

Лекция 9

10. Системы двух автономных дифференциальных уравнений первого порядка

В этой лекции основным объектом нашего изучения будут системы двух дифференциальных автономных уравнений первого порядка вида

$$\dot{u} = f(u, v); \quad (1)$$

$$\dot{v} = g(u, v); \quad (2)$$

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем считать, что *функции $f(u, v)$ и $g(u, v)$ определены на всей плоскости (u, v) и всюду дважды дифференцируемы.*

Эффективным методом исследования систем вида (1)-(2) является представление их решений на так называемой *фазовой плоскости* (u, v) . Суть метода заключается в следующем. В каждой точке плоскости (u, v) правые части системы задают вектор $(f(u, v), g(u, v))$. Таким образом на плоскости (u, v) оказывается задано векторное поле

$$\mathbf{V} = (f(u, v), g(u, v))$$

Пусть $(u(t), v(t))$ - некоторое решение системы (1)-(2). На плоскости (u, v) это решение можно представить непрерывной кривой γ , параметризуемой переменной t . Такие кривые мы будем называть *траекториями*. На траектории удобно ввести *направление*, соответствующее увеличению t . Если траектория γ проходит через некоторую точку (u_0, v_0) , то из вышесказанного следует, что γ соответствует решению задачи Коши для системы (1)-(2) с начальным условием $u(t_0) = u_0, v(t_0) = v_0$, где t_0 - некоторое значение (без ограничения общности можно считать, что $t = 0$). Касательный вектор в любой точке траектории $(u(t), v(t))$ имеет вид $(\dot{u}(t), \dot{v}(t))$ и, следовательно, совпадает с вектором поля \mathbf{V} в этой точке. Этот вектор можно трактовать как мгновенную скорость движения вдоль траектории γ в точке (u, v) .

Для дальнейшего важно то, что *траектории γ_1 и γ_2 , соответствующие различным решениям (1)-(2), не пересекаются.* Действительно, если имеется точка $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \gamma_1 \cap \gamma_2$, то получается, что система (1)-(2) с начальными условиями $u(0) = \tilde{u}, v(0) = \tilde{v}$ имеет как

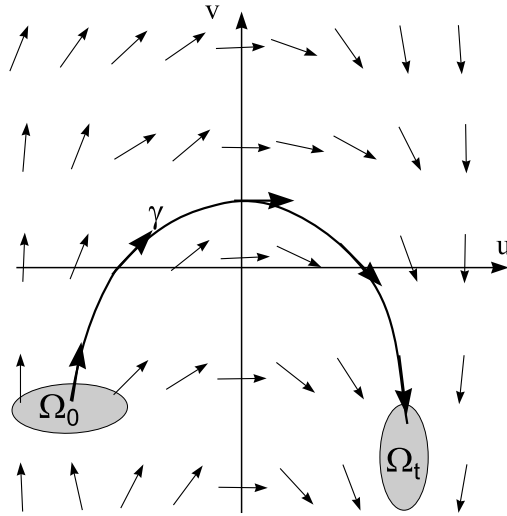


Рис.1. Векторное поле V , порожденное системой уравнений, траектория γ и действие фазового потока на некую область Ω_0 .

минимум два решения, что противоречит теореме единственности для систем дифференциальных уравнений.

Плоскость (u, v) с траекториями, задаваемыми системой (1)-(2), мы будем называть *фазовым портретом* этой системы. Поток, определяемый векторным полем V мы будем называть *фазовым потоком*. Мы будем говорить о действии фазового потока на отдельные точки и области на плоскости (u, v) , см. Рис.1. *Состояниям равновесия* системы (1)-(2) соответствуют точки (u_0, v_0) , где скорость движения равна нулю, то есть u_0, v_0 являются решениями системы уравнений

$$f(u_0, v_0) = 0; \quad g(u_0, v_0) = 0 \quad (3)$$

Эти точки называются *особыми точками* системы (1)-(2). Стоит отметить также, что *периодическим решениям* системы (1)-(2) соответствуют замкнутые траектории.

Проиллюстрируем применение метода фазовой плоскости на примере систем линейных уравнений.

