Лекция 13

13. Метод многих масштабов

В предыдущем разделе мы столкнулись с ситуацией, когда "лобовое" применение теории возмущений для описания малых колебаний приводило к появлению существенных погрешностей на больших временах. Виной тому явились так называемые "секулярные члены" - растущие при $t \to \infty$ члены асимптотического ряда. Положение удалось исправить, применив специальный прием, позволяющий "изгнать" эти члены. Напомним, что в предыдущем разделе речь шла только об описании периодических решений.

Рассмотрим теперь систему уравнений вида

$$\dot{u} = f(u,v); \tag{1}$$

$$\dot{v} = g(u,v); \tag{2}$$

содержащую малый параметр ε перед одним слагаемых и поставим вопрос об описании решений *задачи Коши* для такой системы при помощи асимптотических методов. Как мы увидим дальше, здесь возникают те же проблемы, что и при описании периодических решений. Для того, чтобы справиться с этими проблемами, применяют различные "трюки", один из которых и является предметом данной главы.

Чтобы лучше понять суть возникающих проблем, рассмотрим сначала линейную задачу, которая допускает точное решение.

13.1. Линейный осциллятор со слабой диссипацией

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + u = 0 \tag{3}$$

с начальными условиями

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 1 \tag{4}$$

Уравнение (3) описывает линейный осциллятор, в котором учтен член $2\varepsilon\dot{u}$, отвечающий за диссипацию. В отсутствии диссипации, при $\varepsilon = 0$, общее решение уравнение (3) имеет вид $u(t) = C\sin(t+\varphi)$, а решение, удовлетворяющее начальным условиям (4) имеет вид $u(t) = \sin t$.

Выпишем теперь точное решение уравнения (3) при $0 < \varepsilon < 1$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + 1 = 0$$

Его корни $\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm i\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Общее действительное решение уравнения (3) имеет вид

$$u(t) = Ae^{(-\varepsilon + i\sqrt{1-\varepsilon^2})t} + \bar{A}e^{(-\varepsilon - i\sqrt{1-\varepsilon^2})t}$$

где A и $\bar{A}$ - комплексно сопряженные друг другу постоянные. Полагая $A = |A|e^{i\varphi}$, имеем

$$u(t) = 2|A|e^{-\varepsilon t}\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}t + \varphi).$$

С учетом начальных условий (4), получаем:

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad |A| = \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Окончательно имеем

$$u(t) = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin(\sqrt{1-\varepsilon^2}t). \tag{5}$$

Будем считать теперь, что $\varepsilon \ll 1$. Попробуем найти асимптотический ряд, соответствующий решению (5) путем непосредственной подстановки формальной суммы

$$u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \ldots$$

в уравнение (3). Получим

$$(\ddot{u}_0 + u_0) + \varepsilon(\ddot{u}_1 + 2\dot{u}_0 + u_1) + \varepsilon^2(\ddot{u}_2 + 2\dot{u}_1 + u_2) + \ldots = 0$$

Последовательно приравнивая к нулю суммы в скобках, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: &\qquad \ddot{u}_0 + u_0 = 0 \\ \varepsilon^1: &\qquad \ddot{u}_1 + 2\dot{u}_0 + u_1 = 0 \\ &\qquad \ldots \end{aligned}$$

Решение первого уравнения, с учетом начальных условий $u_0(0) = 0$, $\dot{u}_0(0) = 1$ имеет вид

$$u_0(t) = \sin t$$

Уравнение для u_1 тогда можно записать в виде

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -2\cos t$$

при этом начальные условия, соответствующие (4), таковы

$$u_1(0) = \dot{u}(0) = 0$$

Отсюда нетрудно заключить, что

$$u_1(t) = -t\sin t$$

Найденное решение является растущим при $t \to \infty$. Можно записать двухчленное представление для $u(t)$ в виде

$$u(t) = \sin t - \varepsilon t \sin t + o(\varepsilon) \tag{6}$$

Очевидно, что представление (6) на больших временах t плохо описывает точное решение (5), которое не просто ограничено, но и стремится к нулю при $t \to +\infty$. Виной тому снова является *секулярный член* $u_1(t)$.

Рассмотрим связь между (6) и (5) более подробно. При фиксированном t решение (5) является аналитической функцией в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Нетрудно проверить, что первые два члена ее разложения в степенной ряд совпадают с разложением (6). При фиксированном t частичные суммы этого степенного ряда хорошо описывают решение $u(t)$ лишь при достаточно малых ε. У нас, однако, задача другая - описать решение при фиксированном ε, на достаточно большом промежутке по t.

Для исправления ситуации ключевым является следующее наблюдение. В решении (5) можно выделить два временных масштаба: *медленное* убывание амплитуды, заметное на временах $\sim 1/\varepsilon$ и *быстрые* осцилляции с периодом, приближенно равным 2π. Выделение этих масштабов можно осуществить при помощи некоторой формальной процедуры, описанной ниже.

