Лекция 10

10. Первые интегралы. Гамильтоновы системы.

Продолжим изучение автономных систем уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u,v); && (1) \\ \dot{v} &= g(u,v); && (2) \end{aligned}$$

Введем следующее определение:

> Будем говорить, что система (1)-(2) обладает первым интегралом, если существует функция $E(u,v)$, не являющаяся тождественной постоянной ни в каком открытом множестве, такая, что на каждой траектории $(u(t),v(t))$ выполняется соотношение $E((u(t),v(t)) = \mathrm{const}$.

Наличие первого интеграла существенно упрощает построение фазового портрета системы. В этом случае достаточно построить линии уровня функции $E(u,v)$ - они и будут траекториями системы (1)-(2).

10.1 Примеры систем с первыми интегралами

Пример 1: Рассмотрим систему

$$\dot{u} = u(1-v) \quad (3)$$

$$\dot{v} = -v(1-u). \quad (4)$$

Системы такого типа называются системами "хищник - жертва". Они возникают в задачах математической экологии, где исследуется сосуществование видов, взаимодействующих друг с другом. Традиционной интерпретацией системы (3)-(4) является следующая. Пусть u - количество зайцев в некотором районе, а v - число волков, которые этими зайцами питаются. Можно условно считать, что скорость прироста поголовья зайцев $\dot{u}$ пропорциональна их численности u. Коэффициент пропорциональности зависит от числа волков - чем их больше, тем прирост меньше, причем если число волков превышает некоторую условную величину (единицу в нашем случае), то прирост сменяется уменьшением. Так получается первое уравнение системы. Скорость прироста поголовья волков $\dot{v}$ также пропорциональна их численности v, но коэффициент пропорциональности зависит от числа зайцев: если зайцев мало (меньше единицы в условных величинах), то численность волков начинает уменьшаться. Так получается второе уравнение системы.

Поделив уравнения друг на друга, получим

$$\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \frac{u(1-v)}{v(u-1)} = \frac{\frac{1-v}{v}}{\frac{u-1}{u}}$$

откуда

$$\frac{(u-1)\ \dot{u}}{u} = \frac{(1-v)\ \dot{v}}{v}$$

интегрируя обе части последнего соотношения, получаем

$$\int \frac{1-v}{v}\ dv = \int \frac{u-1}{u}\ du + E$$

где E- произвольная константа. Отсюда заключаем, что система имеет первый интеграл

$$E \equiv E(u,v) = u - \ln u + v - \ln v \tag{5}$$

Линии уровня первого интеграла совпадают с траекториями системы (3)-(4). Построим эти линии. К сожалению, выразить в явном виде одну переменную через другую из (5) не удается. Рассмотрим функцию

$$z(x) = x - \ln x$$

График этой функции приведен на Рис.1(A). Наименьшее значение $z(x)$ достигается в точке $x = 1$ и равно единице. При всех $Z > 1$ уравнение $Z(x) = Z$ имеет два положительных корня, причем при $Z \to \infty$ меньший из корней стремится к нулю, а больший - к бесконечности.

Выражение для первого интеграла можно переписать в виде

$$E = z(u) + z(v).$$

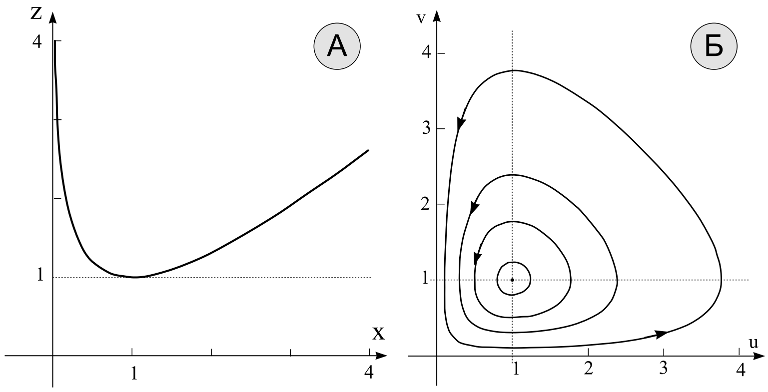

Рис.1. К модели "хищник-жертва", пример 1

В свете вышесказанного, достаточно ограничиться линиями уровня функции $E(u, v)$ при $E \geq 2$. При $E = 2$ единственным решением (5) является $(u, v) = (1, 1)$. Зафиксируем $E > 2$, и при каждом E_1, $1 < E_1 < E$, будем находить две пары точек, соответствующих решениям $z(u) = E_1$ и $z(v) = E - E_1$. Если решения первого уравнения $u = u_1$ и $u = u_2$, а второго $v = v_1$ и $v = v_2$, то на фазовую плоскость необходимо нанести четыре точки: (u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_2, v_1), (u_2, v_2). При изменении E_1 от 1 до E эти точки "заметут" замкнутую кривую. В силу того, что от перемены местами u и v в (5) это выражение не меняется, эта кривая симметрична относительно прямой $u = v$.