10.1. Системы двух линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = a_{11}u + a_{12}v; \quad (4)$$

$$\dot{v} = a_{21}u + a_{22}v; \quad (5)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - действительные числа. Будем считать, что матрица системы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

является невырожденной, $\det \mathbf{A} \neq 0$. Собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы \mathbf{A} являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

где τ и Δ - след и определитель матрицы \mathbf{A} соответственно,

$$\tau = \text{tr } \mathbf{A} = a_{11} + a_{22}, \quad \Delta = \det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Из явной формулы для корней квадратного уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta} \right)$$

следует, что λ_1 и λ_2 могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными друг другу, причем в силу невырожденности \mathbf{A} ни одно из них не равно нулю. Будем считать для простоты, что λ_1 и λ_2 различны

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Собственным значениям λ_1 и λ_2 соответствуют собственные векторы матрицы \mathbf{A}

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{u}_2 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix}$$

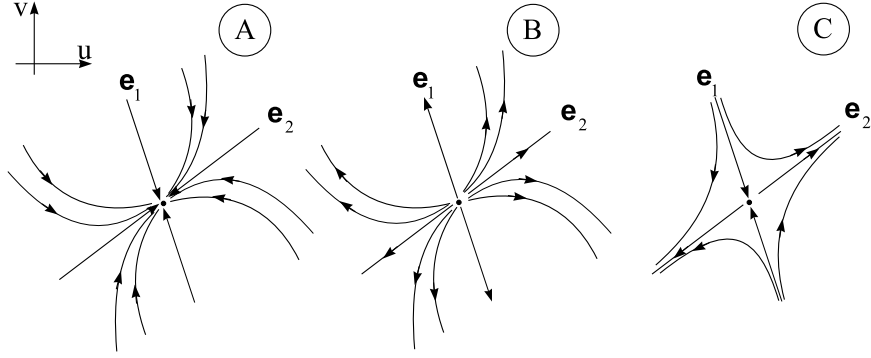


Рис. 2.

Система уравнений (4)-(5) имеет единственное состояние равновесия $u = v = 0$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что общее решение системы (4)-(5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 \mathbf{e}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{e}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (6)$$

где C_1, C_2 - произвольные константы. Выделяются следующие ситуации:

а) Если $\sigma < 0$ и $\Delta > 0$, причем $\sigma^2 - 4\Delta > 0$, то $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. В этом случае собственные векторы матрицы \mathbf{A} являются действительными. Для получения действительных решений системы константы C_1, C_2 также необходимо взять действительными. Все траектории при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к состоянию равновесия $(0, 0)$ (мы будем говорить, что такие траектории являются *входящими* в это состояние равновесия). При этом имеется две “выделенные” траектории, направленные вдоль собственных векторов матрицы \mathbf{A} . Движение к состоянию равновесия $(0, 0)$ по траектории, задаваемой вектором \mathbf{e}_2 , медленнее, чем движение по любой из других траекторий, “входящих” в это состояние равновесия. Типичный фазовый портрет для рассматриваемого случая показан на Рис.2(A). Точка $(0, 0)$ в этом случае называется *устойчивым узлом*.

б) Если $\sigma > 0$ и $\Delta > 0$, причем $\sigma^2 - 4\Delta > 0$, то $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. В этом случае на фазовой плоскости возникает картина, аналогичная

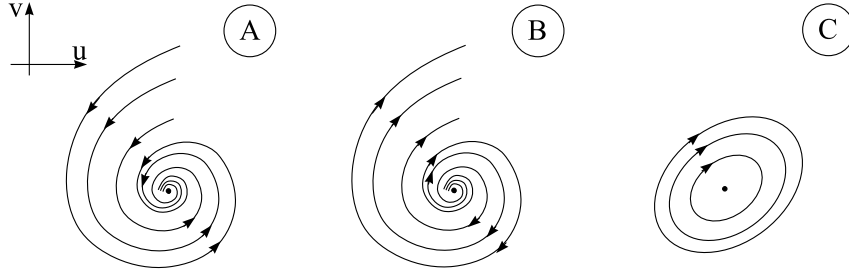


Рис. 3.

п.а, отличающаяся, однако, тем, что все траектории стремятся к состоянию равновесия $(0, 0)$ не при $t \rightarrow +\infty$, а при $t \rightarrow -\infty$. Такие траектории мы будем называть *выходящими* из состояния равновесия. Типичный фазовый портрет для рассматриваемого случая показан на Рис.2(В). Точка $(0, 0)$ в этом случае называется *неустойчивым узлом*.

