

## Предисловие

Если не быть очень строгим к формулировкам, можно сказать, что асимптотический анализ — это совокупность математических методов, позволяющих упростить задачу, используя то, что она содержит очень малые или очень большие параметры. Этот раздел математики является, пожалуй, одной из наиболее «востребованных» с точки зрения приложений. Развитие многих областей асимптотической науки обязано исследованию физических задач, которые без предположения о малости тех или иных величин представлялись безнадежно сложными. Для физика середины 20-го века использование асимптотических приближений было эффективным «рабочим инструментом», обязательным для изучения. Применяемые методы зачастую использовались задолго до должного математического обоснования, что не удивительно: за строгость интуитивно понятных формул приходилось платить сотнями страниц математических доказательств. Именно в это время, в середине и во второй половине 20-го века, сформировался список разделов асимптотического анализа, ставших классическими, и были написаны прекрасные учебники по этой дисциплине (книги А.Эрдеи (1955), Н. де Брейна (1958), А.Найфэ (1972), Ф.Олвера (1974), М.В.Федорюка (70–80-е годы) и многих других авторов).

Появление компьютеров, пакетов программ для численных и аналитических вычислений, а также мощных поисковых систем и баз знаний, существенно уменьшило роль анализа (впрочем, не только асимптотического) в работе современного специалиста. Появилась возможность что-то посчитать, используя стандартные программы, и нарисовать соответствующие графики. Это определило общую тенденцию, коснувшуюся большинства инженерных вузов: число часов, отводимых на теорию, стало снижаться, а время, посвященное освоению пакетов программ, расти. Отсутствие критического мышления в такой ситуации традиционно приводит к анекдотическим последствиям: любой равнодушный преподаватель вуза расскажет с десятков историй о появлении у студентов, использующих MatLab и WolframAlpha, комплексных ответов при вычислении действительных интегралов, или странном поведении решений уравнений, найденных какой-нибудь стандартной программой далеко за пределами ее применимости. При сложившемся положении дел представля-

ется чрезвычайно важным научить будущих инженеров проводить независимую проверку полученного результата. Знание азов асимптотической теории здесь представляется очень важным и полезным. Например, асимптотические методы позволяют оценить порядки исследуемых величин, тенденции их изменения и описать приближенно зависимости между ними. Получить такие грубые оценки сегодня стало достаточно просто при помощи тех же компьютерных программ аналитических преобразований (Maple, Mathematica и др.), позволяющих переадресовать компьютеру громоздкие промежуточные выкладки.

При подготовке любого курса по асимптотическому анализу перед лектором неизбежно встает вопрос о балансе между строгостью изложения и наглядностью материала. С одной стороны, избыток тяжелых доказательств, характерных для данной области, делает курс «неподъемным» и малоинформативным для студентов–прикладников. С другой стороны, полное отсутствие строгости является плохой характеристикой математического курса. Среди книг по данной тематике, изданных уже в этом веке, блестящим примером сочетания строгости и ясности изложения является монография А.М.Ильина и А.Р.Данилина [1]. В другой замечательной книге, учебнике К.Бендера и С.Орсага [2], выдержавшем с 1968 года множество переизданий, упор делается на практическую сторону вопроса. Там материал представлен с минимальным уровнем строгости, но иллюстрирован большим количеством задач. Автор данного курса позаимствовал из этих источников некоторые подходы к изложению материала, а также удачные примеры. Кроме того, использовались многие другие источники, в том числе монографии [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

При подготовке курса также существенно учитывалось то обстоятельство, что слушателями были магистры специальности «Прикладная математика» НИУ «МИЭТ», имеющие достаточные навыки работы с математическими пакетами, в частности, уверенно работающие в среде MatLab. Это значительно упрощало получение и проверку асимптотических формул, вывод которых предлагался в качестве упражнений, а также существенно расширяло возможности для подбора учебных задач для самостоятельного решения. Списком таких задач снабжена каждая из восьми глав книги. В некоторых случаях решение задачи оказывается затруднительным без привле-

чения компьютера (этот факт указывается в формулировке задачи). Предполагается также, что читатель знаком с базовыми понятиями теории функций комплексного переменного и с основами численных методов.

Автор признателен всем слушателям этого курса за исправление многочисленных ошибок и полезные комментарии. В первую очередь хотелось бы поблагодарить А.Чернявского, И.Баркова, С.Орлова, А.Омельянова, А.Кирилина, М.Лебедева, А.Коробейникова, А.Кулемина, Л.Гегель, А.Копытина, А.Будылева, чьи пожелания были учтены при подготовке этой книги. Особую благодарность автор хотел бы выразить профессору А.Р.Данилину, а также своим коллегам и ученикам Д.А.Зезюлину и П.П.Кизину, которые любезно согласились ознакомиться с рукописью и высказали ряд критических замечаний.

## Глава 1

### Основные понятия асимптотического анализа

#### 1.1 $O$ -символика

Напомним некоторые определения.

**Определение.** Пусть функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  определены в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ . Тогда обозначение

$$\alpha(x) = o(\beta(x)), \quad x \rightarrow a,$$

по определению эквивалентно условию

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Заметим, что  $x$  может быть действительным или комплексным, а точка  $a$  конечной или бесконечно удаленной<sup>1</sup>. Возможны вариации данного определения, например для случаев, когда  $x$  - действительное и вместо двусторонней проколотой окрестности рассматривается левая или правая односторонняя окрестность точки  $a$ . Тогда используется запись

$$\alpha(x) = o(\beta(x)), \quad x \rightarrow a - 0, \quad (\text{соответственно, } x \rightarrow a + 0),$$

что эквивалентно условию

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \quad (\text{соответственно, } \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0).$$

---

<sup>1</sup>Проколотая окрестность бесконечно удаленной точки вводится традиционным образом: как вся числовая ось без конечного отрезка при  $x$  действительном, и как внешность некоторого круга при  $x$  комплексном.

Наиболее часто такая символика используется в случае, когда  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  являются одновременно или бесконечно большими или бесконечно малыми величинами. В первом случае говорят, что  $\alpha(x)$  есть *бесконечно малая более высокого порядка, чем  $\beta(x)$* . Во втором случае говорят, что  $\beta(x)$  есть *бесконечно большая более высокого порядка, чем  $\alpha(x)$* .

**ПРИМЕР 1.1.** Используя известные из традиционного курса математического анализа соотношения, нетрудно убедиться в справедливости следующих соответствий:

$$\begin{aligned}\sin x &= o(\sqrt{x}), & x \rightarrow +0; \\ x^3 &= o(x^2), & x \rightarrow 0; \\ \ln x &= o(x^{1/100}), & x \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

**Определение.** Пусть функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  определены в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ . Запись

$$\alpha(x) = O(\beta(x)), \quad x \rightarrow a,$$

обозначает следующее: существует  $U$ , проколотая окрестность точки  $a$ , и постоянная  $M > 0$ , такие, что при всех  $x$  из проколотой окрестности  $U$  выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| \leq M|\beta(x)|.$$

Как и в случае определения символа  $o$ , возможны вариации определения символа  $O$ . Например при  $x$  и  $a$  действительных, вместо двусторонней проколотой окрестности могут рассматриваться левая или правая односторонняя окрестность точки  $a$ . В этом случае используется та же символика, с точностью до замены  $x \rightarrow a$  на  $x \rightarrow a - 0$  или, соответственно,  $x \rightarrow a + 0$ .

**ПРИМЕР 1.2.** Нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned}x &= O(\sin x), & x \rightarrow 0; \\ 10x^2 + 1 &= O(x^2), & x \rightarrow \pm\infty; \\ e^{-x} &= O(x), & x \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Свойства символов  $o$  и  $O$  изучаются в многочисленных курсах математического анализа (см. напр. [10]).

ПРИМЕР 1.3. Используя  $\varepsilon - \delta$  — определение предела нетрудно убедиться в том, что если  $\alpha(x) = o(\beta(x))$ , то  $\alpha(x) = O(\beta(x))$ . Обратное, вообще говоря, неверно.

ПРИМЕР 1.4. Если  $\alpha_1(x) = o(\beta(x))$  и  $\alpha_2(x) = o(\beta(x))$  при  $x \rightarrow a$ , и  $a_1(x)$  и  $a_2(x)$  — ограниченные функции в некоторой окрестности точки  $a$ . Тогда

$$a_1(x)\alpha_1(x) + a_2(x)\alpha_2(x) = o(\beta(x)),$$

что следует непосредственно из определения символа  $o$ .

**Определение.** Пусть функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  определены в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ . Будем говорить, что  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  *асимптотически эквивалентны при  $x \rightarrow a$*  (обозначение  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , при  $x \rightarrow a$ ), если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Аналогично определению символов  $o$  и  $O$  при  $x \rightarrow a - 0$  и  $x \rightarrow a + 0$ , можно ввести определение асимптотической эквивалентности функций при  $x \rightarrow a - 0$  и  $x \rightarrow a + 0$ .

ПРИМЕР 1.5. Используя первый и второй замечательные пределы из традиционного курса анализа, нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\sim x, & x \rightarrow 0; \\ 1 - e^{-x} &\sim x, & x \rightarrow 0; \\ x^{-1} + x^{-2} &\sim \sin(x^{-1}), & x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**Определение.** Пусть функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  определены в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ . Будем говорить, что  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  *имеют один и тот же порядок при  $x \rightarrow a$*  (обозначение  $\alpha(x) \asymp \beta(x)$ , при  $x \rightarrow a$ ), если  $\alpha(x) = O(\beta(x))$  и  $\beta(x) = O(\alpha(x))$ .

ПРИМЕР 1.6. Нетрудно убедиться в справедливости следующих

соответствий:

$$\begin{aligned}\sin 2x &\asymp x & x \rightarrow 0; \\ 2 + \cos x &\asymp 100, & x \rightarrow \infty; \\ \operatorname{tg} x^2 &\asymp 1 - \cos x, & x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

## 1.2 Калибровочные системы и асимптотические ряды

**Определение.** Последовательность функций  $\varphi_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , будем называть *калибровочной системой при  $x \rightarrow a$*  или *калибровочной последовательностью при  $x \rightarrow a$* , если для любого  $n$  выполняется соотношение

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)).$$

Приведенное определение легко модифицируется в случае, когда функции  $\varphi_n(x)$  определены только с одной стороны от точки  $a$ . Таким образом вводятся калибровочные последовательности соответствующие  $x \rightarrow a - 0$  или  $x \rightarrow a + 0$ .

Пожалуй, наиболее «востребованными» в приложениях калибровочными системами являются системы, определяемые положительными или отрицательными степенями  $x$ , в частности

$$\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}, \quad x \rightarrow 0; \quad (1.1)$$

$$\{1, 1/x, 1/x^2, \dots, 1/x^n, \dots\}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

Вместе с тем, в задачах встречаются и другие калибровочные последовательности, например

$$\{1, x^{1/3}, x^{2/3}, x, x^{4/3}, \dots\}, \quad x \rightarrow +0;$$

$$\left\{ e^{-x}, \frac{1}{x} e^{-x}, \frac{1}{x^2} e^{-x}, \frac{1}{x^3} e^{-x}, \dots \right\}, \quad x \rightarrow +\infty;$$

$$\{x, x^2 \ln x, x^2, x^3 \ln^2 x, x^3 \ln x, x^3, x^4 \ln^3 x, x^4 \ln^2 x, x^4 \ln x, x^4, \dots\},$$

$$x \rightarrow +0.$$

Для приложений особенно удобны те из калибровочных систем, для которых произведения элементов  $\varphi_k(x)$ , а также их производные и первообразные, просто выражаются вновь через элементы той же калибровочной системы. Замечательными примерами таких систем являются системы (1.1) и (1.2). Поэтому многие из утверждений, приведенных ниже, будут формулироваться и доказываться в приложении именно к этим системам.

В дальнейшем для нас ключевыми будут понятия *асимптотического ряда* и *асимптотического представления*. Дадим соответствующие определения:

**Определение.** Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ . Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (1.3)$$

называется *асимптотическим рядом функции  $f(x)$  по калибровочной системе функций  $\varphi_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , при  $x \rightarrow a$* , если для любого натурального  $n$  существует некоторая проколотая окрестность  $U_n(a)$  точки  $x = a$ , в которой справедливо неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right| < M_n |\varphi_{n+1}(x)|.$$

Здесь  $M_n$  — некоторая положительная константа (вообще говоря, зависящая от  $n$ ).

Аналогичным образом определяются асимптотические ряды при  $x \rightarrow a \pm 0$ . В этом случае двусторонняя проколотая окрестность точки  $a$  заменяется на правую или левую окрестность этой точки.

Тот факт, что ряд (1.3) является асимптотическим рядом для функции  $f(x)$ , будет обозначаться следующим образом,

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad x \rightarrow a.$$



В силу определения калибровочной последовательности, из того, что ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$  является асимптотическим для функции  $f(x)$ , следует, что при любом  $n$  справедливы представления

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) + O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \rightarrow a, \quad (1.4)$$

а также

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) + o(\varphi_n(x)), \quad x \rightarrow a. \quad (1.5)$$

Каждое из этих представлений называется *асимптотическим представлением порядка  $n$  функции  $f(x)$  по калибровочной последовательности  $\{\varphi_k(x)\}$  при  $x \rightarrow a$* .

Справедливы и обратные утверждения. Если  $\varphi_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , является калибровочной системой функций при  $x \rightarrow a$ , и для любого  $n = 1, 2, \dots$  выполняется соотношение (1.4), то  $f(x) \stackrel{\text{ас}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ . Этот факт следует непосредственно из определения асимптотического ряда. Аналогично, если для любого  $n = 0, 1, 2, \dots$  выполняется соотношение (1.5), то нетрудно доказать (см. Задачу 1.1), что  $f(x) \stackrel{\text{ас}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ .

### 1.3 Примеры

**ПРИМЕР 1.7.** Пусть функция  $f(x)$  аналитична (в смысле функции комплексного переменного) в некоторой окрестности точки  $x = 0$ . Тогда она разлагается в этой окрестности в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Нетрудно проверить, что этот ряд является асимптотическим рядом функции  $f(x)$  по калибровочной последовательности

$$\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}, \quad x \rightarrow 0.$$

Действительно, имеем

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + R_n(x),$$

причем остаток этого ряда представляется в виде

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = x^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1} x^k = x^{n+1} \tilde{R}_n(x),$$

где  $\tilde{R}_n(x)$  - аналитическая в некоторой окрестности  $x = 0$  функция. Из аналитичности  $\tilde{R}_n(x)$  следует ее ограниченность в этой же окрестности. Это, в свою очередь, означает, что  $R_n(x) = O(x^{n+1})$ . Таким образом, *сходящийся степенной ряд является асимптотическим к своей сумме.*

Вместе с тем, понятие асимптотического ряда оказывается шире, чем понятие ряда сходящегося.

ПРИМЕР 1.8. Рассмотрим интеграл

$$S(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{1+xt}, \quad x \geq 0, \quad (1.6)$$

называемый *интегралом Стильеса*. При  $x = 0$  значение этого интеграла равно 1, а при  $x > 0$  интеграл (1.6) не берется в элементарных функциях. Выпишем асимптотический при  $x \rightarrow +0$  ряд для функции  $S(x)$ . Используем формулу

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{(1+xt)^n} = 1 - nx \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{(1+xt)^{n+1}}, \quad (1.7)$$

справедливость которой легко показать при помощи интегрирования по частям. Применим формулу (1.7) несколько раз к интегралу (1.6):

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 - x \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{(1+xt)^2} = 1 - x + 2x^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{(1+xt)^3} = \\ &= \dots = 1 - x + 2!x^2 - 3!x^3 + \dots + (-1)^n n!x^n + R_n(x), \end{aligned}$$

причем

$$R_n(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!x^{n+1} \int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{(1+xt)^{n+2}}.$$

В силу того, что  $x \geq 0$ , и

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{(1+xt)^{n+2}} \leq \int_0^\infty e^{-t}dt = 1,$$

получаем

$$|R_n(x)| \leq (n+1)!x^{n+1},$$

что означает, что  $R_n(x) = O(x^{n+1})$ ,  $x \rightarrow 0$ . Таким образом, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^n \tag{1.8}$$

является асимптотическим к функции Стильеса. Но ряд (1.8) не является сходящимся рядом ни при каком ненулевом значении  $x$ . Полезно ли представление  $S(x)$  таким рядом?

Небольшое численное исследование при помощи пакета Maple позволяет выявить следующие интересные факты. Рассмотрим соответствие значений  $S(x)$  и частичных сумм  $S_n(x)$  ряда (1.8) при различных значениях  $x$ . В Таблице 1.1 приведены значения функции  $S(x)$ , а также частичных сумм  $S_2(x)$ ,  $S_4(x)$ ,  $S_6(x)$ ,  $S_8(x)$ ,  $S_{10}(x)$  для  $x = 0.02$ ,  $x = 0.15$  и  $x = 0.3$ . Также в ней представлены абсолютные погрешности  $R_n(x) = |S(x) - S_n(x)|$  для каждого из случаев.

Анализируя результаты, приведенные в Таблице 1.1, можно сделать следующие выводы:

- при  $x = 0.02$  уже шесть членов асимптотического ряда обеспечивают точность вычисления функции  $S(x)$  порядка  $10^{-8}$ . Самая высокая точность достигается при наибольшем числе представленных в таблице членов,  $n = 10$ .
- в каждом из случаев  $x = 0.15$  и  $x = 0.3$  имеется *предельное значение* точности вычисления  $S(x)$ , которая может быть достигнута, используя асимптотическое разложение. Значения сумм

	$x$	$x = 0.02$	$x = 0.15$	$x = 0.3$
	$S(x)$	<b>0.9807554965</b>	<b>0.8819327946</b>	<b>0.8011862797</b>
$n = 2$	$S_2(x)$	0.9808000000	0.8950000000	<b>0.8800000000</b>
	$R_2(x)$	$4.4 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$7.9 \cdot 10^{-2}$
$n = 4$	$S_4(x)$	0.9807558400	0.8869000000	0.9124000000
	$R_4(x)$	$3.4 \cdot 10^{-7}$	$5.0 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$
$n = 6$	$S_6(x)$	0.9807555021	<b>0.8859887500</b>	1.1456800000
	$R_6(x)$	$5.6 \cdot 10^{-9}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-1}$
$n = 8$	$S_8(x)$	0.9807554967	0.8877110125	2.6888272000
	$R_8(x)$	$1.6 \cdot 10^{-10}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$> 1.8$
$n = 10$	$S_{10}(x)$	<b>0.9807554965</b>	0.8946861756	16.9739612800
	$R_{10}(x)$	$6.6 \cdot 10^{-11}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$> 16$

Таблица 1.1: Значения функции  $S(x)$ , частичных сумм  $S_2(x)$ ,  $S_4(x)$ ,  $S_6(x)$ ,  $S_8(x)$ ,  $S_{10}(x)$ , а также абсолютные погрешности  $R_n(x) = |S(x) - S_n(x)|$  для  $x = 0.02$ ,  $x = 0.15$  и  $x = 0.3$ . Частичные суммы, соответствующие оптимальным асимптотическим приближениям, выделены жирным шрифтом

асимптотического ряда, обеспечивающие наибольшую точность, в таблице выделены жирным шрифтом. В случае  $x = 0.15$  наилучшим из приведенных в таблице оказывается асимптотическое приближение *6-го порядка*, обеспечивающее точность  $\approx 4 \cdot 10^{-3}$ . В случае  $x = 0.3$  предельное значение точности ( $\approx 0.08$ ) среди приведенных в таблице значений соответствует выбору приближения *2-го порядка*.

Описанная ситуация является типичной для асимптотических приближений. В силу того, что асимптотические ряды не обязаны быть сходящимися, можно ввести понятие *оптимального асимптотического приближения* функции, обеспечивающего наибольшую возможную точность. Порядок этого оптимального приближения  $N$ , а также наибольшая возможная точность приближения  $R_N$  определяются значением  $x$ . Чем ближе  $x$  к предельному значению (в случае примера 1.8 — к нулю), тем больше членов разложения содержит оптимальное асимптотическое приближение и тем большая точность может быть достигнута<sup>1</sup>.

#### 1.4 Соответствие функций и асимптотических рядов

Пусть  $\{\varphi_k(x)\}$  — калибровочная система функций на действительной оси при  $x \rightarrow a$ . Естественными вопросами, касающимися соответствия функций и асимптотических рядов, являются следующие:

**Вопрос 1.** Известно, что ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ , является асимптотическим к функции  $f(x)$ . Существует ли какая-нибудь другая функция  $g(x)$ , для которой этот ряд также является асимптотическим?

**Вопрос 2.** Известно, что ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ , является асимптотическим к функции  $f(x)$ . Существует ли какой-нибудь другой ряд по

---

<sup>1</sup>Можно показать, что для интеграла Стильтьеса оптимальное асимптотическое приближение включает  $N(x) = [1/x]$  членов, где  $[A]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $A$ . При этом наибольшая возможная точность приближения, соответствующая  $x$ , оценивается формулой

$$|R_N(x)| \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-1/x}, \quad x \rightarrow +0.$$

той же калибровочной системе, также асимптотический к функции  $f(x)$ ?

**Вопрос 3.** Дан ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ . Существует ли функция  $f(x)$ , для которой этот ряд является асимптотическим?

Покажем, что ответ на Вопрос 1 — утвердительный. Рассмотрим частный случай, когда калибровочная система — степенные функции  $\{1, (x-a), (x-a)^2, \dots\}$ , и, соответственно, асимптотический ряд для  $f(x)$  имеет вид

$$f(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k.$$

Функция  $\zeta(x) = e^{-1/(x-a)^2}$  такова, что  $\zeta(x) = o((x-a)^k)$  при  $x \rightarrow a$  и любом  $k > 0$ . Значит, асимптотический ряд для функции  $g(x) = f(x) + C\zeta(x)$  при любом  $C$  совпадает с асимптотическим рядом для  $f(x)$ , то есть

$$g(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k. \quad (1.9)$$

Это указывает на следующий важный момент, который необходимо учитывать при использовании асимптотических рядов. Если в соотношении для  $g(x)$  взять  $C$  очень большим (например,  $C = 10^{10}$ ), то формула (1.9) останется верна, но область ее эффективного применения значительно уменьшится. Таким образом, *a priori, мы не можем сказать, будет ли асимптотическая формула хорошо описывать данную функцию при заданном значении  $x$ .*

Ответ на Вопрос 2 дается следующей теоремой:

**Теорема 1.1.** Пусть  $\{\varphi_k(x)\}$  — калибровочная последовательность при  $x \rightarrow a$  и

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) + O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \rightarrow a. \quad (1.10)$$

Тогда коэффициенты  $a_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , однозначно определяются функцией  $f(x)$  при помощи формулы

$$a_k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j \varphi_j(x)}{\varphi_k(x)}. \quad (1.11)$$

*Доказательство.* Преобразуем правую часть формулы (1.11),

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j \varphi_j(x)}{\varphi_k(x)} = \\ & = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) + a_k \varphi_k(x) + \sum_{j=k+1}^n a_j \varphi_j(x)}{\varphi_k(x)}. \end{aligned}$$

По условию теоремы и по определению калибровочной последовательности, имеем

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) + a_k \varphi_k(x) + \sum_{j=k+1}^n a_j \varphi_j(x) &= \\ &= a_k \varphi_k(x) + O(\varphi_{k+1}(x)), \end{aligned}$$

откуда и следует формула (1.11).  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Строго говоря, разложение в асимптотический ряд функции, представленной другим асимптотическим рядом, не имеет смысла. Мы уже видели, что асимптотический ряд не определяет значения функции в каждой точке, а только описывает ее предельное поведение, см. обсуждение Вопроса 1. В частности, запись

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$$

не корректна. Вместе с тем, она имеет право на существование в следующем смысле: и ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ , и ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$

описывают функции из одного и того же класса. Этот класс определен с точностью до членов, имеющих при  $x \rightarrow a$  малость большую, чем  $(x-a)^n$  для любого  $n$  (например, экспоненциально малые члены вида  $e^{-1/(x-a)^2}$ , о которых шла речь выше). Из доказанной теоремы следует, что тогда при всех  $k$  выполняются соотношения  $a_k = b_k$ .

Перейдем к обсуждению Вопроса 3. Ограничимся случаем, когда  $a = 0$  и когда калибровочная система — степенные функции  $\{1, x, x^2, \dots\}$ . Сформулируем вопрос так: имеются ли какие-нибудь ограничения на коэффициенты  $a_k$ , чтобы ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

являлся бы асимптотическим рядом для некоторой функции  $f(x)$ ? Следующая теорема гласит, что никаких ограничений на коэффициенты  $a_k$  нет.

**Теорема 1.2.** *Для любой последовательности  $a_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  существует функция  $f(x)$ , непрерывная при  $|x| < 1$  и такая, что*

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow 0.$$

Для доказательства этой теоремы, заимствованного из книги [1], требуется следующая лемма:

**Лемма 1.1.** *При любых  $y$  справедливо неравенство*

$$1 - e^{-y} \leq y. \quad (1.12)$$

*Доказательство леммы.* Рассмотрим функцию  $p(y) = 1 - e^{-y} - y$ . Имеем  $p'(y) = e^{-y} - 1$ , точка  $y = 0$  является для  $p(y)$  единственной точкой экстремума. Так как  $p''(0) = -1$ , то этот экстремум является максимумом. Но  $p(0) = 0$ , значит  $p(y) \leq 0$  при всех значениях  $y$ .  $\square$



*Доказательство теоремы 1.2.* Рассмотрим функцию

$$f(x) = a_0 + a_1x + \sum_{k=2, a_k \neq 0}^{\infty} a_k x^k \left( 1 - \exp \left( -\frac{1}{2^k |a_k| x^2} \right) \right). \quad (1.13)$$

*Во-первых*, покажем, что ряд (1.13) равномерно сходится при  $x \in [-1; 1]$ . Действительно, по лемме 1.1, справедливо соотношение

$$\left| a_k x^k \left( 1 - \exp \left( -\frac{1}{2^k |a_k| x^2} \right) \right) \right| \leq \left| a_k x^k \cdot \frac{1}{2^k |a_k| x^2} \right| \leq \frac{|x|^{k-2}}{2^k}.$$

Таким образом, при  $x \in [-1; 1]$   $k$ -й член ряда (1.13) мажорируется по модулю величиной  $1/2^k$ , а ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$  сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряд (1.13) равномерно сходится на отрезке  $[-1; 1]$ . Так как все члены ряда (1.13) — непрерывные функции, то его сумма  $f(x)$  является непрерывной на отрезке  $[-1; 1]$ .

*Во-вторых*, покажем, что ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  является асимптотическим к  $f(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , то есть для любого целого  $n > 0$

$$f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k = O(|x|^{n+1}). \quad (1.14)$$

Имеем

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k &= a_0 + a_1x + \\ &+ \sum_{k=2, a_k \neq 0}^{\infty} a_k x^k \left( 1 - \exp \left( -\frac{1}{2^k |a_k| x^2} \right) \right) - \left( a_0 + a_1x + \sum_{k=2}^n a_k x^k \right) = \\ &= a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} - \Sigma_1(x) + \Sigma_2(x), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1(x) &= \sum_{k=2, a_k \neq 0}^{n+2} a_k x^k \exp \left( -\frac{1}{2^k |a_k| x^2} \right), \\ \Sigma_2(x) &= \sum_{k=n+3, a_k \neq 0}^{\infty} a_k x^k \left( 1 - \exp \left( -\frac{1}{2^k |a_k| x^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Первые два члена в (1.15) — члены порядка  $O(|x|^{n+1})$ . Далее, очевидно  $\Sigma_1(x) = O(|x|^m)$ ,  $x \rightarrow 0$ , вообще для любого  $m > 0$ . Для  $\Sigma_2(x)$  справедлива оценка

$$|\Sigma_2(x)| \leq \sum_{k=n+3}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{2^k} = \frac{|x|^{n+1}}{2^{n+2}(2 - |x|)},$$

то есть  $\Sigma_2(x) = O(|x|^{n+1})$ ,  $x \rightarrow 0$ . Таким образом, все члены в правой части (1.15) имеют порядок  $O(|x|^{n+1})$ . Теорема доказана.  $\square$

### 1.5 Действия с асимптотическими рядами

С асимптотическими рядами можно производить действия, аналогичные действиям со сходящимися рядами. Их можно складывать, умножать, делить, и почленно интегрировать. Сформулируем и докажем соответствующие теоремы.

**Теорема 1.3.** Пусть  $\{\varphi_k(x)\}$  — калибровочная последовательность при  $x \rightarrow a$  и

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad g(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \varphi_k(x), \quad x \rightarrow a.$$

Тогда линейная комбинация  $h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$  также разлагается в асимптотический ряд при  $x \rightarrow a$  и

$$h(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (c_1 a_k + c_2 b_k) \varphi_k(x), \quad x \rightarrow a.$$

*Доказательство.* В силу определения асимптотического ряда для любого натурального  $n$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) + o(\varphi_n(x)), \quad x \rightarrow a \\ g(x) &= \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k(x) + o(\varphi_n(x)), \quad x \rightarrow a \end{aligned}$$

Следовательно, для любого натурального  $n$  справедливо представление

$$h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x) = \sum_{k=0}^n (c_1 a_k + c_2 b_k) \varphi_k(x) + o(\varphi_n(x)), \quad x \rightarrow a,$$

из которого и следует утверждение теоремы.  $\square$

Асимптотические ряды можно также *умножать, делить друг на друга, а также интегрировать*. Однако при практическом выполнении этих действий оказывается важным иметь под рукой формулы, позволяющие выразить результаты элементарных действий над калибровочными функциями через функции той же системы (например, выражения парных произведений  $\varphi_k(x)\varphi_l(x)$  через линейные комбинации  $\varphi_m(x)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Отсутствие таких формул или их сложность существенно затрудняет манипуляции с асимптотическими рядами. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся соответствующими утверждениями для случая калибровочной системы степенных функций  $\{1, x, x^2, \dots\}$  при  $x \rightarrow 0$ .

**Теорема 1.4.** Пусть

$$f(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad g(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad x \rightarrow 0.$$

Тогда функция  $h(x) = f(x)g(x)$  также разлагается в асимптотический ряд при  $x \rightarrow 0$  и

$$h(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad x \rightarrow 0,$$

причем коэффициенты  $c_k$  вычисляются путем формального перемножения многочленов:  $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$

*Доказательство.* Для любого  $n$  имеем равенства

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n), \quad g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
h(x) = f(x)g(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots \\
&+ (a_0b_n + \dots + a_nb_0)x^n + (a_1b_n + \dots + a_nb_1)x^{n+1} + \dots + a_nb_nx^{2n} + \\
&+ \left( \sum_{k=0}^n a_kx^k \right) \cdot o(x^n) + \left( \sum_{k=0}^n b_kx^k \right) \cdot o(x^n) + o(x^n) \cdot o(x^n) = \\
&= \sum_{k=0}^n c_kx^k + o(x^n),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.  $\square$

**Теорема 1.5.** Пусть

$$f(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k, \quad g(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_kx^k, \quad x \rightarrow 0,$$

и  $b_0 \neq 0$ . Тогда функция  $h(x) = g(x)/f(x)$  также разлагается в асимптотический ряд при  $x \rightarrow 0$  и

$$h(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k, \quad x \rightarrow 0,$$

где  $c_k$  - некоторые постоянные.

*Доказательство.* Вследствие предыдущей теоремы достаточно доказать, что существует разложение в асимптотический ряд функции  $1/f(x)$ . Имеем

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_kx^k + o(x^n)} = \frac{1}{a_0(1 - z_n(x))},$$

причем

$$z_n(x) = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_kx^k + \beta_n(x) = O(x), \quad \beta_n(x) = o(x^n).$$

Так как  $z_n(x) = O(x)$ , то при малых  $x$  справедливо разложение по формуле Тейлора

$$\frac{1}{1 - z_n(x)} = \sum_{k=0}^n (z_n(x))^k + O((z_n(x))^{n+1}) = \sum_{k=0}^n (z_n(x))^k + O(x^{n+1}).$$

Раскроем скобки в выражениях  $(z_n(x))^k$ , сгруппируем одинаковые степени  $x$  и учтем, что степени  $\beta_n(x)$  также являются величинами малости  $o(x^n)$ . Тем самым определятся коэффициенты  $c_k$ , такие что

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^n).$$

Очевидно, что уже вычисленные коэффициенты  $c_k$ ,  $k = 0, \dots, N$  будут одними и теми же для любого разложения порядка  $n \geq N$ . Таким образом, заключаем, что асимптотическое разложение для  $1/f(x)$  существует. Следовательно, существует и асимптотическое разложение для  $g(x)/f(x)$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Для практического нахождения коэффициентов разложения  $h(x)$  удобно использовать то, что  $g(x) = f(x)h(x)$ , поэтому  $b_k = \sum_{j=0}^k a_j c_{k-j}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Вследствие этого  $c_k$  можно находить последовательно, используя линейную систему

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 c_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = b_0/a_0, \\ b_1 &= a_1 c_0 + a_0 c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = (b_1 a_0 - a_1 b_0)/a_0^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

**Теорема 1.6.** Пусть  $f(x)$  определена и интегрируема по Риману на отрезке  $[0; A]$  и при  $x \rightarrow 0$  разлагается в асимптотический ряд

$$f(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow 0.$$

Тогда функция  $h(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$  также разлагается в асимптотический ряд при  $x \rightarrow 0$  и

$$h(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad x \rightarrow 0.$$

*Доказательство.* Для  $f(x)$  при любом натуральном  $n$  справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \beta_n(x)$$

с некоторой функцией  $\beta_n(x) = O(x^{n+1})$ ,  $x \rightarrow 0$ . Проинтегрируем это равенство от 0 до  $x$ ,

$$\int_0^x f(s) ds = \sum_{k=0}^n \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \beta_n(s) ds.$$

Так как  $\beta_n(x) = O(x^{n+1})$ , то по определению символа  $O$  и правилу интегрирования неравенств, имеем  $\int_0^x \beta_n(s) ds = O(x^{n+2})$ , откуда и следует утверждение теоремы.  $\square$

Дифференцировать почленно асимптотические ряды, вообще говоря, *нельзя*.

**ПРИМЕР 1.9.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = e^{-x} \sin(e^x).$$

Разложим эту функцию в асимптотический ряд по калибровочной системе  $\{1, 1/x, 1/x^2, \dots\}$  при  $x \rightarrow +\infty$ . В силу того, что экспонента убывает быстрее любой степени, а синус - ограниченная функция, все коэффициенты разложения являются нулями,

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot \left( \frac{1}{x^k} \right).$$

Вместе с тем производная  $f'(x) = \cos e^x - e^{-x} \sin e^x$  при  $x \rightarrow +\infty$  осциллирует, не стремится к нулю и, вообще, не имеет асимптотического разложения по рассматриваемой калибровочной системе.

Вместе с тем дифференцирование асимптотических рядов, как правило, возможно. В частности, пусть  $f'(x)$  - непрерывная функция, и ее разложение в асимптотический ряд по степеням  $x$  *существует*. Тогда, интегрируя почленно это разложение, по теореме об интегрировании асимптотических рядов, мы приходим к разложению для функции  $f(x)$ . Так как это разложение единственно, заключаем, что почленное дифференцирование ряда для функции  $f(x)$  было законным<sup>1</sup>. Кроме того, возможность почленного дифференцирования асимптотических рядов удастся строго обосновать в предположении *аналитичности* функции  $f(x)$ , см. раздел 1.6, теоремы 1.14 и 1.15.

Приведем еще одну теорему, позволяющую находить асимптотические разложения сложных функций.

**Теорема 1.7.** Пусть имеют место следующие асимптотические разложения

$$f(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow 0,$$

$$g(y) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (y - a_0)^k, \quad y \rightarrow a_0$$

Тогда функция  $g(f(x))$  разлагается в асимптотический ряд

$$g(f(x)) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad x \rightarrow 0,$$

причем коэффициенты  $c_k$  могут быть вычислены последовательно,

---

<sup>1</sup> В некотором смысле ситуация напоминает правила дифференцирования сходящихся рядов действительного переменного, когда возможность дифференцирования обосновывается *a posteriori*, используя то, что результатом дифференцирования оказался равномерно сходящийся ряд.

при этом

$$\begin{aligned} c_0 &= b_0; \\ c_1 &= b_1 a_1; \\ c_2 &= b_2 a_1^2 + a_2 b_1; \\ c_3 &= b_3 a_1^3 + 2a_1 a_2 b_2 + a_3 b_1; \\ c_4 &= b_4 a_1^4 + 3a_1^2 a_2 b_3 + 2a_1 a_3 b_2 + a_2^2 b_2 + a_4 b_1; \\ &\dots \end{aligned}$$

причем в выражения для  $c_k$  коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  входят только в первой степени и по одному разу.

*Доказательство.* Имеем

$$g(f(x)) = \sum_{k=0}^n b_k (f(x) - a_0)^k + O((f(x) - a_0)^{n+1}).$$

Учитывая, что  $f(x) - a_0 = O(x)$ , получаем

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sum_{k=0}^n b_k \left( \sum_{m=1}^n a_m x^m + O(x^{n+1}) \right)^n + O(x^{n+1}) = \\ &= b_0 + b_1 a_1 x + (b_1 a_2 + b_2 a_1^2) x^2 + \dots + O(x^{n+1}). \end{aligned}$$

Утверждение о том, что в выражения для  $c_k$  коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  входят линейно и только по одному разу, непосредственно следует из процедуры раскрытия скобок в последнем выражении.  $\square$

Непосредственным следствием из теоремы 1.7 является теорема об асимптотическом разложении для обратной функции.

**Теорема 1.8.** Пусть  $f(x)$  строго монотонна в окрестности точки  $x = 0$  и имеет место асимптотическое разложение

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow 0.$$

Тогда обратная функция  $f^{-1}(y)$  представляется при  $y \rightarrow 0$  асимптотическим рядом

$$f^{-1}(y) \stackrel{\text{as}}{=} y + \sum_{k=2}^{\infty} b_k y^k, \quad y \rightarrow 0,$$



причем коэффициенты  $b_k$  могут быть вычислены последовательно, при этом

$$b_2 = -a_2; \quad b_3 = -a_3 + 2a_2^2, \quad b_4 = -a_4 + 5a_3a_2 - 5a_2^3, \quad \dots \quad (1.16)$$

*Доказательство.* В силу строгой монотонности функции  $f(x)$  в окрестности точки  $x = 0$  обратная функция  $f^{-1}(y)$  корректно определена в окрестности точки  $y = 0$ . Так как

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y)}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)} = 1,$$

то  $f^{-1}(y) \sim y$  при  $y \rightarrow 0$ . Используя утверждения теоремы 1.7, будем искать последовательно коэффициенты  $b_k$  разложения для  $f^{-1}(y)$  в виде

$$y + b_2y^2 + b_3y^3 + \dots,$$

а потом проверим, что полученный ряд является асимптотическим к  $f^{-1}(y)$ . Имеем

$$f^{-1}(f(x)) = x \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k,$$

причем  $c_1 = 1$ , и  $c_k = 0$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . Кроме того,  $a_1 = b_1 = 1$ . Используя теорему 1.7 получаем

$$\begin{aligned} c_2 &= 0 = b_2 + a_2; \\ c_3 &= 0 = b_3 + 2b_2a_2 + a_3; \\ c_4 &= 0 = b_4 + 3b_3a_2 + b_2(a_2^2 + 2a_3) + a_4; \\ &\dots \end{aligned}$$

В силу того, что в каждое выражение для  $c_k$  коэффициент  $b_k$  входит линейно, все коэффициенты  $b_k$ ,  $k = 2, 3, \dots$  могут быть найдены последовательно. Явные формулы для коэффициентов (1.16) непосредственно следуют из полученных соотношений. В силу указанного выбора  $b_k$ , получаем

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) - \sum_{k=1}^n b_k y^k &= x - \sum_{k=1}^n b_k \left( \sum_{m=1}^n a_m x^m + O(x^{n+1}) \right)^k = \\ &= O(x^{n+1}) = O(y^{n+1}), \end{aligned}$$

то есть найденное разложение является асимптотическим к функции  $f^{-1}(y)$  при  $y \rightarrow 0$ .  $\square$

Аналогичная теорема справедлива для функции  $f^{-1}(y)$ , обратной к функции  $f(x)$ , являющейся строго монотонной в окрестности бесконечно удаленной точки.

**Теорема 1.9.** Пусть  $f(x)$  строго монотонна при  $x \rightarrow +\infty$  и имеет место асимптотическое разложение

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} x + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Тогда обратная функция  $f^{-1}(y)$  представляется при  $y \rightarrow +\infty$  асимптотическим рядом

$$f^{-1}(y) \stackrel{\text{as}}{=} y + \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{-k}, \quad y \rightarrow +\infty,$$

причем коэффициенты  $b_k$  могут быть вычислены последовательно, при этом

$$\begin{aligned} b_0 &= -a_0; & b_1 &= -a_1, & b_2 &= -a_2 - a_1 a_0, \\ b_3 &= -a_3 - 2a_2 a_0 - a_1 a_0^2, & \dots \end{aligned}$$

Доказательство теоремы (1.9) аналогично доказательству теоремы (1.8), и мы его опустим.

## 1.6 Асимптотические ряды в комплексной плоскости

Ограничимся теперь рассмотрением рядов по калибровочным системам  $\{(x-a)^k\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $x \rightarrow a$  и  $\{1/x^k\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $x \rightarrow \infty$ , то есть разложениями функции  $f(x)$  вида

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, \quad x \rightarrow a, \quad (1.17)$$

или

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^k} \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.18)$$

Будем, однако, при этом предполагать, что  $x$  и  $a$  являются комплексными величинами. В соответствии с определением из параграфа 1.2, формула (1.17) означает, что для любого  $n > 0$  существует круг  $V_n = \{x \mid |x - a| < R_n\}$  и константа  $M_n > 0$ , такие, что для любого  $x \in V_n$  справедливо неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k \right| < M_n |x - a|^{n+1}.$$

В свою очередь, формула (1.18) означает, что для любого  $n > 0$  существует внешность круга  $W_n = \{x \mid |x| > R_n\}$  и константа  $M_n > 0$ , такие, что для любого  $x \in W_n$  справедливо неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k} \right| < \frac{M_n}{|x|^{n+1}}.$$

Возникает естественный вопрос: как согласуется теория аналитических функций, в которой функции традиционно представляются *сходящимися* рядами, с представлением функций асимптотическими рядами, которые могут быть *расходящимися*?

Пусть  $f(x)$  является однозначной функцией, определенной в некоторой области комплексной плоскости и являющейся в этой области аналитической всюду, за исключением некоторого числа изолированных особых точек. Рассмотрим следующие возможности.

1. Если точка  $x = a$  является для  $f(x)$  регулярной или устранимой, то в некоторой окрестности точки  $x = a$  эта функция представляется сходящимся степенным рядом

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k.$$

Этот ряд, как мы уже знаем (см. пример 1.7) является асимптотическим рядом для  $f(x)$  по калибровочной системе  $\{(x - a)^k\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  при  $x \rightarrow a$ . В силу единственности разложения по заданной калибровочной последовательности,  $f(x)$  не имеет других асимптотических разложений данного вида при  $x \rightarrow a$ . Это утверждение справедливо как во всей окрестности точки  $x = a$ , так и в любом

ее подмножестве (в частности, внутри любого сектора с вершиной в точке  $a$ ).

2. Если точка  $x = \infty$  является регулярной точкой для функции  $f(x)$ , то  $f(x)$  раскладывается во внешности некоторого круга в сходящийся ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}.$$

Этот ряд является единственным асимптотическим разложением функции  $f(x)$  по калибровочной системе  $\{1/x^k\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

3. Если точка  $x = a$  является для функции  $f(x)$  полюсом  $n$ -го порядка, то представить ее асимптотическим рядом (1.17) нельзя ни в какой окрестности этой точки. Действительно, если бы такое разложение существовало, то было бы справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a_0,$$

где  $a_0$  – некоторое число. Это противоречит тому, что в случае особой точки типа полюс  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ . Вместе с тем, как известно из комплексного анализа, в некоторой окрестности точки  $x = a$  справедливо представление  $f(x)$  сходящимся рядом Лорана

$$f(x) = \frac{a_{-n}}{(x-a)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{x-a} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k.$$

Умножая последнее разложение на  $(x-a)^n$ , заключаем, что функцию  $(x-a)^n f(x)$  можно разложить по калибровочной последовательности  $\{(x-a)^k\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , и асимптотический ряд для этой функции будет совпадать с рядом Тейлора. Аналогичные рассуждения справедливы в случае, когда функция  $f(x)$  имеет полюс  $n$ -го порядка в бесконечно удаленной точке.