Замкнутые кривые, соответствующие различным значениям E, приведены на Рис.1(Б). Они представляют собой траектории нашей системы. Для определения направления движения по этим траекториям, заметим, что при $u < 1$ переменная v уменьшается. Это позволяет расставить стрелки на полученных кривых. Стоит также обратить внимание на то, что для точек на осях u и v значение первого интеграла обращается в бесконечность. Вместе с тем $u = 0$, $v = 0$ также является решением задачи, причем - состоянием равновесия (соответствующим тому, что и волки и зайцы вымерли). Нетрудно проверить, что особая точка $(0, 0)$ является седлом. Поведение в ее окрестности замкнутых траекторий системы, соответствующих с

$C \neq \infty$ согласуется с этим фактом[1].

Пример 2: Рассмотрим уравнение

$$\ddot{u} - u + u^3 = 0 \tag{6}$$

Это уравнение, называемое *уравнением Дюффинга*, играет большую роль в нелинейной оптике, где оно описывает форму пучка электромагнитного поля в нелинейной среде так называемого керровского типа. Для исследования возможных типов решений этого уравнения, запишем это уравнение в виде системы

$$\dot{u} = v \tag{7}$$

$$\dot{v} = u - u^3 \tag{8}$$

Умножая первое уравнение на $\dot{v}$, второе - на $\dot{u}$, вычитая второе уравнение из первого, получаем

$$0 = \left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4\right)_t$$

Значит, система (7)-(8) имеет первый интеграл

$$E(u, v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4$$

Построим линии уровня первого интеграла. Это достаточно просто сделать без привлечения компьютера, нарисовав сначала графики функций

$$y = 2\left(u^2 - \frac{1}{2}u^4 + E\right)$$

[1]Не стоит переоценивать роль моделей такого типа для реальных приложений к экологии. Предложенная модель не учитывает множества факторов. В частности, закон прироста или уменьшения популяций оказывается принципиально более сложным, чем прямая пропорциональная зависимость между функцией и ее производной. Более детально о классических математических моделях в экологии можно прочитать, например, в книге Ю.М.Свирежева *Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии*, Москва, Наука, 1987, или англоязычную книжку J.D.Murray, Mathematical Biology 1: An introduction, Springer, 2002

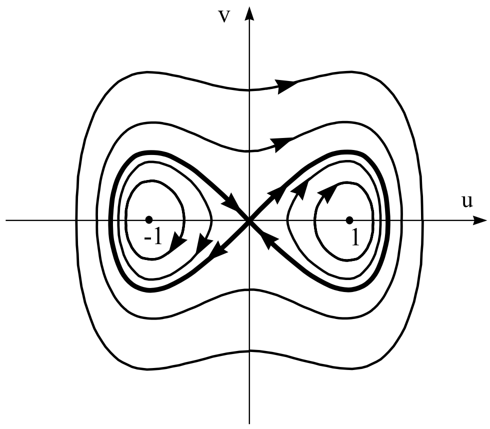

Рис.2. Фазовый портрет уравнения Дюффинга, пример 2

при различных E, а затем произведя “извлечение корня” их получившихся графиков. Результат показан на Рис.2. Стрелки на полученных кривых можно расставить, заметив, что при $v = \dot{u} > 0$ (то есть, в верхней полуплоскости) u увеличивается, а при $v < 0$ - уменьшается.

Фазовый портрет позволяет утверждать, что уравнение Дюффинга описывает четыре различных типа решений. *Первый и второй* типы решений - это периодические решения, представляющие собой осцилляции вокруг состояний равновесия $u = 1$ и $u = -1$ соответственно. *Третий* тип решений - это периодические решения большой амплитуды, со нулевым средним. *Четвертый* тип решений соответствуют траекториям, выходящим и входящим в состояние равновесия $(0, 0)$ (выделены жирным на Рис.2). Такие траектории называются *гомоклиническими.* Эти решения стремятся к нулю при $t \to \pm\infty$ и могут быть записаны в явном виде

$$u(x) = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch} u}$$

Решения остальных типов в элементарных функциях не выражается, но могут быть выражены в специальных функциях (так называемых эллиптических функциях Якоби).

10.2. Гамильтоновы системы.

Система (1)-(2) называется *гамильтоновой*, если существует функция $H(u,v)$, не являющаяся тождественной постоянной ни в каком открытом множестве, такая, что

$$f(u,v) = \frac{\partial H}{\partial v}(u,v);$$

$$g(u,v) = -\frac{\partial H}{\partial u}(u,v)$$

Эта функция называется *гамильтонианом* рассматриваемой системы уравнений.

Используя перестановочность операторов дифференцирования

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v}$$

нетрудно проверить, что система является гамильтоновой, тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u}$$

Система уравнений в первом из приведенных выше примеров не является гамильтоновой, тогда как во втором примере - она таковой является.

Справедлива следующая теорема

Теорема 0.1. *Гамильтониан $H(u,v)$ гамильтоновой системы*

$$\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial v}(u,v);$$

$$\dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial u}(u,v)$$

является ее первым интегралом.