в) Если $\sigma > 0$ и $\Delta < 0$, то $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Собственные векторы матрицы \mathbf{A} и константы C_1, C_2 в этом случае также являются действительными. На плоскости (u, v) выделяются две прямые l_1 и l_2 , проходящие через состояние равновесия и соответствующие векторам \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . Пара траекторий, лежащих на прямой l_1 , входят в состояние равновесия $(0, 0)$ с двух сторон, в то время как пара траекторий, лежащих на прямой l_2 , выходят из него. Типичный фазовый портрет для рассматриваемого случая показан на Рис.2(С). Точка $(0, 0)$ в этом случае называется *седлом*.

г) Если $\sigma < 0$ и $\sigma^2 - 4\Delta < 0$, то $\lambda_{1,2}$ являются комплексно сопряженными числами с отрицательной действительной частью. В этом случае векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 покомпонентно сопряжены друг другу. Выбирая константы C_1 и C_2 также комплексно сопряженными друг другу, получаем, что решение (6) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{\alpha t} (D_1 \mathbf{e}_c \cos \omega t + D_2 \mathbf{e}_s \sin \omega t), \quad (7)$$

где \mathbf{e}_c и \mathbf{e}_s - действительные векторы, определяемые векторами \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , а $D_{1,2}$ - произвольные действительные константы. Нетрудно

убедиться в том, что все траектории в этом случае также являются входящими в состояние равновесия. Типичный фазовый портрет для этого случая показан на Рис.3(А). Точка $(0,0)$ в этом случае называется *устойчивым фокусом*.

д) Если $\sigma < 0$ и $\sigma^2 - 4\Delta < 0$, то $\lambda_{1,2}$ являются комплексно сопряженными числами с положительной действительной частью. Этот случай аналогичен предыдущему. Отличие заключается только в том, что все траектории являются не входящими в состояние равновесия $(0,0)$, а выходящими из него. Типичный фазовый портрет для этого случая показан на Рис.3(В). Точка $(0,0)$ в этом случае называется *неустойчивым фокусом*.

е) Если $\sigma = 0$ и $\sigma^2 - 4\Delta < 0$ то $\lambda_{1,2}$ являются чисто мнимыми комплексно сопряженными числами.. В этом случае все решения системы являются периодическими, а фазовый портрет имеет вид, изображенный на Рис.3(С). Точка $(0,0)$ в этом случае называется *центром*. Случай центра относится к вырожденным ситуациям и может рассматриваться как предельный случай устойчивого или неустойчивого фокуса.

Общая картина возможных типов состояний равновесия представлена на Рис.4. Помимо перечисленных выше случаев, имеются и другие, соответствующие тому или иному вырождению системы (4)-(5). Например, одно из собственных чисел может оказаться равным нулю. В этом случае состояние равновесия оказывается изолированным и возникает прямая, целиком состоящая из состояний равновесия. Может также оказаться, что собственные числа равны друг другу. В этом случае поведение траекторий также нетрудно проанализировать, но мы этот анализ здесь приводить не будем.

Приведенная выше классификация вполне применима также к решениям линейных неоднородных систем вида

$$\begin{aligned}\dot{u} &= a_{11}u + a_{12}v + b_1; \\ \dot{v} &= a_{21}u + a_{22}v + b_2.\end{aligned}$$

Действительно, если матрица \mathbf{A} невырождена, существует единственное решение (U_0, V_0) системы

$$\begin{aligned}a_{11}U_0 + a_{12}V_0 + b_1 &= 0 \\ a_{21}U_0 + a_{22}V_0 + b_2 &= 0;\end{aligned}$$

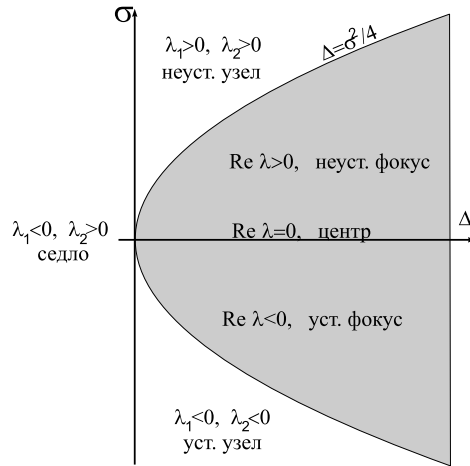


Рис. 4.