Подводя итог сказанному, отметим: если конечная или бесконечно удаленная точка для функции  $f(x)$  является регулярной или полюсом, для описания поведения функции в ее окрестности *нет необходимости прибегать к использованию расходящихся рядов по указанным выше калибровочным системам*.

Пусть теперь  $x = a$  является существенно особой точкой функции  $f(x)$ . Справедлива следующая теорема:

**Теорема 1.10.** Пусть  $x = a$  является существенно особой точкой функции  $f(x)$ . Тогда  $f(x)$  не может быть представлена при  $x \rightarrow a$  ни сходящимся, ни расходящимся асимптотическим рядом по калибровочной последовательности  $\{(x - a)^k\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

*Доказательство.* Наличие асимптотического ряда (1.17) для функции  $f(x)$  означает, что для любого  $n$  существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a} g_n(x) = a_n,$$

где

$$g_n(x) = (x - a)^{-n} (f(x) - a_0 - a_1(x - a) - \dots - a_{n-1}(x - a)^{n-1}).$$

Но функция  $g_n(x)$ , также как и  $f(x)$ , имеет существенную особенность в точке  $x = a$ , поэтому такого предела не существует. Полученное противоречие доказывает теорему.  $\square$

Нетрудно убедиться, что аналогичное утверждение справедливо в случае, когда  $a$  является бесконечно удаленной существенно особой точкой. Соответствующая теорема звучит так:

**Теорема 1.11.** Пусть  $x = \infty$  является существенно особой точкой функции  $f(x)$ . Тогда  $f(x)$  не может быть представлена при  $x \rightarrow \infty$  ни сходящимся, ни расходящимся асимптотическим рядом по калибровочной последовательности  $\{1/x^k\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство теоремы 1.11 полностью аналогично доказательству теоремы 1.10.

Отсутствие ряда, асимптотического к функции и определенного во *всей* проколотой окрестности конечной или бесконечной существенно особой точки, вовсе не означает, что такой ряд не может существовать в некотором подмножестве этой окрестности, например, в некотором *секторе* с вершиной в этой точке. Оказывается, что именно такая ситуация имеет место в случае расходящихся асимптотических рядов вида (1.17) и (1.18).

Уточним основные понятия.

**Определение.** Будем говорить, что ряд (1.17) является асимптотическим к функции  $f(x)$  в секторе  $S = \{x \mid \arg(x - a) \in [\varphi_1; \varphi_2]\}$

при  $x \rightarrow a$ , если для любого  $n > 0$  существует такие значения  $R_n$  и  $M_n$ , что для любого  $x \in S_n$  где

$$S_n = \{x \mid \arg(x - a) \in [\varphi_1; \varphi_2], |x - a| \leq R_n\}$$

справедлива оценка

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k \right| < M_n |x - a|^{n+1}.$$

Аналогично, будем говорить, что ряд (1.18) является асимптотическим к функции  $f(x)$  в секторе  $S = \{x \mid \arg x \in [\varphi_1; \varphi_2]\}$  при  $x \rightarrow \infty$ , если для любого  $n > 0$  существует такие значения  $R_n$  и  $M_n$ , что для любого  $x \in S_n$  где

$$S_n = \{x \mid \arg x \in [\varphi_1; \varphi_2], |x| \geq R_n\}$$

выполняется неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k} \right| < \frac{M_n}{|x|^{n+1}}.$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.12.** Пусть функция  $f(x)$  однозначна и аналитична в проколотой окрестности  $U$  некоторой точки  $x = a$ , ряд (1.17) является асимптотическим к  $f(x)$  в секторе  $S = \{x \mid \arg(x - a) \in [\varphi_1; \varphi_2]\}$  при  $x \rightarrow a$ , причем этот ряд либо расходится для всех значений  $x \in S \cap U$ , либо сходится, но не к функции  $f(x)$ . Тогда угол  $\varphi_2 - \varphi_1$  сектора  $S$  меньше  $2\pi$ , и  $a$  является существенной особой точкой функции  $f(x)$ .

*Доказательство.* В силу однозначности и аналитичности функции  $f(x)$ , имеются три возможности: (1)  $a$  является регулярной или устранимой точкой функции  $f(x)$ ; (2)  $a$  является полюсом  $f(x)$  и (3)  $a$  является существенно особой точкой функции  $f(x)$ . В случае (1)  $f(x)$  допускает разложение в сходящийся степенной ряд, который, как мы знаем, также является и асимптотическим к ней. В

силу единственности асимптотического разложения этот ряд в секторе  $S$  должен совпадать с рядом (1.17), что противоречит условию, что ряд не сходится к  $f(x)$ . Таким образом возможность (1) можно отбросить. В случае (2), когда  $a$  является полюсом порядка  $n$ , те же рассуждения можно повторить для функции  $(x - a)^n f(x)$  и ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^{k+n}$ , то есть, случай (2) также может быть отброшен. Таким образом  $a$  является существенной особой точкой функции  $f(x)$ . При этом если сектор  $S$  имеет угол равный  $2\pi$ , по теореме 1.10 не существует асимптотического разложения  $f(x)$  в окрестности точки  $a$  по калибровочной системе  $\{(x - a)^k, k = 0, 1, \dots\}$ . Следовательно, угол сектора  $S$  меньше  $2\pi$ .  $\square$

Аналогичная теорема справедлива и в случае, когда  $a$  является бесконечно удаленной точкой.

**Теорема 1.13.** Пусть функция  $f(x)$  однозначна и аналитична во внешности некоторого круга  $U = \{x \mid |x| > R\}$ , ряд (1.18) является асимптотическим к  $f(x)$  в секторе  $S = \{x \mid \arg(x - a) \in [\varphi_1; \varphi_2]\}$  при  $x \rightarrow \infty$ , причем этот ряд либо расходится для всех значений  $x \in S \cap U$ , либо сходится, но не к функции  $f(x)$ . Тогда угол  $\varphi_2 - \varphi_1$  сектора  $S$  меньше  $2\pi$ , и  $x = \infty$  является существенной особой точкой функции  $f(x)$ .

Доказательство теоремы 1.13 полностью аналогично доказательству теоремы 1.12.

**ПРИМЕР 1.10.** Функция  $f(x) = e^{-1/x}$  имеет существенную особую точку  $x = 0$ . При  $x > 0$ , действительном, справедливо асимптотическое разложение по степеням  $x$

$$f(x) \overset{\text{as}}{=} 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$$

Ряд в правой части сходится к нулю, но не к функции  $f(x)$ . Нетрудно проверить, что это разложение справедливо не только на правой действительной полуоси, но и любом секторе  $|\arg x| < \pi/2 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — сколь угодно малое число. При этом данное разложение не справедливо ни в каком секторе, пересекающем левую комплексную полуплоскость.

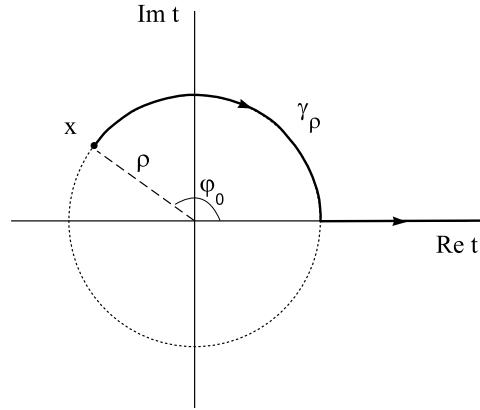


Рис. 1.1: Контур интегрирования для определения функции  $f(x)$

ПРИМЕР 1.11. Рассмотрим функцию<sup>1</sup>

$$f(x) = e^{x^2} \int_x^\infty e^{-t^2} dt.$$

На действительной оси  $f(x)$  корректно определена. В силу аналитичности функции  $e^{-t^2}$ , функция  $f(x)$  может быть продолжена во всю комплексную плоскость, причем во всей комплексной плоскости она однозначна и является аналитической. Для корректного определения аналитического продолжения, путь интегрирования должен уходить в бесконечность вдоль действительной оси. Для определенности мы будем пользоваться путем интегрирования, показанным на Рис.1.1, хотя в силу аналитичности подынтегрального выражения, этот путь интегрирования можно при необходимости деформировать.

Покажем, что в бесконечно удаленной точке  $f(x)$  имеет *существенную особенность*. Для этого рассмотрим поведение  $f(x)$  при стремлении  $x$  к бесконечности: (а) вдоль отрицательной действительной полуоси и (б) вдоль положительной действительной полу-

---

<sup>1</sup> Функция  $f(x)$  используется в теории вероятностей для описания нормального закона распределения случайной величины.



оси. В случае (а) замечаем, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

сходится, а  $e^{x^2}$  при  $x \rightarrow -\infty$  стремится к бесконечности, поэтому предел функции  $f(x)$  равен бесконечности. В случае (б) проинтегрируем  $f(x)$  по частям один раз. Имеем

$$f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{e^{x^2}}{2} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt, \quad (1.19)$$

причем

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt \leq e^{-x^2} \int_x^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{e^{-x^2}}{x}.$$

Соответственно, предел  $f(x)$  при стремлении к бесконечности вдоль положительной действительной полуоси равен нулю, причем  $f(x) = O(1/x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Неравенство пределов по различным направлениям при стремлении к бесконечно удаленной точке и говорит о том, что в бесконечно удаленной точке имеется существенная особенность.

Выищем асимптотическое разложение функции  $f(x)$ . Продолжая интегрирование по частям, начатое формулой (1.19), приходим к равенству

$$f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n x^{2n-1}} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \cdot \int_x^{\infty} \frac{e^{x^2-t^2}}{t^{2n}} dt.$$

Оценим  $R_n(x)$ . Имеем

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{x^2-t^2}}{t^{2n}} dt = \int_{\gamma_\rho} \frac{e^{x^2-t^2}}{t^{2n}} dt + \int_\rho \frac{e^{x^2-t^2}}{t^{2n}} dt = I_1(x) + I_2(x).$$

Пусть  $\rho = |x|$ ,  $\varphi_0 = \arg x$ , причем  $|\varphi_0| \leq \pi/2 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . Вводя параметризацию угловой переменной  $\varphi$  на дуге  $\gamma_\rho$ , имеем оценку

$$|I_1(x)| = \left| \frac{1}{\rho^{2n-1}} \int_{\varphi_0}^0 e^{\rho^2(e^{2i\varphi_0} - e^{2i\varphi})} e^{-(2n-1)i\varphi} d\varphi \right|.$$

Так как  $|\varphi_0| < \pi/2$ , то показатель экспоненты

$$\rho^2 (e^{2i\varphi_0} - e^{2i\varphi}) = \rho^2 (\cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi) + i\rho^2 (\sin 2\varphi_0 - \sin 2\varphi)$$

имеет отрицательную действительную часть, поэтому

$$|I_1(x)| = o(1/|x|^m)$$

где  $m > 0$  - любое. Интегрируя в  $I_2(x)$  еще раз по частям, получаем

$$\int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{x^2-t^2}}{t^{2n}} dt = \frac{1}{2\rho^{2n+1}} e^{x^2-\rho^2} - \frac{2n+1}{2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{x^2-t^2}}{t^{2n+2}} dt = O\left(\frac{1}{|x|^{2n+1}}\right).$$

Таким образом, справедливо асимптотическое разложение

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \frac{1}{2x} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-3)}{2^k x^{2k-1}}. \quad (1.20)$$

Ряд в правой части (1.20), очевидно, расходится.

Важная деталь заключается в том, что для рассуждений, приведенных выше, *выполнение условия*  $|\arg x| \leq \pi/2 - \varepsilon$  *является критичным*. Нетрудно убедиться в том, что при  $\pi/2 < \arg x \leq \pi$  приведенная оценка интеграла  $I_1(x)$  несправедлива, и в этом случае  $|I_1(x)|$  экспоненциально растет с ростом  $|x|$ . Таким образом, разложение (1.20) справедливо в секторе  $|\arg x| \leq \pi/2 - \varepsilon$ , но не справедливо ни в каком секторе левой полуплоскости комплексной плоскости.

Оказывается, что если  $f(x)$  является аналитической функцией и имеет асимптотическое разложение в некотором секторе  $S$ , то это разложение можно *дифференцировать в секторе  $S$  сколько угодно раз*. Более точно, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.14.** *Пусть функция  $f(x)$  однозначна и аналитична в проколотой окрестности  $U$  некоторой точки  $x = a$ , и ряд (1.17) является асимптотическим к функции  $f(x)$  в секторе  $S = \{x \mid \arg(x-a) \in [\varphi_1; \varphi_2]\}$  при  $x \rightarrow a$ . Тогда разложение (1.17) можно дифференцировать сколько угодно раз и полученные разложения будут асимптотическими к производным функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  в любом круговом секторе с вершиной в точке  $a$ , содержащемся строго внутри сектора  $S$ .*

*Доказательство.* Для доказательства теоремы достаточно показать возможность однократного дифференцирования асимптотического ряда (1.17). В силу существования разложения, для любого натурального  $n$  существуют  $R_n$  и  $M_n$ , такие, что при  $x \in S_n$ , где

$$S_n = \{x \mid \arg(x - a) \in [\varphi_1; \varphi_2], |x - a| \leq R_n\}$$

имеет место представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - a)^k + \beta_n(x), \quad (1.21)$$

причем для любого  $x \in S_n$  справедлива оценка

$$|\beta_n(x)| \leq M_n |x - a|^{n+1}. \quad (1.22)$$

Так как  $f(x)$  аналитична в  $S_n$ , для  $x \in S_n$  справедлива формула Коши для производной

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - x)^2}, \quad (1.23)$$

где  $C_\rho$  окружность радиуса  $\rho$ , целиком лежащая в  $S_n$ . Подставляя (1.21) в (1.23), имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\pi i} \left( \sum_{k=0}^n \int_{C_\rho} \frac{a_k(\xi - a)^k d\xi}{(\xi - x)^2} + \int_{C_\rho} \frac{\beta_n(\xi) d\xi}{(\xi - x)^2} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}(x - a)^k + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\beta_n(\xi) d\xi}{(\xi - x)^2}, \end{aligned}$$

(к интегралам от членов суммы мы применили формулу Коши (1.23)). Обозначим

$$I_n(x) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\beta_n(\xi) d\xi}{(\xi - x)^2}.$$

Осталось доказать, что для  $x$ , лежащих в чуть «меньшем», чем  $S_n$ , секторе, справедливо неравенство

$$|I_n(x)| \leq \widetilde{M}_n |x - a|^n$$

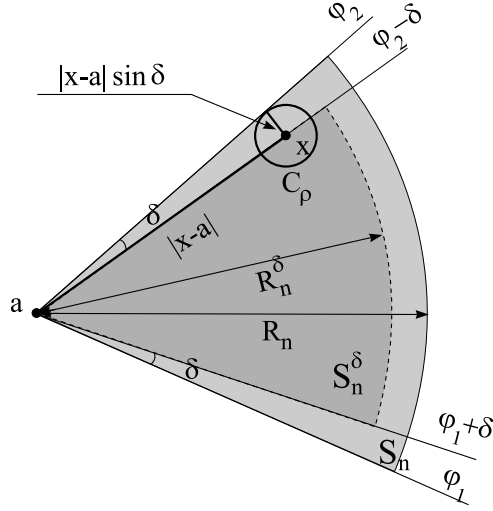


Рис. 1.2: К доказательству теоремы 1.14

с некоторой константой  $\widetilde{M}_n$ . Рассмотрим круговой сектор

$$S_n^\delta = \{x \mid \arg(x-a) \in [\varphi_1 + \delta; \varphi_2 - \delta], |x-a| \leq R_n^\delta\},$$

где  $R_n^\delta = R_n/(1 + \sin \delta)$ . Очевидно, что  $S_n^\delta \subset S_n$  и при  $\delta \rightarrow 0$  круговой сектор  $S_n^\delta$  сколь угодно хорошо приближает  $S_n$ . Пусть  $x \in S_n^\delta$ , а  $\rho$  таково, что  $C_\rho \subset S_n$  (см Рис. 1.2). Вводя параметризацию  $\xi = x + \rho e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , на  $C_\rho$ , имеем  $d\xi = i\rho e^{i\theta} d\theta$  и

$$|I_n(x)| = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\beta_n(\xi) d\xi}{(\xi - x)^2} \leq \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} |\beta(x + \rho e^{i\theta})| d\theta.$$

Учитывая оценку (1.22), получаем

$$|I_n(x)| \leq \frac{M_n}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} |x + \rho e^{i\theta} - a|^{n+1} d\theta. \quad (1.24)$$

До этого момента единственным ограничением на  $\rho$  были условие, что  $C_\rho \subset S_n$ . Из Рис.1.2 следует, что для  $x \in S_n^\delta$  это условие будет

выполнено, если  $\rho = |x - a| \sin \delta$ . Также при этом при  $0 \leq \theta < 2\pi$  имеем

$$|x + \rho e^{i\theta} - a| \leq |x - a|(1 + \sin \delta). \quad (1.25)$$

Подставляя значение для  $\rho$  и неравенство (1.25) в (1.24), получаем

$$|I_n(x)| \leq \frac{M_n |x - a|^{n+1} (1 + \sin \delta)^{n+1}}{|x - a| \sin \delta} = \widetilde{M}_n |x - a|^n,$$

где

$$\widetilde{M}_n \equiv \frac{M_n (1 + \sin \delta)^{n+1}}{\sin \delta},$$

откуда и следует утверждение теоремы.  $\square$

Подобная теорема справедлива для аналитических функций, допускающих асимптотическое разложение по калибровочной системе  $\{1, 1/x, 1/x^2, \dots\}$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

**Теорема 1.15.** Пусть функция  $f(x)$  однозначна и аналитична во внешности некоторого круга  $U = \{x \mid |x| > R\}$ , и ряд (1.18) является асимптотическим к функции  $f(x)$  в секторе  $S = \{x \mid \arg x \in [\varphi_1; \varphi_2]\}$  при  $x \rightarrow \infty$ . Тогда разложение (1.18) можно дифференцировать сколько угодно раз и полученные разложения будут асимптотическими к производным функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  в любом секторе, содержащемся строго внутри сектора  $S$ .

Доказательство теоремы 1.15 проводится аналогично доказательству теоремы 1.14.

## Задачи к главе 1

**1.1.** Докажите, что если  $\varphi_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , является калибровочной системой функций при  $x \rightarrow a$ , и для любого  $n = 1, 2, \dots$  выполняется соотношение

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) + o(\varphi_n(x)),$$

то  $f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ .

**1.2.** Покажите, что функции

$$\frac{1}{\ln x}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}}$$

не имеют разложений в асимптотические ряды по калибровочной системе  $\{1/x^n\}$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

**1.3.** Покажите, что если  $f(x)$  бесконечное число раз дифференцируема на промежутке  $[0; \infty)$ , а все ее производные на промежутке  $[0; \infty)$  растут не быстрее некоторой степени  $x$ , то ее преобразование Лапласа

$$Q(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x) dx$$

разлагается в следующий асимптотический ряд

$$Q(\lambda) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{k+1}} f^{(k)}(0), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

**1.4.** Используя задачу 1.3, выпишите асимптотические ряды для следующих преобразований Лапласа при  $\lambda \rightarrow +\infty$  и определите, являются ли эти ряды сходящимися или лишь асимптотическими ( $m \in \mathbb{N}$ ).

$$\begin{aligned} (a) \quad & \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} dt}{1+t^{2m}}, & (b) \quad & \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sqrt{1+t^{2m}} dt, \\ (c) \quad & \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} dt}{\sqrt{1+t^{2m}}}, & (d) \quad & \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot e^{-t^{2m}} dt, \\ (e) \quad & \int_0^\infty e^{-\lambda t} \ln(1+t^{2m}) dt & (f) \quad & \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sin(t^2) dt. \end{aligned}$$

**1.5.** Покажите, что функция

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

имеет при  $x \rightarrow +\infty$  асимптотическое разложение

$$E_1(x) \stackrel{\text{as}}{=} e^{-x} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + \dots \right\}.$$

**1.6.** Покажите, что

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{1+xt^2} \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (2n)! x^n, \quad x \rightarrow +0.$$

*Подсказка:* В задачах 1.3—1.6 используйте интегрирование по частям.

**1.7.** Выпишите асимптотическое представление для интегралов Френеля

$$\int_x^{\infty} \cos t^2 dt, \quad \int_x^{\infty} \sin t^2 dt$$

при (а)  $x \rightarrow 0$  и (б)  $x \rightarrow \infty$ . Являются ли полученные ряды сходящимися или только асимптотическими?

*Подсказка:* Используйте то, что

$$\int_0^{\infty} e^{it^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

**1.8.** Покажите, что функция Стильеса  $S(x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x^2 S_{xx} + (1 + 3x) S_x + S = 0.$$

Получите асимптотическое разложение (1.8), формально подставляя степенной ряд общего вида  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  в это уравнение, и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях.

**1.9.** Покажите, что асимптотическое разложение функции Стильеса (1.8) справедливо не только при действительных  $x$ , но и в секторе  $|\arg x| \leq \pi/2 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  комплексной плоскости.

**1.10.** Функция  $f(x) = e^{-x} \sin e^x$  является аналитической в окрестности бесконечно удаленной точки, однако, как указывалось ранее, ее асимптотическое разложение

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot \left( \frac{1}{x^k} \right)$$

при действительных  $x$  нельзя дифференцировать. Выясните, не противоречит ли этот запрет теореме 1.14, указав подмножество комплексной плоскости, в котором справедливо это асимптотическое разложение.



## Глава 2

### Асимптотика решений алгебраических и трансцендентных уравнений

#### 2.1 Регулярные асимптотические разложения

Начнем со следующего примера.

ПРИМЕР 2.1. Найдём приближения для корней уравнения

$$x^2 - x + \varepsilon = 0. \quad (2.1)$$

При  $\varepsilon = 0$  уравнение (2.1) имеет корни  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 0$ . Будем искать асимптотические разложения корней уравнения (2.1) в виде рядов по степеням  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Запишем приближение для первого из корней в виде ряда

$$x_1(\varepsilon) = 1 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots \quad (2.2)$$

В силу теоремы 1.7 мы можем подставить это выражение в уравнение (2.1), причём полученный результат будет представлять собой асимптотический ряд с нулевыми коэффициентами, в силу единственности асимптотического разложения.

После несложных преобразований получается бесконечная цепочка соотношений для последовательного определения коэффициентов  $a_k$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon : \quad 2a_1 - a_1 + 1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -1; \\ \varepsilon^2 : \quad a_1^2 + 2a_2 - a_2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -1; \\ &\dots \end{aligned}$$

Таким образом

$$x_1(\varepsilon) = 1 - \varepsilon - \varepsilon^2 + \dots$$

Нетрудно проверить, что полученное разложение совпадает с разложением в ряд Тейлора по степеням  $\varepsilon$  выражения для соответствующего корня уравнения (2.1)

$$\begin{aligned} x_1(\varepsilon) &= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + 1 - \frac{1}{2} \cdot (4\varepsilon) + \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1)}{2!} \cdot (4\varepsilon)^2 + \dots \right) = \\ &= 1 - \varepsilon - \varepsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

Ряд для  $x_1(\varepsilon)$  сходится при всех комплексных значениях  $\varepsilon$ , принадлежащих кругу  $|\varepsilon| < 1/4$ . Ряд для корня  $x_2(\varepsilon)$  проще всего получить, используя теорему Виета

$$x_2(\varepsilon) = 1 - x_1(\varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots$$

Таким образом,  $x_1(\varepsilon)$  является функцией, *аналитической* в некоторой окрестности точки  $\varepsilon = 0$  и разлагается в *сходящийся* (а не только асимптотический) ряд в круге  $|\varepsilon| < 1/4$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. То же разложение можно было бы получить, записав исходное уравнение в виде

$$\varepsilon = x - x^2,$$

и используя теорему 1.8 об асимптотическом ряде для обратной функции.

ПРИМЕР 2.2. Найдем приближенные значения корней кубического полинома<sup>1</sup>

$$x^3 - 4.001 x + 0.002 = 0. \quad (2.3)$$

Поставленная задача не содержит малого параметра. Вместе с тем уравнение (2.3) получается при подстановке значения  $\varepsilon = 0.001$  в уравнение

$$x^3 - (4 + \varepsilon) x + 2\varepsilon = 0, \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>Пример взят из книги [2].

что позволяет эффективно решить задачу методом асимптотических разложений. Снова будем искать корни нашего уравнения в виде асимптотических рядов по степеням  $\varepsilon$

$$x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n. \quad (2.5)$$

Подставляя  $\varepsilon = 0$  в уравнение (2.4), находим приближения нулевого порядка к трем корням этого уравнения

$$\tilde{x}_1 = -2, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 2.$$

В каждом из трех разложений (2.5) коэффициент  $a_0$  равен соответствующему значению  $\tilde{x}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Ограничиваясь асимптотическим представлением второго порядка для второго из этих корней  $\tilde{x}_2 = 0$ , запишем:

$$x_2(\varepsilon) = 0 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (2.6)$$

Подставим (2.6) в уравнение (2.4) и выпишем коэффициенты при степенях  $\varepsilon$ ,

$$(-4a_1 + 2)\varepsilon + (-4a_2 - a_1)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) = 0.$$

Приравнявая один за другим нулю коэффициенты полученного разложения, имеем

$$a_1 = 1/2, \quad a_2 = -1/8.$$

Процесс можно продолжить, находя последовательно  $a_3$ ,  $a_4$ , и так далее. Положив  $\varepsilon = 0.001$  в полученном двучленном разложении, имеем

$$x_2 = 0.004999875.$$

Это приближение к корню уравнения (2.3) оказывается верным с точностью  $10^{-9}$ .

Аналогично можно найти разложение для остальных двух корней уравнения (2.4):

$$x_1(\varepsilon) = -2 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad x_3(\varepsilon) = 2 + 0 \cdot \varepsilon + 0 \cdot \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

В разложении для корня  $x_3$  *все* коэффициенты  $a_n$  будут равны нулю, так как  $x = 2$  является корнем уравнения (2.4) при любом  $\varepsilon$ . Как и в примере 2.1, ряды, возникающие в результате описанной процедуры, являются сходящимися степенными рядами (см. задачу 2.1).

Для построения асимптотического разложения важен правильный выбор калибровочной последовательности. В приведенном ниже примере разложение по целым степеням  $\varepsilon$  оказывается невозможным, и калибровочную последовательность приходится пополнять полуцелыми степенями  $\varepsilon$ .

ПРИМЕР 2.3. Рассмотрим уравнение

$$e^x = 1 + x + \varepsilon. \quad (2.7)$$

При  $\varepsilon = 0$  корнем уравнения является  $x = 0$ . Попытка найти поправку к этому корню в виде разложения по целым степеням  $\varepsilon$  к успеху не приводит. Действительно, полагая

$$x = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots,$$

после подстановки в уравнение (2.7), получаем

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots) + \frac{1}{2} (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots)^2 + \dots = \\ &= 1 + a_1\varepsilon + \left(a_2 + \frac{1}{2}a_1^2\right)\varepsilon^2 + \dots; \\ 1+x+\varepsilon &= 1 + (1+a_1)\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $a_1 = a_1 + 1$ , что невыполнимо. Вместе с тем, введение полуцелых степеней  $\varepsilon$  в калибровочную последовательность позволяет построить самосогласованную рекуррентную процедуру для нахождения коэффициентов. Имеем

$$x = a_1\varepsilon^{1/2} + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^{3/2} + \dots,$$

и, после подстановки в уравнение (2.7) и сравнения коэффициентов

при одинаковых степенях, получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1/2} : \quad a_1 &= a_1; \\ \varepsilon : \quad a_2 + \frac{1}{2}a_1^2 &= a_2 + 1; \\ \varepsilon^{3/2} : \quad a_3 + a_1a_2 + \frac{1}{6}a_1^3 &= a_3 \\ &\dots\end{aligned}$$

Первое из приведенных выше уравнений является тождеством, из второго уравнения следует, что  $a_1 = \pm\sqrt{2}$ , из третьего - что  $a_2 = -1/3$ . В результате имеем два разложения

$$x_1 = \sqrt{2}\varepsilon^{1/2} - \frac{1}{3}\varepsilon + o(\varepsilon), \quad (2.8)$$

$$x_2 = -\sqrt{2}\varepsilon^{1/2} - \frac{1}{3}\varepsilon + o(\varepsilon). \quad (2.9)$$

Ситуация имеет простое объяснение: корень  $x = 0$  уравнения (2.7) является двукратным, и при его возмущении при  $\varepsilon > 0$  возникает пара корней кратности один. Стоит заметить, эти корни имеются только при  $\varepsilon > 0$ , а при  $\varepsilon < 0$  малых действительных корней нет (этот факт отражают полученные разложения). Можно показать, что формулы (2.8) и (2.9) представляют собой первый и второй члены рядов, являющихся *сходящимися* (см. задачу 2.7).

*Разложения, подобные описанным выше, называются регулярными.* Строгое определение регулярного разложения мы здесь давать не будем, ограничившись интуитивно понятным описанием. Понимается, что регулярное разложение описывает некоторую коррекцию уже существующего объекта (в данном случае, корня уравнения). Стоит подчеркнуть, что *ряд для регулярного разложения не обязательно должен сходиться*: еще один пример регулярного разложения - это расходящийся ряд для функции Стильтеса из примера 1.8: при  $x \rightarrow +0$  эта функция достигает конечного предельного значения, равного единице.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Сходимость рядов, описывающих возмущения корней алгебраического или трансцендентного уравнения, можно утверждать в гораздо более общем случае. А именно, справедлив комплексный аналог *теоремы о неявной функции*. В соответствии с ним

если  $F(z, \varepsilon)$  является аналитической функцией двух комплексных переменных  $z$  и  $\varepsilon$  в окрестности некоторой точки  $(z_0, \varepsilon_0)$ , и  $F_z(z_0, \varepsilon_0) \neq 0$ , то существует *аналитическая* функция  $z(\varepsilon)$ , определенная в окрестности  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , такая, что  $z(\varepsilon_0) = z_0$ . Аналитическая функция  $z(\varepsilon)$  может быть разложена в степенной ряд вида

$$z(\varepsilon) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\varepsilon - \varepsilon_0)^n$$

сходящийся в некотором круге  $|\varepsilon - \varepsilon_0| < R$ . Детали, касающиеся аналитической версии теоремы о неявной функции, можно найти в монографии [11], т.1, глава 4, параграф 5.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Даже если коэффициенты полинома аналитически зависят от малого параметра, и асимптотические разложения корней полинома являются регулярными, эти разложения могут оказаться достаточно бесполезными из-за высокой чувствительности корней к изменению коэффициентов полинома. Классическим примером является *полином Уилкинсона*

$$\prod_{k=1}^{20} (x - k) + \varepsilon x^{19} = x^{20} - (210 - \varepsilon)x^{19} + \dots + 20!. \quad (2.10)$$

Корнями невозмущенного полинома ( $\varepsilon = 0$ ), очевидно, являются натуральные числа от 1 до 20. При малом возмущении  $\varepsilon = 10^{-9}$  асимптотическое разложение первого порядка (см. задачу 2.8) позволяет вычислить с точностью до  $10^{-8}$  первые восемь корней полинома (2.10), представляющих собой возмущения корней  $x = 1, \dots, x = 8$ . Для высших корней полинома (2.10) ситуация ухудшается: одиннадцатый корень вычисляется лишь с точностью  $10^{-3}$ , а корни с тринадцатого по восемнадцатый вообще являются комплексными, и полученные приближения оказываются совершенно непригодными. Необходимо подчеркнуть, что по теореме о неявной функции, приведенной выше, асимптотические ряды для каждого из корней являются сходящимися, но область сходимости рядов для корней с большими номерами является микроскопически малой.

Однако, не все асимптотические разложения являются регулярными.

## 2.2 Сингулярные асимптотические разложения

ПРИМЕР 2.4. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon x^2 + x - 1 = 0. \quad (2.11)$$

Это квадратное уравнение при  $\varepsilon > 0$  имеет два корня. При  $\varepsilon = 0$  (2.11) вырождается в тривиальное уравнение  $x - 1 = 0$  с корнем  $x_1 = 1$ . Будем искать корень уравнения (2.11) в виде асимптотического ряда, описывающего поправки к корню  $x_1 = 1$ . Запишем

$$x(\varepsilon) = 1 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Получаем

$$(1 - 1) + (a_1 + 1)\varepsilon + (2a_1 + a_2)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) = 0.$$

Следовательно

$$x_1(\varepsilon) = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Поиски асимптотического разложения для второго корня уравнения (2.11) осложняются тем, что этот корень «исчезает» при переходе  $\varepsilon \rightarrow 0$ . «Подглядеть» ответ можно, используя формулу корней квадратного уравнения. Для корней  $x_{1,2}(\varepsilon)$  она дает

$$x_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} (-1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}), \quad x_2(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} (-1 - \sqrt{1 + 4\varepsilon}).$$

Используя формулу для  $x_1(\varepsilon)$  и стандартные разложения, можно представить  $x_1(\varepsilon)$  в виде сходящегося ряда по степеням  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} x_1(\varepsilon) &= \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left( -1 + \left[ 1 + 2\varepsilon + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 4^2}{2!} \varepsilon^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot 4^3}{3!} \varepsilon^3 + \dots \right] \right) = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)!} \varepsilon^n \end{aligned} \quad (2.12)$$

Областью сходимости этого ряда в комплексной плоскости является круг  $|\varepsilon| < 1/4$ . Нетрудно заметить, что коэффициенты представленного ряда при  $n = 1$  и  $n = 2$  совпадают с найденными ранее. Разложение (2.12) является регулярным.

Разложение для  $x_2(\varepsilon)$  легко выписывается, используя теорему Виета. Так как  $x_1(\varepsilon) + x_2(\varepsilon) = -1/\varepsilon$ , имеем

$$x_2(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)!} \varepsilon^n \quad (2.13)$$

Это разложение не определено при  $\varepsilon = 0$  и представляет собой *ряд Лорана*, сходящийся в проколотом круге  $0 < |\varepsilon| < 1/4$ .

*Разложения, такого типа, не имеющие предела при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , называют сингулярными разложениями.* Сингулярные разложения описывают ситуацию *качественного перехода*: «при  $\varepsilon = 0$  объекта не было»  $\rightarrow$  «при  $\varepsilon \neq 0$  объект появился».

ПРИМЕР 2.5. Найдем приближения для корней полинома<sup>1</sup>

$$\varepsilon^2 x^6 - \varepsilon x^4 - x^3 + 8 = 0. \quad (2.14)$$

При  $\varepsilon = 0$  мы получаем уравнение  $-x^3 + 8 = 0$ . Его корни

$$x_1 = 2e^{2\pi i/3}, \quad x_2 = 2e^{4\pi i/3}, \quad x_3 = 2.$$

Построение асимптотических разложений для корней  $x_1(\varepsilon)$ ,  $x_2(\varepsilon)$  и  $x_3(\varepsilon)$  проводится аналогично тому, как это делалось в примере 2.1. Они имеют вид

$$x_k(\varepsilon) = 2e^{2\pi ki/3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \varepsilon^n, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.15)$$

причем коэффициенты  $a_{n,k}$  находятся рекуррентно. Возникающие при этом разложения являются *регулярными*.

Вместе с тем, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  еще три корня исходного уравнения (2.14) (назовем их  $x_4$ ,  $x_5$ ,  $x_6$ ) пропадают. Объяснение этого явления заключается в том, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  корни  $x_4$ ,  $x_5$ ,  $x_6$  стремятся к бесконечности, поэтому нельзя пренебрегать членами  $\varepsilon^2 x^6$  и  $\varepsilon x^4$  в сравнении с  $-x^3 + 8$ . Соответственно, асимптотические разложения этих трех корней при малых  $\varepsilon$  заведомо будут сингулярными. Иерархия

---

<sup>1</sup>Пример взят из книги [2].



степеней в этих разложениях будет определяться правильным выбором *доминирующих* членов уравнения, то есть наибольших по порядку величины при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При этом очевидно, что член наибольшего порядка обязательно должен быть скомпенсирован еще каким-то членом такого же порядка. Действительно, если такое слагаемое было бы единственно, при  $\varepsilon$  достаточно малом оно будет превосходить сумму оставшихся трех слагаемых и нулевого баланса всех четырех членов не получится.

Попробуем *угадать* доминирующие члены. Процедуру угадывания организуем так: перебирая парами члены уравнения, будем выдвигать предположение о том, что именно они являются членами наибольшего порядка, чтобы затем сделать заключение о возможности или невозможности такой ситуации. В уравнении имеется четыре члена, соответственно рассмотрим *шесть* ситуаций (во всех случаях  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

(а) Пусть члены  $\varepsilon^2 x^6$  и  $\varepsilon x^4$  имеют один и тот же порядок величины (то есть  $\varepsilon^2 x^6 \asymp \varepsilon x^4$ ) и являются доминирующими. Тогда  $x \asymp \varepsilon^{-1/2}$  и члены  $\varepsilon^2 x^6$  и  $\varepsilon x^4$  имеют порядок  $\asymp \varepsilon^{-1}$ . Но тогда  $x^3 \asymp \varepsilon^{-3/2}$ , и именно этот член имеет наибольший порядок, что противоречит исходной гипотезе.

(б) Пусть  $\varepsilon x^4 \asymp x^3$  и порядок этих членов является доминирующим. Тогда  $x \asymp \varepsilon^{-1}$  и  $\varepsilon x^4 \asymp x^3 \asymp \varepsilon^{-3}$ . Но тогда  $\varepsilon^2 x^6 \asymp \varepsilon^{-4}$  и именно этот член является доминирующим. Мы снова пришли к противоречию.

(в) Пусть доминирующими членами являются  $\varepsilon^2 x^6$  и 8,  $\varepsilon^2 x^6 \asymp 8$ . Тогда  $x \asymp \varepsilon^{-1/3}$ . Соответственно,  $x^3 \asymp \varepsilon^{-1}$  и наше предположение снова неверно.

(г) Пусть доминирующими членами являются  $\varepsilon x^4$  и 8, то есть  $\varepsilon x^4 \asymp 8$ . Тогда  $x \asymp \varepsilon^{-1/4}$  и наибольший член уравнения  $x^3 \asymp \varepsilon^{-3/4}$ . Опять противоречие.

(д) Пусть  $x^3 \asymp 8$  и именно  $x^3$  и 8 являются доминирующими членами. Тогда  $x \asymp 1$ , а члены  $\varepsilon^2 x^6$  и  $\varepsilon x^4$  малы по сравнению с  $x^3$  и 8. Таким образом мы возвращаемся к ситуации, когда корни уравнения могут быть представлены как «поправки» корней невозмущенного ( $\varepsilon = 0$ ) уравнения,  $2e^{2\pi i/3}, 2e^{4\pi i/3}$  и 2, см. выше.

(е) Пусть доминирующими членами являются  $\varepsilon^2 x^6$  и  $x^3$ ,  $\varepsilon^2 x^6 \asymp x^3$ . Тогда  $x \asymp \varepsilon^{-2/3}$ . Это допустимо, так как  $\varepsilon^2 x^6 \asymp x^3 \asymp \varepsilon^{-2}$  больше, чем  $\varepsilon x^4 \asymp \varepsilon^{-5/3}$  и 8.

Таким образом, «исчезающие» корни имеют при  $\varepsilon \rightarrow 0$  порядок  $\asymp \varepsilon^{-2/3}$ . Это указывает на то, что решению задачи может помочь замена  $x = \varepsilon^{-2/3}y$ . После этой замены уравнение (2.14) переписывается в виде

$$y^6 - y^3 + 8\varepsilon^2 - \varepsilon^{1/3}y^4 = 0. \quad (2.16)$$

При  $\varepsilon = 0$  уравнение имеет шесть корней,

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = 0, \quad \tilde{y}_4 = e^{2\pi i/3}, \quad \tilde{y}_5 = e^{4\pi i/3}, \quad \tilde{y}_6 = 1,$$

соответственно, при предельном переходе  $\varepsilon \rightarrow 0$  ни один из корней не исчезает. Поправки к этим корням можно искать, используя разложения вида

$$y_k(\varepsilon) = \tilde{y}_k + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,k} \varepsilon^{n/3}. \quad (2.17)$$

При  $k = 1, 2, 3$  получаем  $b_{1,k} = 0$  и  $b_{2,k} = 2e^{2\pi ki/3}$ , и, соответственно,  $x = \varepsilon^{-2/3}y \asymp 1$ . Можно проверить, что последующие члены разложения (2.17) при  $k = 1, 2, 3$  соответствуют членам разложения (2.15). Разложения для  $x_k(\varepsilon)$  при  $k = 4, 5, 6$  находятся из разложений (2.17). Можно проверить, что

$$\begin{aligned} x_4(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^{2/3}} e^{2\pi i/3} + \frac{1}{3\varepsilon^{1/3}} e^{-2\pi i/3} + O(1), \\ x_5(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^{2/3}} e^{4\pi i/3} + \frac{1}{3\varepsilon^{1/3}} e^{-4\pi i/3} + O(1), \\ x_6(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^{2/3}} + \frac{1}{3\varepsilon^{1/3}} + O(1). \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемом примере из шести корней три описываются регулярными асимптотическими разложениями и еще три - сингулярными асимптотическими разложениями.

### 2.3 Построение асимптотических разложений методом диаграмм Ньютона

Вернемся к примеру 2.5 из предыдущего раздела. Мы получили, что для уравнения

$$\varepsilon^2 x^6 - \varepsilon x^4 - x^3 + 8 = 0 \quad (2.18)$$

возможно выделение *двух* пар доминирующих членов:  $x^3$  и 8, а также  $\varepsilon^2 x^6$  и  $x^3$ . Исследование каждого из этих случаев позволяет найти главные члены разложения для трех корней уравнения (2.18). Для обоснования того, что эти пары являются доминирующими, мы полагали

$$x \sim R\varepsilon^\alpha \quad (2.19)$$

и находили  $\alpha$  для каждой из возможных пар, подтверждая или опровергая предположение о ее доминировании.

Рассмотрим теперь задачу в более общей постановке. Пусть имеется уравнение

$$\sum_{k=0}^N a_k \varepsilon^{m_k} x^{n_k} = 0, \quad (2.20)$$

где  $n_k \geq 0$  и  $m_k \geq 0$  - целые числа. Будем считать, что  $n_k$  упорядочены по возрастанию и  $n_0 = 0$  (это требование является естественным, так как в противном случае корень  $x = 0$  отделяется, и степень уравнения понижается). Пусть  $n_N = L$  - наибольшая степень  $x$ . Рассмотрим задачу о нахождении главных членов всех корней этого уравнения в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Из суммы в левой части возьмем какие-то два члена,  $\varepsilon^{m_1} x^{n_1}$  и  $\varepsilon^{m_2} x^{n_2}$ . Выберем  $\alpha$  таким, чтобы при подстановке (2.19) в каждый из них, степени  $\varepsilon$  были одинаковые. Это будет тогда, когда

$$\alpha n_1 + m_1 = \alpha n_2 + m_2,$$

откуда

$$\alpha = -\frac{m_2 - m_1}{n_2 - n_1}.$$

Если пара  $\varepsilon^{m_1} x^{n_1}$  и  $\varepsilon^{m_2} x^{n_2}$  является доминирующей, то для всех остальных членов,  $k \neq 1$  и  $k \neq 2$ , выполняется соотношение

$$\alpha n_k + m_k > \alpha n_1 + m_1 = \alpha n_2 + m_2.$$

Этот факт допускает простую геометрическую интерпретацию. На плоскости  $(n, m)$ , (полагая что  $n$  - абсцисса,  $m$  - ордината), расставим

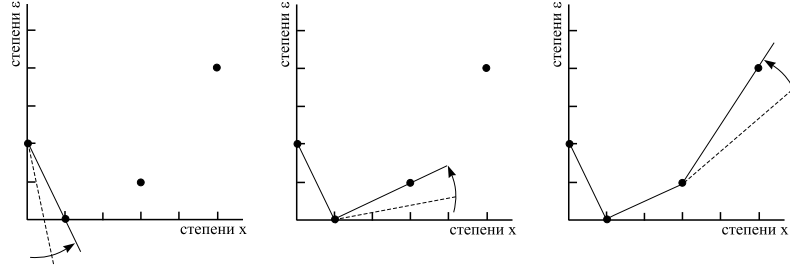


Рис. 2.1: Построение диаграммы Ньютона

точки  $(n_k, m_k)$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Любая пара точек  $(n_1, m_1)$  и  $(n_2, m_2)$  лежит на прямой  $\alpha n + m = C$ , причем  $\alpha$ , взятое с противоположным знаком, равно тангенсу наклона этой прямой к горизонтальной оси. Если пара  $(n_1, m_1)$  и  $(n_2, m_2)$  является доминирующей, то остальные точки  $(n_k, m_k)$ ,  $k \neq 1, k \neq 2$ , располагаются *выше* этой прямой.