13.2. Описание метода многих масштабов

Суть метода многих масштабов заключается во введении набора независимых переменных $\tau_0 = t$, $\tau_1 = \varepsilon t$, $\tau_2 = \varepsilon^2 t$, соответствующих различным временным масштабам изменения функции. Будем считать, что функция $u(t)$ зависит от них одновременно

$$u(t) = u(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots),$$

и разложение в ряд функции $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = u_0(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots) + \varepsilon u_1(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots) + \ldots \tag{7}$$

Дифференцировать функцию $u(t)$ мы будем, используя соотношения

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \frac{\partial u}{\partial \tau_0}\frac{d\tau_0}{dt} + \frac{\partial u}{\partial \tau_1}\frac{d\tau_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial \tau_2}\frac{d\tau_2}{dt} + \ldots = \\ &= \frac{\partial u}{\partial \tau_0} + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2\frac{\partial u}{\partial \tau_2} + \ldots \end{aligned}$$

Отсюда следует, что с точностью до членов второго порядка по ε первая и вторая производные (7) имеют вид

$$\dot{u} = \frac{\partial u_0}{\partial \tau_0} + \varepsilon\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \tau_0}\right) + \ldots \tag{8}$$

$$\ddot{u} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau_0^2} + \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau_0^2} + 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau_0 \partial \tau_1}\right) + \ldots \tag{9}$$

Вернемся к рассмотренному выше примеру гармонического осциллятора со слабым затуханием. Подставляя выражение (7) в уравнение (3) и учитывая формулы (8) и (9), с точностью до членов второго порядка получаем

$$0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau_0^2} + \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau_0^2} + 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau_0 \partial \tau_1}\right) + 2\varepsilon\frac{\partial u_0}{\partial \tau_0} + u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots$$

Ограничимся двумя временными масштабами, то есть двумя переменными τ_0 и τ_1, считая, что

$$u_0 \equiv u_0(\tau_0, \tau_1), \quad u_1(t) \equiv u_1(\tau_0, \tau_1)$$

Собирая члены при ε^0 имеем

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau_0^2} + u_0 = 0$$

откуда

$$u_0(\tau_0, \tau_1) = A(\tau_1) \sin \tau_0 + B(\tau_1) \cos \tau_0$$

Здесь следует заметить, что A и B не зависят от "быстрого" времени τ_0, но являются функциями "медленного" времени τ_1. Для нахождения зависимостей $A(\tau_1)$ и $B(\tau_1)$ соберем члены при ε^1:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau_0^2} + u_1 = -2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau_0 \partial \tau_1} + \frac{\partial u_0}{\partial \tau_0} \right) =$$

$$= -2 \left(\frac{dA}{d\tau_1} + A \right) \cos \tau_0 + 2 \left(\frac{dB}{d\tau_1} + B \right) \sin \tau_0;$$

Мы снова сталкиваемся с тем, что наличие *резонансных* членов в правой части этого уравнения (т.е. пропорциональных косинусу и синусу, которые являются решением однородного уравнения) приведет к появлению растущих, *секулярных* решений неоднородного уравнения. Чтобы избавиться от этих членов, потребуем чтобы

$$\frac{dA}{d\tau_1} + A = 0, \quad \frac{dB}{d\tau_1} + B = 0$$

Отсюда

$$A(\tau_1) = A(0) e^{-\tau_1}, \quad B(\tau_1) = B(0) e^{-\tau_1}$$

Найдем теперь значения $A(0)$ и $B(0)$. Для этого воспользуемся начальными условиями (4). Имеем

$$0 = u(0) = u_0(0,0) + \varepsilon u_1(0,0) + \dots$$

Для того, чтобы это соотношение удовлетворялось для всех достаточно малых ε, необходимо чтобы $u_0(0,0) = 0$ и $u_1(0,0) = 0$. Далее

$$1 = \dot{u}(0) = \frac{\partial u_0}{\partial \tau_0}(0,0) + \varepsilon \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \tau_0} \right) + \dots$$

откуда

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau_0}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \tau_1}(0,0) + \frac{\partial u_1}{\partial \tau_0}(0,0) = 0$$

Из полученных формул заключаем, что

$$B(0) = 0, \quad B(\tau_1) = 0, \quad A(0) = 1, \quad A(\tau_1) = e^{-\tau_1}$$

Таким образом

$$u_0(\tau_0, \tau_1) = e^{-\tau_1} \sin \tau_0$$

и, окончательно,

$$u(t) = e^{-\varepsilon t} \sin t + \dots$$

что гораздо точнее описывает при малых ε решение (5).