$. Это состояние равновесия является центром. Перейдем к функции $v(t) = u(t)/\varepsilon$ и, как и в предыдущем примере, сделаем замену $\tau = \omega t$. Имеем

$$\omega^2 v'' + v + \varepsilon v^2 = 0 \tag{10}$$

где штрих означает производную по τ. Запишем

$$v(\tau) = v_0(\tau) + \varepsilon v_1(\tau) + \varepsilon^2 v_2(\tau) + \ldots$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots$$

Подставим эти разложения в уравнение (10).

$$\left(\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1 + \varepsilon^2(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2) + \ldots\right)\cdot(v_0'' + \varepsilon v_1'' + \ldots) +$$
$$+ v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots + \varepsilon v_0^2 + 2\varepsilon^2 v_0 v_1 + \ldots = 0$$

Дальнейшие шаги следуют той же схеме рассуждений, поэтому опишем лишь общий порядок действий.

1. В нулевом порядке по ε имеем

$$\omega_0^2 v_0'' + v_0 = 0$$

откуда $v_0(\tau) = \cos(\tau+\varphi)$, $\omega_0 = 1$.

2. В первом порядке по ε получаем уравнение

$$v_1'' + v_1 = -2\omega_1 v_0'' - v_0^2$$

или

$$v_1'' + v_1 = 2\omega_1 \cos(\tau + \varphi) - \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2(\tau + \varphi)\right)$$

Отсутствию резонансов соответствует случай $\omega_1 = 0$ (в этом случае исчезают члены $\sim e^{\pm i\tau}$ в правой части). Неоднородное уравнение при этом имеет решение

$$v_1(\tau) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos 2(\tau + \varphi)$$

3. Во втором порядке по ε имеем

$$v_2'' + v_2 = -2\omega_2 v_0'' + 2v_0 v_1$$

или

$$v_2'' + v_2 = 2\omega_2 \cos(\tau + \varphi) - 2\cos(\tau + \varphi)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos 2(\tau + \varphi)\right) =$$

$$= \left(2\omega_2 + \frac{5}{6}\right)\cos(\tau + \varphi) - \frac{1}{6}\cos 3(\tau + \varphi)$$

Условием исчезновения секулярных членов является

$$\omega_2 = -\frac{5}{12}$$

при этом решение однородного уравнения, не содержащее $\cos(\tau + \varphi)$, имеет вид

$$v_2(\tau) = \frac{1}{48}\cos 3(\tau + \varphi)$$

Суммируем сказанное. С точностью до членов третьего порядка по ε, $v(\tau)$ и ω представляются следующими асимптотическими разложениями

$$v(\tau) = \cos(\tau + \varphi) - \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\cos 2(\tau + \varphi)\right) + \frac{\varepsilon^2}{48}\cos 3(\tau + \varphi) + \ldots$$

$$\omega = 1 - \frac{5}{12}\varepsilon^2$$

Возвращаясь к описанию малоамплитудных осцилляций вблизи нулевого положения равновесия для уравнения (9), имеем

$$\begin{aligned} u(t) &= \varepsilon\cos(\omega t+\varphi) - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(1-\frac{1}{3}\cos 2(\omega t+\varphi)\right) + \\ &+ \frac{\varepsilon^3}{48}\cos 3(\omega t+\varphi) + \ldots \\ \omega &= 1-\frac{5}{12}\varepsilon^2+\ldots \end{aligned}$$

Таким образом, для уравнения (9) асимптотический анализ предсказывает *квадратичный* закон зависимости частоты колебаний от их амплитуды.

Задачи:

1. Для следующих уравнений (а) нарисуйте фазовый портрет и (б) найдите зависимость периода малых колебаний от амплитуды

$$\begin{aligned} &(a) \quad \ddot u + u - u^3 = 0 \\ &(b) \quad \ddot u + \operatorname{sh} u = 0 \\ &(c) \quad \ddot u + u + u^5 = 0 \\ &(d) \quad \ddot u + u(1+e^u) = 0 \end{aligned}$$

2. Покажите, что линейная неоднородная система

$$\dot u = v + C_1 e^{it}, \quad \dot v = -u + C_2 e^{it}$$

не имеет растущих при $t \to \pm\infty$ решений тогда и только тогда, когда $C_1 - iC_2 = 0$.

3.* Для следующих систем уравнений (а) проверьте, что они являются гамильтоновыми и найдите гамильтониан; (б) нарисуйте фазовый портрет и (в) найдите зависимость периода малых колебаний (то есть колебаний вблизи нулевого состояния равновесия) от амплитуды

$$(a) \quad \dot u = v + v^3, \quad \dot v = -u - u^3$$

$$(b) \quad \dot u = v + vu^2, \quad \dot v = -u - uv^2$$

$$(c) \quad \dot u = \sin v, \quad \dot v = -\sin u$$

$$(d) \quad \dot u = \operatorname{sh} v, \quad \dot v = -\operatorname{sh} u$$

4.* Для систем

$$(a) \quad \dot u = v - u^3, \quad \dot v = -u + v^3$$

$$(b) \quad \dot u = v + u^2, \quad \dot v = -u - v^2$$

постройте фазовые портреты и покажите, что траектории вблизи нулевого состояния равновесия замкнуты. Найдите зависимость периода малых колебаний (то есть колебаний вблизи нулевого состояния равновесия) от амплитуды.

Подсказка: используйте задачу 2.