Эти соображения позволяют предложить простой геометрический метод для нахождения главных членов асимптотики корней уравнения (2.20) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Он описывается следующими правилами (см. Рис.2.1).

1. Расставим на плоскости  $(n, m)$  точки  $(n_k, m_k)$ ,  $k = 0, \dots, N$ . При этом заметим, что по условию обязательно имеются точки  $(n_0 = 0, m_0)$  и  $(L, m_N)$ .

2. Проведем через точку  $(0, m_0)$  вертикальную прямую. Будем поворачивать ее против часовой стрелке, таким образом, чтобы она все время проходила через точку  $(0, m_0)$ , до тех пор, пока она не пройдет еще через какую-нибудь точку  $(n_{k_1}, m_{k_1})$ . Когда это произойдет в первый раз, мы получим ситуацию, при которой наша прямая проходит, как минимум, через две точки множества  $(n_k, m_k)$ ,  $k = 0, \dots, N$ , причем все остальные точки этого множества располагаются выше ее или на ней. Таким образом, члены  $a_0 \varepsilon^{m_0}$  и  $a_{k_1} \varepsilon^{m_{k_1}} x^{n_{k_1}}$  являются *доминирующими*. Значение  $\alpha = \alpha_1$  для этого промежутка равно угловому коэффициенту данной прямой, взятому с противоположным знаком. Подставим выражение (2.19) в уравнение (2.20). После сокращения на  $\varepsilon^{m_0}$ , получим уравнение, которое при  $\varepsilon = 0$  имеет вид

$a_0 + a_k R^{n_{k_1}} = 0$ . Найдем  $n_{k_1}$  корней этого уравнения. Каждый из них определяет первый член асимптотики соответствующего корня.

3. Продолжим вращение против часовой стрелки получившейся прямой. Теперь будем вращать ее таким образом, чтобы она все время проходила через точку  $(n_{k_1}, m_{k_1})$ , до тех пор, пока она не пройдет еще через какую-нибудь точку  $(n_{k_2}, m_{k_2})$ . Когда это произойдет, мы снова получим ситуацию, при которой наша прямая проходит, как минимум, через две точки множества  $(n_k, m_k)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , причем все точки этого множества располагаются на прямой или выше ее. Таким образом, теперь доминирующими оказываются члены  $a_{k_1} \varepsilon^{m_{k_1}} x^{n_{k_1}}$  и  $a_{k_2} \varepsilon^{m_{k_2}} x^{n_{k_2}}$ . Используя коэффициент  $\alpha = \alpha_2$ , для этой прямой найдем главные члены асимптотики для следующих  $n_{k_2} - n_{k_1}$  корней уравнения (2.20).

4. Продолжая действовать таким образом, найдем все возможные положения прямой, соответствующие доминантным парам. В своем финальном положении прямая должна проходить через точку  $(L, m_N)$ . Нетрудно убедиться, что этот процесс позволяет найти главные члены асимптотики всех корней уравнения (2.20).

Описанный метод называется *методом диаграмм Ньютона*. Мы видим, что он позволяет найти главный член приближения для каждого из корней уравнения (2.20). Вместе с тем, если найден главный член асимптотики корня  $\tilde{x} = R\varepsilon^\alpha + o(\varepsilon^\alpha)$ , полагая

$$\tilde{x} = R\varepsilon^\alpha + y,$$

можно найти следующий член этой асимптотики. Для этого необходимо подставить последнее выражение в уравнение (2.20) и вновь использовать метод диаграмм Ньютона для нахождения главного члена разложения каждого из корней  $y$ .

Метод диаграмм Ньютона применим не только в случае, когда все  $m_k$  и  $n_k$ ,  $k = 0, \dots, N$  являются целыми, но и тогда, когда они все являются *рациональными*. Однако, даже в случае целых значений  $m_k$  и  $n_k$  значения степеней  $\alpha$  *не обязаны быть целыми*. Таким образом, в результате многократного применения метода диаграмм Ньютона, получаем следующие разложения каждого из корней  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$

$$x_i = R_{i,1} \varepsilon^{\alpha_{i,1}} + R_{i,2} \varepsilon^{\alpha_{i,2}} + \dots, \quad (2.21)$$

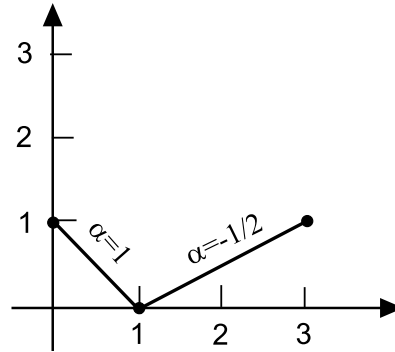


Рис. 2.2: Диаграмма Ньютона для нахождения главного члена разложения корней уравнения  $\varepsilon x^3 - x + \varepsilon = 0$

причем степени  $\alpha_{i,j}$  являются, вообще говоря, рациональными.

Следующая теорема гласит, что эти ряды являются не только асимптотическими, но и сходящимися, при достаточно малых  $\varepsilon$ .

**Теорема 2.1 (Пюизе).** *Если в уравнении (2.20) все числа  $m_k$  и  $n_k$  являются рациональными, то существует такое  $\varepsilon_0$ , что ряд (2.21) сходится к соответствующему корню уравнения при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ .*

Доказательство теоремы Пюизе можно найти в книге [12].

**ПРИМЕР 2.6.** Найдем первые два члена асимптотики корней уравнения

$$\varepsilon x^3 - x + \varepsilon = 0. \quad (2.22)$$

На плоскости  $(n, m)$  построим три точки, соответствующие трем членам уравнения:  $\varepsilon$  (точка  $(0, 1)$ ),  $x$  (точка  $(1, 0)$ ) и  $\varepsilon x^3$  (точка  $(3, 1)$ ). Коэффициент в уравнении при  $x^2$  равен нулю, следовательно на диаграмме Ньютона отсутствуют вершины с  $n = 2$ . Следуя правилам, приведенным выше, приходим к диаграмме, изображенной на рисунке Рис.2.2.

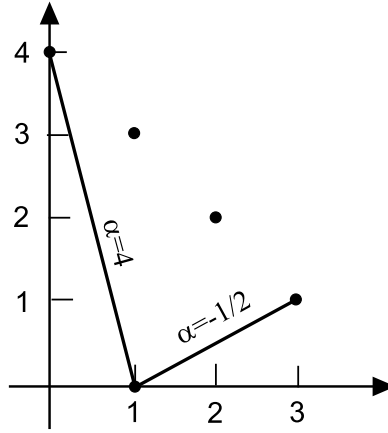


Рис. 2.3: Диаграмма Ньютона для нахождения поправки к корню  $x_1 \sim \varepsilon$  уравнения  $\varepsilon x^3 - x + \varepsilon = 0$

Степени  $\alpha$  равны угловым коэффициентам ребер диаграммы Ньютона, взятым с противоположным знаком. Это означает, что имеются две возможности:  $\alpha = 1$  и  $\alpha = -1/2$ . Рассмотрим эти случаи поочередно.

1. Пусть  $\alpha = 1$ . Подставим выражение  $x(\varepsilon) = R\varepsilon + o(\varepsilon)$  в уравнение. В первом порядке по  $\varepsilon$  имеем  $R = 1$ . Таким образом, приближение к первому из корней описывается формулой

$$x_1(\varepsilon) = \varepsilon + o(\varepsilon). \quad (2.23)$$

2. Пусть  $\alpha = -1/2$ . Подставим выражение  $x(\varepsilon) = R\varepsilon^{-1/2} + o(\varepsilon^{-1/2})$  в уравнение. Баланс первого и второго членов уравнения дает  $R^3 - R = 0$ , то есть  $R = 0$ ,  $R = 1$  и  $R = -1$ . Первый из этих случаев нужно отбросить, так как асимптотическое поведение корня не имеет вида  $\asymp \varepsilon^{-1/2}$ . Получаем, что асимптотика второго и третьего корней такова

$$x_{2,3}(\varepsilon) = \pm \varepsilon^{-1/2} + o(\varepsilon^{-1/2}). \quad (2.24)$$

Найдем следующие члены асимптотических рядов для корней

$x_{1,2,3}(\varepsilon)$ . Для  $x_1(\varepsilon)$  запишем

$$x_1 = \varepsilon + y.$$

Подставим это выражение в уравнение (2.22). Получим

$$\varepsilon y^3 + 3\varepsilon^2 y^2 + (3\varepsilon^3 - 1)y + \varepsilon^4 = 0. \quad (2.25)$$

Диаграмма Ньютона для этого уравнения показана на Рис.2.3 (стоит обратить внимание на то, что имеются два члена, содержащие  $y$  в первой степени, но только один из них послужил вершиной диаграммы). Имеем два случая:  $y = R_1 \varepsilon^4 + o(\varepsilon^4)$  и  $y = R_1 \varepsilon^{-1/2} + o(\varepsilon^{-1/2})$ . Второй из этих случаев необходимо отбросить, так как поправка к разложению (2.23), вносимая вторым членом ( $\asymp \varepsilon^{-1/2}$ ), оказывается по порядку величины больше, чем главный член ( $\asymp \varepsilon$ ). В первом случае, подставляя выражение для  $y$  в уравнение, и отбрасывая слагаемые порядка, большего, чем  $\varepsilon^4$ , имеем  $R_1 = 1$ . Окончательно, асимптотика корня  $x_1(\varepsilon)$  с точностью до первых двух членов имеет вид

$$x_1(\varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^4 + o(\varepsilon^4).$$

Найдем следующий член в разложении (2.24). Подставив

$$x_2 = \varepsilon^{-1/2} + y$$

в уравнение (2.22), получаем уравнение

$$\varepsilon y^3 + 3\varepsilon^{1/2} y^2 + 2y + \varepsilon = 0. \quad (2.26)$$

Диаграмма Ньютона в этом случае имеет вид, представленный на Рис.2.4. Возможны два случая:  $y = R_1 \varepsilon + o(\varepsilon)$  и  $y = R_1 \varepsilon^{-1/2} + o(\varepsilon^{-1/2})$ . Второй из этих случаев необходимо отбросить, так как поправка имеет порядок главного члена ( $\asymp \varepsilon^{-1/2}$ ). В первом же из этих случаев, подставляя выражение для  $y$  в уравнение (2.26) и отбрасывая члены порядка большего, чем  $\varepsilon$ , получаем  $R_1 = -1/2$ . Таким образом

$$x_2(\varepsilon) = \varepsilon^{-1/2} - \frac{1}{2}\varepsilon + o(\varepsilon).$$



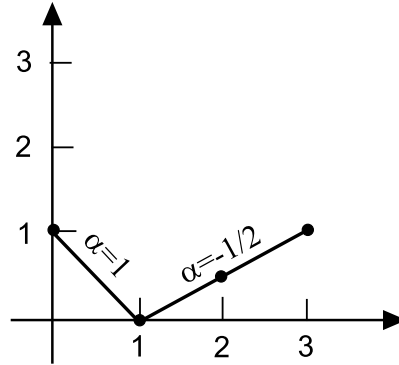


Рис. 2.4: Диаграмма Ньютона для нахождения поправки к корню  $x_2 \asymp \varepsilon^{-1/2}$  уравнения  $\varepsilon x^3 - x + \varepsilon = 0$

Нахождение асимптотики для  $x_3(\varepsilon)$  производится аналогично. При подстановке  $x_3 = -\varepsilon^{-1/2} + y$  в уравнение (2.22) получаем

$$\varepsilon y^3 - 3\varepsilon^{1/2}y^2 + 2y + \varepsilon = 0. \quad (2.27)$$

Диаграмма Ньютона для этого уравнения совпадает с соответствующей диаграммой для уравнения (2.26). Повторяя рассуждения, получаем, что асимптотическое представление для  $x_3(\varepsilon)$  имеет вид

$$x_3(\varepsilon) = -\varepsilon^{-1/2} - \frac{1}{2}\varepsilon + o(\varepsilon).$$

## Задачи к главе 2

**2.1.** Решите в явном виде уравнение (2.3) при произвольном  $\varepsilon$ . Используя полученные формулы выясните, какой радиус сходимости имеют найденные разложения его корней.

**2.2.** Выберите правильную калибровочную систему и выпишите первые два члена разложения для корней при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . уравнений

$$(a) x^4 + x^2 - \varepsilon = 0, \quad (b) \varepsilon x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0.$$

**2.3.** Найдите первые два члена асимптотического разложения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для указанных корней уравнений

$$(a) \sin(x + \varepsilon) = 2\varepsilon, \quad x = 0, \quad (b) \cos(x + \varepsilon) = x + 1, \quad x = 0,$$

$$(c) e^x = 2x + 1 + \varepsilon, \quad x = 0, \quad (d) e^{x+\varepsilon} = 2x + 1, \quad x = 0,$$

$$(e) \ln x + \varepsilon = 1 - x, \quad x = 1, \quad (f) x + \operatorname{tg} x = \varepsilon, \quad x = 0.$$

**2.4.** Проанализируйте, как ведут себя при малых  $\varepsilon > 0$  корни уравнений

$$(a) e^x = 1 + \sqrt{x^2 + \varepsilon}, \quad (b) e^x = 1 + \sqrt[n]{x^2 + \varepsilon}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 2.$$

**2.5.** Проанализируйте, как ведут себя при малых  $\varepsilon > 0$  корни уравнений

$$(a) \ln(1 + x) = 2x + \varepsilon \ln x,$$

$$(b) \ln(1 + x) = ax + \varepsilon \ln x, \quad a > 0, \quad a \neq 2.$$

*Подсказка:* В разложение помимо степеней  $\varepsilon$  входят степени  $\ln \varepsilon$  и повторные логарифмы  $\varepsilon$ .

**2.6.** Покажите, что уравнение

$$\operatorname{tg} x = 1/x$$

имеет бесконечное число действительных положительных корней  $\{x_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , причем  $x_k \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . Найдите асимптотическое приближение для «старших» (больших по модулю) действительных корней этого уравнения.

**2.7.** Найдите радиус сходимости рядов, описывающих корни  $x_1$  и  $x_2$  в примере 2.3 (первые два члена выписаны в (2.8) и (2.9)).

*Подсказка:* Сделайте замену  $\varepsilon = \xi^2$  и покажите, что зависимость  $x$  от  $\xi$  описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{2\xi}{e^x - 1}$$

с начальным условием  $x(0) = 1$ . Воспользуйтесь тем, что радиус круга, в котором некоторая функция аналитична, равен расстоянию до ближайшей особой точки этой функции.

**2.8.** Постройте поправку 1-го порядка для корня  $x = k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 20$ , полинома Уилкинсона (2.10), показав, что

$$x_k = k + (-1)^{k+1} \frac{\varepsilon k^{19}}{(k-1)!(20-k)!} + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Далее:

(а) Выясните, какой из корней оказывается наиболее чувствителен к возмущению. Оцените границу  $\varepsilon$ , при котором все корни изменятся не более, чем на 1%.

(б) Выясните, какое значение  $\varepsilon$  предсказывается поправкой первого порядка для появления комплексных корней.

**2.9.** Найдите поправку наинизшего порядка по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для собственных значений матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 19 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon & 20 \end{pmatrix}$$

**2.10.** Найдите поправку наинизшего порядка при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для собственных значений матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \varepsilon & 0 & \cdots & 19 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & \cdots & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

**2.11.** Используя технику диаграмм Ньютона, найдите первый член

разложения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для каждого из корней уравнения

$$(a) \varepsilon^4 x^7 - 3\varepsilon^3 x^5 + \varepsilon^2 x^3 + 2x + \varepsilon = 0,$$

$$(b) 2\varepsilon^3 x^6 + \varepsilon^2 x^4 + \varepsilon x^2 + \varepsilon^2 = 0,$$

$$(c) \varepsilon x^9 + \varepsilon^2 x^7 + \varepsilon x^6 + (2\varepsilon^3 - 1)x^4 + \varepsilon x^2 + \varepsilon^4 = 0,$$

$$(d) \varepsilon^2 x^8 - 3\varepsilon^3 x^6 + x^4 - \varepsilon = 0.$$

**2.12.** Используя технику диаграмм Ньютона, найдите первый и второй члены разложения корней следующих уравнений при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(a) \varepsilon x^3 - x^2 + x - \varepsilon^2 = 0, \quad (b) \varepsilon x^3 + (1 + \varepsilon)x + 1 = 0,$$

$$(c) x^3 - 3\varepsilon x + \varepsilon^2 = 0, \quad (d) \varepsilon^3 x^3 - x^2 + 2\varepsilon x + 1 = 0,$$

$$(e) \varepsilon^2 x^3 - 2\varepsilon^2 x^2 + x + 1 = 0, \quad (f) \varepsilon x^3 - 2x^2 + x + \varepsilon = 0.$$

## Глава 3

### Асимптотические оценки сумм

Асимптотическая теория позволяет эффективно суммировать медленно сходящиеся ряды, а также находить значения конечных сумм, содержащих гигантское число членов. В этом разделе мы представим и проиллюстрируем примерами класс асимптотических формул, называемых *формулами Эйлера-Маклорена*. Они позволяют вычислять конечные и бесконечные суммы, встречающиеся в различных приложениях математического анализа.

При выводе удобной «рабочей» формулы (3.9) автор следовал подходу книги [1].

#### 3.1 Приближенная формула для сумм вида $\sum_{k=m+1}^n \psi(k)$

Рассмотрим сумму вида

$$\sum_{k=m+1}^n \psi(k), \quad (3.1)$$

где  $\psi(x)$  — функция, имеющая достаточное число производных (в рассуждениях этого раздела предполагается, что их больше шести). Обозначим  $\varphi(x)$  первообразную функции  $\psi(x)$ . Запишем

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \psi(x) dx = \varphi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \varphi\left(k - \frac{1}{2}\right). \quad (3.2)$$

Основная идея подхода, развиваемого ниже, заключается в том, что для «хороших» функций  $\psi(x)$  *интеграл в левой части (3.2) приближенно равен  $\psi(k)$* . Исходя из этого предположения, можно заменить  $\psi(k)$  в (3.1) на разность первообразных в правой части (3.2), при этом все члены получившейся суммы взаимно уничтожатся, кроме первого и последнего. В результате имеем

$$\sum_{k=m+1}^n \psi(k) \approx \varphi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varphi\left(m + \frac{1}{2}\right). \quad (3.3)$$

Займемся уточнением формулы (3.3). Разложим выражения для функции в полупелых точках  $\varphi(k + 1/2)$  и  $\varphi(k - 1/2)$  по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\begin{aligned}\varphi\left(k + \frac{1}{2}\right) &= \varphi(k) + \frac{1}{2}\varphi'(k) + \frac{1}{2^2 2!}\varphi''(k) + \frac{1}{2^3 3!}\varphi'''(k) + \\ &+ \frac{1}{2^4 4!}\varphi^{(4)}(k) + \frac{1}{2^5 5!}\varphi^{(5)}(k) + \frac{1}{2^6 6!}\varphi^{(6)}(k) + \frac{1}{2^7 7!}\varphi^{(7)}\left(k + \frac{\theta_1}{2}\right), \\ \varphi\left(k - \frac{1}{2}\right) &= \varphi(k) - \frac{1}{2}\varphi'(k) + \frac{1}{2^2 2!}\varphi''(k) - \frac{1}{2^3 3!}\varphi'''(k) + \\ &+ \frac{1}{2^4 4!}\varphi^{(4)}(k) - \frac{1}{2^5 5!}\varphi^{(5)}(k) + \frac{1}{2^6 6!}\varphi^{(6)}(k) - \frac{1}{2^7 7!}\varphi^{(7)}\left(k - \frac{\theta_2}{2}\right),\end{aligned}$$

где  $0 < \theta_{1,2} < 1$ . Получаем

$$\begin{aligned}\varphi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \varphi\left(k - \frac{1}{2}\right) &= \\ &= \varphi'(k) + \frac{1}{2^2 3!}\varphi'''(k) + \frac{1}{2^4 5!}\varphi^{(5)}(k) + R_{1,k},\end{aligned}\quad (3.4)$$

причем

$$R_{1,k} = \frac{1}{2^7 7!}\left(\varphi^{(7)}\left(k + \frac{\theta_1}{2}\right) - \varphi^{(7)}\left(k - \frac{\theta_2}{2}\right)\right).$$

Аналогично получаются соответствующие формулы для разностей производных. В частности

$$\varphi''\left(k + \frac{1}{2}\right) - \varphi''\left(k - \frac{1}{2}\right) = \varphi'''(k) + \frac{1}{2^2 3!}\varphi^{(5)}(k) + R_{2,k},$$

где

$$R_{2,k} = \frac{1}{2^5 5!}\left(\varphi^{(7)}\left(k + \frac{\theta_3}{2}\right) - \varphi^{(7)}\left(k - \frac{\theta_4}{2}\right)\right),$$

причем  $0 < \theta_{3,4} < 1$ . Таким образом

$$\varphi'''(k) = \varphi''\left(k + \frac{1}{2}\right) - \varphi''\left(k - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^2 3!}\varphi^{(5)}(k) - R_{2,k}. \quad (3.5)$$

Аналогично имеем

$$\varphi^{(4)}\left(k + \frac{1}{2}\right) - \varphi^{(4)}\left(k - \frac{1}{2}\right) = \varphi^{(5)}(k) + R_{3,k},$$

где

$$R_{3,k} = \frac{1}{2^3 3!} \left( \varphi^{(7)}\left(k + \frac{\theta_5}{2}\right) - \varphi^{(7)}\left(k - \frac{\theta_6}{2}\right) \right),$$

причем  $0 < \theta_{5,6} < 1$ . При этом

$$\varphi^{(5)}(k) = \varphi^{(4)}\left(k + \frac{1}{2}\right) - \varphi^{(4)}\left(k - \frac{1}{2}\right) - R_{3,k}. \quad (3.6)$$

Подставим теперь равенства (3.5) и (3.6) в соотношение (3.4) и исключим из (3.4)  $\varphi'(k)$

$$\begin{aligned} \varphi'(k) &= \varphi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \varphi\left(k - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^2 3!} \left( \varphi''\left(k + \frac{1}{2}\right) - \varphi''\left(k - \frac{1}{2}\right) \right) + \\ &+ \left( \frac{1}{2^4 \cdot (3!)^2} - \frac{1}{2^4 \cdot 5!} \right) \cdot \left( \varphi^{(4)}\left(k + \frac{1}{2}\right) - \varphi^{(4)}\left(k - \frac{1}{2}\right) \right) - R_k, \end{aligned}$$

где

$$R_k = -R_{1,k} - \frac{1}{2^2 \cdot 3!} R_{2,k} - \left( \frac{1}{2^4 \cdot (3!)^2} - \frac{1}{2^4 \cdot 5!} \right) R_{3,k}.$$

Обозначим

$$M_k = \max_{k - \frac{1}{2} < x < k + \frac{1}{2}} \left| \varphi^{(7)}(x) \right|. \quad (3.7)$$

Справедлива оценка

$$\begin{aligned} |R_k| &< 2 \cdot \left( \frac{1}{2^7 \cdot 7!} + \frac{1}{2^7 \cdot 3! \cdot 5!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} \cdot \left( \frac{1}{2^4 \cdot (3!)^2} - \frac{1}{2^4 \cdot 5!} \right) \right) M_k = \\ &= \frac{73}{967680} M_k < 10^{-4} M_k. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Просуммируем полученные равенства от  $k = m + 1$  до  $k = n$ . При этом при суммировании по  $k$  разностей

$$\varphi^{(p)}(k + 1/2) - \varphi^{(p)}(k - 1/2), \quad p = 0, 2, 4,$$

останутся только крайние члены  $\varphi^{(p)}(n + 1/2)$  и  $\varphi^{(p)}(m + 1/2)$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^n \varphi'(k) &= \varphi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varphi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{24} \left( \varphi''\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varphi''\left(m + \frac{1}{2}\right) \right) + \\ &\quad + \frac{7}{5760} \left( \varphi^{(4)}\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varphi^{(4)}\left(m + \frac{1}{2}\right) \right) - \sum_{k=m+1}^n R_k, \end{aligned} \quad (3.9)$$

причем  $|R_k| < 10^{-4}M_k$ , где  $M_k$  определяется формулой (3.7). Формула (3.9) и является основной формулой этого раздела.

Разумеется, в случае, когда функция  $\varphi(x)$  имеет большее число производных, формула (3.9) допускает обобщения, включающие также разности

$$\varphi^{(p)}\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varphi^{(p)}\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

при  $p > 4$ . Обсуждение более общих формул этого класса см. в разделе 3.4.

Приведем несколько примеров применения формулы (3.9).

### 3.2 Вычисление сумм вида $\sum_{k=1}^n k^\alpha$

Формулу (3.9) можно применить к вычислению конечных сумм вида  $\sum_{k=1}^n k^\alpha$ . При этом при целых значениях  $\alpha$ , таких, что  $0 < \alpha \leq 5$ , имеем  $R_k \equiv 0$ , и формула (3.9) позволяет найти *точное значение суммы*.

**ПРИМЕР 3.1.** Найдём сумму

$$\sum_{k=1}^n k^3.$$

Имеем  $\psi(x) = \varphi'(x) = x^3$  и  $\varphi(x) = x^4/4$ . Далее,

$$\varphi''(x) = 3x^2, \quad \varphi'''(x) = 6x, \quad \varphi^{(4)}(x) = 6,$$

$$\varphi^{(5)}(x) = \varphi^{(6)}(x) = \varphi^{(7)}(x) \equiv 0.$$



По формуле (3.9) получаем

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right)^4 - \left( \frac{1}{2} \right)^4 \right) - \frac{3}{24} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, приходим к хорошо известному результату

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

### 3.3 Вычисление суммы первых $n$ членов гармонического ряда

Рассмотрим задачу численного нахождения суммы первых  $n$  членов гармонического ряда. Сразу же стоит заметить, что при больших значениях  $n$  решение этой задачи путем суммирования «в лоб» может оказаться не под силу самым мощным компьютерам. Действительно, пусть стоит задача найти сумму первых  $10^{100}$  членов этого ряда. Опуская трудности, порождаемые накоплением ошибки, связанной с разрядностью, посчитаем только затраты процессорного времени, необходимого для последовательного суммирования членов ряда один за другим. Компьютеру с предельной на сегодняшний день производительностью  $10^{15}$  флопс для нахождения такой суммы потребуется около  $2 \cdot 10^{85}$  секунд или более  $10^{76}$  лет, что во много раз превосходит время существования Вселенной. Вместе с тем уже асимптотическая трехчленная формула, представленная ниже, дает отличное приближение для искомой суммы. Интересно, что полученный ответ ( $\approx 231$ ) вовсе не является гигантским числом.

Укажем два способа для приближенного нахождения частичной суммы гармонического ряда при помощи формулы (3.9).

*Способ 1.* Применим формулу (3.9) непосредственно к частичным суммам гармонического ряда. Имеем:  $\psi(x) = \varphi'(x) = 1/x$  и  $\varphi(x) =$

$\ln x$ . Далее, получаем

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & \varphi'''(x) &= \frac{2}{x^3}, & \varphi^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4}, \\ \varphi^{(5)}(x) &= \frac{24}{x^5}, & \varphi^{(6)}(x) &= -\frac{120}{x^6}, & \varphi^{(7)}(x) &= \frac{720}{x^7}.\end{aligned}$$

Из формулы (3.9) следует, что

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} &= \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \ln\left(m + \frac{1}{2}\right) + \\ &+ \frac{1}{24} \left( \frac{1}{(n+1/2)^2} - \frac{1}{(m+1/2)^2} \right) - \\ &- \frac{7}{960} \left( \frac{1}{(n+1/2)^4} - \frac{1}{(m+1/2)^4} \right) - \sum_{k=m+1}^n R_k, \quad (3.10)\end{aligned}$$

причем, учитывая (3.7) и (3.8),

$$|R_k| < 10^{-4} \cdot 720/(k-1)^7.$$

Последняя оценка говорит о том, что ряд  $\sum_{k=2}^{\infty} R_k$  абсолютно сходится.

Для нахождения приближения к искомой сумме, заметим, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10} = \frac{7381}{2520} \approx 2.928968254,$$

а сумму оставшихся членов посчитаем, положив  $m = 10$  в формуле (3.9). Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{k=11}^n \frac{1}{k} &= \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{21}{2}\right) + \frac{1}{24} \left( \frac{1}{(n+1/2)^2} - \frac{1}{(21/2)^2} \right) - \\ &- \frac{7}{960} \left( \frac{1}{(n+1/2)^4} - \frac{1}{(21/2)^4} \right) - \mathcal{R}_n,\end{aligned}$$

где

$$|\mathcal{R}_n| \leq 0.072 \cdot \sum_{k=11}^n \frac{1}{(k-1)^7} < 0.072 \cdot \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^7}.$$

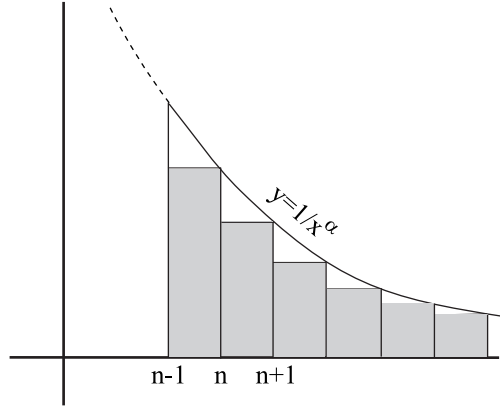


Рис. 3.1: К доказательству леммы об оценке суммы.

Оценим теперь остаточный член  $\mathcal{R}_n$ . Для этой оценки потребуется следующая простая лемма.

**Лемма.** Пусть  $\alpha > 1$ . Тогда

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \leq \frac{1}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}}.$$

*Доказательство* леммы удобно иллюстрировать следующим рисунком (см. Рис. 3.1). Сумма  $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$  может быть интерпретирована как площадь бесконечного числа темных прямоугольников шириной 1, располагающихся под кривой  $y = 1/x^{\alpha}$  таким образом, чтобы правая верхняя вершина лежала на этой кривой. Очевидно, эта площадь меньше площади под кривой  $y = 1/x^{\alpha}$ , равной

$$\int_m^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}},$$

что и доказывает лемму.  $\square$

Таким образом при  $m = 10$  и  $n > 10$  имеем  $|\mathcal{R}_n| < 0.072/(6 \cdot 10^6) = 1.2 \cdot 10^{-8}$ . Окончательно, получаем

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{7381}{2520} + \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24} \frac{1}{(n+1/2)^2} - \frac{7}{960} \frac{1}{(n+1/2)^4} -$$

$$- \ln\left(\frac{21}{2}\right) - \frac{1}{24} \frac{1}{(21/2)^2} + \frac{7}{960} \frac{1}{(21/2)^4} - \mathcal{R}_n.$$

При  $n = 10^{100}$  имеем

$$\sum_{k=1}^{10^{100}} \frac{1}{k} \approx \ln\left(10^{100} + \frac{1}{2}\right) + 0.577216 \approx 230.835725,$$

(все значащие цифры верны).

*Способ 2.* Обозначим  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  и  $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} R_k$ . Из формулы (3.9) следует соотношение

$$S_n - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24} \frac{1}{(n+1/2)^2} - \frac{7}{960} \frac{1}{(n+1/2)^4} - \rho_n =$$

$$= S_m - \ln\left(m + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24} \frac{1}{(m+1/2)^2} - \frac{7}{960} \frac{1}{(m+1/2)^4} - \rho_m = \mathbf{C},$$

причем константа  $\mathbf{C}$  не зависит от  $m$  и  $n$  и является еще одной «мировой» константой, наряду с  $\pi$  и  $e$ . Ее численное значение равно<sup>1</sup>

$$\mathbf{C} = 0.577215664901532 \dots$$

Таким образом получаем

$$S_n = \mathbf{C} + \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24} \frac{1}{(n+1/2)^2} - \frac{7}{960} \frac{1}{(n+1/2)^4} - \rho_n. \quad (3.11)$$

---

<sup>1</sup> Из сказанного выше следует, что константа  $\mathbf{C}$  может быть определена также как предел

$$\mathbf{C} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Впервые константа  $\mathbf{C}$  появилась в работах Леонарда Эйлера в первой половине 18-го века и сейчас носит его имя. Несмотря на то, что  $\mathbf{C}$  входит во многие важные формулы, до сих пор неизвестно, является ли  $\mathbf{C}$  рациональным или иррациональным числом.

Используя лемму, доказанную выше, имеем для  $\rho_n$  оценку

$$|\rho_n| < \frac{0.012}{n^6}.$$

Теперь точность, с которой формула (3.11) позволяет получить оценку суммы первых  $n = 10^{100}$  определяется точностью, с которой известна константа **C**. Ограничиваясь для **C** двенадцатью значащими цифрами после запятой, получаем

$$S_{10^{100}} \approx \ln(10^{100} + 1/2) + \mathbf{C} \approx 100 \ln 10 + \mathbf{C} \approx 230.835724964307.$$

Все приведенные знаки - верные.

### 3.4 Обобщение формулы (3.9): формула Эйлера-Маклорена

Хотя формулы (3.9) вполне достаточно для многих практических ситуаций, для полноты картины хотелось бы иметь более общий результат, позволяющий выписывать приближения с большим числом членов. Будем считать, что представление (3.4) можно заменить разложением в сходящийся ряд

$$\begin{aligned} \varphi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \varphi\left(k - \frac{1}{2}\right) &= \\ &= \varphi'(k) + \frac{1}{2^2 3!} \varphi'''(k) + \frac{1}{2^4 5!} \varphi^{(5)}(k) + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Формула (3.12) справедлива, в частности, если функция  $\varphi(x)$  допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость, причем это продолжение является аналитической функцией в круге с центром точке  $x = k$  и радиусом, большим  $1/2$ . Полагая, что  $\varphi(x)$  аналитична в полуплоскости  $\operatorname{Re} x > m$ , запишем соотношение (3.12) для  $k = m + 1, m + 2, \dots, n$  и просуммируем полученные формулы. Получим

$$\begin{aligned} \varphi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varphi\left(m + \frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=m+1}^n \varphi'(k) + \frac{1}{2^2 3!} \sum_{k=m+1}^n \varphi'''(k) + \\ &+ \frac{1}{2^4 5!} \sum_{k=m+1}^n \varphi^{(5)}(k) + \frac{1}{2^6 7!} \sum_{k=m+1}^n \varphi^{(7)}(k) + \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

Аналогичные формулы можно выписать для разностей четных производных  $\varphi(x)$ ,

$$\begin{aligned}\varphi''\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varphi''\left(m + \frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=m+1}^n \varphi'''(k) + \frac{1}{2^2 3!} \sum_{k=m+1}^n \varphi^{(5)}(k) + \\ &+ \frac{1}{2^4 5!} \sum_{k=m+1}^n \varphi^{(7)}(k) + \frac{1}{2^6 7!} \sum_{k=m+1}^n \varphi^{(9)}(k) + \dots, \quad (3.14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(4)}\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varphi^{(4)}\left(m + \frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=m+1}^n \varphi^{(5)}(k) + \frac{1}{2^2 3!} \sum_{k=m+1}^n \varphi^{(7)}(k) + \\ &+ \frac{1}{2^4 5!} \sum_{k=m+1}^n \varphi^{(9)}(k) + \frac{1}{2^6 7!} \sum_{k=m+1}^n \varphi^{(11)}(k) + \dots, \quad (3.15)\end{aligned}$$

и так далее. Введем обозначения

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \varphi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varphi\left(m + \frac{1}{2}\right); \\ \Delta_{2i} &= \varphi^{(2i)}\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varphi^{(2i)}\left(m + \frac{1}{2}\right), \quad i = 1, 2, \dots; \\ A_{2j-1} &= \sum_{k=m+1}^n \varphi^{(2j-1)}(k), \quad j = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

В силу формул (3.13)-(3.15) величины  $\Delta_{2i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , и  $A_{2j-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= A_1 + \frac{1}{2^2 3!} A_3 + \frac{1}{2^4 5!} A_5 + \dots, \\ \Delta_2 &= A_3 + \frac{1}{2^4 5!} A_5 + \dots, \\ \Delta_4 &= A_5 + \dots, \\ &\dots\end{aligned}$$

Наша задача - выразить  $A_1$  через  $\Delta_0, \Delta_2, \Delta_4, \dots$ . В силу линейности задачи, можно считать, что

$$A_1 = \alpha_0 \Delta_0 + \alpha_2 \Delta_2 + \alpha_4 \Delta_4 + \dots, \quad (3.16)$$

где коэффициенты  $\alpha_{2i}, i = 1, 2, \dots$ , подлежат определению. Подставляя в (3.16) выражения для  $\Delta_{2i}$ , имеем

$$\begin{aligned} A_1 = & \alpha_0 \left( A_1 + \frac{1}{2^2 3!} A_3 + \frac{1}{2^4 5!} A_5 + \dots \right) + \\ & + \alpha_2 \left( A_3 + \frac{1}{2^4 5!} A_5 + \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

Из последней формулы заключаем, что  $\alpha_0 = 1$ , а  $\alpha_{2i}, i = 1, 2, \dots$ , удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2 3!} + \alpha_2 &= 0, \\ \frac{1}{2^4 5!} + \frac{1}{2^2 3!} \alpha_2 + \alpha_4 &= 0, \\ \frac{1}{2^6 7!} + \frac{1}{2^4 5!} \alpha_2 + \frac{1}{2^2 3!} \alpha_4 + \alpha_6 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Для того, чтобы найти коэффициенты  $\alpha_{2i}$  в явном виде используем следующий прием. Определим функции  $V(u)$  и  $W(u)$  рядами Маклорена

$$V(u) = 1 + \alpha_2 u^2 + \alpha_4 u^4 + \alpha_6 u^6 + \dots, \quad (3.17)$$

$$W(u) = 1 + \frac{1}{2^2 3!} u^2 + \frac{1}{2^4 5!} u^4 + \frac{1}{2^6 7!} u^6 + \dots = \frac{2}{u} \operatorname{sh} \frac{u}{2}. \quad (3.18)$$

Рассмотрим ряд Маклорена для произведения функций  $V(u)W(u)$ . Перемножая разложения (3.17) и (3.18) и учитывая соотношения между коэффициентами  $\alpha_{2i}$ , получаем, что  $V(u)W(u) = 1$ , или

$$V(u) = \frac{u}{2 \operatorname{sh}(u/2)}. \quad (3.19)$$

Это означает, что коэффициенты  $\alpha_{2i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , являются коэффициентами разложения в ряд Маклорена функции (3.19). Покажем, что эти коэффициенты можно выразить через *числа Бернулли*,  $B_p$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$ . Эти часто встречающиеся в различных задачах константы удобно определить через коэффициенты следующего разложения в ряд Маклорена,

$$\frac{u}{e^u - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!}u + \frac{B_2}{2!}u^2 + \frac{B_3}{3!}u^3 + \dots$$

Известно, что  $B_1 = -1/2$ , а все прочие числа Бернулли с нечетными номерами, кроме  $B_1$ , равны нулю. Значения первых четырех чисел Бернулли с четными номерами равны

$$B_0 = 1; \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42} \dots$$

Для того, чтобы выразить  $\alpha_{2i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , через числа Бернулли, заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{u}{2 \operatorname{sh}(u/2)} &= 2 \cdot \frac{u/2}{e^{u/2} - 1} - \frac{u}{e^u - 1} = \\ &= 2 \cdot \left( B_0 + \frac{B_1}{1!} \cdot \left(\frac{u}{2}\right) + \frac{B_2}{2!} \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{B_3}{3!} \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^3 + \dots \right) - \\ &- \left( B_0 + \frac{B_1}{1!}u + \frac{B_2}{2!}u^2 + \frac{B_3}{3!}u^3 + \dots \right) = B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2^{1-2i} - 1)B_{2i}}{(2i)!} u^{2i}, \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha_{2i} = \frac{(2^{1-2i} - 1)B_{2i}}{(2i)!}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Вспоминая явные формулы для  $\Delta_{2i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , окончательно получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^n \varphi'(k) &= \varphi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varphi\left(m + \frac{1}{2}\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{2i}(2^{1-2i} - 1)}{(2i)!} \left( \varphi^{(2i)}\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varphi^{(2i)}\left(m + \frac{1}{2}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$



Формула (3.20) является одним из вариантов *формулы Эйлера-Маклорена*. Если функция  $\varphi(x)$  является аналитической функцией в полуплоскости  $\operatorname{Re} x > t$ , то ряд в правой части (3.20) абсолютно сходится. Формула (3.20), очевидно, обобщает формулу (3.9). Действительно, несложно проверить, что первые два коэффициента полученного ряда совпадают с коэффициентами в правой части (3.9).

Прокомментируем полученный результат следующим образом.

1. Если функция  $\varphi(x)$  не является аналитической, а имеет лишь конечное число производных  $N$ , ряд в формуле (3.20) должен быть заменен конечной суммой,

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^n \varphi'(k) &= \varphi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varphi\left(m + \frac{1}{2}\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} \frac{B_{2i}(2^{1-2i} - 1)}{(2i)!} \left( \varphi^{(2i)}\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varphi^{(2i)}\left(m + \frac{1}{2}\right) \right) + r_N. \end{aligned}$$

Остаток  $r_N$  оценивается через значения  $\varphi^{(N)}(x)$  при помощи формулы Лагранжа, аналогично тому, как оценивались остатки  $R_k$  в формуле (3.9).

2. В различных источниках можно найти различные версии формулы Эйлера-Маклорена. Другая версия этой формулы справедлива для аналитических в полуплоскости  $\operatorname{Re} x > t$  функций  $\varphi(x)$  и имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^n \varphi'(k) &= \varphi(n) - \varphi(m) + \frac{1}{2} (\varphi'(n) - \varphi'(m)) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{2i}}{(2i)!} \left( \varphi^{(2i)}(n) - \varphi^{(2i)}(m) \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Вывод этой формулы аналогичен выводу формулы (3.20). Доступное изложение доказательства этой формулы можно найти в замечательной книге [13], раздел II.10.

3. Для применения формулы Эйлера-Маклорена нужно, чтобы высшие производные функции  $\varphi(x)$  были достаточно малы. Так как

это, как правило, имеет место при больших значениях  $x$ , зачастую имеет смысл выделить первые несколько членов ряда и посчитать их сумму отдельно, аналогично тому, как это было сделано выше, в примере с гармоническим рядом.

### Задачи к главе 3

**3.1.** Найдите формулы для сумм

$$(a) \sum_{k=1}^n k^2, \quad (b) \sum_{k=1}^n k^3 \quad (c) \sum_{k=1}^n k^5.$$

**3.2.** Найдите первые два члена асимптотики частичных сумм

$$(a) \sum_{k=1}^n \sqrt{k}, \quad (b) \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}, \quad (c) \sum_{k=2}^n k \ln k.$$

**3.3.** Найдите значения сумм

$$\begin{aligned} (a) \sum_{k=2}^N \frac{1}{k \ln k}, \quad (b) \sum_{k=2}^N \frac{1}{k \sqrt{\ln k}}, \quad (c) \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}, \\ (d) \sum_{k=2}^N \frac{\ln k}{k}, \quad (e) \sum_{k=1}^N \frac{k}{k^2 + 1}, \quad (f) \sum_{k=1}^N \frac{k^3}{k^4 + 1}, \\ (g) \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{k^3 + 1}, \quad (h) \sum_{k=1}^N \frac{1}{3k + 1}, \quad (i) \sum_{k=1}^N \frac{\ln(2k + 1)}{2k + 1}. \end{aligned}$$

при  $N = 10^{100}$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

**3.4.** Вычислите с точностью до  $10^{-6}$

$$\begin{aligned}
 (a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k^2+1)}, \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} \\
 (d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^2}, \quad (e) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}, \quad (f) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}, \\
 (g) \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k^2}, \quad (h) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4+1}, \quad (i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^3}, \\
 (j) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}, \quad (k) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}, \quad (l) \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k \ln k}.
 \end{aligned}$$

**3.5.** Используя компьютер для численного интегрирования, вычислите с точностью до  $10^{-6}$  сумму ряда<sup>1</sup>

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}.$$

**3.6.** *Спираль Феодора* строится следующим образом. Берется равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными 1. Используя его в качестве начального, строится последовательность примыкающих друг к другу прямоугольных треугольников таким образом, что (i) гипотенуза каждого предыдущего прямоугольного треугольника является катетом следующего прямоугольного треугольника; (ii) второй катет каждого из этих треугольников равен 1; (iii) все треугольники имеют общую вершину. В результате получается ломаная *спираль*, обходящая вокруг общей вершины.