Доказательство: Умножим первое из уравнений на $\dot{v}$, второе - на $\dot{u}$ и вычтем второе уравнение из первого. Получим

$$0 = \frac{\partial H}{\partial v}(u,v)\dot{v} + \frac{\partial H}{\partial u}(u,v) = \frac{dH}{dt}(u(t),v(t)) \quad \blacksquare$$

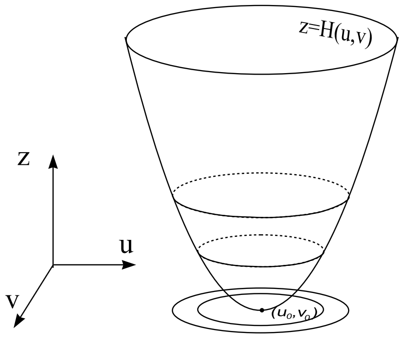

Рис.3. К теореме об состоянии равновесия типа центр в гамильтоновой системе

Наконец, докажем еще одно важное утверждение:

Теорема 0.2. *Пусть гамильтонова система*

$$\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial v}(u, v);$$

$$\dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial u}(u, v)$$

имеет состояние равновесия (u_0, v_0), *причем для ее линеаризации точка* $(0, 0)$ *является центром. Тогда в исходной гамильтоновой системе малая окрестность точки* (u_0, v_0) *на фазовом портрете заполнена замкнутыми кривыми, охватывающими эту точку.*

Доказательство: Условием, для того, чтобы состояние равновесия $(0, 0)$ линеаризованной системы имело тип центр, является выполнение неравенства

$$H_{uv}^2(u_0, v_0) - H_{uu}(u_0, v_0)H_{vv}(u_0, v_0) < 0$$

Это же условие является условием того, что функция $H(u, v)$ имеет в точке (u_0, v_0) максимум или минимум. Сечения поверхности $z = H(u, v)$ плоскостями $z = H_0$ в окрестности точки максимума или минимума являются замкнутыми кривыми. При этом проекции этих сечений на плоскость (u, v) и являются траекториями рассматриваемой системы, см. Рис.3. ■

Задачи:

1. В примере 1 фазовый портрет для системы “хищник-жертва” построен в области $u \geq 0$, $v \geq 0$, в то время как в самой системе не содержится ограничений на u и v. Постройте фазовый портрет системы во всей плоскости (u, v).

2. Найдите первые интегралы и постройте фазовые портреты для систем

$$(a) \quad \dot{u} = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad \dot{v} = \frac{v}{u^2 + v^2}$$

$$(b) \quad \dot{u} = v(u^2 + 1), \quad \dot{v} = u(v^2 + 1)$$

$$(c) \quad \dot{u} = -kuv, \quad \dot{u} = kuv - ly, \quad k, l > 0$$

3. Покажите, что $E = (u^2 + v^2)/v$ является первым интегралом для системы

$$\dot{u} = u^2 - v^2, \quad \dot{v} = 2uv$$

Постройте фазовый портрет этой системы и найдите ее решения в явном виде.

4. (Свирежев, 1987) Покажите, что $v \ln Ev = -\frac{1+u^2}{2u}$, E - произвольное число, является первым интегралом для системы типа “хищник-жертва”

$$\dot{u} = u\left(1 - \frac{2uv}{u^2 + 1}\right), \quad \dot{v} = v\left(1 - \frac{2}{u^2 + 1}\right)$$

Постройте фазовый портрет этой системы.

5. Постройте фазовые портреты для следующих уравнений второго порядка

$$(a)\quad \ddot{u} - u - u^2 = 0$$

$$(b)\quad \ddot{u} + u - u^3 = 0$$

$$(c)\quad \ddot{u} + \frac{u}{1+u^2} = 0$$

$$(d)\quad \ddot{u} + \sin u - \frac{1}{2}\sin 2u = 0$$

$$(e)\quad \ddot{u} + 1 - e^{-u} = 0$$

6. Убедитесь, что системы являются гамильтоновыми, найдите гамильтониан и постройте фазовые портреты для систем

$$(a)\quad \dot{u} = \sin v, \quad \dot{v} = \sin u$$

$$(b)\quad \dot{u} = v + v^2, \quad \dot{v} = u + u^2$$

$$(c)\quad \dot{u} = u + v^2, \quad \dot{v} = -v + u^2$$

$$(d)\quad \dot{u} = u^2 v - 3v^3, \quad \dot{v} = -u^3 - uv^2$$

$$(e)\quad \dot{u} = v + u^2 v, \quad \dot{v} = -u - uv^2.$$

7. Придумайте единый прием, позволяющий решать в явном виде следующие системы уравнений

$$(a)\quad \dot{u} = e^u \cos v, \quad \dot{v} = e^u \sin v;$$

$$(b)\quad \dot{u} = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad \dot{v} = -\frac{v}{u^2+v^2}$$

$$(c)\quad \dot{u} = u - 2uv, \quad \dot{v} = v + u^2 - v^2$$

Нарисуйте фазовые портреты этих систем.