Введем переменные $\tilde{u} = u - U_0$, $\tilde{v} = v - V_0$. Нетрудно проверить, что \tilde{u} и \tilde{v} удовлетворяют однородной системе уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{u}} &= a_{11}\tilde{u} + a_{12}\tilde{v}; \\ \dot{\tilde{v}} &= a_{21}\tilde{u} + a_{22}\tilde{v}.\end{aligned}$$

Таким образом, задача исследования линейных неоднородных систем сводится к уже рассмотренной задаче для линейной однородной системы.

10.2. Фазовые портреты для нелинейных систем: окрестность особой точки

Построение фазового портрета в случае, когда система (1)-(2) нелинейна, вообще говоря, является нетривиальной задачей. Наиболее естественно начинать это построение с нахождения состояний равновесия - особых точек (u_0, v_0) , где u_0, v_0 являются решениями системы уравнений (3). Естественно предположить, что линеаризация в окрестности особой точки (u_0, v_0) системы уравнений (1)-(2) позволяет *локально* описать поведение траекторий, близких к этой точке. Полагая $u = u_0 + U$, $v = v_0 + V$, где $U, V \ll 1$, рассмотрим

линеаризованную систему уравнений

$$\dot{U} = f_u(u_0, v_0)U + f_v(u_0, v_0)V; \quad (8)$$

$$\dot{V} = g_u(u_0, v_0)U + g_v(u_0, v_0)V; \quad (9)$$

которая описывает поведение решений в окрестности особой точки с точностью до членов второго порядка по U, V . Оказывается, что, с некоторыми оговорками, поведение траекторий вблизи особой точки действительно можно описать при помощи системы (8)-(9). Для того, чтобы сформулировать соответствующий строгий результат, нам потребуются некоторые определения.

Состояние равновесия системы уравнений (1)-(2) называется **грубым**, если оба собственных значения матрицы Якоби

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} f_u(u_0, v_0) & f_v(u_0, v_0) \\ g_u(u_0, v_0) & g_v(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

имеют ненулевые действительные части.

Среди перечисленных выше типов состояний равновесия линейных систем, грубыми являются устойчивый и неустойчивый узлы, устойчивый и неустойчивый фокусы и седло. Состояние равновесия типа центр не является грубым.

Говорят, что между двумя областями D_1 и D_2 в \mathbb{R}^N существует **гомеоморфизм**, если существует взаимно-однозначное и непрерывное отображение \mathcal{F} , переводящее D_1 в D_2 , причем обратное отображение \mathcal{F}^{-1} также непрерывно.

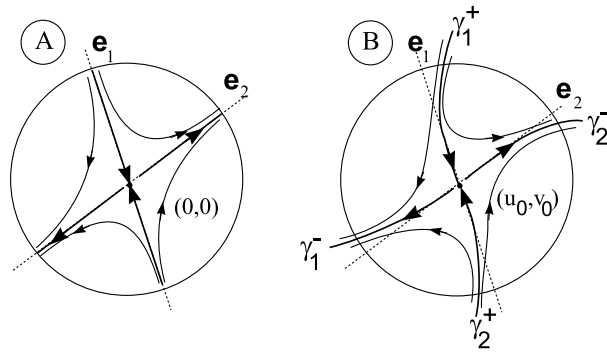


Рис.5. Искривление траекторий вблизи состояния равновесия, которое в линеаризованной задаче имеет тип “седло”. А - линеаризованная задача, В - нелинейная задача, e_1 и e_2 - собственные векторы матрицы Якоби.

Две системы

$$\dot{u} = f_1(u, v), \quad \dot{v} = g_1(u, v)$$

и

$$\dot{u} = f_2(u, v), \quad \dot{v} = g_2(u, v)$$

определенные в областях $D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ и $D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ соответственно, топологически эквивалентны в подобластях $G_1 \subseteq D_1$ и $G_2 \subseteq D_2$, если существует гомеоморфизм \mathcal{F} , под действием которого каждая траектория (отрезок траектории) на фазовом портрете первой системы переводится в траекторию (отрезок траектории) на фазовом портрете второй системы с сохранением ориентации (направления движения).