<sup>1</sup> Нетрудно убедиться, что ряд сходится по признаку Лейбница, хотя чрезвычайно медленно. На примере этого ряда автор протестировал (июнь 2016 года) популярный ресурс WolframAlpha и получил следующие интересные результаты. Рассматривались частичные суммы  $\sum_{k=3}^N \frac{(-1)^k}{\ln k}$ . При  $N = \infty$  WolframAlpha выдает ответ  $-0.518395$  в котором все цифры верны. Однако при  $N = 10^{14}$  и  $N = 10^{16}$  та же программа выдает комплексные значения суммы,  $-0.502873 - i 0.452264 \cdot 10^{-4}$  и  $-0.605156 + i 0.154748$ , соответственно.

Какое число оборотов вокруг общей вершины сделает спираль, состоящая из миллиарда треугольников?

**3.7.** Найдите главные члены асимптотики

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4 + x^4}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + x^2)^2}.$$

при  $x \rightarrow \infty$ .

**3.8.** Исследуйте ряд

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}.$$

(а) Найдите два главных члена асимптотики при  $x \rightarrow \infty$ ;

(б) Получите точное значение суммы  $S(x) = \frac{1}{2x} + \frac{\pi}{2x} \operatorname{cth} \pi x$ , вычислив интеграл

$$\int_{L_+ \cup L_-} \frac{e^{i\pi\xi} d\xi}{(\xi^2 + x^2) \sin \pi\xi},$$

где  $L_+$  и  $L_-$  - прямые, параллельные действительной оси, лежащие в верхней и нижней полуплоскости соответственно, и отстоящие от нее на расстояние  $d < |x|$ .

**3.9.** Выведите «альтернативную» формулу Стирлинга для вычисления  $n!$  для больших значений  $n$ .

(а) Используя формулу (3.9), покажите, что

$$\sum_{k=1}^n \ln k = \ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\ln \left(n + \frac{1}{2}\right) - 1\right) + \mathbf{A} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

(б) Найдите константу  $\mathbf{A}$ , сравнив полученную асимптотическую формулу с формулой Стирлинга  $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

(в) Покажите, что

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \left(\frac{n+1/2}{e}\right)^{n+1/2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.22)$$

(г) Используя компьютер, убедитесь, что формула (3.22) дает значение  $n!$  с точностью 0.4% уже для  $n = 10$ , более точно, чем «обычная» формула Стирлинга.

(д) Учитывая следующий член в разложении (3.9), уточните формулу (3.22).

## Глава 4

### Метод Лапласа

Метод Лапласа традиционно используется для нахождения асимптотического поведения интегралов вида

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{\lambda h(t)} dt, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

Такие интегралы иногда называют *интегралами Лапласа*. Они часто встречаются в приложениях, поэтому асимптотические оценки таких интегралов являются для физиков и инженеров важным «рабочим инструментом».

Основная идея метода Лапласа заключается в том, что *наиболее существенный вклад в интеграл (4.1) вносит окрестность точки, в которой функция  $h(t)$  достигает наибольшего значения*. Это утверждение носит название *принципа локализации*. Поясним действие этого принципа следующими примерами.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_0^1 e^{\lambda(1-t)} dt.$$

( $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\varphi(t) \equiv 1$  и  $h(t) = 1 - t$  (см. Рис.4.1)). Наибольшее значение функция  $h(t)$  принимает на краю интервала, в точке  $t = 0$ . Простые выкладки показывают, что при любом  $0 < \delta < 1$  интеграл по промежутку  $(0; \delta)$  равен

$$\int_0^\delta e^{\lambda(1-t)} dt = \frac{1}{\lambda} (e^\lambda - e^{(1-\delta)\lambda}) \sim \frac{1}{\lambda} e^\lambda, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

в то время, как интеграл по остальной части промежутка  $(\delta; 1)$  равен

$$\int_\delta^1 e^{\lambda(1-t)} dt = \frac{1}{\lambda} (e^{(1-\delta)\lambda} - 1) \sim \frac{1}{\lambda} e^{(1-\delta)\lambda}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

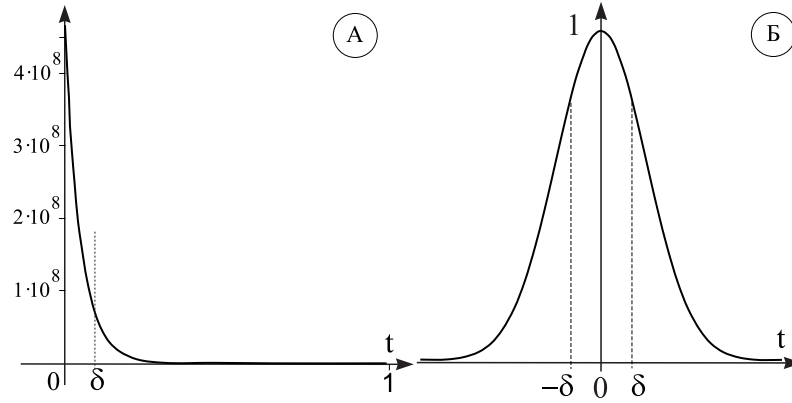


Рис. 4.1: А: Подынтегральная функция  $e^{\lambda h(t)}$ ,  $\lambda = 20$  в примере 4.1; Б: подынтегральная функция в примере 4.2

Таким образом, при достаточно больших значениях  $\lambda$  вклад окрестности  $0 < t < \delta$  в интеграл  $F(\lambda)$  будет доминирующим, больше вклада остальной части в  $\asymp e^{\delta\lambda}$  раз. Соответственно, если выбрать  $\delta \asymp \lambda^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , то при  $\lambda \rightarrow \infty$  вклад промежутка  $(\delta; 1)$  в сравнении с  $F(\lambda)$  будет экспоненциально малым.

ПРИМЕР 4.2. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda t^2}{2}} dt,$$

( $a = -\infty$ ,  $b = \infty$ ,  $\varphi(t) \equiv 1$  и  $h(t) = -t^2/2$ ). Из стандартного курса математического анализа известно, что

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}.$$

Наибольшее значение подынтегральное выражение принимает при  $t = 0$ . Разобьем область интегрирования на три части, выделив

окрестность точки максимума

$$F(\lambda) = I_1(\lambda) + I_2^-(\lambda) + I_2^+(\lambda),$$

$$I_1(\lambda) = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{\lambda t^2}{2}} dt; \quad I_2^-(\lambda) = \int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\frac{\lambda t^2}{2}} dt; \quad I_2^+(\lambda) = \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{\lambda t^2}{2}} dt.$$

Учитывая, что  $I_2^-(\lambda) = I_2^+(\lambda)$ , обозначим  $I_2(\lambda) = 2I_2^+(\lambda)$ , при этом

$$F(\lambda) = I_1(\lambda) + I_2(\lambda).$$

Оценим  $I_2(\lambda)$ . Очевидно,  $I_2(\lambda) > 0$ . Для оценки  $I_2(\lambda)$  сверху сделаем замену  $\xi = \sqrt{\lambda}t$ ,

$$I_2(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_{\sqrt{\lambda}\delta}^{\infty} e^{-\xi^2/2} d\xi \leq \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_{\sqrt{\lambda}\delta}^{\infty} \left( \frac{\xi}{\sqrt{\lambda}\delta} \right) e^{-\xi^2/2} d\xi = \frac{2}{\lambda\delta} e^{-\frac{\lambda\delta^2}{2}}.$$

Из полученных выше неравенств имеем, что<sup>1</sup>,

- при  $\delta = 0.2$  и  $\lambda = 100$  справедлива оценка  $0 < I_2(100) < 0.0136$  при  $F(100) \approx 0.2507$ . Соответственно, вклад  $I_2(\lambda)$  в  $F(\lambda)$  составляет около 5%;
- При  $\delta = 0.2$  и  $\lambda = 500$  имеем  $0 < I_2(500) < 10^{-6}$  и  $F(500) \approx 0.112$ , таким образом, относительная «доля»  $I_2(\lambda)$  в  $F(\lambda)$  в этом случае составляет  $\approx 10^{-5}$ .

Стоит также заметить, что если выбирать  $\delta \asymp \lambda^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1/2$ , то при  $\lambda \rightarrow \infty$  вклад промежутков  $(-\infty; -\delta)$  и  $(\delta; \infty)$  в  $F(\lambda)$  будет экспоненциально малой функцией  $\lambda$ .

---

<sup>1</sup> Функцию  $e^{-\frac{\lambda t^2}{2}}$  можно интерпретировать как плотность случайной величины, распределенной по нормальному закону с нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma = 1/\sqrt{\lambda}$ . Описанный выше принцип локализации хорошо согласуется с известным «правилом трех сигм», согласно которому вероятность выпадения значений, больших  $3\sigma$  и меньших  $-3\sigma$  можно считать исчезающе малой.



#### 4.1 Метод Лапласа: наибольшее значение $h(t)$ достигается в конечной точке промежутка

Во всех рассуждениях данного параграфа мы будем предполагать, что функции  $\varphi(t)$  и  $h(t)$  являются бесконечно дифференцируемыми, причем  $\varphi(t)$  может быть как действительной, так и комплекснозначной функцией, в то время как  $h(t)$  является действительной функцией.

Рассмотрим ситуацию, когда наибольшее значение функции  $h(t)$  достигается в граничной точке промежутка  $[a; b]$ . Для определенности, пусть это точка  $a$ , причем

- (а)  $h'(a) < 0$ ;
- (б) значение  $h(a)$  достигается функцией  $h(t)$  на промежутке  $[a; b]$  только в точке  $a$ .

Условия (а) и (б) относятся к так называемым *условиям общего положения*, то есть они сохраняются при малых возмущениях функции  $h(t)$ .

Разобьем интеграл (4.1) на два интеграла,  $F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$ , выделив окрестность точки  $a$ ,

$$F_1(\lambda) = \int_a^{a+\delta} \varphi(t) e^{\lambda h(t)} dt, \quad F_2(\lambda) = \int_{a+\delta}^b \varphi(t) e^{\lambda h(t)} dt,$$

и выберем  $\delta$  достаточно малым — а именно, таким, чтобы условие  $h'(t) < 0$  выполнялось во всей окрестности  $[a; a + \delta]$ . При достаточно малом  $\delta$  также можно утверждать, что существует  $\gamma > 0$ , такое, что на отрезке  $[a + \delta, b]$  выполняется неравенство  $h(t) < h(a) - \gamma$ . Так как  $\varphi(t)$  ограничена на  $[a, b]$ , справедлива оценка

$$|F_2(\lambda)| \leq M e^{\lambda h(a)} \cdot e^{-\gamma \lambda}, \quad (4.2)$$

где  $M$  — некоторая постоянная. Оценим интеграл  $F_1(\lambda)$ . Проинтегри-

руем  $F_1(\lambda)$  по частям

$$\begin{aligned}
F_1(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} \int_a^{a+\delta} \frac{\varphi(t)}{h'(t)} de^{\lambda h(t)} = \\
&= \frac{1}{\lambda} \frac{\varphi(t)}{h'(t)} e^{\lambda h(t)} \Big|_a^{a+\delta} - \frac{1}{\lambda} \int_a^{a+\delta} \frac{d}{dt} \left( \frac{\varphi(t)}{h'(t)} \right) e^{\lambda h(t)} dt = \\
&= -\frac{1}{\lambda} \frac{\varphi(a)}{h'(a)} e^{\lambda h(a)} + \frac{1}{\lambda} \frac{\varphi(a+\delta)}{h'(a+\delta)} e^{\lambda h(a+\delta)} + \frac{1}{\lambda^2} \int_a^{a+\delta} \frac{\varphi_1(t)}{h'(t)} de^{\lambda h(t)},
\end{aligned}$$

где

$$\varphi_1(t) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\varphi(t)}{h'(t)} \right).$$

Заметим, что

$$\left| \frac{1}{\lambda} \frac{\varphi(a+\delta)}{h'(a+\delta)} e^{\lambda h(a+\delta)} \right| \leq \frac{M_1}{\lambda} e^{\lambda h(a)} \cdot e^{-\gamma \lambda}, \quad (4.3)$$

$$\left| \frac{1}{\lambda^2} \int_a^{a+\delta} \frac{\varphi_1(t)}{h'(t)} de^{\lambda h(t)} \right| \leq \frac{M_2}{\lambda^2} e^{\lambda h(a)}, \quad (4.4)$$

где  $M_1$  и  $M_2$  - константы, зависящие от  $\varphi(t)$  и  $h(t)$  и не зависящие от  $\lambda$ . Таким образом

$$F(\lambda) = e^{\lambda h(a)} \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\varphi(a)}{h'(a)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

Неравенства (4.3) и (4.4) можно использовать для оценки точности приближения (4.5).

Продолжим интегрирование по частям:

$$\begin{aligned}
F_1(\lambda) &= -e^{\lambda h(a)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda^k} \frac{\varphi_{k-1}(a)}{h'(a)} + \\
&+ \frac{1}{\lambda^n} \int_a^{a+\delta} \varphi_n(t) e^{\lambda h(t)} dt + O\left(e^{\lambda h(a)}\right) \cdot e^{-\gamma \lambda},
\end{aligned}$$

где

$$\varphi_0(t) = \varphi(t), \quad \varphi_{k+1}(t) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\varphi_k(t)}{h'(t)} \right), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.6)$$

Для остаточного члена справедлива оценка

$$\frac{1}{\lambda^n} \int_a^{a+\delta} \varphi_n(t) e^{\lambda h(t)} dt = O \left( \frac{e^{\lambda h(a)}}{\lambda^{n+1}} \right).$$

Окончательно, для интеграла  $F(\lambda)$  имеем асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \stackrel{\text{as}}{=} -\frac{e^{\lambda h(a)}}{h'(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \varphi_{k-1}(a), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (4.7)$$

причем  $\varphi_k(t)$  определены рекуррентно формулами (4.6). Главный член разложения при этом представлен формулой (4.5).

#### 4.2 Метод Лапласа: наибольшее значение $h(t)$ достигается во внутренней точке

Пусть теперь

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{\lambda h(t)} dt,$$

и  $h(t)$  достигает своего наибольшего значения в некоторой внутренней точке  $t = c$  промежутка  $[a; b]$ . Мы предположим, что  $\varphi(t)$  и  $h(t)$  являются не только бесконечно дифференцируемыми функциями на  $(a; b)$ , но и обладают еще некоторым замечательным свойством.

**Определение.** Функция  $f(t)$  является *действительной аналитической функцией* (или аналитической функцией действительного переменного) на интервале  $(a; b)$ , если она (а) имеет в каждой точке этого интервала производные всех порядков и (б) ее ряд Тейлора, построенный в произвольной точке  $t_0 \in (a; b)$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(t_0) (t - t_0)^n,$$

сходится к  $f(t)$  в некоторой окрестности точки  $t_0$ .

Действительные аналитические функции можно рассматривать как сужения традиционных (комплексных) аналитических функций на интервал действительной оси. Так как все коэффициенты ряда Тейлора являются действительными, такие функции принимают только действительные значения. Линейная комбинация, произведение и суперпозиция действительных аналитических функций являются действительными аналитическими функциями. Например, функции  $e^t$ ,  $\sin t$ ,  $\cos t$  являются действительными аналитическими функциями на всей числовой прямой. Заметим, однако, что существования производных любого порядка в некоторой точке недостаточно для того, чтобы функция в окрестности этой точки была действительной аналитической. Классическим контрпримером является функция  $f(t) = e^{-1/t^2}$ : производные всех порядков этой функции в точке  $t = 0$  существуют и равны нулю, что означает равенство нулю всех коэффициентов ряда Тейлора. В то же время эта функция не является тождественным нулем.

Так как  $t = c$  - точка максимума, то  $h'(c) = 0$  и  $h''(c) \leq 0$ . Кроме того, предположим, что

- (а)  $h''(c) < 0$ ;
- (б) точка  $t = c$  является *единственной* точкой, в которой достигается наибольшее значение функции  $h(t)$  на промежутке  $[a; b]$ ;
- (в) функции  $\varphi(t)$  и  $h(t)$  являются действительными аналитическими функциями в некоторой окрестности точки  $t = c$ .

Вывод основной асимптотической формулы представим в виде следующей последовательности шагов.

*Шаг 1.* Покажем, что асимптотика интеграла  $F(\lambda)$  определяется малой окрестностью точки  $t = c$ . Представим интеграл  $F(\lambda)$  в виде суммы трех интегралов  $F_1(\lambda)$ ,  $F_2(\lambda)$ ,  $F_3(\lambda)$ , выделив окрестность точки максимума  $(c - \delta; c + \delta)$

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda),$$

$$F_1(\lambda) = \int_a^{c-\delta} \varphi(t) e^{\lambda h(t)} dt, \quad F_2(\lambda) = \int_{c-\delta}^{c+\delta} \varphi(t) e^{\lambda h(t)} dt,$$

$$F_3(\lambda) = \int_{c+\delta}^b \varphi(t) e^{\lambda h(t)} dt.$$

Будем при этом полагать, что  $\delta > 0$  зависит от параметра  $\lambda$  следующим образом

$$\delta \equiv \delta_\lambda = d\lambda^{-2/5}, \quad (4.8)$$

где  $d > 0$  - некоторое число. Происхождение степени  $2/5$  станет понятно из рассуждений ниже<sup>1</sup>.

Рассмотрим функцию  $h(t)$  на промежутке  $(c-\delta; c+\delta)$ . Из теоремы Лагранжа следует, что существуют  $d_\pm$ ,  $0 < d_+ < d$ ,  $-d < d_- < 0$ , такие, что

$$h(c \pm \delta) = h(c) + \frac{h''(c)}{2} (d\lambda^{-2/5})^2 + \frac{h'''(c)}{6} (d_\pm \lambda^{-2/5})^3. \quad (4.9)$$

Для достаточно больших значений  $\lambda$  окрестность  $(c-\delta; c+\delta)$  мала, причем  $h(t) < h(c+\delta)$  при  $t \in (c+\delta; b)$ , и  $h(t) < h(c-\delta)$  при  $t \in (a; c-\delta)$ . Из равенства (4.9) при этом следует, что на промежутках  $t \in [a; c-\delta]$  и  $t \in [c+\delta; b]$  выполняется соотношение

$$h(c) - h(t) > \gamma \lambda^{-4/5},$$

где  $\gamma > 0$  - число, не зависящее от  $\lambda$ . Тогда для интегралов  $F_1(\lambda)$  и  $F_3(\lambda)$  имеем следующую оценку

$$\begin{aligned} |F_1(\lambda)| + |F_3(\lambda)| &= \\ &= e^{\lambda h(c)} \left( \left| \int_a^{c-\delta} \varphi(t) e^{\lambda(h(t)-h(c))} dt \right| + \left| \int_{c+\delta}^b \varphi(t) e^{\lambda(h(t)-h(c))} dt \right| \right) \leq \\ &\leq M_1 e^{\lambda h(c)} \cdot e^{-\gamma \lambda^{1/5}} = o\left(e^{\lambda h(c)} \lambda^{-m}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (4.10) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Для дальнейшего важно то, что  $1/3 < 2/5 < 1/2$ .

где

$$M_1 = \max_{[a;b]} |\varphi(t)|(b-a),$$

и  $m > 0$  любое число. Ниже будет показано, что вклад интеграла  $F_2(\lambda)$  в общую сумму имеет меньший порядок, поэтому мы исключим из дальнейшего рассмотрения интегралы  $F_1(\lambda)$  и  $F_3(\lambda)$ .

*Шаг 2.* Сделаем в интеграле  $F_2(\lambda)$  замену  $t = x + c$  и рассмотрим функцию  $G(\lambda) \equiv e^{-\lambda h(c)} F_2(\lambda)$ . Эта функция представляется в виде

$$G(\lambda) = \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(x+c) e^{\lambda(h(x+c)-h(c))} dx.$$

Выделим у показателя экспоненты в интеграле главный порядок

$$\lambda(h(x+c) - h(c)) = \frac{\lambda h''(c)}{2} x^2 + \lambda r(x),$$

$$r(x) = \sum_{m=3}^{\infty} a_m x^m, \quad a_m = \frac{1}{m!} h^{(m)}(c), \quad m = 3, 4, \dots$$

Введем обозначение

$$h''(c) = -\mu^2.$$

Функция  $G(\lambda)$  принимает вид

$$G(\lambda) = \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(x+c) e^{\lambda(h(x+c)-h(c))} dx = \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(x+c) e^{\lambda r(x)} e^{-\lambda \mu^2 x^2/2} dx.$$

Обозначим

$$\Phi(\lambda, x) = \varphi(x+c) e^{\lambda r(x)}.$$

Таким образом

$$F_2(\lambda) = e^{\lambda h(c)} G(\lambda) = e^{\lambda h(c)} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi(\lambda, x) e^{-\lambda \mu^2 x^2/2} dx.$$

Рассмотрим функцию  $\Phi(\lambda, x)$  более детально. Напомним, что функции  $\varphi(x+c)$  и  $r(x)$  являются действительными аналитическими функциями в окрестности точки  $x = 0$  и могут быть представлены в виде рядов Тейлора в некоторой окрестности этой точки. Так как  $\delta = d\lambda^{-2/5}$ , можно считать  $\delta$  настолько малым, что ряды Тейлора этих функций сходятся к самим функциям при  $|x| < \delta$ . Функцию  $\Phi(\lambda, x)$  также можно разложить в ряд по степеням  $x$ . Это разложение можно получить, формально перемножив ряды для  $\varphi(x+c)$  и  $e^{\lambda r(x)}$ . Имеем

$$\varphi(x+c) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m x^m, \quad (4.11)$$

$$\alpha_0 = \varphi(c), \quad \alpha_m = \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(c), \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$e^{\lambda r(x)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda r(x))^l}{l!} = 1 + \lambda \sum_{m=3}^{\infty} a_m x^m + \frac{\lambda^2}{2} \left( \sum_{m=3}^{\infty} a_m x^m \right)^2 + \dots \quad (4.12)$$

Разложение (4.11) справедливо при  $|x| < \delta$ , а разложение (4.12) — при  $|x| < \delta$  и любом  $\lambda$  (в силу того, что ряд для экспоненты сходится при любых значениях аргумента). Результатом перемножения рядов будет ряд

$$\Phi(\lambda, x) = \varphi(x+c)e^{\lambda r(x)} = \sum_{0 \leq 3k \leq j < \infty} \beta_{k,j} \lambda^k x^j. \quad (4.13)$$

Выделим в этом ряде частичную сумму и остаток

$$\Phi(\lambda, x) = \sum_{0 \leq 3k \leq j \leq 3n} \beta_{k,j} \lambda^k x^j + \Psi_n(\lambda, x). \quad (4.14)$$

Младшие члены разложения нетрудно найти непосредственно,

$$\begin{aligned} \beta_{0,0} &= \alpha_0 = \varphi(c), \quad \beta_{0,j} = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, \\ \beta_{1,3} &= \alpha_0 a_3 = \frac{1}{6} \varphi(c) h'''(c), \quad \beta_{1,j} = \sum_{j_1+j_2=j} \alpha_{j_1} a_{j_2}, \quad j = 4, 5, \dots \end{aligned}$$

Для вычисления членов, соответствующих более высоким степеням разложения, на практике удобно использовать какую-нибудь компьютерную программу аналитических вычислений.

Подставляя (4.14) в интегральное представление для  $G(\lambda)$ , получаем

$$\begin{aligned}
G(\lambda) &= \int_{-\delta}^{\delta} \left( \sum_{0 \leq 3k \leq j \leq 3n} \beta_{k,j} \lambda^k x^j + \Psi_n(\lambda, x) \right) e^{-\lambda \mu^2 x^2/2} dx = \\
&= \sum_{0 \leq 3k \leq j \leq 3n} \beta_{k,j} \lambda^k \int_{-\delta}^{\delta} x^j e^{-\lambda \mu^2 x^2/2} dx + \int_{-\delta}^{\delta} \Psi_n(\lambda, x) e^{-\lambda \mu^2 x^2/2} dx = \\
&= \sum_{0 \leq 3k \leq j \leq 3n} \beta_{k,j} \lambda^k \int_{-\delta}^{\delta} x^j e^{-\lambda \mu^2 x^2/2} dx + \Theta_n(\lambda) \equiv \Sigma_n(\lambda) + \Theta_n(\lambda), \quad (4.15)
\end{aligned}$$

где мы обозначили  $\Theta_n(\lambda)$  слагаемое, возникающее при интегрировании остаточного члена  $\Psi_n(\lambda, x)$ .

*Шаг 3.* Преобразуем интегралы, входящие в сумму  $\Sigma_n(\lambda)$ , при помощи замены  $x = \tau/\mu\sqrt{\lambda}$ .

$$\int_{-\delta}^{\delta} x^j e^{-\lambda \mu^2 x^2/2} dx = \frac{1}{\mu^{j+1} \lambda^{(j+1)/2}} \int_{-\delta\mu\sqrt{\lambda}}^{\delta\mu\sqrt{\lambda}} \tau^j e^{-\tau^2/2} d\tau.$$

Тогда

$$\Sigma_n(\lambda) = \sum_{0 \leq 3k \leq j \leq 3n} \frac{\beta_{k,j}}{\mu^{j+1} \lambda^{(j+1)/2-k}} \int_{-\delta\mu\sqrt{\lambda}}^{\delta\mu\sqrt{\lambda}} \tau^j e^{-\tau^2/2} d\tau.$$

Пары индексов  $j$  и  $k$  и соответствующие им степени  $\lambda$ , показаны на Рис.4.2. Пунктирной рамкой обведены пары, входящие в  $\Sigma_n(\lambda)$ .

Сформулируем два утверждения, которые докажем несколько позже.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	j
0	-1/2		-3/2		-5/2		-7/2		-9/2		-11/2		-13/2	
1					-3/2		-5/2		-7/2		-9/2	$\Psi_n^{(2)}$	-11/2	
2							-3/2		-5/2		-7/2		-9/2	
3											-5/2		-7/2	
4								$\Psi_n^{(1)}$					-5/2	

Рис. 4.2: Пары индексов  $j$  и  $k$  и соответствующие им степени  $\lambda$  в сумме  $G(\lambda)$ , ( $n = 2$ ). Пунктирной рамкой обведены пары, входящие в  $\Sigma_n(\lambda)$ . Вычеркнуты столбцы, соответствующие нечетным  $j$ , так как в этом случае  $A_j = 0$ . Кроме того, показаны области, соответствующие суммам  $\Psi_n^{(1)}(\lambda, x)$  и  $\Psi_n^{(2)}(\lambda, x)$ .

**Лемма 4.1.** В интегралах, входящих в  $\Sigma_n(\lambda)$ , при  $\lambda \rightarrow \infty$  можно заменить пределы интегрирования  $\pm \delta \mu \sqrt{\lambda}$  на  $\pm \infty$ , при этом их значение изменится на экспоненциально малую по  $\lambda$  величину.

**Лемма 4.2.** При сделанных предположениях относительно  $h(t)$  и  $\varphi(t)$  и при  $\lambda \rightarrow \infty$ , справедлива оценка  $\Theta_n(\lambda) = o(\lambda^{-(n+1)/2})$ .

Согласно этим утверждениям, приближением для  $G(\lambda)$  с точностью до членов  $\sim \lambda^{-(n+1)/2}$ , является сумма

$$\tilde{\Sigma}_n(\lambda) = \sum_{0 \leq 3k \leq j \leq 3n} \frac{\beta_{k,j} A_j}{\mu^{j+1} \lambda^{(j+1)/2 - k}},$$

где

$$A_j = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^j e^{-\tau^2/2} d\tau = \begin{cases} 0, & j = 2m + 1; \\ \frac{(2m)! \sqrt{2\pi}}{2^m m!}, & j = 2m, \end{cases} \quad (4.16)$$

и  $m > 0$ - целое. При нечетных значениях  $j$  формула (4.16) немедленно следует из нечетности подынтегральной функции. При четных значениях  $j$  в справедливости формулы (4.16) нетрудно убедиться, используя либо интегрирование по частям, либо сведение интеграла к гамма-функции Эйлера.

*Шаг 4.* Приведенное выше приближение для  $G(\lambda)$  неудобно тем, что в сумме  $\tilde{\Sigma}_n(\lambda)$  члены неупорядочены, причем имеются такие, которые имеют более высокий порядок, чем остаточный член, то есть, большие  $o(\lambda^{-(n+1)/2})$ . Прделаем следующие действия:

- перенумеруем слагаемые в этой сумме, упорядочив их по новому индексу  $L = j/2 - k$ . Этот индекс будет принимать только целые значения  $L = 0, 1, 2, \dots$ , что продиктовано тем, что коэффициенты  $A_j$  обращаются в нуль при нечетных  $j$ ;
- по той же причине будем считать  $n$  четным,  $n = 2N$ ,  $N > 0$  - целое;
- сохраним только те слагаемые, что имеют порядок меньший, чем  $O(\lambda^{-N-1})$ .

Тогда сумма принимает вид

$$\sum_{0 \leq 3k \leq j \leq 3n} \frac{A_j \beta_{k,j}}{\mu^{j+1}} \lambda^{k-(j+1)/2} = \sum_{L=0}^N C_L \lambda^{-L-1/2} + O(\lambda^{-N-1}),$$

где коэффициенты  $C_L$  представляются формулами

$$C_L = \sum_{k=0}^{2L} \frac{A_{2L+2k} \beta_{k,2L+2k}}{\mu^{2L+2k+1}} = \sum_{k=0}^{2L} \frac{\sqrt{2\pi} (2L+2k)! \beta_{k,2L+2k}}{2^{L+k} (L+k)! \mu^{2L+2k+1}}.$$

Окончательно, учитывая оценку (4.10), получаем следующее утверждение

**Теорема 4.1.** Пусть  $h(t)$  имеет единственную точку максимума  $t = c \in (a; b)$  и эта точка максимума является наибольшим значением  $h(t)$  на  $(a; b)$ , причем это значение  $h(t)$  принимает только в этой точке и  $h''(c) < 0$ . Пусть функции  $h(t)$  и  $\varphi(t)$  являются действительными аналитическими функциями в некоторой окрестности точки максимума  $t = c$ . Тогда асимптотика интеграла  $F(\lambda)$

при  $\lambda \rightarrow \infty$  определяется формулами

$$F(\lambda) = e^{\lambda h(c)} \left( \sum_{L=0}^N C_L \lambda^{-L-1/2} + o\left(\lambda^{-N-1/2}\right) \right), \quad (4.17)$$

$$C_L = \sum_{k=0}^{2L} \frac{\sqrt{2\pi} (2L+2k)! \beta_{k,2L+2k}}{2^{L+k} (L+k)! |h''(c)|^{L+k+1/2}},$$

где  $N > 0$  любое целое число, а  $\beta_{k,j}$  являются коэффициентами разложения функции

$$\Phi(\lambda, x) = \varphi(x+c) \exp \left\{ \lambda \left( h(x+c) - h(c) - \frac{1}{2} h''(c) x^2 \right) \right\} = \sum_{k,j} \beta_{k,j} \lambda^k x^j$$

в окрестности точки  $x = 0$ .

Самым «употребительным» следствием данной теоремы является оценка  $F(\lambda)$ , с использованием лишь главного члена разложения. Полагая  $N = 0$  и учитывая, что  $\beta_{0,0} = \varphi(c)$  имеем

$$F(\lambda) = e^{\lambda h(c)} \left( \frac{\varphi(c) \sqrt{2\pi}}{|h''(c)|^{1/2} \lambda^{1/2}} + o\left(\lambda^{-1/2}\right) \right). \quad (4.18)$$

Доказанную теорему можно прокомментировать следующим образом.

1. Окончательная формула (4.17) имеет несколько «неуклюжий» вид. Вместе с тем, приведенный вывод прост с логической точки зрения и является «руководством к действию» в более сложных и нестандартных случаях. В частности, в формуле (4.17) оказывается нетрудным учесть зависимость пределов интегрирования от  $\lambda$ . Также формула (4.17) легко обобщается на случай, когда максимум  $t = c$  функции  $h(t)$  вырожден,  $h''(c) = h'''(c) = \dots = h^{(m-1)}(c) = 0$ , и  $h^{(m)}(c) \neq 0$ ,  $m > 3$  (см. пример 4.7). Кроме того, безусловным достоинством формулы (4.17) является то, что коэффициенты  $\beta_{k,j}$  удобно находить при помощи компьютерных программ символьных вычислений, используя, например, команду *taylor* в Maple.

Существует, однако, более элегантная версия приведенного асимптотического разложения:

$$\int_a^b \varphi(t) e^{\lambda h(t)} dt \stackrel{\text{as}}{=} e^{\lambda h(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \frac{\psi^{(2k)}(0)}{2^k k!}, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

где

$$\psi(z) = \varphi(x(z) + c) \frac{dx}{dz}(z),$$

а  $x(z)$  - функция, неявно заданная как решение уравнения

$$h(c) - h(c + x(z)) = \frac{z^2}{2},$$

(нетрудно показать, что  $x(z)$  можно выбрать так, чтобы она была дифференцируема бесконечное число раз). Детали вывода этой формулы можно найти, например, в книге [1], гл. 3, параграфы 10-11.

2. Рис.4.2 показывает, что для нахождения асимптотики с относительной погрешностью  $O(\lambda^{-1/2})$  достаточно одного коэффициента  $\beta_{0,0}$ , что соответствует формуле (4.18). Для относительной погрешности  $O(\lambda^{-3/2})$  необходимо посчитать три коэффициента:  $\beta_{0,2}$ ,  $\beta_{1,4}$  и  $\beta_{2,6}$  и так далее.

3. Теорема доказана при условии, что  $h(t)$  и  $\varphi(t)$  являются действительными аналитическими функциями в окрестности точки  $t = c$  и бесконечно дифференцируемыми на интервале  $(a; b)$ . Вместе с тем формула (4.17) оказывается справедливой и при более слабых условиях, в том числе, при отказе от условия действительной аналитичности. Если же функции  $h(t)$  и  $\varphi(t)$  имеют на интервале  $(a; b)$  лишь конечное число производных, то формула (4.17) модифицируется в асимптотическое представление  $F(\lambda)$ , в котором  $N$  не может быть произвольным, а ограничено числом существующих производных.

4. Из принципа локализации следует, что если функция  $h(t)$  имеет не одну, а несколько точек максимума, причем значения в них

равны, асимптотика интеграла будет оцениваться суммой вкладов этих точек, посчитанных по формуле (4.17).

5. Доказательство остается верным также, если считать, что  $\varphi(t)$  и  $h(t)$  - комплекснозначные функции, при этом  $h(t)$  представима в окрестности точки  $t = c$  в виде

$$h(t) = h(c) - \frac{1}{2}\mu^2(t-c)^2 + \sum_{m=3}^{\infty} a_m(t-c)^m,$$

причем  $\mu \in \mathbb{R}$ .

6. Точная оценка остаточных членов в формуле (4.17) зачастую оказывается достаточно нетривиальным делом. Вместе с тем, в ряде случаев удается получить такую оценку, с помощью тех же рассуждений, что использовались для доказательства теоремы, см. пример 4.5.

### 4.3 Доказательство лемм 4.1 и 4.2

**Лемма 4.1.** При  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,  $\delta = d\lambda^{-2/5}$ ,  $m$ -целом и  $\mu > 0$  справедлива формула

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{2m} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau - \int_{-\delta\mu\sqrt{\lambda}}^{\delta\mu\sqrt{\lambda}} \tau^{2m} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \right| = o(\lambda^{-M}),$$

где  $M > 0$  - любое.

*Доказательство.* Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^{2m} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau - \int_{-d\mu\lambda^{1/10}}^{d\mu\lambda^{1/10}} \tau^{2m} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = 2 \int_{d\mu\lambda^{1/10}}^{\infty} \tau^{2m} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau.$$

При этом если  $\lambda$  достаточно велико, то при  $\tau > d\mu\lambda^{1/10}$  выполняется соотношение  $\tau^{2m} < \tau e^{\tau^2/4}$ . Соответственно

$$2 \int_{d\mu\lambda^{1/10}}^{\infty} \tau^{2m} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau < 2 \int_{d\mu\lambda^{1/10}}^{\infty} \tau e^{-\frac{\tau^2}{4}} d\tau = 4e^{-\frac{d^2\mu^2\lambda^{1/5}}{4}} = o(\lambda^{-P})$$

при любом  $P > 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$ . То есть, при любом  $P > 0$

$$\int_{-\delta\mu\sqrt{\lambda}}^{\delta\mu\sqrt{\lambda}} \tau^{2m} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{2m} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau + o(\lambda^{-P}), \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

что и требовалось доказать.  $\square$

**Лемма 4.2.** При  $\delta = d\lambda^{-2/5}$  и сделанных относительно  $h(t)$  и  $\varphi(t)$  предположениях, в формуле (4.15)

$$\Theta_n(\lambda) \equiv \int_{-\delta}^{\delta} \Psi_n(\lambda, x) e^{-\lambda\mu^2 x^2/2} dx = o(\lambda^{-(n+1)/2}), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

*Доказательство.* Разобьем  $\Psi_n(\lambda, x)$  на два слагаемых

$$\begin{aligned} \Psi_n(\lambda, x) &= \Psi_n^{(1)}(\lambda, x) + \Psi_n^{(2)}(\lambda, x) \\ \Psi_n^{(1)}(\lambda, x) &= \sum_{3(n+1) \leq 3k \leq j \leq \infty} \beta_{k,j} \lambda^k x^j; \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\Psi_n^{(2)}(\lambda, x) = \sum_{k=0}^n \lambda^k \sum_{j=3n+1}^{\infty} \beta_{k,j} x^j. \quad (4.20)$$

Обозначим

$$\Theta_n^{(1)}(\lambda) \equiv \int_{-\delta}^{\delta} \Psi_n^{(1)}(\lambda, x) e^{-\lambda\mu^2 x^2/2} dx, \quad \Theta_n^{(2)}(\lambda) \equiv \int_{-\delta}^{\delta} \Psi_n^{(2)}(\lambda, x) e^{-\lambda\mu^2 x^2/2} dx$$

(соответствующие  $\Psi_n^{(1)}(\lambda)$  и  $\Psi_n^{(2)}(\lambda)$  области значений  $j$  и  $k$  показаны на Рис.4.2).

Рассмотрим  $\Psi_n^{(2)}(\lambda, x)$ . Эта функция представлена суммой конечного числа слагаемых вида  $\lambda^k x^{3n+1} \psi_k(x)$ , причем  $\psi_k(x)$  - непрерывные функции  $x$  при  $|x| \leq \delta$ . Следовательно, при  $|x| \leq \delta$  каждая функция  $\psi_k(x)$  ограничена по модулю некоторой константой  $B_{k,n}$ .

Делая в интеграле от каждого такого слагаемого замену  $\tau = x\mu\sqrt{\lambda}$ , получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\delta}^{\delta} \lambda^k x^{3n+1} \psi_k(x) e^{-\lambda \mu^2 x^2/2} dx \right| \leq \\ & \leq \frac{B_{k,n} \lambda^{k-(3n+2)/2}}{\mu^{3n+2}} \int_{-\delta\mu\sqrt{\lambda}}^{\delta\mu\sqrt{\lambda}} |\tau|^{3n+1} e^{-\tau^2/2} d\tau \leq \\ & \leq \frac{B_{k,n} \lambda^{k-(3n+2)/2}}{\mu^{3n+2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{3n+1} e^{-\tau^2/2} d\tau = o\left(\lambda^{-(n+1)/2}\right). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\Theta_n^{(2)}(\lambda) = o\left(\lambda^{-(n+1)/2}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (4.21)$$

Рассмотрим теперь  $\Psi_n^{(1)}(\lambda, x)$ . Покажем, что при сделанных относительно  $h(t)$  и  $\varphi(t)$  предположениях и  $|x| < \delta$ , существует константа  $C_n$ , такая, что справедлива оценка

$$|\Psi_n^{(1)}(\lambda, x)| \leq C_n \lambda^{n+1} |x|^{3n+3} \quad (4.22)$$

Введем переменную  $\xi = \lambda x^3$ . Выражение (4.19) можно переписать в виде

$$\Psi_n^{(1)}(\lambda, x) = \Psi_n^{(1)}\left(\frac{\xi}{x^3}, x\right) = \xi^{n+1} \sum_{k=0, j=0}^{\infty} \beta_{k+n+1, j+3n+3} \xi^k x^j$$

В силу того, что  $\delta^3 \lambda = d^3 \lambda^{-1/5} \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , существует такое  $\Delta$ , что ряд в правой части последнего равенства сходится при  $\{|\xi| \leq \Delta, |x| \leq \delta\}$ , причем сумма этого ряда непрерывна (это следует из того, что непрерывна функция  $\Phi(\lambda, x) \equiv \varphi(x+c)e^{\lambda r(x)}$ ). Из последнего факта вытекает, что при  $\{|\xi| \leq \Delta, |x| \leq \delta\}$  сумма

$$\sum_{k=0, j=0}^{\infty} \beta_{k+n+1, j+3n+3} \xi^k x^j$$

ограничена по модулю некоторой константой  $C_n$ . Возвращаясь снова к переменной  $\lambda$ , получаем неравенство (4.22).

Используя неравенство (4.22), оценим  $\Theta_n^{(1)}(\lambda, x)$ . После замены  $\tau = x\mu\sqrt{\lambda}$  получаем

$$\begin{aligned} \left| \Theta_n^{(1)}(\lambda) \right| &= \left| \int_{-\delta}^{\delta} \Psi_n^{(1)}(\lambda, x) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{C_n}{\mu\sqrt{\lambda}} \int_{-\delta\mu\sqrt{\lambda}}^{\delta\mu\sqrt{\lambda}} \frac{\lambda^{n+1} |\tau|^{3n+3}}{\mu^{3n+3} \lambda^{(3n+3)/2}} e^{-\tau^2/2} d\tau \leq \\ &\leq \frac{C_n}{\mu^{3n+4} \lambda^{(n+2)/2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{3n+3} e^{-\tau^2/2} d\tau = o\left(\lambda^{-(n+1)/2}\right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Собирая вместе (4.21) и (4.23), получаем

$$\Theta_n(\lambda) \equiv \int_{-\delta}^{\delta} \Psi_n(\lambda, x) e^{-\lambda\mu^2 x^2/2} dx = o\left(\lambda^{-(n+1)/2}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

что и требовалось доказать.  $\square$

#### 4.4 Примеры применения метода Лапласа

**ПРИМЕР 4.3.** Исследуем асимптотику *преобразования Лапласа* от некоторой функции  $f(t)$ . Будем предполагать, что функция  $f(t)$  дифференцируема бесконечное число раз и является *оригиналом*, то есть существуют  $f_0$  и  $\varkappa$ , такие, что при  $t > 0$

$$|f(t)| \leq f_0 e^{\varkappa t}.$$

Преобразование Лапласа  $f(t)$  тогда определено при  $\lambda > \varkappa$  и имеет вид

$$\Lambda(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\lambda t} dt.$$



Разобьем последний интеграл на два

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-\lambda t} dt = \int_0^1 f(t)e^{-\lambda t} dt + \int_1^{\infty} f(t)e^{-\lambda t} dt.$$

Для второго интеграла справедлива оценка

$$\left| \int_1^{\infty} f(t)e^{-\lambda t} dt \right| \leq f_0 \int_1^{\infty} e^{-(\lambda-\varkappa)t} dt = O\left(\frac{e^{-(\lambda-\varkappa)}}{\lambda-\varkappa}\right) = o(\lambda^{-m}), \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

где  $m$  - любое положительное число. Первый из интегралов имеет вид  $F(\lambda)$ , причем  $\varphi(t) = f(t)$  и  $h(t) = -t$ . Наибольшее значение  $h(t)$  достигает в точке  $t = 0$ , которая является концом промежутка интегрирования. Применяя формулу (4.7) и учитывая, что  $h'(t) = -1$ , получаем

$$\Lambda(\lambda) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{k+1}} f^{(k)}(0), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

ПРИМЕР 4.4. Найдем асимптотику интеграла

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + t + 1)^\lambda}, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Перепишем этот интеграл в виде

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \ln(t^2+t+1)} dt, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

и используем метод Лапласа. Имеем

$$h(t) = -\ln(t^2 + t + 1),$$

причем функция  $h(t)$  принимает наибольшее значение на левой границе промежутка интегрирования  $(0; \infty)$ . Этот промежуток является

бесконечным, но используя рассуждения из примера 4.3, при больших значениях  $\lambda$  его можно заменить интервалом  $[0; A]$  с некоторым конечным, достаточно большим  $A$ . Далее, имеем

$$h'(t) = -\frac{2t+1}{t^2+t+1}, \quad h'(0) = -1;$$

$$\varphi_0(t) = 1; \quad \varphi_1(t) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\left(-\frac{2t+1}{t^2+t+1}\right)} \right) = 1 - \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2},$$

причем  $\varphi_1(0) = -1$ . Учитывая два члена в формуле (4.7), получаем

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \quad (4.24)$$

Используем формулу (4.24) для вычисления приближенного значения интеграла

$$I = \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+t+1)^{100}}. \quad (4.25)$$

Maple дает для этого интеграла значение

$$I \approx 0.009906455138.$$

Подставляя  $\lambda = 100$  в (4.24), находим  $I \approx 0.0099$ , что совпадает со значением, найденным Maple, с точностью до  $10^{-5}$ .

