Лекция 4

4. Элементарные сведения об асимптотических рядах

4.1. O-символика.

Напомним некоторые определения.

> Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a, Тогда обозначение
>
> $$\alpha(x) = o(\beta(x)), \quad x \to a$$
>
> по определению эквивалентно условию
>
> $$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

Заметим, что x может быть действительным или комплексным, а точка a конечной или бесконечно удаленной. Наиболее часто данное определение употребляется в случае, когда $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются одновременно или бесконечно большими или бесконечно малыми при $x \to a$. В первом случае говорят, что $\alpha(x)$ есть *бесконечно малая более высокого порядка, чем* $\beta(x)$. Во втором случае говорят, что $\beta(x)$ *есть бесконечно большая более высокого порядка*, чем $\alpha(x)$.

> Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a. Обозначение
>
> $$\alpha(x) = O(\beta(x)), \quad x \to a$$
>
> по определению эквивалентно условию: существует окрестность точки a и постоянная $M > 0$, такие, что при всех x из этой окрестности выполняется оценка
>
> $$|\alpha(x)| \leq M|\beta(x)|$$

Некоторые примеры:

Пример 1. Если $\alpha(x) = o(\beta(x))$, то $\alpha(x) = O(\beta(x))$ (нетрудно убедиться, используя $\varepsilon - \delta$- определение предела).

Пример 2. Если $\alpha_1(x) = o(\beta(x))$ и $\alpha_2(x) = o(\beta(x))$ при $x \to a$, и $a_1(x)$ и $a_2(x)$ - ограниченные функции в некоторой окрестности точки a. Тогда

$$a_1(x)\alpha_1(x) + a_2(x)\alpha_2(x) = o(\beta(x))$$

Пример 3. Справедливы, в частности, следующие соотношения

$$\begin{aligned}
&\sin x = o(\sqrt{x}), \quad x \to +0 \\
&x^3 = o(x^2), \quad x \to 0 \\
&x^2 = o(x^3), \quad x \to +\infty \\
&\ln x = o(x^{1/100}), \quad x \to +\infty \\
&x = O(\sin x), \quad x \to 0 \\
&10x^2 + 1 = O(x^2), \quad x \to +\infty
\end{aligned}$$

4.2. Калибровочные системы и асимптотические ряды

Последовательность функций $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, будем называть ***калибровочной системой при*** $x \to a$ или ***калибровочной последовательностью при*** $x \to a$, если для любого n выполняется соотношение

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$$

Пожалуй, наиболее “востребованными” в приложениях калибровочными системами являются системы, определяемые положительными или отрицательными степенями x, в частности

$$\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}, \quad x \to 0;$$

$$\{1, 1/x, 1/x^2, \ldots, 1/x^n, \ldots\}, \quad x \to \infty.$$

Вместе с тем, в различных задачах математической физики встречаются и другие калибровочные последовательности, например

$$\{1, x^{1/3}, x^{2/3}, x, x^{4/3} \ldots, \}, \quad x \to +0;$$

$$\{x, x^2 \ln x, x^2, x^3 \ln^2 x, x^3 \ln x, x^3, x^4 \ln^3 x, x^4 \ln^2 x, x^4 \ln x, x^4 \ldots\},$$
$$x \to +0;$$

$$\left\{e^{-x}, \frac{1}{x}e^{-x}, \frac{1}{x^2}e^{-x}, \frac{1}{x^3}e^{-x}, \ldots\right\}, \quad x \to +\infty.$$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{1}$$

называется ***асимптотическим рядом функции*** $f(x)$ ***по калибровочной системе функций*** $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, ***при*** $x \to a$, если для любого натурального n справедливо неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right| < M_n \left| \varphi_{n+1}(x) \right|$$

где M_n - некоторая положительная константа (вообще говоря, зависящая от n).

Тот факт, что ряд (1) является асимптотическим рядом для функции $f(x)$, будет обозначаться следующим образом

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$$

С понятием асимптотического ряда связано понятие асимптотического представления функции.

Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ - калибровочная последовательность при $x \to a$. Равенство вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) + O(\varphi_{n+1}(x))$$

или

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) + o(\varphi_n(x))$$

называется ***асимптотическим представлением порядка*** n ***функции*** $f(x)$ ***по калибровочной последовательности*** $\{\varphi_k(x)\}$.

4.3. Примеры.

Пример 1. Пусть функция $f(x)$ аналитична (в смысле функции комплексного переменного) в некоторой достаточно малой окрестности точки $x = 0$. Тогда она разлагается в этой окрестности в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Нетрудно проверить, что этот ряд является асимптотическим рядом функции $f(x)$ по калибровочной последовательности

$$\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}.$$

Действительно, имеем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + R_n(x)$$

причем остаток этого ряда

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$$

можно оценить следующим образом

$$|R_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||x|^k \le \sum_{k=n+1}^{\infty} A|x|^k = \frac{A|x|^{n+1}}{1-|x|} = o\left(x^{n+1}\right)$$

где $A = \sup_k |a_k|$ (существует, так как a_k ограничены)[1].

Таким образом, сходящийся ряд является асимптотическим к своей сумме. Вместе с тем, понятие асимптотического ряда шире, чем понятие ряда сходящегося.

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$S(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{1+xt}, \quad x \ge 0 \tag{2}$$

называемый *интегралом Стилтьеса.* Интеграл (2) не берется в элементарных функциях. Выпишем асимптотический ряд для функции $S(x)$. Используем формулу

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{(1+xt)^n} = 1 - nx\int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{(1+xt)^{n+1}} \tag{3}$$

которая получается при помощи интегрирования по частям. Применим формулу (3) несколько раз к интегралу (2):

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 - x\int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{(1+xt)^2} = 1 - x + 2x^2\int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{(1+xt)^3} = \\ &= \ldots = 1 - x + 2!x^2 - 3!x^3 + \ldots + (-1)^n n!x^n + R_n(x) \end{aligned}$$

причем

$$R_n(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!x^{n+1}\int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{(1+xt)^{n+2}}.$$

[1]Конечно, получившаяся формула есть не что иное, как формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Традиционный вывод этой формулы приводится в курсе действительного анализа. Проведенные выше нехитрые выкладки призваны убедить слушателей, что эта формула справедлива при x комплексном тоже.

В силу того, что $x \geq 0$ и

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{(1+xt)^{n+2}} \leq \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$$

получаем

$$|R_n(x)| \leq (n+1)!x^{n+1}$$

Таким образом, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! x^n \tag{4}$$

является асимптотическим к функции Стилтьеса. Но ряд (4) не является сходящимся рядом ни при каком ненулевом значении x. Полезно ли представление $S(x)$ таким рядом? Небольшое численное исследование позволяет выявить следующие интересные факты. Рассмотрим соответствие значений $S(x)$ и частичных сумм ряда (4) при различных значениях x. Для $x = 0.02$ Maple дает значение 0.9807554965. Соответствующие значения частичных сумм $S_2(x)$, $S_4(x)$, $S_6(x)$, $S_8(x)$, $S_{10}(x)$ приведены в Таблице 1. Аналогичные значения для $x = 0.15$ и $x = 0.25$ приведены в Таблицах 2 и 3.

Таблица 1

Верхняя строка: значения частичных сумм $S_2(x)$, $S_4(x)$, $S_6(x)$, $S_8(x)$, $S_{10}(x)$ при $x = 0.02$. Нижняя строка: абсолютные погрешности $R_n = S(x) - S_n(x)$. Точное значение $S(0.02) \approx 0.9807554965$.