Теорема 0.1 (Гробмана-Хартмана) Пусть точка (u_0, v_0) является грубым состоянием равновесия системы (1)-(2). Тогда существуют окрестности G_1 этой точки, и окрестность G_2 нулевого состояния равновесия (8)-(9) в которых эти системы топологически эквивалентны.

Проще говоря, теорема Гробмана-Хартмана утверждает, что при переходе от нелинейной системы к ее линеаризации, в малой окрестности состояния равновесия происходит лишь непрерывная деформация траекторий. На качественном уровне это утверждение иллюстрирует Рис.5, показывающий искривление траекторий вблизи состояния равновесия, имеющего в линеаризованной задаче тип “седло”.

Покажем, что условие грубости состояния равновесия является существенным.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -v + u(u^2 + v^2); \\ \dot{v} &= u + v(u^2 + v^2)\end{aligned}$$

Линеаризация этой системы в окрестности состояния равновесия $(0, 0)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -v; \\ \dot{v} &= u\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 1 = 0$, его корни - чисто мнимые. Значит, $(0, 0)$ в линеаризованной системе имеет тип “центр”. Это состояние равновесия является негрубым, то есть, теорема Гробмана-Хартмана в этой ситуации неприменима.

Чтобы исследовать поведение траекторий в нелинейной системе, перейдем к полярным координатам

$$u = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta.$$

Умножим первое уравнение на u , второе - на v и сложим оба уравнения. Получим

$$u\dot{u} + v\dot{v} = u(-v + u(u^2 + v^2)) + v(u + v(u^2 + v^2)) = (u^2 + v^2)^2$$

В левой части уравнения стоит полная производная

$$u\dot{u} + v\dot{v} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)_t = \frac{1}{2}(r^2)_t = r\dot{r}$$

Таким образом получаем

$$\dot{r} = r^3$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{C - 2t}} \quad (10)$$

где C - произвольная константа. С ростом t значение r растёт, и при $t \rightarrow C/2$ эта функция стремится к бесконечности.

Для получения уравнения на θ запишем $\operatorname{tg} \theta = v/u$ и продифференцируем это равенство

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tg} \theta = \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} = \frac{\dot{v}u - v\dot{u}}{u^2}$$

Следовательно

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{v}u - v\dot{u}}{r^2}$$

Подставляя в последнее равенство явные выражения для \dot{u} и \dot{v} , получаем

$$\dot{\theta} = \frac{1}{r^2} [(u + vr^2)u - (-v + ur^2)v] = \frac{1}{r^2} [u^2 + v^2] = 1$$

Итак, на фазовой плоскости радиальное и угловое движение оказываются разделены. Система описывает вращение вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью, и, одновременно, удаление от начала координат по степенному закону (10). Таким образом, поведение траекторий в окрестности особой точки не описывается линейным приближением. Следовательно, условие грубости в теореме Гробмана-Хартмана опустить нельзя.

Помимо общего утверждения о “похожести” фазовых портретов нелинейной и линеаризованной систем в окрестности особой точки, можно сделать и некоторые более точные утверждения. Пусть состояние равновесия нелинейной системы имеет тип “седло”, собственные значения матрицы Якоби $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, и им соответствуют собственные векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . Тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема 0.2 (О состоянии равновесия типа “седло”) Пусть состояние равновесия (u_0, v_0) нелинейной системы (1)-(2) имеет тип “седло”, причем собственным значениям матрицы Якоби $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ соответствуют собственные векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . Тогда существует ровно две траектории $\gamma_{1,2}^+$, входящие в это состояние равновесия, причем в точке (u_0, v_0) касательный вектор к каждой из этих кривых есть \mathbf{e}_1 . Аналогично, существует ровно две траектории $\gamma_{1,2}^-$, входящие в это состояние равновесия, причем в точке (u_0, v_0) касательный вектор к каждой из этих кривых есть \mathbf{e}_2 .

Иллюстрацией к этой теореме может служить Рис.5.