**ПРИМЕР 4.5.** Используем метод Лапласа для вычисления приближенного значения интеграла<sup>1</sup>

$$I_{100} = \int_0^\pi \sin^{100} t \, dt.$$

---

<sup>1</sup> В своей замечательной статье «Математический тривиум», [14], посвященной преподаванию математики в вузах, выдающийся российский математик Владимир Игоревич Арнольд был категоричен: «Студент, которому для вычисления с десятипроцентной точностью среднего от сотой степени синуса требуется значительно больше пяти минут, не владеет математикой, даже если он занимался нестандартным анализом, универсальными алгебрами, супермногообразиями или теоремами вложения.»

Рассматриваемый интеграл является частным случаем интеграла

$$I_\lambda = \int_0^\pi \sin^\lambda t \, dt \quad (4.26)$$

при  $\lambda = 100$  и его значение можно попытаться оценить с помощью асимптотики  $I_\lambda$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , считая 100 «достаточно большим» числом.

1. Представим (4.26) в виде

$$I_\lambda = \int_0^\pi e^{\lambda \ln(\sin t)} \, dt. \quad (4.27)$$

Этот выражение имеет вид интеграла  $F(\lambda)$  если положить  $\varphi(t) \equiv 1$  и  $h(t) = \ln(\sin t)$ . Наибольшее значение функция  $h(t)$  принимает при  $t = \pi/2$ . В этой точке  $h(\pi/2) = 0$ ,  $h'(\pi/2) = 0$  и  $h''(\pi/2) = -1$ . Грубая оценка  $I_\lambda$ , учитывающая только первый член разложения по методу Лапласа (4.18), дает

$$I_\lambda = \sqrt{2\pi} \lambda^{-1/2} + O(\lambda^{-3/2}), \quad (4.28)$$

(мы учли, что  $e^{\lambda h(\pi/2)} = 1$  и  $\varphi(\pi/2) = 1$ ). При  $\lambda = 100$  формула (4.28) дает  $I_{100} \approx 0.2506628274$ .

Оценим точность полученного результата

$$\Delta = \left| I_\lambda - \sqrt{2\pi} \lambda^{-1/2} \right|.$$

Для этого вспомним последовательность действий, в результате которых была получена формула (4.18).

а) Интеграл по всему промежутку заменялся интегралом по  $\delta$ -окрестности точки максимума функции  $h(t)$  (размер окрестности  $\delta$  пока считается произвольным). В рассматриваемом случае это означает замену исходного интеграла интегралом

$$I_\lambda^{(1)} = \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta} \sin^\lambda t \, dt = \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta} e^{\lambda \ln(\sin t)} \, dt. \quad (4.29)$$

Соответственно, ошибка, возникающая на этом этапе, может быть представлена в виде

$$\Delta^{(1)} \equiv \left| I_\lambda - I_\lambda^{(1)} \right| = 2 \int_{\pi/2-\delta}^{\pi} \sin^\lambda t \, dt.$$

Для оценки  $\Delta^{(1)}$  используем то, что касательная к графику функции  $z(t) = \sin t$ , построенная в любой точке этого графика на промежутке  $(0; \pi)$ , лежит выше самого графика на всем этом промежутке. Учитывая, что уравнение касательной в точке  $t = \pi/2 + \delta$  имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{z}(t) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \cdot \left(t - \frac{\pi}{2} - \delta\right) = \\ &= \cos \delta - \sin \delta \cdot \left(t - \frac{\pi}{2} - \delta\right) \end{aligned}$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} 0 &< 2 \int_{\pi/2+\delta}^{\pi} \sin^\lambda t \, dt < 2 \int_{\pi/2+\delta}^{\pi} \left( \cos \delta - \sin \delta \cdot \left(t - \frac{\pi}{2} - \delta\right) \right)^\lambda dt = \\ &= 2 \int_{\delta}^{\pi/2} (\cos \delta - \sin \delta \cdot (t - \delta))^\lambda dt = - \frac{(\cos \delta - \sin \delta \cdot (t - \delta))^{\lambda+1}}{(\lambda + 1) \sin \delta} \Bigg|_{\delta}^{\pi/2} = \\ &= \frac{(\cos \delta)^{\lambda+1}}{(\lambda + 1) \sin \delta} - \frac{(\cos \delta - \sin \delta \cdot (\pi/2 - \delta))^{\lambda+1}}{(\lambda + 1) \sin \delta}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\Delta^{(1)} < \frac{(\cos \delta)^{\lambda+1}}{(\lambda + 1) \sin \delta}. \quad (4.30)$$

б) Далее, подынтегральная функция заменялась ее разложением в ряд Тейлора с удержанием членов, вплоть до квадратичного. В нашем случае этот шаг сводится к замене интеграла  $I_\lambda^{(1)}$  интегралом

$$I_\lambda^{(2)} = \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta} e^{-\frac{\lambda(t-\pi/2)^2}{2}} dt = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx.$$

Оценим разность между  $I_\lambda^{(1)}$  и  $I_\lambda^{(2)}$ . По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$\ln \left( \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right) = -\frac{1}{2}x^2 - w(\theta x)x^4$$

где  $x \in (-\delta; \delta)$ ,  $\theta \in (-1; 1)$  и

$$w(\xi) = \frac{3 - \cos^2 \xi}{12 \cos^4 \xi}.$$

Функция  $w(\xi)$  является четной, положительной при всех  $\xi \in \mathbb{R}$  и монотонно возрастает при  $0 < \xi < \pi/2$ . Это означает, что для  $\xi \in [-\delta; \delta]$ ,  $0 < \delta < \pi/2$  справедливо неравенство

$$0 < w(\xi) \leq \frac{3 - 2 \cos^2 \delta}{12 \cos^4 \delta}.$$

Следовательно, при  $x \in [-\delta; \delta]$  и  $0 < \delta < \pi/2$  имеем

$$\begin{aligned} \left| e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} - e^{\lambda \ln(\sin(x+\pi/2))} \right| &= e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} \cdot \left( 1 - e^{-\lambda w(\theta x)x^4} \right) \leq \\ &\leq \frac{\lambda \delta^4 (3 - 2 \cos^2 \delta)}{12 \cos^4 \delta} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}}, \end{aligned}$$

(мы использовали неравенство  $1 - e^{-y} \leq y$ , см. лемму 1.1). Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)} &\equiv \left| I_\lambda^{(2)} - I_\lambda^{(1)} \right| \leq \frac{\lambda \delta^4 (3 - 2 \cos^2 \delta)}{12 \cos^4 \delta} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} \lambda \delta^4 (3 - 2 \cos^2 \delta)}{12 \cos^4 \delta}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

в) Заключительный шаг процедуры состоял в том, что пределы интегрирования  $-\delta$  и  $\delta$  в интеграле  $I_\lambda^{(2)}$  были заменены на  $-\infty$  и  $\infty$ . Получившийся интеграл можно явно вычислить, и именно это

значение и есть главный член формулы (4.28). Погрешность, которая возникает при замене пределов, оценена в примере 4.2,

$$\Delta^{(3)} \equiv \left| I_{\lambda}^{(2)} - \sqrt{2\pi}\lambda^{-1/2} \right| = \left| I_{\lambda}^{(2)} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx \right| \leq \frac{2}{\lambda\delta} e^{-\frac{\lambda\delta^2}{2}}. \quad (4.32)$$

Складывая оценки (4.30), (4.31) и (4.32), получаем

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \left| I_{\lambda} - \sqrt{2\pi}\lambda^{-1/2} \right| \leq \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(3)} \leq \\ &\leq \frac{(\cos \delta)^{\lambda+1}}{(\lambda+1)\sin \delta} + \frac{\sqrt{2\pi}\lambda\delta^4(3-2\cos^2 \delta)}{12\cos^4 \delta} + \frac{2}{\lambda\delta} e^{-\frac{\lambda\delta^2}{2}}. \end{aligned}$$

Параметр  $\delta$  может быть выбран произвольным. Возьмем  $\delta = 0.25$ , тогда при  $\lambda = 100$  имеем  $\Delta \approx 0.015555$ , что составляет около 6% от полученного результата. Вместе с тем непосредственное вычисление интеграла  $I_{100}$  при помощи Maple дает 0.2500369635 (все знаки верны). Таким образом, наша оценка оказывается достаточно грубой и главный член асимптотического приближения обеспечивает значительно более высокую точность (около 0.25%).

2. Уточним полученный результат, учтя в формуле (4.17) члены порядка  $\lambda^{-3/2}$ . Положим  $L = 1$ . Так как  $h''(\pi/2) = -1$ , получаем, что коэффициент перед  $\lambda^{-3/2}$  оказывается представлен суммой трех членов

$$A_2\beta_{0,2} + A_4\beta_{1,4} + A_6\beta_{2,6}, \quad (4.33)$$

где

$$A_{2m} = \frac{(2m)!\sqrt{2\pi}}{2^m m!}.$$

Соответственно, имеем  $A_2 = \sqrt{2\pi}$ ,  $A_4 = 3\sqrt{2\pi}$ ,  $A_6 = 15\sqrt{2\pi}$ . Найдем  $\beta_{0,2}$ ,  $\beta_{1,4}$  и  $\beta_{2,6}$ . Для этого необходимо разложить в ряд в окрестности  $x = 0$  функцию

$$\begin{aligned} \exp(\lambda r(x)) &= \exp\left(\lambda\left(\ln \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x^2\right)\right) = \\ &= \exp\left(\lambda\left(\ln \cos x + \frac{1}{2}x^2\right)\right), \end{aligned}$$

(мы учли, что  $\ln \sin \pi/2 = 0$ ). Находим

$$\ln(\cos x) + \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + O(x^8),$$

$$\begin{aligned} \exp\left(\lambda\left(\ln \cos x + \frac{1}{2}x^2\right)\right) &= 1 - \lambda\left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\lambda^2\left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6\right)^2 + O(x^8). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, находим коэффициенты при  $x^2$ ,  $\lambda x^4$  и  $\lambda^2 x^6$

$$\beta_{1,4} = -1/12, \quad \beta_{0,2} = \beta_{2,6} = 0.$$

Значит, следующее приближение имеет вид

$$\sqrt{2\pi}\lambda^{-1/2} - \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\lambda^{-3/2} + o\left(\lambda^{-3/2}\right).$$

Подставляя  $\lambda = 100$ , получаем значение  $I_{100} \approx 0.2500361703$ , которое отличается от точного значения менее чем на одну миллионную.

**ПРИМЕР 4.6.** Найдем асимптотику гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\lambda-1} dt$$

при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Известно, что при  $n$  натуральных  $\Gamma(n+1) = n!$ . Исходя из этого будем исследовать функцию

$$\Gamma(\lambda+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\lambda dt.$$

Применить метод Лапласа непосредственно к функции  $\Gamma(\lambda+1)$  не получается. Во-первых, представленный интеграл является несобственным и, строго говоря, не попадает под условия теоремы об интегралах Лапласа. Во-вторых, если выделить большой параметр, взяв  $\varphi(t) = e^{-t}$  и  $t^\lambda = e^{\lambda \ln t}$ , так что  $h(t) = \ln t$ , то получается, что  $h(t)$

не имеет максимума, и вообще не ограничена. Максимум у выражения, стоящего под экспонентой, появится, если переписать интеграл в виде

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t + \lambda \ln t} dt.$$

В этом случае выражение  $-t + \lambda \ln t$  имеет максимум в точке  $t = \lambda$ . Непосредственное применение метода Лапласа, однако, снова невозможно, в силу сложной зависимости этого показателя от  $\lambda$ . Эту неприятность можно устранить, сделав в рассматриваемом интеграле замену  $t = \lambda(1 + s)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda + 1) &= \lambda \int_{-1}^{\infty} e^{-\lambda(1+s) + \lambda \ln \lambda + \lambda \ln(1+s)} ds = \\ &= \lambda e^{\lambda \ln \lambda - \lambda} \int_{-1}^{\infty} e^{\lambda(-s + \ln(1+s))} ds = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int_{-1}^{\infty} e^{\lambda h(s)} ds, \end{aligned}$$

где  $h(s) = -s + \ln(1+s)$ . Функция  $h(s)$  имеет единственную точку максимума  $s = 0$ . Интеграл

$$F(\lambda) = \int_{-1}^{\infty} e^{\lambda h(s)} ds$$

уже «почти» соответствует условиям теоремы об интегралах Лапласа, но является несобственным: подынтегральная функция определена на бесконечном промежутке и имеет особенность на одном из его концов, в  $s = -1$ . Вместе с тем, используя оценки, аналогичные тем, что применялись при доказательстве теоремы 4.1, можно показать, что при больших значениях  $\lambda$  основной вклад в интеграл будет вносить окрестность точки максимума  $s = 0$ . По сути это позволяет заменить рассматриваемый несобственный интеграл интегралом по



конечному промежутку, включающему точку  $s = 0$ , например

$$\int_{-1/2}^1 e^{\lambda(-s+\ln(s+1))} ds. \quad (4.34)$$

Применим к интегралу (4.34) метод Лапласа. Непосредственное использование оценки (4.18), с учетом того, что  $h(0) = 0$ ,  $h''(0) = -1$ , дает

$$\sqrt{2\pi}\lambda^{-1/2} + O(\lambda^{-3/2}).$$

Для исходного интеграла это означает, что

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \left( \sqrt{2\pi}\lambda^{-1/2} + O(\lambda^{-3/2}) \right).$$

При  $n$  натуральных получаем хорошо знакомую формулу Стирлинга

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Чтобы уточнить полученный результат нам потребуется разложение функции  $r(s) = -s + \ln(s+1) + \frac{1}{2}s^2$ . Удерживая в разложении члены до шестой степени  $s$  включительно, и используя Maple для упрощения громоздких выражений, получим

$$r(s) = \frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{4}s^4 + \frac{1}{5}s^5 - \frac{1}{6}s^6 + O(s^7).$$

Тогда

$$e^{\lambda r(s)} = 1 + \frac{1}{3}\lambda s^3 - \frac{1}{4}\lambda s^4 + \frac{1}{5}\lambda s^5 - \left(\frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{18}\lambda^2\right)s^6 + O(s^7).$$

Для поправки следующего порядка в соответствии с (4.33) нам потребуются коэффициенты при  $t^2$ ,  $\lambda t^4$  и  $\lambda^2 t^6$

$$\beta_{0,2} = 0, \quad \beta_{1,4} = -1/4, \quad \beta_{2,6} = 1/18.$$

Учитывая, что  $A_2 = \sqrt{2\pi}$ ,  $A_4 = 3\sqrt{2\pi}$ ,  $A_6 = 15\sqrt{2\pi}$ , получаем

$$A_2\beta_{0,2} + A_4\beta_{1,4} + A_6\beta_{2,6} = \sqrt{2\pi} \left( -3 \cdot \frac{1}{4} + 15 \cdot \frac{1}{18} \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{12}.$$

Уточненная формула имеет вид

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda^\lambda e^{-\lambda} \sqrt{2\pi\lambda} \left( 1 + \frac{1}{12\lambda} + O(\lambda^{-2}) \right).$$

Это позволяет уточнить также формулу Стирлинга

$$n! = \left( \frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \left( 1 + \frac{1}{12n} + O\left( \frac{1}{n^2} \right) \right).$$

ПРИМЕР 4.7. Исследуем асимптотику интеграла

$$I(\lambda) = \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^4)^\lambda}, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.35)$$

Перепишем (4.35) в виде

$$I(\lambda) = \int_{-1}^1 e^{-\lambda \ln(1+t^4)} dt. \quad (4.36)$$

Функция  $h(t) = -\ln(1+t^4)$  имеет единственный максимум в точке  $t = 0$ . Непосредственное применение формулы (4.17), однако, невозможно, так как  $h''(0) = 0$ , и, более того,  $h(t) = O(t^4)$  при  $t \rightarrow 0$ . Вместе с тем, для нахождения асимптотики интеграла можно использовать ту же идею, которая использовалась при выводе формулы (4.17).

1. Представим интеграл (4.36) в виде

$$I(\lambda) = \int_{-1}^1 \Phi(t, \lambda) e^{-\lambda t^4} dt, \quad \Phi(t, \lambda) = e^{-\lambda(\ln(1+t^4)-t^4)}. \quad (4.37)$$

Разложим функцию  $\Phi(t, \lambda)$  по формуле Тейлора по переменной  $t$ , ограничившись первыми двумя членами разложения

$$\Phi(\lambda, t) = 1 + \frac{\lambda}{2} t^8 + o(t^{10}). \quad (4.38)$$

2. Следуя процедуре, используемой при выводе формулы (4.17), подставим разложение (4.38) в формулу (4.37) и заменим в каждом

$\lambda$	$\lambda = 20$	$\lambda = 50$	$\lambda = 100$
$I(\lambda)$	0.864031	0.683868	0.574158
$I^{(2)}(\lambda)$	0.863920	0.683854	0.574155

Таблица 4.1: К примеру 4.7. Верхняя строка: значения  $I(\lambda)$ , вычисленные при помощи Maple, нижняя строка: значения  $I^{(2)}(\lambda)$ .

члене пределы интегрирования с  $(-1; 1)$  на  $(-\infty; \infty)$ .

$$\begin{aligned}
 I(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^4} dt + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t^8 e^{-\lambda t^4} dt + R(\lambda, t) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda^{1/4}\Gamma(3/4)} + \frac{5}{64} \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda^{5/4}\Gamma(3/4)} + R(\lambda, t),
 \end{aligned}$$

где  $\Gamma(\cdot)$  - гамма-функция Эйлера и  $R(\lambda, t)$  - остаточный член, который, как можно ожидать по аналогии с формулой (4.17), достаточно мал при больших значениях  $\lambda$ . Получаем, что приближенная двучленная формула для вычисления интеграла  $I(\lambda)$  при больших значениях  $\lambda$  имеет вид

$$I^{(2)}(\lambda) = \frac{\pi}{\sqrt{2}\lambda^{1/4}\Gamma(3/4)} \left(1 + \frac{5}{32\lambda}\right). \quad (4.39)$$

Используя Maple, сравним значения  $I(\lambda)$  со значениями  $I^{(2)}(\lambda)$  при  $\lambda = 20, 50$  и  $100$  (см. Таблицу 4.1). Видно, что уже при  $\lambda = 20$  приближенная формула обеспечивает погрешность порядка одной десятитысячной, а при  $\lambda = 100$  оказываются верны пять знаков полученного приближенного значения.

#### Задачи к главе 4

**4.1.** Докажите, что если  $\varphi(t)$  и  $h(t)$  непрерывны на  $(a; b)$ ,  $\varphi(a) \neq 0$  и  $h(t)$  достигает наибольшего значения в точке  $t = a$ , то

$$\int_a^b \varphi(t) e^{\lambda h(t)} dt \sim \varphi(a) \int_a^b e^{\lambda h(t)} dt, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

**4.2.** Найдите главные члены асимптотики следующих интегралов при  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 (a) \int_0^1 \frac{dt}{(1+t+t^4)^\lambda}, \quad (b) \int_0^1 \frac{\ln^\lambda(1+t)}{t^\lambda} dt, \quad (c) \int_1^\infty t^{-\lambda t} dt, \\
 (d) \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda \operatorname{tg} t} dt, \quad (e) \int_0^1 e^{-\lambda e^t} dt, \quad (f) \int_0^\lambda \sqrt{t} e^{\lambda t+t^2} dt, \\
 (g) \int_\lambda^\infty e^{-t^4} dt, \quad (h) \int_1^\lambda t^p e^t dt, \quad (i) \int_0^\lambda e^{-t} (\lambda-t)^\lambda dt, \\
 (j) \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{1+t^4} dt, \quad (k) \int_0^\infty e^{-\lambda t-t^4} dt, \quad (l) \int_\lambda^{2\lambda} t e^{-\lambda t^2} dt.
 \end{aligned}$$

**4.3.** Покажите<sup>1</sup>, что если  $f(0) \neq 0$ ,

$$\int_0^\infty |\ln t|^n e^{-\lambda t} f(t) dt \sim \frac{\ln^n \lambda}{\lambda} f(0), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**4.4.** Вычислите с относительной погрешностью 10% значение интеграла<sup>2</sup>

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(t^4 + 4t + 4)^{100}}.$$

**4.5.** Обоснуйте применение метода Лапласа для вычисления асимп-

<sup>1</sup> Приведенная формула является частным случаем более общей асимптотической формулы для интегралов со слабой особенностью, см. [6], глава II, дополнение 7.

<sup>2</sup> «Математический тривиум», [14], задача 14, комментарии см., напр., [15], глава VI, задача 2.12.

тотики интеграла.

$$\int_0^{1/2} e^{-\lambda t \ln t} dt, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Найдите главный член этой асимптотики.

**4.6.** Докажите, что

$$\int_0^\pi \sin^{100} t \, dt = \frac{\pi \cdot 100!}{2^{100} \cdot (50!)^2}.$$

Используя эту формулу, вычислите приближенное значение интеграла из примера 4.5 с помощью формулы Стирлинга.

**4.7.** Найдите главный член асимптотики интегралов при  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,  $p > 1$

$$\begin{aligned} (a) \int_0^\infty e^{\lambda(t-t^p)} dt, & \quad (b) \int_{-1}^1 e^{-\lambda \operatorname{ch} t} dt, \\ (c) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^p \cos^\lambda t \, dt, & \quad (d) \int_0^\pi (a + \cos t)^\lambda dt, \\ (e) \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^\lambda dt, & \quad (f) \int_0^{2\pi} (1+t^2)e^{-\lambda \cos t} dt \\ (g) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{(2 - \cos t)^\lambda}, & \quad (h) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\frac{\lambda}{\cos t}} dt, \\ (i) \int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda t \operatorname{th} t} dt, & \quad (j) \int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda t \operatorname{arctg} t} dt. \end{aligned}$$

**4.8.** Найдите главный член асимптотики при  $x \rightarrow +\infty$  модифицированных функций Бесселя  $n$ -го порядка,  $I_n(x)$  и  $K_n(x)$ , задаваемых

формулами

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos t} \cos nt \, dt, \quad K_n(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} t} \operatorname{ch} nt \, dt.$$

**4.9.** Найдите главные члены асимптотики интегралов при  $\lambda \rightarrow \infty$

$$(a) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\lambda \operatorname{tg}^4 t} \, dt, \quad (b) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{(1 + \sin^4 t)^\lambda}, \quad (c) \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1 + t^6)^\lambda}.$$

**4.10.** Найдите главный член асимптотики интегралов при  $\lambda \rightarrow +\infty$

$$a) \int_0^\infty e^{-t-\lambda/\sqrt{t}} \, dt, \quad (b) \int_{-\lambda}^\lambda e^t (\lambda - t)^\lambda \, dt, \quad (c) \int_0^\infty e^{-\lambda t - 1/\sqrt{t}} \, dt.$$

**4.11.** Покажите, что для функций из достаточно «хорошего» класса, определенных на отрезке  $[a; b]$ ,  $L_p$ -норма при  $p \rightarrow \infty$  стремится к  $L_\infty$ -норме, определенной как

$$\|f(x)\|_{L_\infty} = \max_{[a;b]} f(x),$$

(какой класс функций является достаточно «хорошим»?)

## Глава 5

### Метод стационарной фазы

В этом разделе мы рассмотрим интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda S(t)} dt. \quad (5.1)$$

Здесь  $\varphi(t)$  и  $S(t)$  - действительные функции. Интегралы (5.1) схожи с интегралами Лапласа, которые рассматривались в прошлой главе. Отличие состоит в том, что функция, стоящая в показателе экспоненты, теперь не действительная, а чисто мнимая.

Интегралы вида (5.1) возникают во многих приложениях. К такому типу относятся, например, интегралы Фурье, соответствующие случаю  $S(t) = t$ . В физических приложениях  $\varphi(t)$  традиционно называется *амплитудой*, а  $S(t)$  - *фазой*. Это объясняет название метода, вынесенного в заголовок параграфа.

С ростом  $\lambda$  поведение подынтегральной функции в (5.1) отличается от поведения подынтегральной функции интеграла Лапласа. В случае интеграла Лапласа подынтегральная функция с ростом  $\lambda$  растет особенно быстро в окрестности точки максимума, тем самым вклад этой окрестности в интеграл оказывается доминирующим. В случае интеграла (5.1) с ростом  $\lambda$  подынтегральная функция начинает очень быстро осциллировать. Оказывается, однако, что в этом случае тоже справедлив принцип, названный в предыдущей главе принципом локализации: *вклад окрестностей некоторых точек в интеграл при больших  $\lambda$  является доминирующим*. В случае интегралов Лапласа это были окрестности точек максимума  $h(t)$ . В случае интегралов вида (5.1) это окрестности тех точек, где  $S'(t) = 0$ , то есть фаза подынтегральной функции «замирает».

Рис.5.1 представляет собой иллюстрацию принципа локализации. Видно, что наибольший вклад в интеграл от быстро осциллирующей функции  $f(t) = \cos 50(t^2 - t) = \operatorname{Re} e^{50i(t^2 - t)}$  вносит окрестность точки  $t = 1/2$ , где производная функции, стоящей под косинусом, обращается в нуль. Мы будем называть такие точки *точками стационарной фазы* или просто *стационарными точками*.

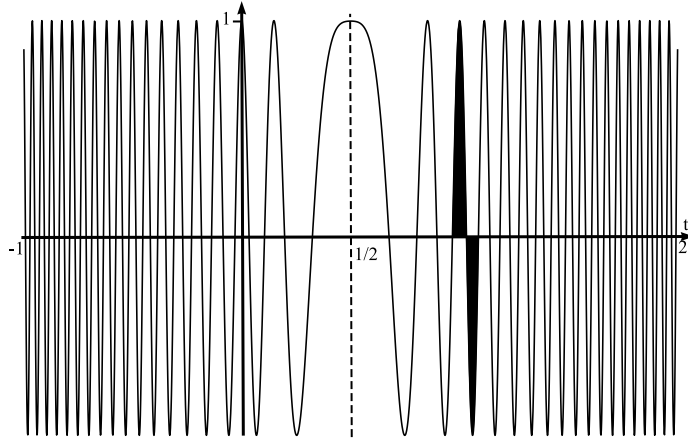


Рис. 5.1: График функции  $f(t) = \cos 50(t^2 - t)$ . Площади областей, закрашенных черным, очень близки и «компенсируют» друг друга, т.е. дают малый суммарный вклад в интеграл  $\int_{-1}^2 f(t) dt$ . Наибольший же вклад дает окрестность точки  $t = 1/2$ .

### 5.1 Асимптотика интеграла $F(\lambda)$ при отсутствии стационарных точек

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 5.1.** Пусть  $\varphi(t)$  и  $S(t)$  - вещественные и бесконечно дифференцируемые на  $(a; b)$  функции. Пусть  $S'(t) \neq 0$  на  $(a; b)$ . Тогда

$$F(\lambda) \stackrel{\text{as}}{\equiv} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \left[ A_k(b) e^{\lambda i S(b)} - A_k(a) e^{\lambda i S(a)} \right], \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (5.2)$$

При этом коэффициенты  $A_k(\xi)$  являются линейными комбинациями значений функции  $\varphi(\xi)$  и ее производных до  $k-1$  порядка в точке  $\xi$ , их явный вид дается рекуррентными формулами (5.3), (5.4), причем в выражении для асимптотики (5.2) участвуют значения  $A_k(\xi)$  только на концах промежутка  $\xi = a$  и  $\xi = b$ .



*Доказательство.* Проинтегрируем  $F(\lambda)$  по частям

$$\begin{aligned}
F(\lambda) &= \int_a^b \frac{\varphi(t)}{i\lambda S'(t)} de^{i\lambda S(t)} = \\
&= \frac{\varphi(t)}{i\lambda S'(t)} e^{i\lambda S(t)} \Big|_a^b - \int_a^b \left( \frac{\varphi(t)}{i\lambda S'(t)} \right)' e^{i\lambda S(t)} dt = \\
&= \frac{1}{\lambda} A_1(b) e^{i\lambda S(b)} - \frac{1}{\lambda} A_1(a) e^{i\lambda S(a)} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b \varphi_1(t) e^{i\lambda S(t)} dt,
\end{aligned}$$

где

$$\varphi_1(t) = - \left( \frac{\varphi(t)}{iS'(t)} \right)', \quad A_1(t) = \frac{\varphi(t)}{iS'(t)}.$$

В приведенных выкладках важно, что  $S'(t)$  не обращается в нуль на  $(a; b)$ . К последнему интегралу снова применим процедуру интегрирования по частям. Повторяя такой прием многократно, получим

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{A_k(b)}{\lambda^k} e^{i\lambda S(b)} - \frac{A_k(a)}{\lambda^k} e^{i\lambda S(a)} \right) + R_n(\lambda),$$

где  $\varphi_k(t)$  и  $A_k(t)$  определяются рекуррентными формулами

$$\varphi_0(t) = \varphi(t), \quad \varphi_k(t) = - \left( \frac{\varphi_{k-1}(t)}{iS'(t)} \right)', \quad (5.3)$$

$$A_k(t) = \frac{\varphi_{k-1}(t)}{iS'(t)}. \quad (5.4)$$

Остаточный член имеет вид

$$R_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda^n} \int_a^b \varphi_{n+1}(t) e^{i\lambda S(t)} dt.$$

При этом, так как  $S(t)$  - действительная функция,  $|e^{i\lambda S(t)}| = 1$  и

$$|R_n(t)| \leq \frac{1}{\lambda^n} \int_a^b |\varphi_{n+1}(t) e^{i\lambda S(t)}| dt \leq \frac{M_n}{\lambda^n}$$

при некоторой константе  $M_n$ . Это и означает справедливость формулы (5.2).  $\square$

## 5.2 Асимптотика интеграла $F(\lambda)$ при наличии одной стационарной точки

Пусть теперь на интервале  $(a; b)$  имеется одна точка  $t = c$ , такая что  $S'(c) = 0$ . Допустим, что в некоторой окрестности этой точки функции  $\varphi(t)$  и  $S(t)$  являются действительными аналитическими функциями. Кроме того, предположим, что  $S''(c) \neq 0$ . Это, в частности, означает, что в некоторой окрестности точки  $t = c$  справедливо представление

$$S(t) = S(c) + \frac{S''(c)}{2}(t-c)^2 + o((t-c)^2).$$

При исследовании асимптотики интеграла  $F(\lambda)$  мы будем в целом следовать схеме, использованной для нахождения асимптотики интеграла Лапласа.

*Шаг 1.* Разобьем отрезок  $[a; b]$  на три части, выделив  $\delta$ -окрестность точки  $t = c$  ( $\delta > 0$  достаточно малое)

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda),$$

$$F_1(\lambda) = \int_a^{c-\delta} \varphi(t) e^{i\lambda S(t)} dt, \quad F_2(\lambda) = \int_{c-\delta}^{c+\delta} \varphi(t) e^{i\lambda S(t)} dt,$$

$$F_3(\lambda) = \int_{c+\delta}^b \varphi(t) e^{i\lambda S(t)} dt.$$

Так как промежутки  $[a; c - \delta]$  и  $[c + \delta; b]$  не содержат нулей производной функции  $S(t)$ , асимптотика интегралов  $F_1(\lambda)$  и  $F_3(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  вычисляется при помощи предыдущей теоремы, а именно

$$F_1(\lambda) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \left[ A_k(b) e^{\lambda i S(b)} - A_k(c + \delta) e^{\lambda i S(c + \delta)} \right], \quad (5.5)$$

$$F_3(\lambda) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \left[ A_k(c - \delta) e^{\lambda i S(c - \delta)} - A_k(a) e^{\lambda i S(a)} \right]. \quad (5.6)$$

*Шаг 2.* Остается оценить интеграл по промежутку  $[c - \delta; c + \delta]$ . Сведем этот интеграл к интегралу, который может быть исследован методом Лапласа. Для этого сделаем следующий «трюк». В силу того, что функции  $\varphi(t)$  и  $S(t)$  в окрестности точки  $t = c$  являются действительными аналитическими, они допускают продолжение в комплексную плоскость, и эти продолжения являются аналитическими функциями в смысле теории функций комплексного аргумента. Соответственно, мы имеем право заменить интеграл по промежутку действительной оси  $[c - \delta; c + \delta]$  на интеграл по кривой  $l$ , находящейся в области аналитичности функций  $\varphi(t)$  и  $S(t)$ , с начальной точкой  $x = c - \delta$ , конечной точкой  $x = c + \delta$ .

Ограничимся на первом этапе случаем  $S''(c) > 0$ . Рассмотрим кривую, состоящую из дуг окружности  $l_1$  и  $l_3$ , радиуса  $\delta$  и отрезка  $l_2$ . Эти компоненты соединяют последовательно точки  $t = c - \delta$ ,  $t = c - \frac{\delta}{\sqrt{2}}(1 + i)$ ,  $t = c + \frac{\delta}{\sqrt{2}}(1 + i)$  и  $t = c + \delta$ , см. Рис.5.2. Введем обозначения

$$F_2^{(1)}(\lambda) = \int_{l_1} \varphi(t) e^{i\lambda S(t)} dt, \quad F_2^{(2)}(\lambda) = \int_{l_2} \varphi(t) e^{i\lambda S(t)} dt,$$

$$F_2^{(3)}(\lambda) = \int_{l_3} \varphi(t) e^{i\lambda S(t)} dt.$$

Рассмотрим интегралы  $F_2^{(1,2,3)}(\lambda)$  по отдельности.

*Шаг 3.* Рассмотрим интегралы  $F_2^{(1)}(\lambda)$  и  $F_2^{(3)}(\lambda)$ . Ключевым здесь является следующее утверждение.

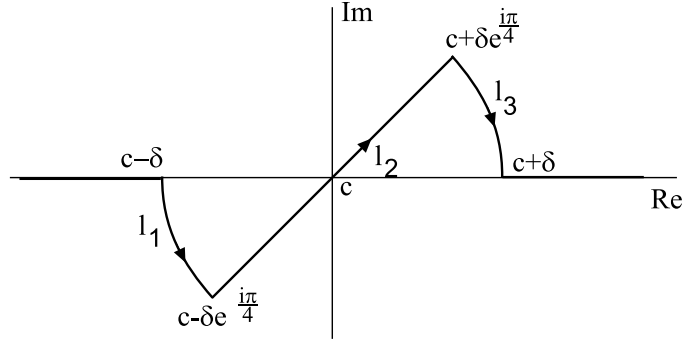


Рис. 5.2: Контур интегрирования в случае  $S''(c) > 0$

**Лемма 5.1.** Если  $S(t)$  является аналитической функцией в окрестности точки  $t = c$  и  $S''(c) = \mu^2 > 0$ , то при достаточно малом  $\delta$   $\text{Im } S(t) \geq 0$  на  $l_3$  и на  $l_1$ . Кроме того, на этих дугах  $\text{Im } S(t) = 0$  только в точках  $t = c + \delta$  (на  $l_3$ ) и  $t = c - \delta$  (на  $l_1$ ).

*Доказательство.* Рассмотрим дугу  $l_3$  (случай дуги  $l_1$  рассматривается аналогично). Запишем

$$S(t) = S(c) + \frac{\mu^2}{2}(t-c)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k(t-c)^k, \quad (5.7)$$

$$S'(t) = \mu^2(t-c) + \sum_{k=3}^{\infty} a_k k(t-c)^{k-1}. \quad (5.8)$$

Выбирая  $\delta$  достаточно малым, можно обеспечить абсолютную сходимость этих рядов при  $|t-c| \leq \delta$ . В силу абсолютной сходимости ряда для  $S'(t)$  при  $t = c + \delta$ , можно записать

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+2)|a_{k+2}|\delta^k = M(\delta),$$

причем  $M(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

На контуре  $l_3$  удобно ввести естественную параметризацию  $t =$

$c + \delta e^{i\theta}$ ,  $\theta \in (0; \pi/4)$ . Тогда на  $l_3$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} S(t) &= \frac{1}{2} \mu^2 \delta^2 \sin 2\theta + \sum_{k=3}^{\infty} a_k \delta^k \sin k\theta = \\ &= \delta^2 \sin \theta \left( \mu^2 \cos \theta + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+2} \delta^k \frac{\sin(k+2)\theta}{\sin \theta} \right). \end{aligned}$$

Второе слагаемое в последней сумме можно сделать сколь угодно малым, уменьшая  $\delta$ . Это следует из известного неравенства<sup>1</sup>

$$\left| \frac{\sin N\theta}{\sin \theta} \right| \leq N$$

и вытекающей из него оценки

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+2} \delta^k \frac{\sin(k+2)\theta}{\sin \theta} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+2}| (k+2) \delta^k = M(\delta).$$

Учитывая, что  $\sin \theta \geq 0$  и  $\cos \theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  при  $\theta \in [0; \pi/4]$ , получаем утверждение леммы 5.1, касающееся  $l_3$ . Соответствующее утверждение о  $l_1$  получается аналогично.  $\square$

В силу формулы (5.8),  $\delta$  можно выбрать таким малым, чтобы  $S'(t)$  не обращалась в нуль на  $l_3$ . Поэтому к интегралу  $F_2^{(3)}(\lambda)$  можно применить процедуру интегрирования по частям. Действуя так же, как в параграфе 5.1, получаем

$$\begin{aligned} F_2^{(3)}(\lambda) &= \int_{c+\delta e^{i\pi/4}}^{c+\delta} \frac{\varphi(t)}{i\lambda S'(t)} de^{i\lambda S(t)} = \frac{1}{\lambda} A_1(c+\delta) e^{i\lambda S(c+\delta)} - \\ &- \frac{1}{\lambda} A_1(c+\delta e^{i\pi/4}) e^{i\lambda S(c+\delta e^{i\pi/4})} + \frac{1}{\lambda} \int_{l_3} \varphi_1(t) e^{i\lambda S(t)} dt, \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Для доказательства этого неравенства достаточно заметить что

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin N\theta}{\sin \theta} \right| &= \left| \frac{e^{iN\theta} - e^{-iN\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \right| = \left| e^{i(N-1)\theta} + e^{i(N-2)\theta} + \dots + e^{-i(N-1)\theta} \right| \leq \\ &\leq |e^{i(N-1)\theta}| + |e^{i(N-2)\theta}| + \dots + |e^{-i(N-1)\theta}| = N. \end{aligned}$$

где

$$\varphi_1(t) = - \left( \frac{\varphi(t)}{iS'(t)} \right)'.$$

При этом, в силу леммы 5.1 интеграл

$$\int_{l_3} \varphi_1(t) e^{i\lambda S(t)} dt$$

ограничен константой, не зависящей от  $\lambda$ , а член

$$A_1 \left( c + \delta e^{i\pi/4} \right) e^{\lambda i S(c + \delta e^{i\pi/4})}$$

экспоненциально мал при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Повторяя процедуру интегрирования по частям, имеем

$$F_2^{(3)}(\lambda) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} A_k(c + \delta) e^{\lambda i S(c + \delta)} \quad (5.9)$$

и аналогично

$$F_2^{(1)}(\lambda) \stackrel{\text{as}}{=} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} A_k(c - \delta) e^{\lambda i S(c - \delta)}. \quad (5.10)$$

*Шаг 4.* Перейдем к интегралу  $F_2^{(2)}(\lambda)$ . Введем на  $l_2$  параметризацию  $t = c + x e^{i\pi/4}$ ,  $x \in [-\delta; \delta]$ . Имеем

$$\begin{aligned} F_2^{(2)}(\lambda) &= \int_{l_2} \varphi(t) e^{i\lambda S(t)} dt = \\ &= e^{\frac{i\pi}{4} + i\lambda S(c)} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(c + x e^{\frac{i\pi}{4}}) e^{\lambda r(x)} e^{-\frac{\lambda S''(c)x^2}{2}} dx, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где

$$r(x) = i(S(c + x e^{i\pi/4}) - S(c)) + \frac{S''(c)x^2}{2}.$$

Так как по нашему предположению  $S''(c) > 0$ , к интегралу (5.11) можно применить метод Лапласа<sup>1</sup>. Введем функцию

$$\Phi(\lambda, x) = \varphi(c + xe^{\frac{i\pi}{4}})e^{\lambda r(x)}$$

и разложим ее по степеням  $x$  и  $\lambda$ ,

$$\Phi(\lambda, x) = \sum_{0 \leq 3k \leq j < \infty} \beta_{k,j} \lambda^k x^j. \quad (5.12)$$

Для получения этого разложения на практике необходимо перемножить ряды для  $\varphi(c + xe^{\frac{i\pi}{4}})$  и  $e^{\lambda r(x)}$ . При этом второе из этих разложений получается комбинацией разложения в ряд экспоненты и разложения в ряд функции  $r(x)$ ,

$$\varphi(c + xe^{\frac{i\pi}{4}}) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m x^m,$$

$$\alpha_0 = \varphi(c), \quad \alpha_m = \frac{e^{im\pi/4}}{m!} \varphi^{(m)}(c), \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$r(x) = \sum_{m=3}^{\infty} a_m x^m, \quad a_m = \frac{ie^{im\pi/4}}{m!} S^{(m)}(c), \quad m = 3, 4, \dots,$$

$$e^{i\lambda r(x)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\lambda r(x))^l}{l!} = 1 + i\lambda \sum_{m=3}^{\infty} a_m x^m - \frac{\lambda^2}{2} \left( \sum_{m=3}^{\infty} a_m x^m \right)^2 + \dots$$

Нетрудно увидеть, что  $\beta_{0,0} = \varphi(c)$ . Для получения старших коэффициентов  $\beta_{j,k}$  удобно использовать какую-нибудь компьютерную программу аналитических вычислений.

Окончательно, по теореме 4.1, имеем

$$F_2^{(2)}(\lambda) = e^{\frac{i\pi}{4} + i\lambda S(c)} \left( \sum_{L=0}^N C_L \lambda^{-L-1/2} + O(\lambda^{-N-1}) \right), \quad (5.13)$$

$$C_L = \sum_{k=0}^{2L} \frac{\sqrt{2\pi}(2L+2k)! \beta_{k,2L+2k}}{2^{L+k} (L+k)! (S''(c))^{L+k+1/2}}. \quad (5.14)$$

---

<sup>1</sup>Рассуждения раздела 4.2 остаются справедливыми в случае, когда  $\varphi(x)$  и  $h(x)$  являются комплекснозначными функциями, но  $h''(c)$  - действительно, (см. замечание 5 в конце 4.2).

*Шаг 5.* Для получения окончательной формулы соберем вместе вклады интегралов  $F_1(\lambda)$ ,  $F_3(\lambda)$ ,  $F_2^{(1)}(\lambda)$ ,  $F_2^{(2)}(\lambda)$  и  $F_2^{(3)}(\lambda)$ . Нетрудно заметить, что второе слагаемое в  $F_1(\lambda)$  взаимно уничтожится с  $F_2^{(1)}(\lambda)$ . Аналогично, взаимно уничтожатся первое слагаемое в  $F_3(\lambda)$  и  $F_2^{(3)}(\lambda)$ . Получим, что если  $S''(c) > 0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  справедлива асимптотическая формула

$$F(\lambda) \stackrel{\text{as}}{=} e^{\frac{i\pi}{4} + i\lambda S(c)} \sum_{k=0}^{\infty} C_k \lambda^{-k-1/2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(b) e^{\lambda i S(b)} \lambda^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k(a) e^{\lambda i S(a)} \lambda^{-k}, \quad (5.15)$$

где  $A_k(\xi)$  задается формулой (5.4), коэффициенты  $C_k$  определяются выражением (5.14).