$n=2$	$n=4$	$n=6$	$n=8$	$n=10$
0.9808	0.98075584	0.9807555021	0.9807554966	0.9807554964
$4.4 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-7}$	$5.6 \cdot 10^{-9}$	$1. \cdot 10^{-10}$	$-1. \cdot 10^{-10}$

Таблица 2

Значения частичных сумм $S_2(x)$, $S_4(x)$, $S_6(x)$, $S_8(x)$, $S_{10}(x)$ при $x = 0.15$ и абсолютные погрешности $R_n = S(x) - S_n(x)$. Точное значение $S(0.15) \approx 0.8819327947$.

$n=2$	$n=4$	$n=6$	$n=8$	$n=10$
0.8950	0.88690	0.8859887500	0.8877110125	0.8946861756
$1.3 \cdot 10^{-2}$	$5.0 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$

Таблица 3

Значения частичных сумм $S_2(x)$, $S_4(x)$, $S_6(x)$, $S_8(x)$, $S_{10}(x)$ при $x = 0.25$ и абсолютные погрешности $R_n = S(x) - S_n(x)$. Точное значение $S(0.25) \approx 0.8253825996$.

$n=2$	$n=4$	$n=6$	$n=8$	$n=10$
0.8750	0.8750	0.9335937500	1.241210937	3.317626952
$5.0 \cdot 10^{-2}$	$5.0 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$4.2 \cdot 10^{-1}$	> 2.5

Сравнивая результаты, приведенные в этих таблицах, можно сделать следующие выводы:

- при $x = 0.02$ уже шесть членов асимптотического ряда обеспечивают точность вычисления функции $S(x)$ порядка 10^{-8}.
- в каждом из случаев $x = 0.15$ и $x = 0.25$ имеется *предельное значение* точности вычисления $S(x)$, которая может быть достигнута, используя это асимптотическое разложение. В первом из этих случаев это $\approx 4 \cdot 10^{-3}$, которую дает асимптотическое приближение *6-го порядка*, во втором случае предельное значение (≈ 0.05) достигается при выборе приближения *3-го порядка.*

Описанная ситуация является типичной для асимптотических приближений. В силу того, что асимптотические ряды не обязаны быть сходящимися, можно ввести понятие *оптимального асимптотического приближения* функции, обеспечивающего наибольшую возможную точность. Порядок этого оптимального приближения N, а также наибольшая возможная точность приближения R_N определяются значением x. Типичной является ситуация, когда порядок $N(x)$ стремится к бесконечности, когда $x \to a$, при этом соответствующее R_N стремится к нулю.

Можно показать, что для интеграла Стилтьеса оптимальное асимптотическое приближение включает $N(x) = [1/x]$ членов, где $[A]$ - наибольшее целое число, не превосходящее A. При этом наибольшая возможная точность приближения, соответствующая x, оценивается формулой

$$|R_N(x)| \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-1/x}, \quad x \to +0$$

Задачи:

1. Показать, что стандартные разложения синуса и косинуса

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

являются асимптотическими разложениями этих функций при $x \to 0$. Являются ли они таковыми при $x \to \infty$?

2. Выпишите асимптотическое представление для функции

$$\mathrm{E}_2(x) = \int_x^\infty e^{-t^2/2}\ dt$$

при (a) $x \to 0$ и (b) $x \to \infty$. Аналогичный вопрос про функцию

$$\mathrm{E}_4(x) = \int_x^\infty e^{-t^4/4}\ dt$$

Являются ли полученные ряды сходящимися или только асимптотическими?

Подсказка: Используйте интегрирование по частям. Может пригодиться тот факт, что

$$\int_0^\infty e^{-t^2/2}\ dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

а также определение гамма-функции.

3. Выпишите асимптотическое представление для интегралов Френеля

$$\int_x^\infty \cos t^2 \; dt, \quad \int_x^\infty \sin t^2 \; dt$$

при (a) $x \to 0$ и (b) $x \to \infty$. Являются ли полученные ряды сходящимися или только асимптотическими?

Подсказка: Используйте интегрирование по частям. Может пригодиться то, что

$$\int_0^\infty e^{it^2} \; dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$$