10.3. Фазовые портреты для нелинейных систем: примеры

Перейдем теперь к практическому построению фазовых портретов нелинейных систем.

Пример. Построим фазовый портрет для системы

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v + u^2 \\ \dot{v} &= u + v^2\end{aligned}$$

Найдем состояния равновесия этой системы. Они удовлетворяют системе уравнений

$$v_0 + u_0^2 = 0, \quad u_0 + v_0^2 = 0$$

Отсюда заключаем, что на фазовом портрете имеется две особые точки: $O_1 = (0, 0)$ и $O_2 = (-1, -1)$. Выясним их типы. Матрица Якоби имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2u_0 & 1 \\ 1 & 2v_0 \end{pmatrix}$$

В точке O_1 характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 1 = 0$, собственные значения матрицы Якоби $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1$. Им соответствуют собственные векторы

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, особая точка O_1 имеет тип “седло”. Для точки O_2 характеристическое уравнение принимает вид $(2+\lambda)^2 - 1 = 0$, откуда $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$. Эта особая точка является устойчивым узлом. Расположение этих точек и схематическое представление траекторий в их окрестности показаны на Рис.6(А).

Далее, используем то, что значения правых частей системы (1)-(2) в точке (u, v) определяют касательный вектор к траектории, проходящей через эту точку. Построим эти касательные вектора для некоторых характерных линий на фазовом портрете. В частности, на параболе $v = -u^2$ касательные вектора параллельны оси v , а на параболе $u = -v^2$ они параллельны оси u . Далее, на оси u выполняется соотношение $v = 0$, значит u -компонента касательного вектора на этой оси всегда положительна, а v -компонента - положительна на положительной полуоси u и отрицательна на отрицательной полуоси u . Рис.6(В) представляет “скелет” фазового портрета, который можно построить на этом этапе рассуждений.

Далее, стоит заметить, что одновременно с траекторией $\gamma_1 = (u(t), v(t))$, проходящей через точку (u_0, v_0) при $t = 0$, на фазовом портрете имеется траектория $\gamma_2 = (v(t), u(t))$, проходящая через точку (v_0, u_0) . Этот факт следует из симметрии системы относительно перемены местами u и v . Таким образом, фазовый портрет симметричен относительно прямой $u = v$. Кроме того, полагая $u = v \equiv w$, получаем, что одним из решений системы является пара $(w(t), w(t))$, где $w(t)$ является решением уравнения

$$\dot{w} = w + w^2 \quad (11)$$

Это уравнение имеет два состояния равновесия: устойчивое $w = -1$ и неустойчивое $w = 0$ (в этом нетрудно убедиться, используя методы предыдущей лекции). Первое из них соответствует точке O_1 , второе - O_2 . Общее решение (11) имеет вид

$$w(t) = -\frac{Ce^t}{1 + Ce^t} \quad (12)$$

Для окончательного построения фазового портрета имеет смысл численно построить некоторое количество траекторий. Это можно сделать, например, используя процедуры MatLab'a для решения начальной задачи системы обыкновенных дифференциальных уравне-