Суммируем сказанное:

**Теорема 5.2.** Пусть  $S(t)$  имеет единственную точку минимума  $t = c \in (a; b)$ , причем  $S''(c) > 0$  и функции  $S(t)$  и  $\varphi(t)$  являются действительными аналитическими функциями в некоторой окрестности этой точки. Кроме того, пусть  $S(t)$  и  $\varphi(t)$  являются бесконечно дифференцируемыми на всем промежутке  $(a; b)$ . Тогда асимптотика интеграла  $F(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  определяется формулой (5.15). При этом

- значения  $A_k(\xi)$  находятся по формуле

$$A_k(\xi) = \frac{\varphi_{k-1}(\xi)}{i S'(\xi)},$$

причем

$$\varphi_0(t) = \varphi(t), \quad \varphi_{k+1}(t) = - \left( \frac{\varphi_k(t)}{i S'(t)} \right)';$$

- коэффициенты  $C_L$  выражаются через числа  $\beta_{k,j}$ ;

$$C_L = \sum_{k=0}^{2L} \frac{\sqrt{2\pi} (2L+2k)! \beta_{k,2L+2k}}{2^{L+k} (L+k)! (S''(c))^{L+k+1/2}}$$



- числа  $\beta_{k,j}$  являются коэффициентами разложения функции

$$\begin{aligned} \varphi(c + xe^{\frac{i\pi}{4}}) \exp \left\{ i\lambda \left( S(c + xe^{\frac{i\pi}{4}}) - S(c) - i \frac{S''(c)x^2}{2} \right) \right\} = \\ = \sum_{0 \leq 3k \leq j < \infty} \beta_{k,j} \lambda^k x^j \end{aligned}$$

в окрестности точки  $x = 0$ .

К доказанной теореме уместно сделать ряд замечаний.

1. Теорема относится к случаю  $S''(c) > 0$ . Для исследования случая  $S''(c) < 0$  достаточно перейти от интеграла  $F(\lambda)$  к комплексно сопряженному интегралу

$$\overline{F(\lambda)} = \int_a^b \overline{\varphi(t)} e^{-i\lambda S(t)} dt.$$

Вторая производная функции  $-S(t)$  является положительной в точке  $t = c$ , поэтому асимптотика интеграла  $\overline{F(\lambda)}$  может быть посчитана по формуле (5.15).

2. Как и в случае метода Лапласа, формулы, описывающие метод стационарной фазы можно записать в более компактном виде, введя некоторые неявные функции. Эти формулы приведены в уже цитированной книге [1], гл. 4, параграф 16. Приведенные формулы применимы и при отказе от условия аналитичности функций  $\varphi(t)$  и  $S(t)$  в окрестности стационарной точки.

3. В случае, когда на промежутке  $(a; b)$  имеется более одной стационарной точки функции  $S(t)$ , асимптотика получается путем суммирования вкладов каждой из стационарных точек плюс вклады от концов отрезка. Соответствующая формула выглядит весьма громоздко, однако ее структура вполне прозрачна.

4. Наиболее часто используются частные случаи формулы (5.15) с единственным членом разложения, с точностью до  $O(\lambda^{-1})$

$$\int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda S(t)} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} e^{i\lambda S(c) + i \operatorname{sign}(S''(c)) \frac{\pi}{4}} \frac{\varphi(c)}{\sqrt{|S''(c)|}} + O(\lambda^{-1}), \quad (5.16)$$

или с точностью до  $O(\lambda^{-3/2})$

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda S(t)} dt &= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} e^{i\lambda S(c) + i \operatorname{sign}(S''(c)) \frac{\pi}{4}} \frac{\varphi(c)}{\sqrt{|S''(c)|}} + \\ &+ \frac{\varphi(b)}{i\lambda S'(b)} e^{i\lambda S(b)} - \frac{\varphi(a)}{i\lambda S'(a)} e^{i\lambda S(a)} + O(\lambda^{-3/2}). \end{aligned}$$

### 5.3 Примеры

ПРИМЕР 5.1. Найдем главный член асимптотики интеграла

$$I(\lambda) = \int_{-1}^1 \cos(\lambda \operatorname{sh} t) dt, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Нетрудно убедиться, что

$$I(\lambda) = \int_{-1}^1 e^{i\lambda \operatorname{sh} t} dt.$$

Применим метод стационарной фазы к последнему интегралу. Имеем  $\varphi(t) = 1$ ,  $S(t) = \operatorname{sh} t$ . Производная функции  $S(t)$  не обращается в нуль ни в одной из точек интервала интегрирования. Для нахождения асимптотики используем теорему 5.2. Получаем

$$A_1(t) = \frac{1}{i \operatorname{ch} t},$$

поэтому

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} \cdot \left( \frac{1}{i \operatorname{ch} 1} e^{i\lambda \operatorname{sh} 1} - \frac{1}{i \operatorname{ch}(-1)} e^{i\lambda \operatorname{sh}(-1)} \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \\ &= \frac{2 \sin(\lambda \operatorname{sh} 1)}{\lambda \operatorname{ch} 1} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

Проверка при помощи численного счета показывает, что уже при  $\lambda = 20$  полученная одночленная асимптотическая формула обеспечивает точность 0.2%.

ПРИМЕР 5.2. Найдем главный член асимптотики при  $\lambda \rightarrow \infty$  функции Бесселя  $n$ -го порядка,  $n$  - целое число. Интегральное представление для этой функции таково

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\lambda \sin t - nt) dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \int_0^\pi e^{i\lambda \sin t} e^{-int} dt \right].$$

Используем формулу (5.16). Имеем  $S(t) = \sin t$ ,  $\varphi(t) = e^{-int}$ . На промежутке  $[0; \pi]$  существует единственная стационарная точка функции  $S(t)$ ,  $c = \pi/2$ . Далее:

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; \quad S''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1; \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi n}{2}}.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} J_n(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \operatorname{Re} [e^{i\lambda - i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi n}{2}}] + O(\lambda^{-1}) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 5.3. Вычислим приближенно<sup>1</sup>

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \cos 100(t^4 - t) dt$$

В явном виде этот интеграл не берется. Стоит отметить, что и численное нахождение значения  $I$  «в лоб» со значительной точностью, непросто, даже используя вполне современные средства. В частности, попытка сразу установить бесконечные пределы интегрирования в программе Maple,

```
evalf(int(cos(100*(x^4-x)),x=-infinity..infinity)),
```

<sup>1</sup>Эту задачу также предлагает В.И. Арнольд в «Математическом тривиуме», [14], (задача 15).

приводит к «зависанию» этой программы. Вычисление интеграла по конечному промежутку при помощи Maple возможно, но занимает несколько минут. В таблице ниже приведены значения интегралов по промежуткам  $[-R; R]$ ,  $R = 2, 3, 4, 5$ , вычисленные при помощи Maple.

$R = 2$	$R = 3$	$R = 4$	$R = 5$
-0.0906165	-0.0903646	-0.0903928	-0.0903945

Таблица 5.1: Значения интегралов  $\int_{-R}^R \cos 100(t^4 - t) dt$  при  $R = 2, 3, 4, 5$

Для оценки точности приведенных значений представим интеграл  $\int_R^\infty \cos 100(t^4 - t) dt$  в виде ряда

$$I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k,$$

где  $I_0 = \int_R^{t_1} \cos 100(t^4 - t) dt$  и  $I_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \cos 100(t^4 - t) dt$ , причем  $t_k$  - корни уравнения

$$\cos 100(t^4 - t) = 0, \quad (5.17)$$

большие  $R$ . Очевидно, что  $I_k$  - вклад «волны» быстро осциллирующей подынтегральной функции, причем соседние вклады имеют противоположный знак и  $I_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . По признаку Лейбница такой ряд сходится, причем частичная сумма позволяет оценить значение бесконечной суммы с точностью до первого отброшенного члена. Вычисляя значение интеграла по промежутку между двумя корнями (5.17), ближайшими к 5 и лежащими справа от 5, а затем продолжая аналогичную процедуру для интеграла  $\int_{-\infty}^R \cos 100(t^4 - t) dt$ , получаем следующую оценку<sup>1</sup>

$$I = -0.0904 \pm 0.0001.$$

---

<sup>1</sup> Используя методы теории функций комплексного переменного, можно численно получить гораздо более точное значение интеграла  $I \approx -0.090361911$ , см. задачу 5.2.

Применим теперь к интегралу  $I$  метод стационарной фазы. Рассмотрим интеграл

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda(t^4 - t) dt = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\lambda(t^4 - t)\} dt.$$

В обозначениях данной главы  $\varphi(t) \equiv 1$  и  $S(t) = t^4 - t$ . Соответственно, имеем  $S'(t) = 4t^3 - 1$ ,  $S''(t) = 12t^2$ . Функция  $S(t)$  имеет на числовой прямой единственную стационарную точку  $c = 1/\sqrt[3]{4}$ , причем  $S(c) = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$  и  $S''(c) = 3\sqrt[3]{4}$ . Применяя формулу (5.16) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\lambda(t^4 - t)\} dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{3\sqrt[3]{4}}} \exp\left\{-i\frac{3\lambda}{4\sqrt[3]{4}} + i\frac{\pi}{4}\right\} \lambda^{-1/2}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Для  $I(\lambda)$  имеем

$$I(\lambda) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{3\sqrt[3]{4}}} \cos\left\{-\frac{3\lambda}{4\sqrt[3]{4}} + \frac{\pi}{4}\right\} \lambda^{-1/2}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Полагая в последней формуле  $\lambda = 100$ , получаем

$$I(100) \approx -0.0905835,$$

что дает превосходное приближение к точному значению.

## Задачи к главе 5

### 5.1. Рассматривается интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos 100(t^2 - t) dt.$$

- (а) Вычислите этот интеграл в явном виде;
- (б) Найдите приближенное значение этого интеграла, используя метод стационарной фазы.

### 5.2. Для интеграла из примера 5.3:

- (а) Придумайте способ, позволяющий находить численное значение интеграла  $I$  из примера 5.3 более эффективно, чем это предлагалось выше;

*Подсказка:* Перейдите к другому пути интегрирования в комплексной плоскости. Для вычисления интеграла по этому пути используйте Maple или Matlab.

(б) Используя Maple или Matlab, посчитайте поправку, которую вносит следующий член в разложении для  $I$  из примера 5.3.

**5.3.** Рассматривается интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos 100(t^3 - t) dt.$$

(а) Предложите эффективный метод вычисления этого интеграла при помощи компьютерных программ (см. подсказку к задаче 5.2);

(б) Найдите приближенное значение этого интеграла, используя методы асимптотического анализа.

**5.4.** Найдите главный член асимптотики интегралов при  $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\begin{array}{ll} (a) \int_0^{\pi} \cos(\lambda(t^2 + t)) dt, & (b) \int_{-1}^1 t^2 \exp \left\{ \frac{i\lambda t}{t^2 + 4} \right\} dt, \\ (c) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda \cos t} dt, & (d) \int_{-1}^1 e^{-i\lambda \operatorname{ch} t} dt, \\ (e) \int_0^1 \cos \lambda t^2 \operatorname{ch} t^2 dt, & (f) \int_0^{\pi} t \cos(\lambda \sin 3t) dt, \\ (g) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i\lambda \left( \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \right) \right\} dt, & (h) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda \sqrt{t^2 + 1}}}{t^2 + 1} dt. \end{array}$$

**5.5.** Найдите главный член асимптотики при  $\lambda \rightarrow -\infty$  для функции Эйри

$$\operatorname{Ai}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\lambda t + \frac{t^3}{3}\right)} dt.$$

## Глава 6

### Метод перевала

Метод перевала - традиционное название техники для получения асимптотики интегралов вида

$$F(\lambda) = \int_C \varphi(z) e^{\lambda S(z)} dz, \quad (6.1)$$

где  $C$  - некоторая кривая в комплексной плоскости. Интегралы типа (6.1) часто возникают в физических приложениях. Например, в виде (6.1) ищут решения линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, являющимися полиномами первой степени,

$$\sum_{m=0}^n (a_m + b_m x) u^{(m)}(x) = 0. \quad (6.2)$$

Уравнениями вида (6.2), в свою очередь, описываются различные полезные специальные функции, в частности полиномы Эрмита и Лаггера<sup>1</sup>.

#### 6.1 Основная идея метода перевала

Дадим общее представление об основной идее метода перевала. Рассмотрим сначала следующую ситуацию. Пусть  $S(z) = U(z) + iV(z)$  — комплексная функция, являющаяся аналитической в некоторой области  $\Omega$ . Пусть кривая  $C \subset \Omega$  в (6.1) такова, что на ней  $\text{Im } S(z) = V(z) \equiv V_0 = \text{const}$ . Тогда

$$F(\lambda) = e^{i\lambda V_0} \int_C \varphi(z) e^{\lambda U(z)} dz,$$

---

<sup>1</sup> Простое изложение метода решения подобных уравнений содержится в «Математических дополнениях» к третьему тому курса Ландау и Лифшица («Квантовая механика», [16]).

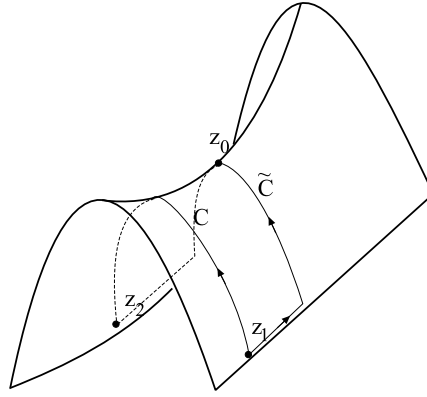


Рис. 6.1: Структура поверхности  $\operatorname{Re} S(z) = U(x, y)$  вблизи точки  $z_0$ . Суть метода перевала заключается в деформации кривой  $C$  таким образом, чтобы она прошла (а) через точку  $z_0$  (точка «перевала»); (б) чтобы на новой кривой  $\operatorname{Im} S(z) = V(x, y)$  была постоянна, по крайней мере, в окрестности точки  $z_0 = x_0 + iy_0$

и асимптотика этого интеграла может быть исследована методом Лапласа. Для этого выделим точку  $z = z_0 \in C$ , в которой  $U(z)$  достигает на  $C$  наибольшего значения (для простоты будем считать, что она одна), введем параметризацию на  $C$ ,  $z = z(t)$ ,  $t \in [a; b]$ , и сведем интеграл к виду

$$F(\lambda) = e^{i\lambda V_0} \int_a^b \varphi(z(t)) z'(t) e^{\lambda U(z(t))} dt. \quad (6.3)$$

В соответствии с методом Лапласа, заключаем, что наибольший вклад в интеграл (6.3) при больших значениях  $\lambda$  будет вносить окрестность точки  $t = c$ , такой, что  $z(c) = z_0$ .

Отметим, что в точке  $z = z_0$  производная  $U(z)$ , взятая в направлении касательной к кривой  $C$ , равна нулю. Но так как  $V(z) = \text{const}$  на  $C$ , то производная  $V(z)$ , взятая в направлении касательной к кривой  $C$ , также равна нулю. Это означает, что производная  $S(z)$  в точке  $z_0$ , взятая в направлении этой касательной равна нулю, а в силу



аналитичности  $S(z)$ , получаем, что *производная по любому направлению в точке  $z = z_0$  равна нулю*,  $S'(z_0) = 0$ .

Разумеется, заданный нам в конкретной задаче путь интегрирования, кривая  $C$ , скорее всего не будет обладать таким замечательным свойством, что  $V(z) = \text{const}$  на ней. Вместе с тем можно постараться сделать так: найти точки  $z_0$  в комплексной плоскости, где  $S'(z) = 0$  и, используя свойство аналитичности  $S(z)$ , деформировать кривую  $C$  в другую,  $\tilde{C}$ , которая: (а) имеет те же начало и конец; (б) проходит через точку  $z_0$ , где  $S'(z_0) = 0$  и (в) условие  $V(z) = \text{const}$  выполняется на новой кривой *хотя бы локально*, в окрестности точки  $z = z_0$ . Если деформация кривой произошла внутри области аналитичности функций  $\varphi(z)$  и  $S(z)$ , то значение интеграла  $F(\lambda)$  не изменится. Вместе с тем, если на новой кривой  $U(z_0) > U(z)$ ,  $z \neq z_0$  и  $z \in \tilde{C}$ , то наибольший вклад в асимптотику интеграла определяется именно окрестностью точки  $z = z_0$ , причем найти его можно, используя метод Лапласа.

Стоит пояснить устоявшееся название рассматриваемого метода («метод перевала»). Пусть  $z = x + iy$ . Рассмотрим поверхность  $U(z) = U(x, y)$ . В окрестности точки  $z_0$ , где  $S'(z_0) = 0$ , она имеет вид, показанный на Рис.6.1: производные по всем направлениям в точке  $z_0$  равны нулю, но точка  $z_0$  не может быть ни максимумом, ни минимумом функции  $U(x, y)$  в силу принципа максимума из теории аналитических функций. Таким образом, деформированный путь интегрирования  $\tilde{C}$  представляет собой кривую, проходящую через седловую точку поверхности, имеющей типичный вид «горного перевала».

Приведем пример применения описанного метода.

## 6.2 Асимптотическое поведение функции Эйри

Найдем главный член асимптотики при  $\xi \rightarrow +\infty$  для функции Эйри  $\text{Ai}(\xi)$ , имеющей следующее интегральное представление

$$\text{Ai}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\xi t + \frac{t^3}{3}\right)} dt. \quad (6.4)$$

Для различных приложений важно то, что  $\text{Ai}(\xi)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению<sup>1</sup>

$$u_{\xi\xi} - \xi u = 0. \quad (6.5)$$

Для того, чтобы привести (6.4) к виду, удобному для получения асимптотики, сделаем замену  $t = z\sqrt{\xi}$ . Получим

$$\text{Ai}(\xi) = \frac{\sqrt{\xi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi^{3/2}\left(z + \frac{z^3}{3}\right)} dz.$$

Обозначим  $\lambda = \xi^{3/2}$  и будем исследовать асимптотику интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\left(z + \frac{z^3}{3}\right)} dz. \quad (6.6)$$

В соответствии с (6.1) обозначим  $S(z) = i\left(z + \frac{z^3}{3}\right)$ . При больших значениях  $\lambda$  подынтегральная функция быстро осциллирует. Вместе с тем применить метод стационарной фазы непосредственно к интегралу (6.6) не удастся, так как производная  $S'(z) = i(1 + z^2)$  не обращается в нуль ни в одной точке действительной оси. Однако  $S'(z)$  обращается в нуль в точках  $z = \pm i$ , лежащих в комплексной плоскости.

Выпишем действительную и мнимую части функции  $S(z)$ ,  $z = x + iy$ ,

$$\text{Re}[S(z)] \equiv U(x, y) = -y \left( 1 + x^2 - \frac{1}{3}y^2 \right);$$

$$\text{Im}[S(z)] \equiv V(x, y) = x \left( 1 + \frac{1}{3}x^2 - y^2 \right).$$

Через точку  $z = i$  ( $x = 0$ ,  $y = 1$ ) проходит две линии, на которых  $V(x, y)$  постоянна. Одна из них совпадает с мнимой осью, вторая

---

<sup>1</sup>Уравнение (6.5) возникает, например, в задачах квантовой механики, где оно описывает поведение собственных функций в потенциальной яме со стенками, заданными линейными функциями.

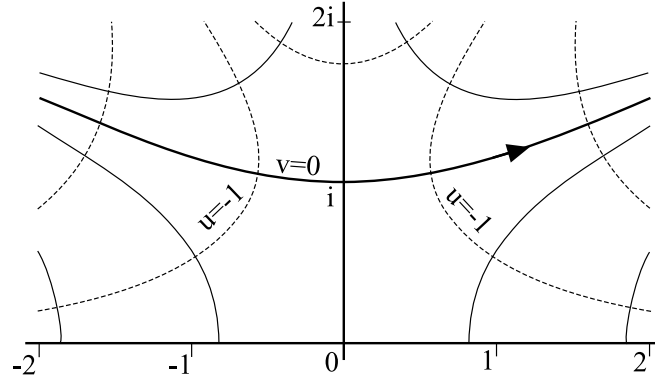


Рис. 6.2: Путь интегрирования, на котором мнимая часть функции  $S(t)$  постоянна и равна нулю

является гиперболой

$$\gamma: \quad y^2 - \frac{1}{3}x^2 = 1.$$

На каждой из них значение  $V(x, y)$  равно нулю. Для действительной части точка  $z = i$  является точкой перевала, причем для гиперболы  $\gamma$  точка перевала является максимумом  $U(x, y)$ .

Заменим интеграл по действительной оси интегралом по  $\gamma$  (строгое обоснование возможности такого перехода предлагается в качестве упражнения). На гиперболе введем параметризацию  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , причем  $x = \sqrt{3} \operatorname{sh} t$ ,  $y = \operatorname{ch} t$ ,  $t \in (-\infty; \infty)$ . Тогда

$$U(z(t)) = -\operatorname{ch} t \left( \frac{8}{3} \operatorname{ch}^2 t - 2 \right), \quad V(z(t)) = 0,$$

$$dz = (\sqrt{3} \operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t) dt.$$

Получаем

$$\int_{\gamma} e^{i\lambda \left( z + \frac{z^3}{3} \right)} dz = \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{3} \operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t) e^{-\lambda \operatorname{ch} t \left( \frac{8}{3} \operatorname{ch}^2 t - 2 \right)} dt.$$

К последнему интегралу можно применить метод Лапласа. Имеем

$$\varphi(t) = (\sqrt{3} \operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t), \quad h(t) = -\operatorname{ch} t \left( \frac{8}{3} \operatorname{ch}^2 t - 2 \right).$$

Для формулы, описывающей основной член разложения, необходимо посчитать значения

$$\varphi(0) = \sqrt{3}, \quad h(0) = -2/3, \quad h''(0) = -6.$$

Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\int_{\gamma} e^{i\lambda(z + \frac{z^3}{3})} dz \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} e^{-2\lambda/3} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-2\lambda/3}.$$

Возвращаясь к функции Эйри и переменной  $\xi$ , получаем

$$\operatorname{Ai}(\xi) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \xi^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{2}{3} \xi^{3/2} \right\}, \quad \xi \rightarrow +\infty.$$

### 6.3 Геометрический смысл $S''(z)$ в окрестности точки перевала. Основная формула метода перевала

Оказывается, что для применения метода перевала нет необходимости вводить полную параметризацию всей линии  $\operatorname{Im} S(z) \equiv V(z) = V(z_0)$ , где  $z_0$  - точка перевала, как это было сделано в примере, разобранным выше. Так как основной вклад в интеграл вносит окрестность точки перевала, рассмотрим поведение функции  $S(z)$  в этой окрестности. В силу того, что  $S'(z_0) = 0$ , в окрестности  $z_0$  справедливо представление

$$S(z) = S(z_0) + \frac{S''(z_0)}{2} (z - z_0)^2 + o((z - z_0)^2).$$

Соответственно, с точностью до членов третьего порядка малости,  $V(z) = V(z_0)$  там, где

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{S''(z_0)}{2} (z - z_0)^2 \right] = 0.$$

Пусть  $S''(z_0) = R_0 e^{i\psi_0}$ ,  $R_0 = |S''(z_0)|$ ,  $\psi_0 = \arg S''(z_0)$ ,  $z - z_0 = \rho e^{i\phi}$ . Тогда

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{S''(z_0)}{2} (z - z_0)^2 \right] = \frac{1}{2} R_0 \rho \cos(2\phi + \psi_0);$$

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{S''(z_0)}{2} (z - z_0)^2 \right] = \frac{1}{2} R_0 \rho \sin(2\phi + \psi_0).$$

Таким образом, локальный анализ в окрестности точки перевала  $z_0$  позволяет выявить следующую картину (см. Рис.6.3). Имеются две кривые,  $C_A$  и  $C_B$ , проходящие через  $z_0$ , на которых  $V(z) = V(z_0)$ . В окрестности  $z_0$  локально  $C_A$  и  $C_B$  задаются уравнениями

$$(A) \quad \arg(z - z_0) = \frac{\pi - \psi_0}{2}; \quad (B) \quad \arg(z - z_0) = -\frac{\psi_0}{2},$$

то есть  $C_A$  и  $C_B$  перпендикулярны друг другу в точке  $z_0$ . В случае (A) выполняется соотношение

$$\cos(2\phi + \psi_0) = -1,$$

следовательно, действительная часть  $S(z)$  на  $C_A$  имеет максимум в точке  $z_0$ . Соответственно, в случае (B)

$$\cos(2\phi + \psi_0) = 1,$$

и действительная часть  $S(z)$  имеет на  $C_B$  минимум в точке  $z_0$ . Таким образом, необходимая нам кривая - это кривая  $C_A$ . Касательная к ней образует в точке  $z_0$  угол

$$\phi = \frac{\pi - \arg S''(z_0)}{2} \quad (6.7)$$

с положительным направлением действительной оси.

Возьмем теперь некоторый «кусочек» кривой  $C_A$ , содержащий точку  $z_0$  (его также будем обозначать  $C_A$ , будем также предполагать, что других критических точек на  $C_A$  нет). Справедливо равенство

$$\int_{C_A} \varphi(z) e^{\lambda S(z)} dz = e^{i\lambda V(z_0)} \int_{C_A} \varphi(z) e^{\lambda U(z)} dz.$$

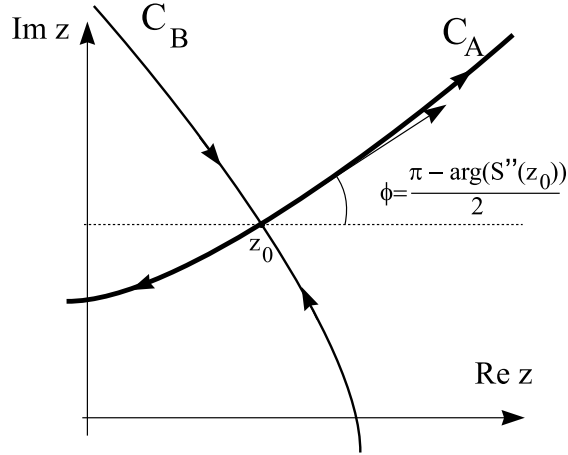


Рис. 6.3: Кривые  $C_A$  и  $C_B$ , проходящие через  $z_0$ , на которых  $\text{Im } S(z) = \text{const}$ . Стрелками указано направление уменьшения  $\text{Re } S(z)$ .

Введем на  $C_A$  параметризацию  $z = z(t)$ , такую, что  $z(0) = z_0$ . Имеем

$$\int_{C_A} \varphi(z) e^{\lambda U(z)} dz = \int_a^b \varphi(z(t)) e^{\lambda U(z(t))} z_t(t) dt,$$

где  $a$  и  $b$  - некие пределы интегрирования, а  $z_t(t) \equiv \frac{dz}{dt}(t)$ . Основной вклад в интеграл, однако, будет вносить окрестность точки  $t = 0$ . Используя метод Лапласа, получаем

$$\int_a^b \varphi(z(t)) e^{\lambda U(z(t))} z_t(t) dt = e^{\lambda U(z_0)} \left( \varphi(z_0) z_t(0) \sqrt{\frac{2\pi}{|U_0|\lambda}} + o(\lambda^{-1/2}) \right),$$

где

$$U_0 = \left. \frac{d^2 U(z(t))}{dt^2} \right|_{t=0}.$$

Упростим полученную формулу. В силу того, что  $V(z)$  на кривой  $C_A$

постоянна,  $V(z(t)) \equiv \text{const}$ . Тогда

$$\frac{d^2 U(z(t))}{dt^2} = \frac{d^2 S(z(t))}{dt^2} = S''(z(t))z_t^2(t) + S'(z(t))z_{tt}(t).$$

Так как  $S'(z_0) = 0$ , имеем

$$U_0 = S''(z_0)z_t^2(0).$$

Далее, с точностью до членов второго порядка по  $t$  можно считать, что  $C_A$  является в окрестности  $z_0$  отрезком прямой и параметризуется следующим образом:

$$z(t) - z_0 = t \exp \left\{ \frac{i(\pi - \psi_0)}{2} \right\} + o(t^2), \quad z_t(0) = \exp \left\{ \frac{i(\pi - \psi_0)}{2} \right\}.$$

Отсюда следует, что  $|U_0| = |S''(z_0)|$ . Окончательно, получаем

$$\begin{aligned} \int_{C_A} \varphi(z) e^{\lambda S(z)} dz &= \\ &= \pm e^{\lambda S(z_0)} \left( i \varphi(z_0) \exp \left\{ -\frac{i \arg S''(z_0)}{2} \right\} \sqrt{\frac{2\pi}{|S''(z_0)|\lambda}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Здесь знак «плюс» или «минус» выбирается в зависимости от направления прохождения кривой  $C_A$ . Знак «плюс» ставится в случае, когда это направление соответствует направлению, задаваемому аргументом  $S''(z_0)$ .

Наиболее «деликатным» вопросом теперь является обоснование перехода от интеграла по исходной кривой  $C$  к интегралу по кривой  $C_A$ , содержащей критическую точку. Помимо использования аналитичности подынтегральной функции, здесь обычно приходится оценивать интегралы по вспомогательным кривым, позволяющим перейти с  $C$  на  $C_A$  и обратно. Универсальных «рецептов» для таких оценок, скорее всего, не существует. В большинстве случаев оказываются полезны традиционные для комплексного анализа «трюки»: использование леммы Жордана, замена переменной, грубые качественные оценки.

## 6.4 Примеры применения метода перевала

ПРИМЕР 6.1. Найдем асимптотику при  $\lambda \rightarrow \infty$  интеграла

$$F(\lambda) = \int_C \frac{e^{i\lambda(z + \frac{i}{z})}}{z} dz, \quad (6.9)$$

где  $C$  - произвольный замкнутый контур, охватывающий точку  $z = 0$ . Подынтегральная функция имеет особенности при  $z = 0$  и  $z = \infty$ , причем обе эти точки являются существенными особыми точками. Соответственно, по теореме Коши, деформация замкнутого контура, при которой точка  $z = 0$  остается внутри него, не влияет на значение интеграла, который, в свою очередь, равен

$$F(\lambda) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{i\lambda(z + \frac{i}{z})}}{z}.$$

Указанный вычет может быть записан в виде сходящегося ряда по степеням  $\lambda$  (см. задачу 6.4), однако это представление не позволяет описать асимптотику  $F(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Применим для получения асимптотики  $F(\lambda)$  метод перевала. Имеем

$$S(z) = i \left( z + \frac{i}{z} \right); \quad S'(z) = i \left( 1 - \frac{i}{z^2} \right); \quad S''(z) = -\frac{2}{z^3}.$$

В комплексной плоскости имеются две точки, в которых  $S'(z)$  обращается в нуль:  $z_1 = e^{i\pi/4}$  и  $z_2 = e^{-3i\pi/4}$ , при этом  $S(z_1) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ,  $S(z_2) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ . Каждая из точек  $z_1$  и  $z_2$  является для функции  $U(x, y) \equiv \operatorname{Re} S(z)$  точкой перевала. Это означает, что через каждую из этих точек проходит пара кривых, на каждой из которых  $\operatorname{Im} S(z) \equiv V(x, y) = \operatorname{const}$ . При этом на кривых, проходящих через  $z_1$ , имеем  $V(x, y) \equiv \sqrt{2}$ , а кривые, проходящие через  $z_2$ , выделяются равенством  $V(x, y) \equiv -\sqrt{2}$ .

Для применения метода перевала подберем замкнутый контур, охватывающий точку  $z = 0$ , проходящий через  $z_2$  и локально, в окрестности  $z_2$ , совпадающий с одной из двух кривых  $V(x, y) \equiv -\sqrt{2}$  (эта кривая должна быть правильно выбрана из двух возможных — детали см. ниже). Теоретически, этот контур может проходить также



через другую точку  $z_1$ , но, в соответствии с формулой (6.8) вклад от окрестности точки  $z_1$  окажется значительно меньшего порядка, так как  $\operatorname{Re} S(z_2) > \operatorname{Re} S(z_1)$ . Поэтому точку  $z_1$  мы полностью исключим из рассмотрения.

Кривые, проходящие через точку  $z_2$  задаются в неявном виде уравнением

$$V(x, y) \equiv x + \frac{x}{x^2 + y^2} = -\sqrt{2}.$$

Для упрощения анализа их можно построить численно (Рис.6.4, мелкая пунктирная линия). Выбор «правильной» кривой, проходящей через  $z_2$ , необходимо сделать при помощи формулы (6.7), описывающей направление касательной к этой кривой. Имеем

$$S''(e^{-3i\pi/4}) = -2e^{i\pi/4} = 2e^{5i\pi/4}, \quad \phi = \frac{\pi - 5\pi/4}{2} = -\pi/8.$$

Это позволяет указать направления возрастания и убывания действительной части  $S(z) = U(x, y)$  на найденных кривых (см. стрелки на построенных пунктирных линиях). На «правильной» кривой (обозначена  $\gamma$  на Рис.6.4) точка  $z_2$  является точкой максимума  $U(x, y)$ . Вместе с тем «правильная» кривая  $\gamma$  не является замкнутым контуром, охватывающим точку  $z = 0$ . Поэтому необходимо выбрать подходящий фрагмент этой кривой и его дополнить дугой, такой, чтобы в результате этого дополнения контур замкнулся, а вклад от интегрирования по этой дуге был бы меньше чем вклад от окрестности точки перевала.

Для построения такой дуги выделим на комплексной плоскости область  $G$ , в которой  $\operatorname{Re} S(z) = U(x, y) \leq 0$  (серая область на Рис.6.4). Граница области  $G$  задается в неявном виде уравнением

$$y + \frac{x}{x^2 + y^2} = 0.$$

Нетрудно показать, что эта граница представляет собой кривую, симметричную относительно точки  $z = 0$ , которая асимптотически приближается к действительной оси при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Из Рис.6.4 следует, что кривая  $\gamma$  пересекается с границей области  $G$  таким образом, что можно построить замкнутый контур, охватывающий точку  $z = 0$

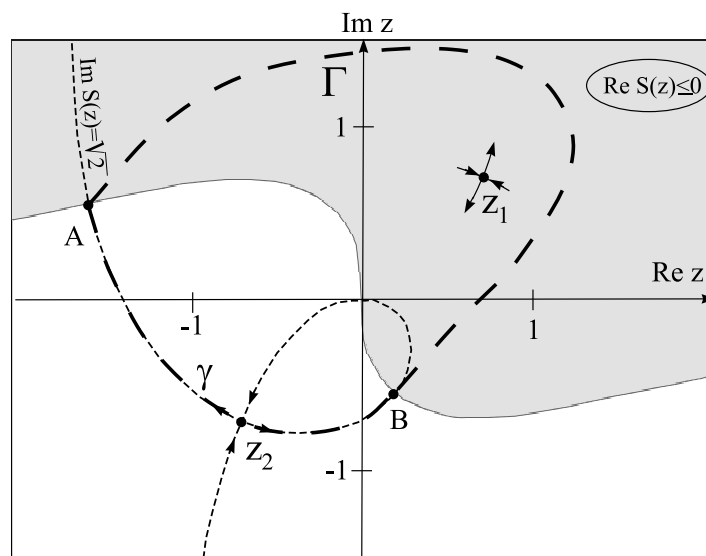


Рис. 6.4: К примеру 6.1. Мелким пунктиром показаны кривые, проходящие через точку  $z_2$  на которых  $\text{Im } S(z) = \sqrt{2}$ . Нужной кривой является кривая  $\gamma$ , на которой  $z_2$  является точкой максимума  $\text{Re } S(z)$  (направление увеличения  $\text{Re } S(z)$  на пунктирных кривых показано стрелками). Серым цветом выделена область, в которой  $\text{Re } S(z) \leq 0$ . Контур интегрирования, к которому применяется метод перевала, состоит из фрагмента кривой  $\gamma$  между точками  $A$  и  $B$  и дуги  $\Gamma$ , целиком лежащей в «серой» области

и состоящий из фрагмента кривой  $\gamma$ , заключенного между точками  $A$  и  $B$ , и дуги  $\Gamma$ , лежащей строго в области  $G$ . Справедлива очевидная оценка

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{e^{i\lambda(z+\frac{z}{z})}}{z} dz \right| \leq \max_{z \in \Gamma} \frac{L}{|z|}.$$

где  $L$  - длина дуги  $\Gamma$ . Асимптотику интеграла по фрагменту  $\gamma$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  можно получить с помощью формулы (6.8). Имеем  $|S''(z_2)| = 2$ ,  $\arg S''(z_2) = 5\pi/4$ , и

$$F(\lambda) = e^{\sqrt{2}\lambda(1-i)} \left( e^{5\pi i/8} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right). \quad (6.10)$$

Численная проверка при помощи Maple показывает, что уже при  $\lambda = 10$  ошибка формулы (6.10) составляет около 0.2%.

ПРИМЕР 6.2. Найдем асимптотику при  $\omega \rightarrow \infty$  интеграла<sup>1</sup>

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^4}{4} + i\omega x} dx,$$

представляющего собой преобразование Фурье от функции  $f(x) = e^{-x^4/4}$ . Заменой  $x = \omega^{1/3}z$  интеграл сводится к виду

$$\mathcal{F}(\omega) = \omega^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega^{4/3}(iz - \frac{z^4}{4})} dz.$$

Введем  $\lambda = \omega^{4/3}$  и изучим асимптотику интеграла

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(iz - \frac{z^4}{4})} dz$$

при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Ключевую роль теперь играет функция  $S(z) = iz - \frac{z^4}{4}$ . Ее производная  $S'(z) = i - z^3$  обращается в нуль в точках

$$z_1 = e^{\frac{i\pi}{6}}, \quad z_2 = e^{\frac{5i\pi}{6}}, \quad z_3 = -i.$$

---

<sup>1</sup> Исследование асимптотики преобразования Фурье функции  $f(t) = e^{-x^{2n}/2n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n > 1$ , приводится в нескольких русскоязычных справочниках и пособиях по асимптотическому анализу (автору удалось найти четыре источника). В трех из них в окончательной формуле имеются различные опечатки. Правильная формула содержится в книге [17]. В классических англоязычных учебниках по асимптотическому анализу этой задачи найти не удалось.

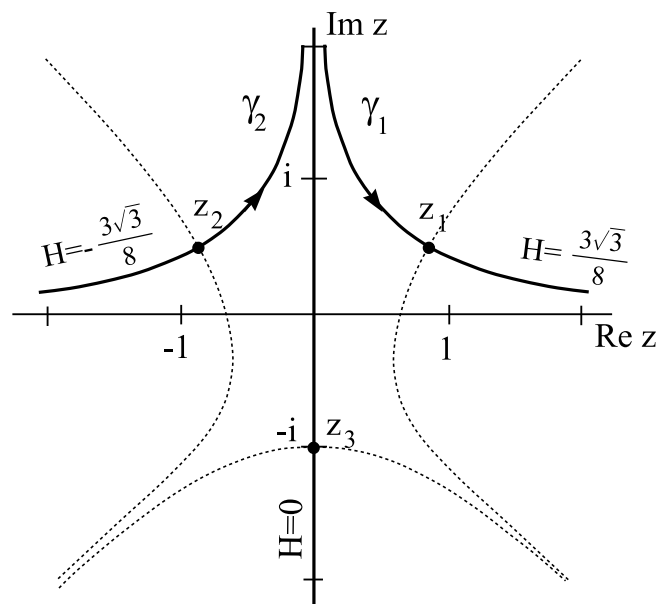


Рис. 6.5: К вычислению асимптотики преобразования Фурье от  $f(t) = e^{-x^4/4}$ . Интегрирование по действительной оси заменяется интегрированием по кривым  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , на каждой из которых мнимая часть функции  $S(z) = iz - \frac{z^4}{4}$  постоянна

Линии, на которых  $\text{Im } S(z) = H$ ,  $z = x + iy$ , описываются уравнением

$$x - x^3y + xy^3 = H. \quad (6.11)$$

При этом  $H = \frac{3\sqrt{3}}{8}$  для кривых, проходящих через  $z_1$ ,  $H = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$  для кривых, проходящих через  $z_2$ , и  $H = 0$  для линий, проходящих через  $z_3$ . В соответствии с результатами параграфа 6.3, для каждой из точек  $z_{1,2,3}$  таких кривых две, при этом на одной из них  $\text{Re } S(z)$  имеет в критической точке минимум, а на другой - максимум. Как и раньше, нас будут интересовать кривые, на которых в критической точке имеется максимум. Выяснить, какая из двух кривых нам нужна, можно посчитав угол наклона касательной в этой точке для каждой из них по формуле (6.7). Имеем

$$\phi(z_1) = -\frac{\pi}{6}, \quad \phi(z_2) = \frac{\pi}{6}, \quad \phi(z_3) = \frac{\pi}{2}.$$

Все необходимые кривые удобно построить численно, см. Рис.6.5. На Рис.6.5 линии, на которых  $\text{Re } S(z)$  имеет максимум, выделены. Из формулы (6.11) нетрудно сделать вывод, что кривая  $\gamma_2$  асимптотически приближается к действительной оси при  $x \rightarrow -\infty$ , и к мнимой оси - при  $y \rightarrow +\infty$ . Аналогично, кривая  $\gamma_1$  приближается к действительной оси при  $x \rightarrow +\infty$ , и к мнимой оси - при  $y \rightarrow +\infty$ .

Интеграл по действительной оси можно заменить на сумму интегралов по кривым  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (см. Рис.6.5). При нахождении асимптотики необходимо сложить вклады от точек перевала  $z_1$  и  $z_2$ , вычисленные по формуле (6.8). Имеем:

1. Вклад  $F_1(\lambda)$  в главный член асимптотики от точки  $z_1$ , берется со знаком «плюс»:

$$S(z_1) = ie^{\frac{i\pi}{6}} - \frac{1}{4}e^{\frac{4i\pi}{6}} = \frac{3i}{4}e^{\frac{i\pi}{6}}, \quad S''(z_1) = -3e^{\frac{i\pi}{3}}; \quad \arg S''(z_1) = \frac{4\pi}{3};$$

$$F_1(\lambda) = i \exp \left\{ \frac{3i}{4} \lambda e^{\frac{i\pi}{6}} \right\} \cdot e^{-\frac{2i\pi}{3}} \sqrt{\frac{2\pi}{3\lambda}}.$$

2. Вклад  $F_2(\lambda)$  в главный член асимптотики от точки  $z_2$ , также берется со знаком «плюс»:

$$S(z_2) = ie^{\frac{5i\pi}{6}} - \frac{1}{4}e^{\frac{20i\pi}{6}} = \frac{3i}{4}e^{\frac{5i\pi}{6}}, \quad S''(z_2) = 3e^{\frac{2i\pi}{3}}; \quad \arg S''(z_2) = \frac{2\pi}{3};$$

$$F_2(\lambda) = i \exp \left\{ \frac{3i}{4} \lambda e^{\frac{5i\pi}{6}} \right\} \cdot e^{-\frac{i\pi}{3}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{3\lambda}}.$$

Складывая вклады от точек  $z_1$  и  $z_2$ , получаем

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) + F_2(\lambda) &= \\ &= i\sqrt{\frac{2\pi}{3\lambda}} \left( \exp \left\{ \frac{3i\lambda}{4} e^{\frac{i\pi}{6}} - \frac{2i\pi}{3} \right\} + \exp \left\{ \frac{3i\lambda}{4} e^{\frac{5i\pi}{6}} - \frac{i\pi}{3} \right\} \right) = \\ &= i\sqrt{\frac{2\pi}{3\lambda}} \left( \exp \left\{ \frac{3i\lambda}{4} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) - \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{6} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \exp \left\{ \frac{3i\lambda}{4} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) - \frac{i\pi}{2} - \frac{i\pi}{6} \right\} \right) = \\ &= i\sqrt{\frac{2\pi}{3\lambda}} \exp \left\{ -\frac{3}{8}\lambda - \frac{i\pi}{2} \right\} \cdot 2 \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda - \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 2\sqrt{\frac{2\pi}{3\lambda}} \exp \left\{ -\frac{3}{8}\lambda \right\} \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{8}\lambda - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходной переменной  $\omega$ , имеем при  $\omega \rightarrow \infty$

$$\mathcal{F}(\omega) \sim 2\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \omega^{-1/3} \exp \left\{ -\frac{3}{8}\omega^{4/3} \right\} \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{8}\omega^{4/3} - \frac{\pi}{6} \right). \quad (6.12)$$

Численная проверка результата показывает, что при  $\omega = 5$  формула (6.12) дает приближение к точному результату с относительной погрешностью в 7%, а при  $\omega = 10$  относительная погрешность оказывается равной 0.5%.

### Задачи к разделу 6

**6.1.** Нарисуйте схематически линии уровня  $U(x, y) = \text{const}$  и  $V(x, y) = \text{const}$  для функций

$$(a) S(z) = iz^2; \quad (b) S(z) = \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right); \quad (c) S(z) = i \operatorname{ch} z.$$

Результат проверьте при помощи компьютера.

**6.2.** Найдите главный член асимптотики преобразования Фурье функции  $f(x) = P(x)e^{-x^2}$ , где  $P(x)$  - многочлен

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

**6.3.** Для каждого из интегралов найдите главный член асимптотики при  $\lambda \rightarrow \infty$

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda t^4}{4}} \cos\left(\frac{\lambda t^2}{2}\right) dt, \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda t^2}{2}} \cos\left(\frac{\lambda t^4}{4}\right) dt,$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(\frac{1}{3}t^3+t)}}{1+t^4} dt, \quad (d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(\frac{1}{5}t^5+t)}}{1+t^2} dt.$$

**6.4.** Покажите, что  $F(\lambda)$  из примера 6.1 является аналитической функцией  $\lambda$  во всей комплексной плоскости, представленной степенным рядом

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k \lambda^{2k}}{(k!)^2},$$

который абсолютно сходится при всех  $\lambda$ .