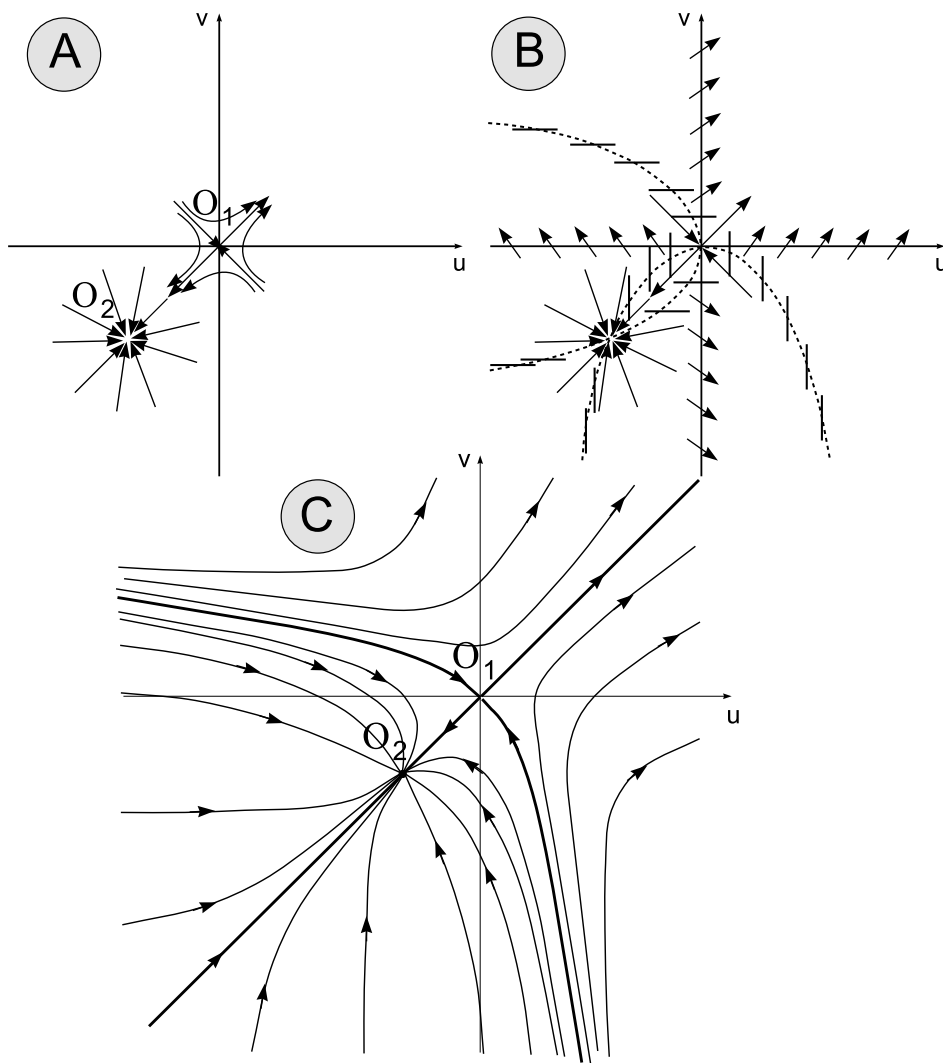


Рис. 6.

ний. Численный счет показывает, что почти все траектории системы уходят на бесконечность, либо при $t \rightarrow \infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$. Исключение составляют состояния равновесия, а также траектория, соединяющая точки O_1 и O_2 . Она лежит на прямой $u = v$, и явный вид соответствующего решения можно получить, положив $C = 1$ в (12)

$$u(t) = v(t) = -\frac{e^t}{1 + e^t}$$

Траектории такого типа, соединяющие два различных состояния равновесия, называются *гетероклиническими*.

Окончательный вид фазового портрета приведен на Рис.6(С).

Пример. Построим фазовый портрет для системы

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v - 2u \\ \dot{v} &= u + v - u^3\end{aligned}$$

Состояния равновесия этой системы удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}v_0 &= 2u_0; \\ u_0 + v_0 - u_0^3 &= 0.\end{aligned}$$

Имеются три состояния равновесия: это точки $O_0 = (0, 0)$, $O_+ = (\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ и $O_-(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$. Выясним их типы. Матрица Якоби имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 - 3u_0^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Собственные значения \mathbf{J} в точке O_0 равны $\lambda_1 = (-1 + \sqrt{13})/2 > 0$, $\lambda_2 = (-1 - \sqrt{13})/2 < 0$, то есть эта точка является седлом. Соответствующие собственные векторы равны

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$$

Эти векторы ортогональны друг другу.

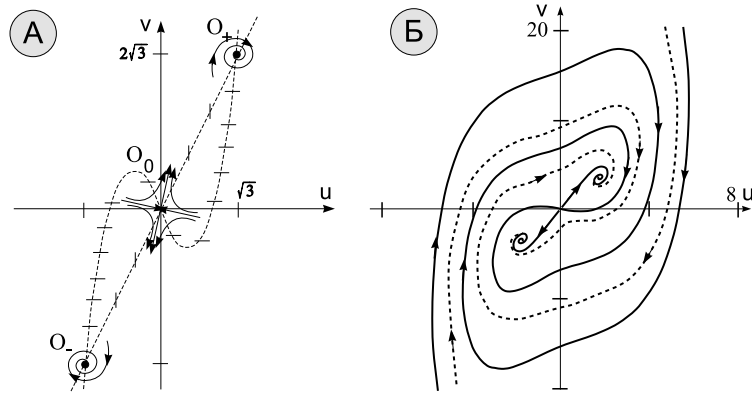


Рис. 7.