**6.5.** Найдите главный член асимптотики при  $\lambda \rightarrow \infty$  интегралов

$$(a) \int_C \frac{e^{i\lambda(z+\frac{1}{z})}}{z} dz, \quad (b) \int_C e^{i\lambda(2z-\frac{1}{z^2})} dz,$$

где  $C$  - замкнутый контур, содержащий точку  $z = 0$ .

**6.6.** Найдите главный член асимптотики интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{(1+t^2)^\lambda} dt.$$

*Указание:* перепишите подынтегральное выражение в виде

$$\exp\{\lambda(it - \ln(1+t^2))\}.$$

**6.7.** Найдите главный член асимптотики интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda(e^t - 2it)} dt.$$

*Указания:*

- найдите стационарные точки функции  $S(t) = -e^t + 2it$  в комплексной плоскости;
- постройте линии  $\operatorname{Im} S(t) = \operatorname{const}$ , проходящие через них (использование компьютера вполне уместно);
- покажите, что интеграл по отрезку, соединяющему точку  $t = 0$  с подходящей линией, проходящей через точку перевала, по порядку величины больше, чем вклад от точки перевала и что основной вклад в асимптотику вносит окрестность точки  $t = 0$ .

**6.8.** Найдите главный член асимптотики интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda i(\operatorname{sh} t - \frac{1}{2}t)} dt.$$

*Указания:*

- найдите стационарные точки функции

$$S(t) = i \left( \operatorname{sh} t - \frac{1}{2}t \right)$$

в комплексной плоскости;

- постройте линии  $\operatorname{Im} S(t) = \operatorname{const}$ , проходящие через них;
- покажите, что интеграл по действительной оси равен интегралу по одной из линий, проходящей через точку перевала и основной вклад в асимптотику дает именно точка перевала.



## Глава 7

### Исследование асимптотики коэффициентов рядов Фурье и интегралов Фурье

В настоящее время, по всей видимости, ни одно серьезное исследование, от теоретической физики до экономики, не обходится без привлечения методов Фурье-анализа. Напомним некоторые формулы.

1. Если функция  $f(t)$  является  $2\pi$ -периодической, то ее разложение в ряд Фурье по системе функций  $\{1, \cos kt, \sin kt\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \quad (7.1)$$

где коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  представляются следующими интегралами

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt;$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

2. Разложение в ряд Фурье по системе экспонент  $\{e^{ikx}\}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$   $2\pi$ -периодической функции  $f(t)$  имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}. \quad (7.2)$$

Коэффициенты  $c_k$  при этом равны

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Если функция является периодической, но имеет период  $2L$ , где  $L$  не обязательно равно  $\pi$ , масштабирование независимой переменной приводит к похожим формулам. Формула (7) принимает вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k t}{L} + b_k \sin \frac{\pi k t}{L},$$

где коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  представляются интегралами

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{\pi k t}{L} dt;$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{\pi k t}{L} dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

Формула (7.2) переписывается в виде

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{\pi k t}{L}},$$

при этом  $c_k$  равны

$$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-\frac{\pi k t}{L}} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3. Преобразование Фурье функции  $f(t)$ , заданной на  $\mathbb{R}$ , определяется формулой

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (7.3)$$

При этом при некоторых ограничениях на функцию  $f(t)$ , возможно восстановление  $f(t)$  по  $F(\omega)$ ,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Вычисление явного вида коэффициентов ряда Фурье или преобразования Фурье, как правило, непросто, если вообще возможно. Часто результат представляется в виде громоздких формул и выражается через сложные спецфункции. Вместе с тем, для практического применения в большом количестве приложений оказывается достаточным знать лишь *асимптотические свойства* коэффициентов ряда Фурье (при  $n \rightarrow \infty$ ) или преобразования Фурье (при  $\omega \rightarrow \pm\infty$ ). Здесь центральную роль играет следующее наблюдение ([18], раздел 2.6).

**Принцип Дарбу.** *Основной порядок асимптотики коэффициентов ряда Фурье (при  $n \rightarrow \infty$ ) или преобразования Фурье (при  $\omega \rightarrow \pm\infty$ ) некоторой функции  $f(t)$  определяется поведением аналитического продолжения  $f(z)$  этой функции в окрестности ее ближайшей к действительной оси особой точки.*

Принцип Дарбу замечателен своей общностью. Особые точки могут иметь различный тип (наиболее часто встречаются полюса и точки ветвления), он и определяет конкретный вид асимптотической формулы. Принцип Дарбу оказывается справедливым не только для тригонометрических рядов, но и для разложений по другим ортогональным системам.

В этой главе мы проиллюстрируем справедливость принципа Дарбу на примерах нескольких тригонометрических рядов и интегралов Фурье.

## 7.1 Асимптотика коэффициентов ряда Фурье

**ПРИМЕР 7.1.** Рассмотрим разложение в ряд Фурье следующей  $2\pi$ -периодической функции

$$f(t) = \frac{\operatorname{ch} 2 - \operatorname{ch} 1}{(\operatorname{ch} 1 - \cos t)(\operatorname{ch} 2 - \cos t)}.$$

Коэффициенты разложения нетрудно найти, используя явные формулы. Так как  $f(t)$  - четная функция, то все  $b_k = 0$ . Для вычисления

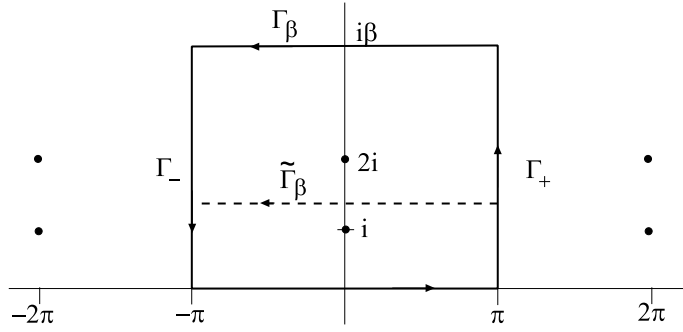


Рис. 7.1: К примеру 7.1

$a_k$ ,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\operatorname{ch} 2 - \operatorname{ch} 1) \cos kt}{(\operatorname{ch} 1 - \cos t)(\operatorname{ch} 2 - \cos t)} dt =$$

$$= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\operatorname{ch} 2 - \operatorname{ch} 1) e^{ikt}}{(\operatorname{ch} 1 - \cos t)(\operatorname{ch} 2 - \cos t)} dt \right],$$

продолжим функцию  $f(t)$  в комплексную плоскость. Особыми точками аналитического продолжения  $f(z)$  подынтегральной функции в верхнюю полуплоскость являются точки  $z = i + 2\pi m$  и  $z = 2i + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Все они оказываются полюсами 1-го порядка. Рассмотрим интеграл от функции  $f(z)$  по контуру  $C$ , изображенному на Рис.7.1 и состоящему из отрезка действительной оси между точками  $-\pi$  и  $\pi$ , вертикальных отрезков  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  и «перемычки»  $\Gamma_\beta$ ,  $\beta > 2$ . По теореме Коши о вычетах имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\Gamma_+} + \int_{\Gamma_\beta} + \int_{\Gamma_-} f(z) e^{ikz} dz = 2\pi i \left( \operatorname{Res}_{z=i} [f(z) e^{ikz}] + \operatorname{Res}_{z=2i} [f(z) e^{ikz}] \right).$$

В силу  $2\pi$ -периодичности  $f(z)$  интегралы по отрезкам  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  взаимно уничтожаются. Для дальнейшего важно то, что при  $k \geq 1$  спра-

ведлива оценка

$$\left| \int_{\Gamma_\beta} f(z) e^{ikz} dz \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\eta + i\beta) e^{ik(\eta + i\beta)} \right| d\eta \leq M_\beta e^{-\beta k}, \quad (7.4)$$

где

$$M_\beta = 2\pi \max_{\eta \in [-\pi; \pi]} |f(\eta + i\beta)|.$$

Нетрудно убедиться, что  $f(x + iy) \rightarrow 0$  при  $x$  фиксированном, а  $y$  стремящемся к  $+\infty$ . Вследствии этого  $M_\beta \rightarrow 0$  при  $\beta \rightarrow +\infty$ . Устремляя  $\beta$  к бесконечности, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(z) e^{ikz} dz = 2\pi i \left( \operatorname{Res}_{z=i} [f(z) e^{ikz}] + \operatorname{Res}_{z=2i} [f(z) e^{ikz}] \right).$$

Так как

$$\operatorname{Res}_{z=i} [f(z) e^{ikz}] = \frac{e^{-k}}{\sin i} = -\frac{ie^{-k}}{\operatorname{sh} 1}, \quad \operatorname{Res}_{z=2i} [f(z) e^{ikz}] = -\frac{e^{-2k}}{\sin 2i} = \frac{ie^{-2k}}{\operatorname{sh} 2},$$

то

$$a_k = \frac{2e^{-k}}{\operatorname{sh} 1} - \frac{2e^{-2k}}{\operatorname{sh} 2}. \quad (7.5)$$

Нетрудно убедиться, что формула (7.5) остается верна и при  $k = 0$ . Заметим, что экспоненциальное убывание коэффициентов  $a_k$  при  $k \rightarrow \infty$  хорошо описывается первым членом формулы (7.5).

Опустим теперь «перемычку» на «уровень» *между* полюсами  $z = i$  и  $z = 2i$ . На Рис.7.1 новая горизонтальная «перемычка» обозначена  $\tilde{\Gamma}_\beta$  и изображена пунктиром. Она проходит через точку  $z = i\beta$ ,  $1 < \beta < 2$ . Теперь в контур входит только один полюс,  $z = i$ . Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\Gamma_+} + \int_{\tilde{\Gamma}_\beta} + \int_{\Gamma_-} f(z) e^{ikz} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} [f(z) e^{ikz}].$$

При этом по формуле (7.4)

$$\left| \int_{\tilde{\Gamma}_\beta} f(z) e^{ikz} dz \right| = o(e^{-k}), \quad k \rightarrow \infty.$$

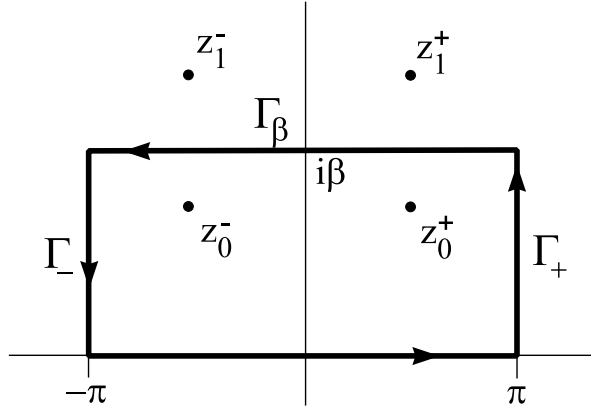


Рис. 7.2: К примеру 7.2

Вновь применяя теорему Коши, имеем

$$a_k = \frac{2e^{-k}}{\operatorname{sh} 1} + o(e^{-k}), \quad k \rightarrow \infty,$$

что, конечно, согласуется с (7.5). Важно, что для последнего вывода нам потребовалась информация *только* о ближайшей к действительной оси особой точке функции  $f(z)$ , расположенной в верхней полуплоскости в полосе  $-\pi \leq \operatorname{Re} z \leq \pi$ , что соответствует сформулированному выше принципу Дарбу.

**ПРИМЕР 7.2.** Рассмотрим разложение в ряд Фурье функции

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{\cos t}}. \quad (7.6)$$

Функция  $f(t)$  является четной, поэтому  $b_k = 0$  при всех  $k$ . Вместе с тем трудно ожидать, что коэффициенты  $a_k$  могут быть вычислены в явном виде.

Исследуем асимптотику коэффициентов  $a_k$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Имеем

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos kt}{1 + e^{\cos t}} dt = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ikt}}{1 + e^{\cos t}} dt \right].$$

$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$
-0.235571	$0.462009 \cdot 10^{-2}$	$-0.109840 \cdot 10^{-3}$	$0.264571 \cdot 10^{-5}$
-0.188438	$0.454560 \cdot 10^{-2}$	$-0.109655 \cdot 10^{-3}$	$0.264521 \cdot 10^{-5}$

Таблица 7.1: Значения коэффициентов разложения Фурье для функции (7.6), численные (верхняя строчка) и асимптотические (нижняя строчка)

Продолжим функцию  $f(t)$  в комплексную плоскость. Как и в предыдущем примере, нас будет интересовать поведение аналитического продолжения  $f(z)$  в полуполосе  $-\pi \leq \operatorname{Re} z \leq \pi$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$ . Особые точки  $f(z)$  определяются уравнением  $\cos z = i(1 + 2n)\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , причем те из них, что лежат в рассматриваемой полуполосе определяются соотношениями

$$z_n^+ = \frac{\pi}{2} + i \ln \left( \pi(1 + 2n) + \sqrt{\pi^2(1 + 2n)^2 + 1} \right),$$

$$z_n^- = -\frac{\pi}{2} + i \ln \left( \pi(1 + 2n) + \sqrt{\pi^2(1 + 2n)^2 + 1} \right),$$

при этом

$$\cos z_n^+ = -i\pi(1 + 2n), \quad \sin z_n^+ = \sqrt{\pi^2(1 + 2n)^2 + 1},$$

$$\cos z_n^- = i\pi(1 + 2n), \quad \sin z_n^- = -\sqrt{\pi^2(1 + 2n)^2 + 1}.$$

Рассмотрим интеграл по контуру, представленному на Рис.7.2,

$$\int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\Gamma_+} + \int_{\Gamma_\beta} + \int_{\Gamma_-} f(z)e^{ikz} dz =$$

$$= 2\pi i \left( \operatorname{Res}_{z=z_0^-} [f(z)e^{ikz}] + \operatorname{Res}_{z=z_0^+} [f(z)e^{ikz}] \right).$$

Интегралы по  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  взаимно уничтожаются. Для интеграла по  $\Gamma_\beta$ , как и в примере 7.1, справедлива оценка

$$\left| \int_{\tilde{\Gamma}_\beta} f(z)e^{ikz} dz \right| = o(e^{-\gamma k}), \quad k \rightarrow \infty,$$

где  $\gamma = \operatorname{Im} z_0^+ = \operatorname{Im} z_0^- = \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1})$ . Вычеты в точках  $z_0^\pm$  равны

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=z_0^+} \frac{e^{ikz}}{1+e^{\cos z}} &= -\frac{e^{ikz_0^+}}{\sin z_0^+ e^{\cos z_0^+}} = \frac{i^k e^{-k \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1})}}{\sqrt{\pi^2 + 1}}, \\ \operatorname{Res}_{z=z_0^-} \frac{e^{ikz}}{1+e^{\cos z}} &= -\frac{e^{ikz_0^-}}{\sin z_0^- e^{\cos z_0^-}} = -\frac{(-i)^k e^{-k \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1})}}{\sqrt{\pi^2 + 1}}.\end{aligned}$$

Окончательно, получаем, что ответы при  $k$  четном и  $k$  нечетном различны. Если  $k = 2m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , то вклады полюсов  $z_0^+$  и  $z_0^-$  взаимно уничтожаются,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{2imz} dz}{1+e^{\cos z}} = o\left(e^{-2m \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1})}\right), \quad m \rightarrow \infty. \quad (7.7)$$

При  $k = 2m + 1$  и  $m \rightarrow \infty$  имеем<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{(2m+1)iz} dz}{1+e^{\cos z}} &= \frac{4\pi \cdot (-1)^{m+1}}{\sqrt{\pi^2 + 1}} e^{-(2m+1) \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1})} + \\ &+ o\left(e^{-(2m+1) \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1})}\right).\end{aligned} \quad (7.9)$$

Результаты сравнения асимптотической формулы (7.9) с численным счетом приведены в таблице 7.1. Как видим, соответствие численных и асимптотических значений очень хорошее.

**ПРИМЕР 7.3.** Найдём асимптотику коэффициентов ряда Фурье для функции

$$f(t) = \frac{\ln(\operatorname{ch} 1 - \cos t)}{\operatorname{ch} 2 + \cos t}. \quad (7.10)$$

Функция  $f(t)$  является четной, поэтому  $b_k = 0$  при всех  $k$ . Исследуем

---

<sup>1</sup> Формула (7.7) позволяет предположить, что справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{2imz} dz}{1+e^{\cos z}} = 0. \quad (7.8)$$

Это действительно так: формула (7.8) справедлива при любых  $m > 0$ , а ее доказательство представляет собой неплохую олимпиадную задачу, (см. задачу 7.3), для решения которой, кстати, можно обойтись без применения методов теории функций комплексного переменного.



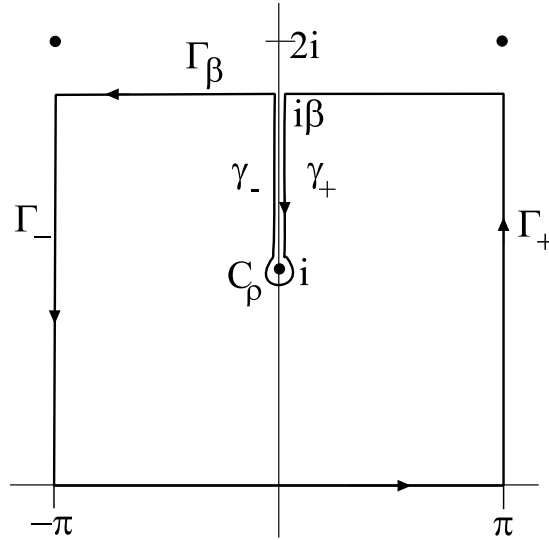


Рис. 7.3: К примеру 7.3

асимптотику коэффициентов  $a_k$  при  $k \rightarrow \infty$ ,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\ln(\operatorname{ch} 1 - \cos t)}{\operatorname{ch} 2 + \cos t} \cos kt \, dt = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\ln(\operatorname{ch} 1 - \cos t)}{\operatorname{ch} 2 + \cos t} e^{ikt} \, dt \right].$$

Рассмотрим аналитическое продолжение функции  $f(t)$  в верхнюю полуплоскость. В полуполосе  $-\pi \leq \operatorname{Re} z \leq \pi$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$  аналитическое продолжение  $f(z)$  имеет полюса первого порядка в точках  $z = \pm\pi + 2i$  и логарифмическую точку ветвления в  $z = i$ . Так как в окрестности точки ветвления функция неоднозначна, сделаем на комплексной плоскости разрез, идущий по мнимой оси вверх от точки  $z = i$ . Для нахождения асимптотики  $a_k$  используем контур, изображенный на Рис.7.3. Он состоит из

- отрезка действительной оси  $[-\pi; \pi]$ ;
- вертикальных отрезков  $\Gamma_+ : [\pi; \pi + i\beta]$  и  $\Gamma_- : [-\pi; -\pi + i\beta]$ , где  $1 < \beta < 2$ ;

- двух горизонтальных промежутков, помеченных на Рис. 7.3 единым обозначением  $\Gamma_\beta$ :  $[-\pi + i\beta; i\beta)$  и  $(i\beta; \pi + i\beta]$ ;
- двух вертикальных отрезков  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ , проходящих по обоим берегам разреза в противоположных направлениях;
- контура  $C_\rho$ , охватывающего точку ветвления  $z = i$  (для удобства изложения можно считать этот контур окружностью радиуса  $\rho$ ).

Так как  $f(z)$  аналитична внутри рассматриваемого контура, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\Gamma_+} + \int_{\Gamma_-} + \int_{\gamma_+} + \int_{\gamma_-} + \int_{C_\rho} + \int_{\Gamma_\beta} f(z)e^{ikz} dz = 0.$$

Заметим, что

- ◇ интегралы по  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  взаимно уничтожаются;
- ◇ как и в примерах 7.1 и 7.2, в силу того, что  $\beta > 1$ , имеем

$$\left| \int_{\Gamma_\beta} f(z)e^{ikz} dz \right| = o(e^{-k});$$

- ◇ на окружности  $C_\rho$  введем параметризацию

$$z = i + \rho e^{-i\varphi}, \quad \varphi \in [\pi/2; 5\pi/2].$$

Заметим, что

$$\operatorname{ch} 1 - \cos \left( i + \rho e^{-i\varphi} \right) = 2 \sin \left( \frac{\rho}{2} e^{-i\varphi} \right) \sin \left( i + \frac{\rho}{2} e^{-i\varphi} \right) \sim i \rho e^{-i\varphi} \operatorname{sh} 1;$$

$$\operatorname{ch} 2 + \cos \left( i + \frac{\rho}{2} e^{-i\varphi} \right) = \operatorname{ch} 2 + \operatorname{ch} 1 + O(\rho),$$

поэтому

$$|f(i + \rho e^{-i\varphi})| = \ln \rho + o(\ln \rho),$$

причем последняя оценка равномерна по  $\varphi$ . Отсюда следует, что при  $\rho \rightarrow 0$

$$\left| \int_{C_\rho} f(z)e^{ikz} dz \right| = \left| \int_{-\pi/2}^{5\pi/2} f(i + \rho e^{-i\varphi}) i \rho e^{-i\varphi} d\varphi \right| \rightarrow 0;$$

◊ на берегах разреза значения функции  $\ln(\operatorname{ch} 1 - \cos z)$  отличаются на  $2\pi i$  («набег» аргумента при обходе вокруг логарифмической точки ветвления). Так как обход производится по часовой стрелке, необходимо взять этот набег со знаком «минус».

Учитывая все вышесказанное, устремляя  $\rho$  к нулю, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(z) e^{ikz} dz = - \int_{\gamma_+} - \int_{\gamma_-} f(z) e^{ikz} dz + o(e^{-k}), \quad k \rightarrow \infty.$$

Обозначим

$$I(k) \equiv \int_{\gamma_+} + \int_{\gamma_-} f(z) e^{ikz} dz = \int_{i\beta}^i \frac{2\pi i e^{ikz}}{\operatorname{ch} 2 + \cos z} dz.$$

Исследуем интеграл  $I(k)$ . Замена  $z = i(y + 1)$  приводит  $I(k)$  к виду

$$I(k) = \int_{i\beta}^i \frac{2\pi i e^{ikz}}{\operatorname{ch} 2 + \cos z} dz = 2\pi e^{-k} \int_0^{\beta-1} \frac{e^{-ky} dy}{\operatorname{ch} 2 + \operatorname{ch}(y + 1)}.$$

Последний интеграл легко оценивается методом Лапласа. Повторяя рассуждения примера 4.3 из раздела 4.4, имеем

$$\int_0^{\delta} g(t) e^{-\lambda t} dt \stackrel{\text{as}}{\sim} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{k+1}} g^{(k)}(0), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

откуда получаем

$$I(k) = 2\pi e^{-k} \left( \frac{1}{k(\operatorname{ch} 2 + \operatorname{ch} 1)} - \frac{\operatorname{sh} 1}{k^2(\operatorname{ch} 2 + \operatorname{ch} 1)^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right).$$

Окончательно

$$a_k = -2e^{-k} \left( \frac{1}{k(\operatorname{ch} 2 + \operatorname{ch} 1)} - \frac{\operatorname{sh} 1}{k^2(\operatorname{ch} 2 + \operatorname{ch} 1)^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right).$$

Результаты численной проверки последней формулы приведены в таблице 7.2. Как и в предыдущем примере, наблюдается хорошее соответствие численных и асимптотических значений коэффициентов Фурье.

$a_2$	$a_6$	$a_{10}$	$a_{14}$
$-0.50761 \cdot 10^{-2}$	$-0.14359 \cdot 10^{-3}$	$-0.16686 \cdot 10^{-5}$	$-0.22015 \cdot 10^{-7}$
$-0.22684 \cdot 10^{-2}$	$-0.14999 \cdot 10^{-3}$	$-0.16736 \cdot 10^{-5}$	$-0.22037 \cdot 10^{-7}$

Таблица 7.2: Значения коэффициентов разложения Фурье для функции (7.10), численные (верхняя строчка) и асимптотические (нижняя строчка)

## 7.2 Асимптотика преобразования Фурье

Для получения асимптотических оценок преобразований Фурье

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

при  $\omega \rightarrow \infty$  можно использовать те же соображения, что и для получения оценок коэффициентов ряда Фурье. Рассмотрим два примера.

**ПРИМЕР 7.4.** Найдём асимптотику при  $\omega \rightarrow \infty$  преобразования Фурье функции  $f(t) = 1/\operatorname{ch} t$ ,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\operatorname{ch} t} dt.$$

Рассмотрим аналитическое продолжение  $t \rightarrow z$  в комплексную плоскость подынтегральной функции  $e^{i\omega z}/\operatorname{ch} z$ . Эта функция имеет полюса первого порядка в точках  $z = i(\pi/2 + \pi n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , порожденные нулями гиперболического косинуса. Рассмотрим интеграл по прямоугольнику  $\Gamma$ , образованному фрагментом действительной оси  $[-R; R]$ , параллельному ему отрезку  $[-R + i\beta; R + i\beta]$  и двумя отрезками  $[-R; -R + i\beta]$  и  $[R; R + i\beta]$ , Рис.7.4. Выберем  $\beta$  таким, чтобы верхняя сторона контура прошла между точками  $z_1 = i\pi/2$  и  $z_2 = 3i\pi/2$ , то есть, чтобы только *один* полюс подынтегральной функции попал в контур. По теореме Коши, интеграл по контуру  $\Gamma$  равен вычету подынтегральной функции в точке  $z_1 = i\pi/2$ , умноженному на  $2\pi i$ ,

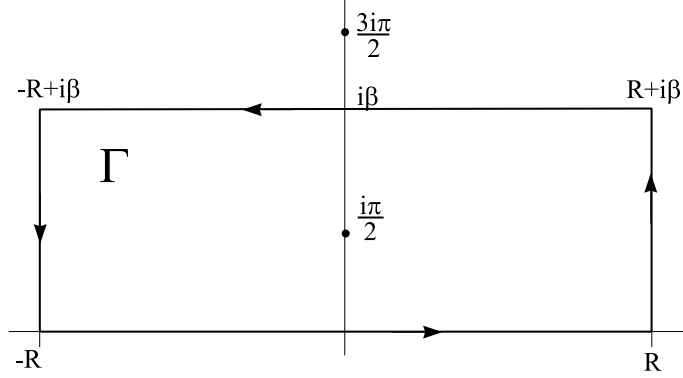


Рис. 7.4: К примеру 7.4

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega z}}{\operatorname{ch} z} dz &= \int_{-R}^R + \int_R^{R+i\beta} + \int_{R+i\beta}^{-R+i\beta} + \int_{-R+i\beta}^{-R} \frac{e^{i\omega z}}{\operatorname{ch} z} dz = \\
 &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\pi/2} \frac{e^{i\omega z}}{\operatorname{ch} z} = 2\pi e^{-\omega\pi/2}.
 \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что

- при  $R \rightarrow +\infty$  интеграл по нижней границе контура  $[-R; R]$  стремится к  $F(\omega)$ ;
- при  $R \rightarrow +\infty$  интегралы по боковым границам контура стремятся к нулю;
- интеграл по верхней границе контура  $[-R + i\beta; R + i\beta]$  имеет порядок  $O(e^{-\beta\omega})$ .

Из этого следует, что

$$F(\omega) = 2\pi e^{-\omega\pi/2} + O(e^{-\beta\omega}), \quad \pi/2 < \beta < 3\pi/2. \quad (7.11)$$

Рассматриваемый пример характерен тем, что преобразование Фурье  $F(\omega)$  может быть найдено в явном виде (см задачу 7.6).

$$F(\omega) = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi\omega/2)}. \quad (7.12)$$

Очевидно, найденная асимптотика (7.11) хорошо описывает  $F(\omega)$  при больших значениях  $\omega$ . Следует подчеркнуть, что как и раньше, асимптотику преобразования Фурье определило поведение функции в окрестности ближайшей к действительной оси особой точки  $f(t)$ .

**ПРИМЕР 7.5.** Найдем асимптотику при  $\omega \rightarrow \infty$  преобразования Фурье функции  $f(t) = 1/\sqrt{t^2 + 1}$ ,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{t^2 + 1}} dt.$$

Аналитическое продолжение  $t \rightarrow z$  в комплексную плоскость подынтегральной функции имеет особенности в точках  $z = \pm i$ . Эти точки являются точками ветвления. На комплексной плоскости введем разрез  $(i; +i\infty)$  и рассмотрим контур  $\Gamma$ , образованный фрагментом действительной оси  $[-R; R]$ , полуокружностью  $C_R$  радиуса  $R$ , и обходом точки ветвления  $z = i$  по берегам разреза (участки  $\gamma^+$  и  $\gamma^-$ ) и окружности  $C_\rho$  радиуса  $\rho$ , см. Рис. 7.5. Внутри контура  $\Gamma$  подынтегральная функция не имеет особенностей, поэтому интеграл от нее по контуру  $\Gamma$  равен нулю. Имеем

$$0 = \int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega z}}{\sqrt{1+z^2}} dz = \int_{-R}^R + \int_{C_R} + \int_{iR}^{i+i\rho} + \int_{i+i\rho}^{iR} + \int_{C_\rho} \frac{e^{i\omega z}}{\sqrt{1+z^2}} dz$$

Нетрудно показать, что

- при  $R \rightarrow +\infty$  интеграл по нижней границе контура  $[-R; R]$  стремится к  $F(\omega)$ ;
- при  $R \rightarrow +\infty$  интеграл по полуокружности  $C_R$  стремится к нулю (непосредственное следствие леммы Жордана);
- интеграл по окружности  $C_\rho$  стремится к нулю при  $\rho \rightarrow 0$

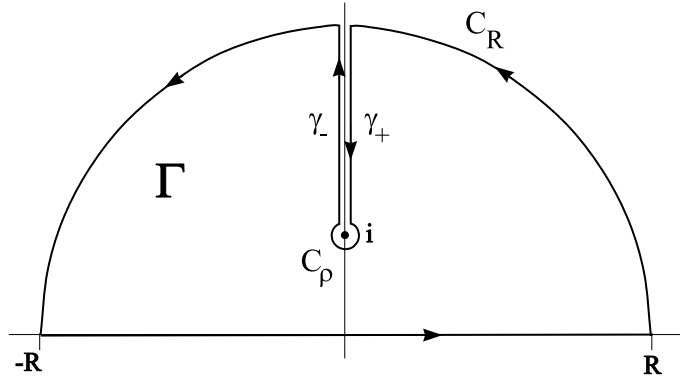


Рис. 7.5: К примеру 7.5

Устремляя  $\rho$  к нулю, а  $R$  к бесконечности, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega z}}{\sqrt{1+z^2}} dz = - \int_{\gamma^+} - \int_{\gamma^-} \frac{e^{i\omega z}}{\sqrt{1+z^2}} dz.$$

На берегах разреза значения функции  $f(z) = \frac{e^{i\omega z}}{\sqrt{1+z^2}}$  имеют противоположные знаки. Введя параметризацию  $z = i(1+y)$ , перепишем интегралы по  $\gamma^+$  и  $\gamma^-$  следующим образом

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma^\pm} \frac{e^{i\omega z}}{\sqrt{1+z^2}} dz &= \int_i^{+i\infty} \frac{e^{i\omega z}}{\sqrt{1+z^2}} dz = \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-\omega(y+1)}}{\sqrt{(y+1)^2-1}} dz = e^{-\omega} \int_0^\infty \frac{e^{-\omega y}}{\sqrt{y(y+2)}} dy. \end{aligned}$$

В последнем интеграле сделаем замену  $y = \xi^2$ . В результате несложных преобразований получим

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\omega y}}{\sqrt{y(y+2)}} dy = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-\omega \xi^2}}{\sqrt{\xi^2+2}} d\xi = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\omega \xi^2}}{\sqrt{\xi^2+2}} d\xi.$$

Асимптотику последнего интеграла можно найти, используя метод Лапласа. Основной вклад в интеграл вносит окрестность точки  $\xi = 0$ . Это соответствует тому, что асимптотика исходного интеграла определяется окрестностью точки  $z = i$ , что отвечает принципу Дарбу. По формуле (4.18) для первого члена разложения получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\omega \xi^2}}{\sqrt{\xi^2 + 2}} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right).$$

Окончательно, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{1+t^2}} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-\omega} + o\left(\frac{e^{-\omega}}{\sqrt{\omega}}\right). \quad (7.13)$$

Для проверки последнего соотношения обратимся к теории бесселевых функций, где доказывается равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{1+t^2}} dt = 2K_0(\omega).$$

Здесь функция  $K_0(\omega)$  - модифицированная функция Бесселя, определяемая как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 u}{d\omega^2} + \frac{1}{\omega} \frac{du}{d\omega} - u = 0,$$

убывающее на бесконечности и удовлетворяющее условию нормировки  $u(\omega) \sim \ln \omega$  при  $\omega \rightarrow 0$ . Асимптотическое разложение при больших значениях аргумента функции  $K_0(\omega)$  имеет вид

$$K_0(\omega) \stackrel{\text{as}}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}} e^{-\omega} \left( 1 - \frac{1}{8\omega} + \frac{1 \cdot 9}{2!(8\omega)^2} - \frac{1 \cdot 9 \cdot 25}{3!(8\omega)^3} + \dots \right).$$

Формула (7.13) соответствует первому члену указанного разложения. Отметим, что последующие члены этого разложения также можно найти, используя метод Лапласа, формулу (4.17).



### Задачи к главе 7

**7.1.** Используя методы теории функций комплексного переменного, вычислите явный вид коэффициентов разложения в ряд Фурье функций

$$(a) f(t) = \ln(\operatorname{ch} 1 - \cos t), \quad (b) f(t) = \frac{\cos t}{\operatorname{ch} 1 - \cos t}.$$

Покажите, что асимптотические формулы для коэффициентов Фурье, полученные при учете ближайшей к действительной оси особой точки  $f(t)$ , совпадают с точными формулами для этих коэффициентов.

**7.2.** Найдите асимптотику коэффициентов Фурье при  $n \rightarrow \infty$  для функций

$$(a) f(t) = \frac{1}{\cos^2 t + 6 \cos t + 8}, \quad (b) f(t) = \frac{\cos t}{\cos^2 t + 6 \cos t + 8},$$

$$(c) f(t) = \frac{1}{\cos^2 t + \cos t - 6}, \quad (d) f(t) = \frac{\cos t}{\cos^2 t + \cos t - 6}.$$

**7.3.** К примеру 7.2:

(a) Докажите справедливость формулы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{2imz} dz}{1 + e^{\cos z}} = 0.$$

(b) Докажите, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz}{1 + e^{\cos z}} = \pi.$$

**7.4.** Найдите асимптотику коэффициентов Фурье для функций при  $n \rightarrow \infty$

$$(a) f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\cos t)}, \quad (b) f(t) = \frac{1}{1 + \cos(\cos t)},$$

$$(c) f(t) = \sqrt{\operatorname{ch} 1 - \cos t}, \quad (d) f(t) = \operatorname{th}(\cos x),$$

$$(e) f(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{\operatorname{ch} 1 - \cos t}}, \quad (f) f(t) = \arccos\left(\frac{1}{2} \cos t\right),$$

$$(g) f(t) = \operatorname{arctg}(\cos t), \quad (h) f(t) = \cos t \cdot \ln(\operatorname{ch} 1 - \cos t).$$

**7.5.** Найдите главный член асимптотики коэффициентов Фурье при  $n \rightarrow \infty$  для функций

$$(a) f(t) = \ln^2(\operatorname{ch} 1 - \cos t), \quad (b) f(t) = \ln^3(\operatorname{ch} 1 - \cos t).$$

*Указание:* используйте задачу 4.3.

**7.6.** Используя интегрирование по контуру  $\Gamma$  из примера 7.4 с  $\beta = \pi$ , докажите формулу (7.12).

**7.7.** Найдите главный член асимптотики преобразования Фурье  $F(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$  от функции

$$(a) f(t) = \frac{1}{1+t^8}, \quad (b) f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^4 t}, \quad (c) f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t^2}.$$

Подтвердите результат сравнением с численными значениями.

**7.8.** Найдите главный член асимптотики преобразования Фурье  $F(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$  от функции

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2+t^4+\dots+t^{2N}}, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

**7.9.** Найдите главный член асимптотики преобразования Фурье  $F(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$  от функции<sup>1</sup>

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^{2N}}}, \quad N \in \mathbb{Z}, \quad N \geq 1.$$

Подтвердите результат сравнением с численными значениями.

---

<sup>1</sup> «Математический тривиум», [14], задача 52.

## Глава 8

### Асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Во многих случаях исследовать асимптотические свойства функций оказывается удобно, анализируя дифференциальные уравнения, которым эти функции удовлетворяют. Более того, как правило, в физических приложениях *именно* дифференциальное уравнение (или система дифференциальных уравнений) является тем объектом, с которым имеет дело исследователь. Поэтому изучению асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений посвящено огромное количество работ.

В настоящем курсе мы затронем лишь небольшой класс задач такого сорта, ограничившись классом *линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами*. Уравнения такого типа описывают большое количество важных спецфункций (функции Бесселя, Эрмита, гипергеометрические функции и т.д.) и регулярно возникают в различных приложениях. Основным объектом исследования в этом разделе будет однородное уравнения вида<sup>1</sup>

$$u_{tt} + p(t)u_t + q(t)u = 0. \quad (8.1)$$

Оказывается, имеются преобразования, применение которых сохраняет вид уравнения (8.1), но изменяющее коэффициенты  $p(t)$  и  $q(t)$ . Эти преобразования называются *преобразованиями Лиувилля*. Используя эти преобразования, можно свести достаточно широкий класс

---

<sup>1</sup> Решения неоднородного уравнения

$$u_{tt} + p(t)u_t + q(t)u = f(t)$$

выражаются через интегралы от решений уравнения (8.1). Соответственно, асимптотика решений неоднородного уравнения может быть найдена при помощи разложений для решений однородного уравнения и здесь рассматриваться не будет.

уравнений вида (8.1) к некоторому стандартному типу уравнений, для которых построение асимптотических разложений может быть выполнено по известной схеме.

### 8.1 Преобразования Лиувилля

*Первое преобразование Лиувилля.* Положим  $u(t) = v(t)z(t)$  в уравнении (8.1), причем  $v(t)$  будем считать новой неизвестной функцией, а  $z(t)$  определим ниже. Получаем

$$(zv)_t = z_tv + zv_t, \quad (zv)_{tt} = z_{tt}v + 2z_tv_t + zv_{tt};$$

$$zv_{tt} + (zp(t) + 2z_t)v_t + (zq(t) + p(t)z_t + z_{tt})v = 0.$$

Выберем  $z(t)$  таким образом, чтобы коэффициент при  $v_t$  в последнем уравнении обратился в нуль. Это значит, что  $zp(t) + 2z_t = 0$  и

$$z(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \right\},$$

$$u(t) = v(t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \right\}. \quad (8.2)$$

Уравнение (8.1) при этом приводится к виду

$$v_{tt} + \left( q(t) + p(t) \frac{z_t}{z} + \frac{z_{tt}}{z} \right) v = 0,$$

причем учитывая, что

$$\frac{z_t}{z} = -\frac{1}{2}p(t); \quad \frac{z_{tt}}{z} = \frac{1}{4}p^2(t) - \frac{1}{2}p'(t),$$

( $p'(t)$  - производная  $p(t)$ ,  $p'(t) \equiv p_t(t)$ ), получаем следующий вид для уравнения (8.1)

$$v_{tt} + \left( q(t) - \frac{1}{4}p^2(t) - \frac{1}{2}p'(t) \right) v = 0.$$

Таким образом, первое преобразование Лиувилля позволяет «убить» в уравнении (8.1) коэффициент перед первой производной.

*Второе преобразование Лиувилля.* Сделаем замену независимой переменной  $s = s(t)$ , предполагая при этом, что существует однозначная обратная замена  $t = t(s)$ . Уравнение (8.1) примет вид

$$(s_t^2)u_{ss} + (p(t)s_t + s_{tt})u_s + q(t)u = 0.$$

Положим  $s_t^2 = |q(t)|$  или

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{|q(\tau)|} d\tau \quad (8.3)$$

и поделим все уравнение на  $|q(t)|$ . Получим

$$u_{ss} + \frac{1}{q(t)}(p(t)s_t + s_{tt})u_s \pm u = 0,$$

где знак плюс или минус перед последним слагаемым выбирается в зависимости от знака  $q(t)$ . Таким образом, второе преобразование Лиувилля позволяет сделать в уравнении (8.1) коэффициент  $q(t)$  равным плюс или минус единице.

К сожалению, используя преобразования Лиувилля, как правило, не удастся сделать коэффициенты  $p$  и  $q$  константами одновременно (это позволило бы явно решить поставленную задачу). Вместе с тем, преобразования Лиувилля позволяют привести широкий класс уравнений вида (8.1) к виду, для которого оказывается удобным строить асимптотические разложения решений.

**ПРИМЕР 8.1.** Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - q(t)u = 0. \quad (8.4)$$

Это уравнение является одним из важнейших уравнений квантовой механики<sup>1</sup>. Будем считать, что  $q(t)$  знакопостоянная функция. Положим для определенности, что  $q(t) > 0$  на некотором промежутке

---

<sup>1</sup> Напомним, что в одномерном приближении стационарная волновая функция частицы в квантовой механике  $u(t)$  является, вообще говоря, комплекснозначной и удовлетворяет уравнению Шредингера

$$u_{tt} + (\lambda - U(t))u = 0.$$

В этом уравнении все величины записаны в безразмерном виде,  $\lambda$  - собственное значение, которое находится одновременно с  $u(t)$ , исходя из дополнительных

$t \in [a; b]$ . Применим второе преобразование Лиувилля: введем независимую переменную  $s$ , связанную с  $t$  формулой

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{q(\tau)} \, d\tau. \quad (8.5)$$

Получим

$$q(t)u_{ss} + \frac{q_t(t)}{2\sqrt{q(t)}}u_s - q(t)u = 0$$

или

$$u_{ss} + \frac{q_t(t)}{2[q(t)]^{3/2}}u_s - u = 0.$$

Применим теперь первое преобразование Лиувилля

$$u = v(s)[q(t)]^{-1/4}. \quad (8.6)$$

После некоторых (весьма нудных) преобразований, убеждаемся, что коэффициент перед первой производной обратился в нуль, а уравнение приобрело вид

$$v_{ss} - v \left( 1 - \frac{5}{16} \frac{[q_t(t)]^2}{[q(t)]^3} + \frac{1}{4} \frac{q_{tt}(t)}{[q(t)]^2} \right) v = 0. \quad (8.7)$$

В дальнейшем мы увидим, что форма (8.7) оказывается очень полезной для построения асимптотики уравнения (8.4).

В случае, когда  $q(t) > 0$  на промежутке  $t \in [a; b]$ , но рассматривается уравнение

$$u_{tt} + q(t)u = 0, \quad (8.8)$$

замены (8.5)-(8.6) приводят уравнение (8.8) к виду

$$v_{ss} + v \left( 1 + \frac{5}{16} \frac{[q_t(t)]^2}{[q(t)]^3} - \frac{1}{4} \frac{q_{tt}(t)}{[q(t)]^2} \right) v = 0. \quad (8.9)$$

---

условий локализации, а функция  $U(t)$ , называемая потенциалом, определяется физической постановкой задачи. Физический смысл имеет величина  $|u(t)|^2$ , обозначающая плотность вероятности нахождения частицы в той или иной точке оси  $t$ . Очевидно, что при  $q(t) = U(t) - \lambda$  данное уравнение совпадает с уравнением (8.4).

## 8.2 Асимптотика решений линейного однородного уравнения: общие соображения

Нашей основной задачей будет нахождение асимптотического поведения решений уравнения (8.1) при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Начнем исследование со следующего частного случая. Пусть  $p(t) \equiv 0$  и  $q(t) \rightarrow A = \text{const}$  при  $t \rightarrow \infty$ , причем  $A$  - действительное и  $A \neq 0$ . Представляется естественной гипотеза о том, что асимптотическое поведение при  $t \rightarrow \infty$  решений  $u(t)$  уравнения

$$u_{tt} + q(t)u = 0 \quad (8.10)$$

будет определяться при  $t \rightarrow \infty$  поведением решений уравнения

$$u_{tt} + Au = 0. \quad (8.11)$$

Очевидно, следует выделить два случая.

а.  $A > 0$ . В этом случае общее решение (8.11) имеет вид

$$u(t) = C_+ e^{i\sqrt{A}t} + C_- e^{-i\sqrt{A}t}.$$

Таким образом, все решения данного уравнения являются ограниченными и периодическими.