Обе точки O_{\pm} являются устойчивыми фокусами. Для каждой из них собственные значения являются комплексными, $\lambda_{1,2} = (-1 \pm i\sqrt{23})/2$. Чтобы определить направление “закручивания” траекторий вблизи точек O_{\pm} найдем вектор фазового потока в какой-нибудь близкой точке. Например, для точки O_{+} возьмем точку $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Посчитав значения правых частей системы, получаем, что этот вектор равен $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. Из рисунка видно, что “закручивание” траекторий вблизи этой точки происходит по часовой стрелке. Аналогичным образом нетрудно проверить, что в окрестности O_{-} траектории “закручиваются” также по часовой стрелке. Стоит также заметить, что система не меняется при замене $u \rightarrow -u, v \rightarrow -v$, поэтому фазовый портрет обладает симметрией относительно начала координат.

Далее, построим на фазовом портрете кривую $v = -u + u^3$, (на ней касательная к траекториям параллельна оси u) и прямую $v = 2u$ (на ней касательная к траекториям параллельна оси v). Получившийся “скелет” фазового портрета изображен на Рис.7А. Для окончательного построения портрета имеет смысл построить несколько траекторий численно. В первую очередь интерес представляют входящие и выходящие траектории седла O_0 . Решая численно задачу Коши с

начальными данными

$$u(0) = \varepsilon, \quad v(0) = \varepsilon \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right), \quad \varepsilon \ll 1, \quad t > 0$$

соответствующими вектору \mathbf{e}_1 , находим, что две выходящие траектории седла “наматываются” на точки O_+ и O_- при $t \rightarrow +\infty$. Аналогично, решая задачу Коши

$$u(0) = \varepsilon, \quad v(0) = \varepsilon \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2} \right), \quad \varepsilon \ll 1, \quad t > 0$$

соответствующими вектору \mathbf{e}_2 , убеждаемся, что при $t \rightarrow -\infty$ входящие траектории O_0 совершают обходы вокруг начала координат по раскручивающейся спирали. Зная это, нетрудно достроить фазовый портрет окончательно, см. Рис.7Б.

Задачи:

1. Выясните, что произойдет с фазовым портретом системы (1)-(2) при замене

$$f(u, v) \rightarrow -f(u, v), \quad g(u, v) \rightarrow -g(u, v).$$

2. Нарисуйте “скелеты” фазовых портретов приведенных ниже систем. Постройте эти портреты полностью, используя, при необходимости, помощь компьютера:

$$1. \quad \dot{u} = uv - u, \quad \dot{v} = u + v$$

$$2. \quad \dot{u} = u + uv, \quad \dot{v} = v + u^2$$

$$3. \quad \dot{u} = u^2 - v, \quad \dot{v} = u - v$$

$$4. \quad \dot{u} = u + v, \quad \dot{v} = u \cos v$$

$$5. \quad \dot{u} = u \cos v, \quad \dot{v} = v \cos u$$

$$6. \quad \dot{u} = 8u - v^2, \quad \dot{v} = v - u^2$$

7. $\dot{u} = uv - 1, \quad \dot{v} = u - v^3$
8. $\dot{u} = u^2 + v^2 - 1, \quad \dot{v} = uv$
9. $\dot{u} = u^2 + v^2 - 1, \quad \dot{v} = u + v$
10. $\dot{u} = u^2 + v^2 + u + v - 2, \quad \dot{v} = uv$
11. $\dot{u} = u(3 - u - 2v), \quad \dot{v} = v(2 - u - v)$
12. $\dot{u} = u(3 - 2u - v), \quad \dot{v} = v(2 - u - v)$

3. Постройте фазовые портреты системы

$$\dot{u} = a + u^2 - uv, \quad \dot{v} = v^2 - u^2 - 1$$

при $a = 0$, затем при $a > 0$ и $a < 0$. Обратите внимание, что при $a = 0$ на фазовом портрете присутствует гетероклиническая траектория, соединяющая два седла, в то время как при $a \neq 0$ гетероклинической траектории нет.