б.  $A < 0$ . В этом случае общее решение (8.11) имеет вид

$$u(t) = C_+ e^{\sqrt{-A}t} + C_- e^{-\sqrt{-A}t},$$

то есть имеется единственное решение этого уравнения, которое остается ограниченным на полуоси  $[0; +\infty)$  и стремится к нулю на  $+\infty$ , а все остальные решения этого уравнения экспоненциально растут на этом промежутке. Аналогично, имеется единственное решение (8.11), которое стремится к нулю при  $t \rightarrow -\infty$ , в то время как все остальные решения в этом пределе экспоненциально растут.

Очевидно, случаи (а) и (б) существенно различаются. Заметим, что заменой независимой переменной,  $t \rightarrow \sqrt{|A|}t$ , значение  $A$  можно сделать равным единице в случае (а) или минус единице в случае (б). Рассмотрим эти случаи по порядку. Начнем изложение со случая (а).

### 8.3 Асимптотика решений уравнения $u_{tt} + (1 + r(t))u = 0$ , $r(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$

Пусть  $q(t) = 1 + r(t)$ . Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + (1 + r(t))u = 0. \quad (8.12)$$

Предположим, что  $r(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Оказывается, что гипотеза о том, что решения уравнения (8.12) при  $t \rightarrow \infty$  хорошо приближаются решениями уравнения  $u_{tt} + u = 0$ , (то есть линейными комбинациями  $e^{it}$  и  $e^{-it}$ ), вообще говоря, является *неверной*.

ПРИМЕР 8.2. Нетрудно проверить, что одним из решений уравнения

$$u_{tt} + \left(1 + \frac{2}{t} + \frac{1+i}{t^2}\right)u = 0 \quad (8.13)$$

является функция

$$u(t) = e^{i(t + \ln t)},$$

которая, очевидно, асимптотически не стремится ни к какой линейной комбинации функций  $e^{it}$  и  $e^{-it}$ .

Оказывается, что для «хорошего» асимптотического поведения решений уравнения (8.12) на бесконечности, «добавка»  $r(t)$  должна не просто стремиться к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , а *стремиться к нулю достаточно быстро*. В приведенном выше примере  $r(t) = O(1/t)$ . Такой скорости стремления к нулю оказывается недостаточно. Пусть  $r(t) = O(1/t^2)$ , причем

$$q(t) = 1 + r(t) \stackrel{\text{as}}{=} 1 + \sum_{k=2}^{\infty} q_k t^{-k}. \quad (8.14)$$

Чуть ниже окажется, что такой скорости стремления  $r(t)$  к нулю достаточно для того, чтобы любое решение уравнения (8.12) имело в качестве основного члена асимптотики линейную комбинацию экспонент  $e^{it}$  и  $e^{-it}$ .



Начнем с формальной процедуры. Будем искать решение уравнения (8.12) в виде ряда

$$u(t) = e^{it} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k}. \quad (8.15)$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначение

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt} + q(t)u.$$

Подставим ряд (8.15) в уравнение (8.12) и учтем разложение для  $q(t)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= (e^{it}(c_0 + c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} + \dots))_{tt} + \\ &+ (1 + q_2 t^{-2} + \dots) \cdot e^{it}(c_0 + c_1 t^{-1} + \dots) = \\ &= -2ie^{it}(c_1 t^{-2} + 2c_2 t^{-3} + \dots + kc_k t^{-k-1} + \dots) + \\ &+ e^{it}(1 \cdot 2c_1 t^{-3} + 2 \cdot 3c_2 t^{-4} + \dots + k(k+1)c_k t^{-k-2} + \dots) + \\ &+ e^{it}(q_2 t^{-2} + \dots) \cdot (c_0 + c_1 t^{-1} + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Поделим обе части на  $e^{it}$  и приравняем члены при одинаковых степенях  $t$ . Получим следующую бесконечную систему

$$\begin{aligned} t^{-2} : \quad & -2ic_1 + q_2 c_0 = 0; \\ t^{-3} : \quad & -4ic_2 + 2c_1 + q_2 c_1 + q_3 c_0 = 0; \\ & \dots \\ t^{-k-1} : \quad & -2kic_k + k(k-1)c_{k-1} + \sum_{j=0}^{k-1} c_j q_{k+1-j} = 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

В силу линейности и однородности уравнения (8.12) нулевой коэффициент  $c_0$  можно выбрать произвольным. Положим

$$c_0 = 1. \quad (8.17)$$

Тогда все коэффициенты  $c_k$  находятся последовательно из системы (8.16). В частности:

$$c_1 = -\frac{i}{2}q_2, \quad c_2 = -\frac{1}{8}q_2^2 - \frac{1}{4}q_2 - \frac{i}{4}q_3.$$

Ряд (8.15), вообще говоря, является асимптотическим. Нетрудно заметить, что подстановка частичных сумм такого ряда в уравнение (8.12) хотя и не дает нуля, но дает бесконечно малую достаточно высокого порядка. Действительно, при подстановке в уравнение (8.12) частичной суммы

$$u_n(t) = e^{it} \sum_{k=0}^n c_k t^{-k},$$

коэффициенты при всех степенях  $t$  до  $-n-1$  включительно, зануляются, поэтому имеем

$$\mathcal{L}u_n = O(t^{-n-2}).$$

Вместе с тем, из самой возможности выписать такой ряд *совершенно не следует*, что он соответствует какому-то решению уравнения (8.12). Однако можно доказать, что такое решение действительно имеется. Это утверждает следующая теорема

**Теорема 8.1 (об осциллирующих решениях).** Пусть для  $q(t) \in C[t_0; \infty)$  справедливо асимптотическое разложение (8.14). Тогда существует решение  $\hat{u}(t)$  уравнения (8.12), которое при  $t \rightarrow \infty$  разлагается в асимптотический ряд (8.15),

$$\hat{u}(t) = e^{it} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k},$$

причем коэффициенты  $c_k$ , определяются из рекуррентных соотношений (8.16).

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [1]. Сделаем несколько дополнительных замечаний.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Нетрудно убедиться, что асимптотический ряд (8.15) можно дифференцировать как минимум дважды (это важно:

напомним, что вообще говоря, асимптотические ряды дифференцировать нельзя). Действительно, если формально взять вторую производную от асимптотического ряда (8.15), мы получим ряд такого же вида

$$e^{it} \sum_{k=0}^{\infty} c_k'' t^{-k},$$

(штрихи в данном случае - это не производная,  $c_k''$  - числа). По правилу построения коэффициентов  $c_k$   $n$ -я частичная сумма этого ряда при  $t \rightarrow \infty$  удовлетворяет соотношению

$$e^{it} \sum_{k=0}^n c_k'' t^{-k} = -q(t) e^{it} \sum_{k=0}^n c_k t^{-k} + O(t^{-n-2}).$$

С другой стороны имеем

$$\hat{u}_{tt}(t) = -q(t) \hat{u}(t).$$

Вычитая первое из этих равенств из второго, получаем

$$\hat{u}_{tt}(t) - e^{it} \sum_{k=0}^n c_k'' t^{-k} = -q(t) \left( \hat{u}(t) - e^{it} \sum_{k=0}^n c_k t^{-k} \right) + O(t^{-n-2}),$$

и так как ряд (8.15) является асимптотическим для  $\hat{u}(t)$ , получаем, что

$$\hat{u}_{tt}(t) - e^{it} \sum_{k=0}^n c_k'' t^{-k} = O(t^{-n-1}).$$

Следовательно, формально продифференцированный дважды ряд (8.15) является асимптотическим рядом для  $\hat{u}_{tt}(t)$ . Проинтегрировав почленно ряд для  $\hat{u}_{tt}(t)$  (интегрирование асимптотических рядов законно!), получаем ряд, асимптотический к первой производной решения  $\hat{u}_t(t)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + (1 + \bar{r}(t))u = 0, \quad (8.18)$$

где  $\bar{r}(t)$  - комплексно сопряженная функция к  $r(t)$ . Если  $r(t)$  разлагается в асимптотический ряд по степеням  $t^{-k}$ ,  $k > 1$ , то и  $\bar{r}(t)$  разлагается в ряд по этим степеням. По приведенной выше теореме существует решение уравнения (8.18),  $\tilde{u}(t)$ , имеющее асимптотику

$$e^{it} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* t^{-k}.$$

Но это означает, что исходное уравнение (8.12) имеет решение  $\check{u}(t)$  с асимптотическим разложением

$$\check{u}(t) \stackrel{\text{as}}{=} e^{-it} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^* t^{-k},$$

(черта вновь означает комплексное сопряжение). Решения  $\hat{u}(t)$  и  $\check{u}(t)$ , очевидно, являются линейно независимыми. Следовательно, при сделанных предположениях, мы имеем возможность описать асимптотическое поведение общего решения уравнения (8.12),

$$u(t) = C_1 \hat{u}(t) + C_2 \check{u}(t),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  - произвольные комплексные константы. На бесконечности это решение осциллирует и является ограниченным.

В случае, когда  $r(t)$  является действительной, функции  $\check{u}(t)$  и  $\hat{u}(t)$  комплексно сопряжены друг другу. Соответственно, комплексно сопряжены друг другу коэффициенты их асимптотических разложений.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** В условиях теоремы 8.1 важным требованием для построения асимптотики решений уравнения (8.12) является то, что  $r(t) = O(t^{-2})$ . Это требование можно ослабить: достаточным условием для асимптотического поведения фундаментальной системы решений  $\hat{u}(t)$  и  $\check{u}(t)$  вида

$$\hat{u}(t) \sim e^{it}, \quad \check{u}(t) \sim e^{-it}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (8.19)$$

является условие  $L_1$ -суммируемости функции  $r(t)$ , то есть,

$$\int_{t_0}^{\infty} |r(t)| dt < \infty.$$

Здесь  $t_0$  - некоторое достаточно большое число. В частности, для (8.19) достаточно условия  $r(t) = O(t^{-\gamma})$ ,  $\gamma > 1$ .

#### 8.4 Пример: асимптотика функций Бесселя

В качестве примера приложения метода, изложенного выше, мы найдем асимптотическое разложение функций Бесселя  $J_n(t)$ . Эти функции играют важную роль в тех разделах физики, в которых исследуются колебания различной природы, в частности, в акустике и электродинамике. Функции Бесселя встречались в нашем курсе раньше: в примере 5.2 раздела 5.3 при помощи метода стационарной фазы был найден главный член асимптотики  $J_n(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Сама функция Бесселя при этом задавалась формулой

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin \tau - n\tau) d\tau. \quad (8.20)$$

Формула (8.20) является одним из нескольких интегральных представлений функции Бесселя. Вместе с тем, изначально эти функции возникли как решения *уравнения Бесселя*

$$u_{tt} + \frac{1}{t}u_t + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)u = 0. \quad (8.21)$$

Тот факт, что интеграл в правой части (8.20) удовлетворяет уравнению (8.21) можно проверить непосредственно, путем дифференцирования функции под знаком интеграла, используя попутно интегрирование по частям.

Применим к уравнению (8.21) первое преобразование Лиувилля

$$u(t) = v(t)t^{-1/2}.$$

После упрощений получаем, что функция  $v(t)$  удовлетворяет уравнению

$$v_{tt} + \left(1 - \frac{n^2 - 1/4}{t^2}\right)v = 0.$$

Будем искать решение  $\hat{v}(t)$  в виде асимптотического ряда при  $t \rightarrow \infty$

$$\hat{v}(t) \stackrel{\text{as}}{=} e^{it} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^{-k}\right).$$

Используя систему (8.16), последовательно получаем

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{n^2 - 1/4}{-2i} = \frac{(n - 1/2)(n + 1/2)}{2i}, \\
c_2 &= c_1 \cdot \frac{n^2 - 9/4}{-4i} = \frac{(n - 3/2)(n - 1/2)(n + 1/2)(n + 3/2)}{(-2i)^2 \cdot 2}, \\
&\dots \\
c_k &= c_{k-1} \cdot \frac{n^2 - (2k-1)^2/4}{-2ki} = \\
&= \frac{(n - k + 1/2)(n - k + 3/2) \dots (n + k - 3/2)(n + k - 1/2)}{(-2i)^k \cdot k!}.
\end{aligned}$$

Для сокращения записей удобно использовать следующее соотношение

$$\frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)} = (k + \alpha)(k + \alpha - 1) \dots (\alpha + 1)\alpha.$$

где  $\Gamma$  - гамма-функция. Используя это соотношение, можно записать  $c_k$  в виде

$$c_k = \frac{\Gamma(n + k + 1/2)}{\Gamma(n - k + 1/2) \cdot k! \cdot (-2i)^k}.$$

Асимптотическое представление для общего решения уравнения Бесселя, таким образом, имеет вид

$$u(t) \stackrel{\text{as}}{=} \frac{C_+ e^{it}}{\sqrt{t}} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^{-k} \right) + \frac{C_- e^{-it}}{\sqrt{t}} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k t^{-k} \right).$$

Для получения асимптотики функции  $J_n(t)$ , заданной интегралом (8.20), необходимо определить соответствующие константы  $C_+$  и  $C_-$ . В разделе 5.3 было показано, что

$$J_n(t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos \left( t - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (8.22)$$

Для того, чтобы первый член полученной асимптотики совпал с (8.22), необходимо выбрать  $C_+$  и  $C_-$  в виде

$$C_+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -i \left( \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \quad C_- = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ i \left( \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\}.$$

Тогда, разделяя косинусную и синусную компоненты, соответствующие четным и нечетным  $k$ , окончательно имеем при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} J_n(t) \cong & \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos \left( t - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2t)^{2k}} \frac{\Gamma(n+2k+1/2)}{(2k)! \Gamma(n-2k+1/2)} - \\ & - \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin \left( t - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2t)^{2k+1}} \frac{\Gamma(n+2k+3/2)}{(2k+1)! \Gamma(n-2k-1/2)}. \end{aligned}$$

### 8.5 Асимптотика решений уравнения $u_{tt} - (1+r(t))u = 0$ , $r(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$

Рассмотрим теперь уравнение

$$u_{tt} - (1+r(t))u = 0. \quad (8.23)$$

При  $r(t) \equiv 0$  общее решение уравнения (8.23) представляется в виде суммы двух экспонент

$$u(t) = C_+ e^t + C_- e^{-t}.$$

Предположим, что  $r(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , причем, как и в разделе 8.3, будем считать, что  $r(t) = O(t^{-2})$  и

$$r(t) \cong \sum_{k=2}^{\infty} q_k t^{-k}. \quad (8.24)$$

Построим формальный ряд, соответствующий убывающему на бесконечности решению уравнения (8.23). Будем считать, что этот ряд представляет собой «поправку» к  $e^{-t}$  следующего вида

$$u(t) = e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k}. \quad (8.25)$$

Подставим ряд (8.25) в уравнение, поделим обе части на  $e^{-t}$  и приравняем члены при одинаковых степенях  $t$ . Имеем

$$\begin{aligned} t^{-2} : \quad & 2c_1 - q_2c_0 = 0, \\ t^{-3} : \quad & 4c_2 + 2c_1 - q_2c_1 - q_3c_0 = 0, \\ & \dots \\ t^{-k-1} : \quad & 2kc_k + k(k-1)c_{k-1} - \sum_{j=0}^{k-1} c_j q_{k+1-j} = 0. \end{aligned} \tag{8.26}$$

Как и в разделе 8.3, положим  $c_0 = 1$ . Тогда из соотношений (8.26) последовательно определяются все  $c_k$ . В частности,

$$c_1 = \frac{1}{2}q_2; \quad c_2 = \frac{1}{8}q_2^2 - \frac{1}{4}q_2 + \frac{1}{4}q_3.$$

Введем оператор  $\mathcal{L}$ , такой, что

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt} - (1 + r(t))u.$$

Рассмотрим частичную сумму  $u_n(t) = e^{-t} \sum_{k=0}^n c_k t^{-k}$ . В соответствии с алгоритмом нахождения коэффициентов  $c_k$ , имеем

$$\mathcal{L}u_n(t) = O(e^{-t}t^{-n-2}).$$

То есть  $u_n(t)$  является «почти» решением нашего уравнения. Однако возможность построения такого приближения не гарантирует существования убывающего на бесконечности решения уравнения (8.23) с заданной асимптотикой. Вместе с тем, как и в предыдущем разделе, существование такого решения можно обосновать строго.

**Теорема 8.2 (об убывающем решении).** Пусть для  $q(t)$  справедливо асимптотическое разложение (8.24) и  $q(t) \in C[t_0; \infty)$ . Тогда существует решение  $\hat{u}(t)$  уравнения (8.23), которое при  $t \rightarrow \infty$  разлагается в асимптотический ряд (8.25) с коэффициентами  $c_k$ , определяющимися из рекуррентных соотношений (8.26).

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [1]. Сделаем два дополнительных замечания.



ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как и в случае ряда (8.15), нетрудно показать, что ряд (8.25) можно дифференцировать как минимум дважды. Схема доказательства этого утверждения полностью копируется с доказательства соответствующего утверждения для уравнения (8.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как и в случае уравнения (8.12), можно обобщить теорему о существовании экспоненциально убывающего решения на случай  $L_1$ -суммируемости функции  $r(t)$  на промежутке  $t > t_0$ . В частности, для существования решения

$$\hat{u}(t) \sim e^{-t}, \quad t \rightarrow \infty,$$

достаточно выполнения условия  $r(t) = O(t^{-\gamma})$ ,  $\gamma > 1$ .

Опираясь на существование экспоненциально убывающего решения (8.23), покажем теперь, что существует также экспоненциально растущее решение этого уравнения. Будем искать новое решение уравнения (8.23) в виде

$$\tilde{u}(t) = \hat{u}(t)V(t).$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (8.23) и учитывая, что  $\hat{u}(t)$  является решением этого уравнения, получим

$$\hat{u}(t)V_{tt}(t) + 2\hat{u}_t(t)V_t(t) = 0,$$

откуда имеем

$$V(t) = \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\hat{u}^2(\tau)},$$

причем так как

$$\hat{u}(t) = e^{-t} \sum_{k=0}^n c_k t^{-k} + O(t^{-n-1}) = e^{-t} (1 + R_n(t)), \quad (8.27)$$

$$R_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k t^{-k} + O(t^{-n-1}), \quad (8.28)$$

$$R_n(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

значение  $t_0$  можно взять настолько большим, что  $\hat{u}(t)$  не обращается в нуль при  $t \geq t_0$ . Далее, пусть  $t_1 > t_0$  таково, что  $|R_n(t)| < 1/2$  при  $t \geq t_1$ . Тогда

$$V(t) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\tau}{\hat{u}^2(\tau)} + \int_{t_1}^t \frac{d\tau}{\hat{u}^2(\tau)} = C + \int_{t_1}^t \frac{e^{2\tau} d\tau}{(1 + R_n(\tau))^2}.$$

Разложим подынтегральное выражение в сходящийся ряд

$$\frac{e^{2\tau}}{(1 + R_n(\tau))^2} = e^{2\tau} \left( 1 - 2R_n(\tau) + \frac{(-2) \cdot (-3)}{2!} (R_n(\tau))^2 + \dots \right),$$

а выражение для  $R_n(\tau)$  заменим представлением по формуле (8.28), возведем в соответствующие степени и раскроем скобки. Получим

$$V(t) = C + \int_{t_1}^t e^{2\tau} \left( 1 + \sum_{k=1}^n d_k \tau^{-k} + \sigma_n(\tau) \right) d\tau,$$

где  $d_k$  - некоторые коэффициенты, и  $\sigma_n(\tau) = O(\tau^{-n-1})$ . Продолжая выкладки, имеем

$$V(t) = C + \frac{1}{2} e^{2t} + \sum_{k=1}^n d_k \int_{t_1}^t e^{2\tau} \tau^{-k} d\tau + \Sigma_n(t),$$

причем  $\Sigma_n(t) = O(t^{-n-1})$ . Многократно интегрируя по частям, каждый из интегралов  $\int_{t_1}^t e^{2\tau} \tau^{-k} d\tau$  можно представить асимптотическим разложением

$$\int_{t_1}^t e^{2\tau} \tau^{-k} d\tau = A + \frac{1}{2} e^{2t} t^{-k} + k \int_{t_1}^t e^{2\tau} \tau^{-(k+1)} d\tau = \dots,$$

причем в константу  $A$  мы будем собирать вклады, приходящие от внеинтегральных членов. Получим

$$V(t) = e^{2t} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n v_k t^{-k} + \omega_n(t) \right), \quad \omega_n(t) = O(t^{-n-1}).$$

Окончательно, перемножая разложения для  $\hat{u}(t)$  и  $V(t)$ , имеем

$$\check{u}(t) \stackrel{\text{as}}{=} e^t \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-k}. \quad (8.29)$$

Таким образом, второе решение  $\check{u}(t)$  уравнения (8.23), как и ожидалось, оказалось экспоненциально растущим, причем асимптотики решений  $\hat{u}(t)$  и  $\check{u}(t)$  «наследуются» из уравнения (8.23) с  $r(t) \equiv 0$ ,

$$\hat{u}(t) \sim e^{-t}; \quad \check{u}(t) \sim e^t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Выражения для коэффициентов  $a_k$  представляются чрезвычайно сложными. Вместе с тем, зная о *существовании* разложения (8.29), их можно найти при помощи процедуры, аналогичной той, которая позволяет найти коэффициенты  $c_k$  разложения для  $\hat{u}(t)$ . Действительно, нетрудно убедиться, что разложение (8.29) можно почленно дифференцировать (см. замечание непосредственно после теоремы об убывающем решении). Подставляя это разложение в уравнение (8.23) и приравнявая нулю коэффициенты при каждом из членов  $e^t t^{-k}$ , получаем, что  $a_n$  удовлетворяют некоторой системе уравнений, из которой их можно последовательно найти.

### 8.6 Асимптотика собственных функций уравнения Шредингера

В качестве примера приложения асимптотической теории опишем асимптотическое при  $t \rightarrow \infty$  поведение решений уравнения

$$u_{tt} - q(t)u = 0. \quad (8.30)$$

Как было показано в разделе 8.1, (пример 8.1), это уравнение можно переписать в виде

$$v_{ss} - v \left( 1 - \frac{5}{16} \frac{[q_t(t)]^2}{[q(t)]^3} + \frac{1}{4} \frac{q_{tt}(t)}{[q(t)]^2} \right) v = 0, \quad (8.31)$$

где

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{q(\tau)} d\tau \quad (8.32)$$

и

$$u = v(s)[q(t)]^{-1/4}. \quad (8.33)$$

Как уже указывалось выше, важнейшим частным случаем уравнения (8.30) является уравнение Шредингера

$$u_{tt} + (\lambda - U(t))u = 0, \quad (8.34)$$

поэтому представленные ниже результаты являются «рабочим инструментом» квантовой механики.

Предположим, что функция  $q(t) > 0$  при  $t > t_0$ . Это означает, что пределу  $t \rightarrow +\infty$  соответствует предел  $s \rightarrow +\infty$ . Кроме того, предположим, что<sup>1</sup>

$$r(s) = -\frac{5}{16} \frac{[q_t(t)]^2}{[q(t)]^3} + \frac{1}{4} \frac{q_{tt}(t)}{[q(t)]^2} = O\left(\frac{1}{s^2}\right), \quad (8.35)$$

(связь между  $t$  и  $s$  описывается формулой (8.32)). Тогда уравнение (8.31) имеет убывающее при  $s \rightarrow +\infty$  решение  $\hat{v}(s)$ , такое, что

$$\hat{v}(s) \sim e^{-s}.$$

Это решение является единственным, с точностью до произвольного числового множителя. Другим выделенным решением этого уравнения является решение

$$\check{v}(s) \sim e^s.$$

Произвольное решение (8.31) является линейной комбинацией решений  $\hat{v}(s)$  и  $\check{v}(s)$ .

На языке уравнения (8.30) эта ситуация означает существование единственного (с точностью до константы) убывающего при  $t \rightarrow +\infty$  решения уравнения (8.30), имеющего асимптотику

$$\hat{u}_+(t) = \frac{1}{[q(t)]^{1/4}} \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \sqrt{q(\tau)} d\tau \right\} \cdot (1 + o(1)), \quad (8.36)$$

и другого решения,

$$\check{u}_+(t) = \frac{1}{[q(t)]^{1/4}} \exp \left\{ \int_{t_0}^t \sqrt{q(\tau)} d\tau \right\} \cdot (1 + o(1)). \quad (8.37)$$

---

<sup>1</sup> Если учесть замечание 2 после теоремы 8.2, дальнейшие рассуждения могут быть обоснованы не только при выполнении условия (8.35), но при гораздо более слабых ограничениях, когда  $r(s)$  является  $L_1$ -суммируемой функцией.

Произвольное решение (8.30) является линейной комбинацией решений  $\hat{u}_+(t)$  и  $\check{u}_+(t)$ . В случае общего положения,  $\check{u}_+(t)$  входит в эту линейную комбинацию с ненулевой константой, поэтому типичной является ситуация, когда решение (8.30) неограничено при  $t \rightarrow +\infty$ .

**ПРИМЕР 8.3.** Квантовый гармонический осциллятор описывается задачей на собственные значения  $\lambda$  для уравнения

$$u_{tt} + (\lambda - t^2)u = 0. \quad (8.38)$$

Собственные функции  $u(t)$  должны удовлетворять условиям локализации  $u(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Из курса квантовой механики известно, что уравнение (8.38) имеет бесконечное количество решений  $u_n(t)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , таких, что  $u_n(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ , соответствующих бесконечному дискретному набору  $\lambda_n$  (спектру гармонического осциллятора). При этом

$$\lambda_n = 2n + 1, \quad u_n(t) = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} H_n(t) e^{-t^2/2}, \quad (8.39)$$

причем функции  $H_n(t)$  являются *полиномами Эрмита*

$$H_0(t) = 1; \quad H_1(t) = t; \quad H_2(t) = 1 - 2t^2, \dots$$

Стоит заметить, что степень полинома Эрмита равна его номеру. Нормировка функций  $u_n(t)$  здесь выбрана таким образом, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n^2(t) dt = 1.$$

Это требование отвечает физической постановке квантовомеханической задачи.

Рассмотрим теперь уравнение (8.38) с произвольным действительным  $\lambda$ , не обязательно принадлежащих спектру. Как следует из представленных выше утверждений, уравнение (8.38) имеет решение, которое стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ . В соответствии с формулой (8.36) при  $t \gg 1$  имеем  $q(t) = t^2 - \lambda$  и

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^t \sqrt{\tau^2 - \lambda} d\tau = \int_{t_0}^t \tau \left( 1 - \frac{\lambda}{2\tau^2} + \dots \right) d\tau = \\ &= B_0 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{\lambda}{2} \ln t + O(t^{-2}). \end{aligned}$$

Здесь константа  $B_0$  произвольна и определяется нижним пределом интегрирования  $t_0$ , который также произволен. Учитывая также, что при  $t \rightarrow +\infty$

$$\sqrt[4]{t^2 - \lambda} \sim t^{1/2},$$

закключаем, что существует убывающее при  $t \rightarrow +\infty$  решение (8.38),

$$\hat{u}_+(t) = t^{\frac{\lambda-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t^2} (C_+ + o(1)),$$

где  $C_+$  - произвольная константа. Полученный результат полностью согласуется с формулой (8.39), при  $\lambda = 2n+1$ . Вместе с тем при  $\lambda > 0$ , не принадлежащем спектру, решение  $\hat{u}_+(t)$  удовлетворяет условию  $\hat{u}_+(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , но не удовлетворяет аналогичному условию при  $t \rightarrow -\infty$ . Так как уравнение (8.38) инвариантно относительно замены  $t \rightarrow -t$ , существует другое решение,  $\hat{u}_-(t)$ , такое, что при  $t \rightarrow -\infty$

$$\hat{u}_-(t) = |t|^{\frac{\lambda-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t^2} (C_- + o(1)).$$

При этом  $\hat{u}_-(t) \equiv \hat{u}_+(t)$  при  $\lambda = 2n+1$  ( $n$ - целое) и  $C_+ = C_-$ . При прочих  $\lambda > 0$ , не принадлежащих спектру,  $\hat{u}_-(t) \neq \hat{u}_+(t)$  ни при каких константах  $C_-$  и  $C_+$ .

**ПРИМЕР 8.4.** Рассмотрим теперь задачу о квантовом ангармоническом осцилляторе с потенциалом  $U(t) = t^4$ . Ей соответствует задача на собственные значения  $\lambda$  для уравнения

$$u_{tt} + (\lambda - t^4)u = 0 \tag{8.40}$$

с граничными условиями на бесконечности  $u(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ . В явном виде решений задачи (8.40) выписать не удастся<sup>1</sup>. Аналогично случаю гармонического осциллятора, в соответствии с формулой (8.36) при  $t \gg 1$  имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \sqrt{\tau^4 - \lambda} d\tau &= \int_{t_0}^t \tau^2 \left( 1 - \frac{\lambda}{2\tau^4} + \dots \right) d\tau = \\ &= B_0 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{\lambda}{2t} + O(t^{-2}). \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Стоит отметить, что данная задача является одной из классических проблем, которые более полувека являлись «полигоном» для оттачивания численных и асимптотических методов квантовой механики.

Учитывая то, что  $\sqrt[4]{t^4 - \lambda} \sim t$ , при  $t \rightarrow +\infty$ , заключаем, что при  $\lambda > 0$  существует убывающее на  $+\infty$  решение  $\hat{u}_+(t)$  уравнения (8.40), имеющее при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотику

$$\hat{u}_+(t) \sim \frac{1}{t} \exp \left\{ -\frac{1}{3}t^3 - \frac{\lambda}{2t} \right\}. \quad (8.41)$$

При этом имеется и растущее на  $+\infty$  решение этого уравнения

$$\check{u}_+(t) \sim \frac{1}{t} \exp \left\{ \frac{1}{3}t^3 + \frac{\lambda}{2t} \right\}.$$

Проведем небольшое численное исследование. Рассмотрим решения  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  задачи Коши для уравнения (8.40), удовлетворяющие начальным условиям

$$u_1(0) = 1; \quad u_{1,t}(0) = 0,$$

$$u_2(0) = 0; \quad u_{2,t}(0) = 1.$$

У линейного уравнения второго порядка может иметься лишь два линейно независимых решения. Соответственно, решения  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  линейно выражаются через решения  $\hat{u}_+(t)$  и  $\check{u}_+(t)$ ,

$$u_1(t) = C_{11}\hat{u}_+(t) + C_{12}\check{u}_+(t),$$

$$u_2(t) = C_{21}\hat{u}_+(t) + C_{22}\check{u}_+(t).$$

Так как  $\hat{u}_+(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{C_{12}}{C_{22}} \equiv C.$$

Этот факт нетрудно проверить численно. Решив соответствующие задачи Коши методом Рунге-Кутты, построим график функции  $y(t) = u_1(t)/u_2(t)$  (см. Рис.8.1,  $\lambda = 1$ ). Очевидно, значения  $y(t)$  с ростом  $t$  стабилизируются и предельное значение  $C$  можно найти с достаточной точностью.

Найдем теперь численно убывающее решение  $\hat{u}_+(t)$ . Для этого достаточно численно построить линейную комбинацию  $z(t) = u_1(t) - Cu_2(t)$ . Очевидно

$$z(t) = u_1(t) - Cu_2(t) = \left( C_{11} - \frac{C_{21}C_{12}}{C_{22}} \right) \hat{u}_+(t) \equiv D\hat{u}_+(t),$$

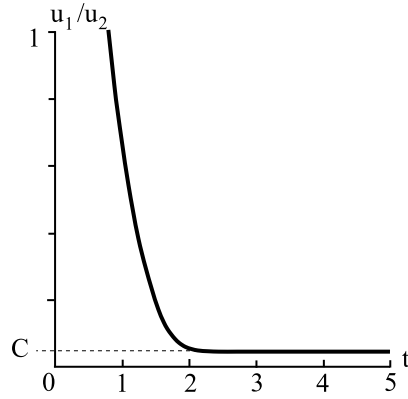


Рис. 8.1: К примеру 8.4. График функции  $y(t) = u_1(t)/u_2(t)$ ,  $\lambda = 1$

то есть  $z(t)$  и есть решение  $\hat{u}_+(t)$  с точностью до умножения на некоторую константу  $D$ . График функции  $z(t)$  для  $\lambda = 1$  показан на Рис.8.2,А. Из Рис.8.2,А следует, что,  $z(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Проверим теперь, что асимптотическое поведение  $z(t)$  соответствует формуле (8.41). Для этого введем еще одну функцию

$$w(t) = \ln(t z(t)) + \frac{t^3}{3} + \frac{\lambda}{2t}.$$

В соответствии с (8.41), функция  $w(t)$  также должна стремиться к некоторой константе  $W_0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . График  $w(t)$  при  $\lambda = 1$  показан на Рис.8.2,В (следует заметить, что все вычисления пришлось проводить, увеличив разрядность машинной арифметики, в связи с очень быстрым стремлением к нулю функции  $\hat{u}_+(t)$ ). Налицо хорошее соответствие асимптотической формулы и численного результата.

Вместе с тем, при рассматриваемом значении  $\lambda = 1$  функция  $\hat{u}_+(t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ , но не стремится к нулю при  $t \rightarrow -\infty$ . В силу того, что уравнение инвариантно относительно замены  $t \rightarrow -t$ , для выполнения условия  $\hat{u}_+(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  достаточно того, чтобы  $u_1(t) = \hat{u}_+(t)$ , или, что то же самое, чтобы  $C = 0$ . Это может быть выполнено лишь при отдельных значениях  $\lambda$ . Варьируя



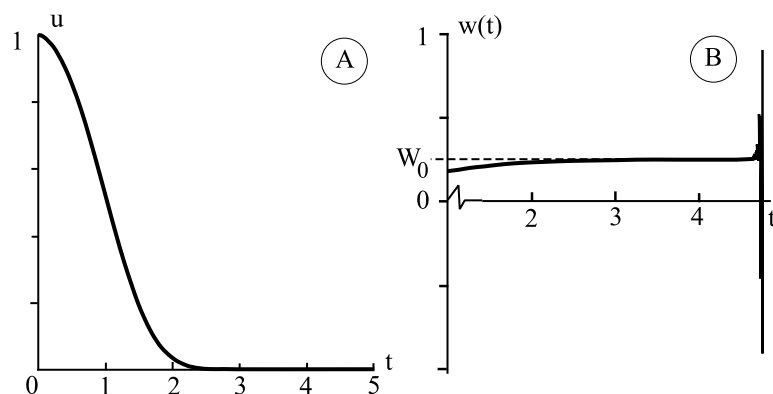


Рис. 8.2: К примеру 8.4,  $\lambda = 1$ . А: График функции  $z(t)$ ; В: График  $w(t)$

значение  $\lambda$ , можно убедиться, что  $C$  обращается в нуль при<sup>1</sup>

$$\lambda \approx 1.060362.$$

Это собственное значение является наименьшим из бесконечного набора собственных значений задачи (8.40). Исследование распределения собственных значений задачи (8.40) при  $\lambda \rightarrow +\infty$  также возможно методами асимптотического анализа, (см., например, уже цитированную выше книгу [2], гл. 10). Однако, хотя эта теория также является классическим разделом асимптотической науки, она выходит за рамки данного курса.

## Задачи к главе 8

**8.1.** Используя преобразования Лиувилля, приведите к виду

$$u_{ss} \pm (1 + r(s))u = 0, \quad r(s) \rightarrow 0, \quad \text{при } s \rightarrow \infty$$

<sup>1</sup> Более точное значение  $\lambda \approx 1.06036209048418289965$  приводится, например, в работе С.М.Бендер et al, Numerological analysis of the WKB approximations in large order, Phys.Rev.D, v.16, p.1740 (1977).

следующие уравнения,

$$\begin{aligned} (a) \quad u_{tt} - tu = 0, & \quad (b) \quad u_{tt} + \frac{1}{t}u_t + (\lambda - t^2)u = 0, \\ (c) \quad u_{tt} + \frac{2}{t}u_t + (\lambda - t)u = 0, & \quad (d) \quad u_{tt} \pm e^{2t}u = 0, \\ (e) \quad u_{tt} \pm u_t + \frac{b}{t} = 0, & \quad (f) \quad u_{tt} - \frac{3}{2t}u_t + u = 0. \end{aligned}$$

*Указания и комментарии.* (а) Это уравнение Эйри; начните со второго преобразования Лиувилля,  $s = \frac{2}{3}t^{3/2}$ ; (б) это уравнение квантового двумерного осциллятора; на первом этапе используйте замену  $u(t) = v(t)t^{-1/2}$ , далее для простоты ограничьтесь случаем  $\lambda = 0$ ; (с) уравнение возникает при решении трехмерного уравнения Шредингера с линейным потенциалом; на первом этапе используйте замену  $u(t) = v(t)/t$ , для простоты положите  $\lambda = 0$ ; (д) упрощение стоит начать со второго преобразования Лиувилля,  $s = e^t$ ; (е) это уравнение - частный случай вырожденного гипергеометрического уравнения, достаточно произвести первое преобразование Лиувилля.

**8.2.** Используя преобразования Лиувилля, выпишите общее решение следующих уравнений ( $A$  и  $B$  - произвольные действительные константы).

$$\begin{aligned} (a) \quad u_{tt} + 2Btu_t + (A + B^2t^2)u = 0, \\ (b) \quad u_{tt} + \frac{2B}{t}u_t + \left(A + \frac{B(B-1)}{t^2}\right)u = 0. \end{aligned}$$

**8.3.** Найдите первые три члена разложения вида (8.14) при  $t \rightarrow \infty$  для решений следующих уравнений

$$\begin{aligned} (a) \quad u_{tt} + \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right)u = 0, & \quad (b) \quad u_{tt} + \left(1 - \frac{t^2}{1+t^4}\right)u = 0, \\ (c) \quad u_{tt} + u \ln\left(\frac{2t^2}{1+t^2}\right) = 0, & \quad (d) \quad u_{tt} + u \operatorname{arctg} t^2 = 0. \end{aligned}$$

**8.4.** Выпишите полностью асимптотический ряд при  $t \rightarrow +\infty$  для функции  $u(t)$ , удовлетворяющей уравнению  $u_{tt} + tu = 0$  (асимптотика функции Эйри при  $t \rightarrow -\infty$ .)

**8.5.** Покажите, что если  $q(t) = (at + b)^{-4}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ , первый член приближения (8.36)

$$\hat{u}_+(t) = \frac{C_+}{[q(t)]^{1/4}} \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \sqrt{q(\tau)} d\tau \right\}$$

удовлетворяет уравнению (8.30).

**8.6.** Найдите главный член асимптотики решения  $\hat{u}(t)$ ,  $\hat{u}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , для уравнений

$$(a) u_{tt} + \frac{1}{t}u_t - (t^2 + 1)u = 0, \quad (b) u_{tt} + \frac{2}{t}u_t - \sqrt{t^2 + 1} u = 0,$$

$$(c) u_{tt} + \frac{1}{t}u_t - \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}}u = 0, \quad (d) u_{tt} + \frac{2}{t}u_t - \frac{t^4}{t^2 + 1}u = 0,$$

$$(e) u_{tt} + \frac{1}{t}u_t - \sqrt{t^4 + 1} u = 0, \quad (f) u_{tt} + \frac{2}{t}u_t - t\sqrt{t^2 + 1} u = 0.$$

**8.7.** Пусть  $\lambda$  — собственное значение уравнения Шредингера

$$u_{tt} + (\lambda - U(t))u = 0$$

Найдите главный член асимптотики при  $t \rightarrow \infty$  собственной функции, отвечающей этому значению  $\lambda$ , для

$$(a) U(t) = A\sqrt{t^2 + 1}, \quad (b) U(t) = A \operatorname{ch} 2t,$$

$$(c) U(t) = -\frac{A}{1 + t^2}, \quad (d) U(t) = A\sqrt{t^4 + 1}.$$

(предполагается, что  $A > 0$ ).

## Оглавление

<b>1</b>	<b>Основные понятия асимптотического анализа</b>	<b>4</b>
1.1	$O$ -символика . . . . .	4
1.2	Калибровочные системы и асимптотические ряды . . .	7
1.3	Примеры . . . . .	9
1.4	Соответствие функций и асимптотических рядов . . . .	13
1.5	Действия с асимптотическими рядами . . . . .	18
1.6	Асимптотические ряды в комплексной плоскости . . . .	26
<b>2</b>	<b>Асимптотика решений алгебраических и трансцендентных уравнений</b>	<b>41</b>
2.1	Регулярные асимптотические разложения . . . . .	41
2.2	Сингулярные асимптотические разложения . . . . .	47
2.3	Построение асимптотических разложений методом диаграмм Ньютона . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Асимптотические оценки сумм</b>	<b>61</b>
3.1	Приближенная формула для сумм вида $\sum_{k=m+1}^n \psi(k)$ .	61
3.2	Вычисление сумм вида $\sum_{k=1}^n k^\alpha$ . . . . .	64
3.3	Вычисление суммы первых $n$ членов гармонического ряда . . . . .	65
3.4	Обобщение формулы (3.9): формула Эйлера-Маклорена . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Метод Лапласа</b>	<b>78</b>
4.1	Метод Лапласа: наибольшее значение $h(t)$ достигается в конечной точке промежутка . . . . .	81
4.2	Метод Лапласа: наибольшее значение $h(t)$ достигается во внутренней точке . . . . .	83
4.3	Доказательство лемм 4.1 и 4.2 . . . . .	93

4.4	Примеры применения метода Лапласа . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Метод стационарной фазы</b>	<b>111</b>
5.1	Асимптотика интеграла $F(\lambda)$ при отсутствии стационарных точек . . . . .	112
5.2	Асимптотика интеграла $F(\lambda)$ при наличии одной стационарной точки . . . . .	114
5.3	Примеры . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Метод перевала</b>	<b>127</b>
6.1	Основная идея метода перевала . . . . .	127
6.2	Асимптотическое поведение функции Эйри . . . . .	129
6.3	Геометрический смысл $S''(z)$ в окрестности точки перевала. Основная формула метода перевала . . . . .	132
6.4	Примеры применения метода перевала . . . . .	136
<b>7</b>	<b>Исследование асимптотики коэффициентов рядов Фурье и интегралов Фурье</b>	<b>145</b>
7.1	Асимптотика коэффициентов ряда Фурье . . . . .	147
7.2	Асимптотика преобразования Фурье . . . . .	156
<b>8</b>	<b>Асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений</b>	<b>163</b>
8.1	Преобразования Лиувилля . . . . .	164
8.2	Асимптотика решений линейного однородного уравнения: общие соображения . . . . .	167
8.3	Асимптотика решений уравнения $u_{tt} + (1 + r(t))u = 0$ , $r(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ . . . . .	168
8.4	Пример: асимптотика функций Бесселя . . . . .	173
8.5	Асимптотика решений уравнения $u_{tt} - (1 + r(t))u = 0$ , $r(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ . . . . .	175
8.6	Асимптотика собственных функций уравнения Шредингера . . . . .	179

## Литература

- [1] Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. — М.: Физматлит, 2009. — 248с.
- [2] Bender C.M, Orszag S.A. Advanced Methematical Methods for Scientists and Engeneers. — McGraw-Hill Book Company, 1978. — 593p.
- [3] Де Брейн Н.Г. Асимптотические методы в анализе. — М.: ИЛ, 1961. — 248 с.
- [4] Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. — М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит. - 1990.— 528 с.
- [5] Murray J.D. Asymptotic analysis. — Springer, New York Inc, — 1984. — 160p.
- [6] Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука. — 1977. — 368 с.
- [7] Федорюк М.В. Асимптотические методы в анализе. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т.13, — 1986. — стр. 93-210.
- [8] Ablowitz M.J., Fokas A.S. Complex variables. Introduction and Applications. — Cambridge University Press. — 2003. — 647 p.
- [9] Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. Екатеринбург, Изд-во Уральского университета. — 2009. — 152 с.
- [10] Никольский С.М. Курс математического анализа. В 2х т. Т. 1. — М.: Наука, 1983. — 484 с.
- [11] Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. В 2х т. Том 1. — М.: Лань, 2009 — 496с.

- [12] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 528с.
- [13] Хайрер Э., Ваннер Г. Математический анализ в свете его истории, Москва, Научный мир, 2008 — 396 с.
- [14] Арнольд В.И. Математический тривиум. - Успехи математических наук, т.46, вып.1, 1991 — стр. 225-232.
- [15] Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н. Избранные задачи по вещественному анализу. СПб: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004. — 624с.
- [16] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 томах. Том 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматлит, 2016. — 800 с.
- [17] Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989 — 480с.
- [18] Boyd J.P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods. Dover Publications; Second Edition, 2001 — 688 p.