Лабораторная работа 1 (Исследование системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными)

Третьяк И.Д. (Tretyak0ID@gmail.com) Вариант 20 = 4

Постановка задачи.

Полагая $z \in \mathbb{C}$, найти наименьшее по модулю ненулевое решение уравнения

$$ch(z) - 1 = z$$

Сведение уравнения на множестве комплексных чисел к системе 2х уравнений на множестве действительных чисел.

$$ch(z) - 1 = z, \; z = x + iy$$
$$F(z) = ch(z) - 1 - z = 0$$
$$F(x + iy) = ch(x + iy) - x - iy - 1 = 0$$
$$F(x + iy) = ch(x)ch(iy) + sh(x)sh(iy) - x - iy - 1 = 0 \quad (1)$$
$$F(x + iy) = ch(x)cos(y) + ish(x)sin(y) - x - iy - 1 = 0 \quad (2)$$

Где в (1) было использовано свойство гиперболических функций: $ch(a + b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$.

В (2) использована связь гиперболических и тригонометрических функций: $ch(ia) = cos(a)$ и $sh(ia) = isin(x)$.

Отсюда следует, что действительная и мномая части левой части уравнения равны нулю одновременно

$$\begin{cases} Re(F) = ch(x)cos(y) - x - 1 = 0 \\ Im(F) = sh(x)sin(y) - y = 0 \end{cases}$$

Первая часть исследования

Визуализируем на плоскости

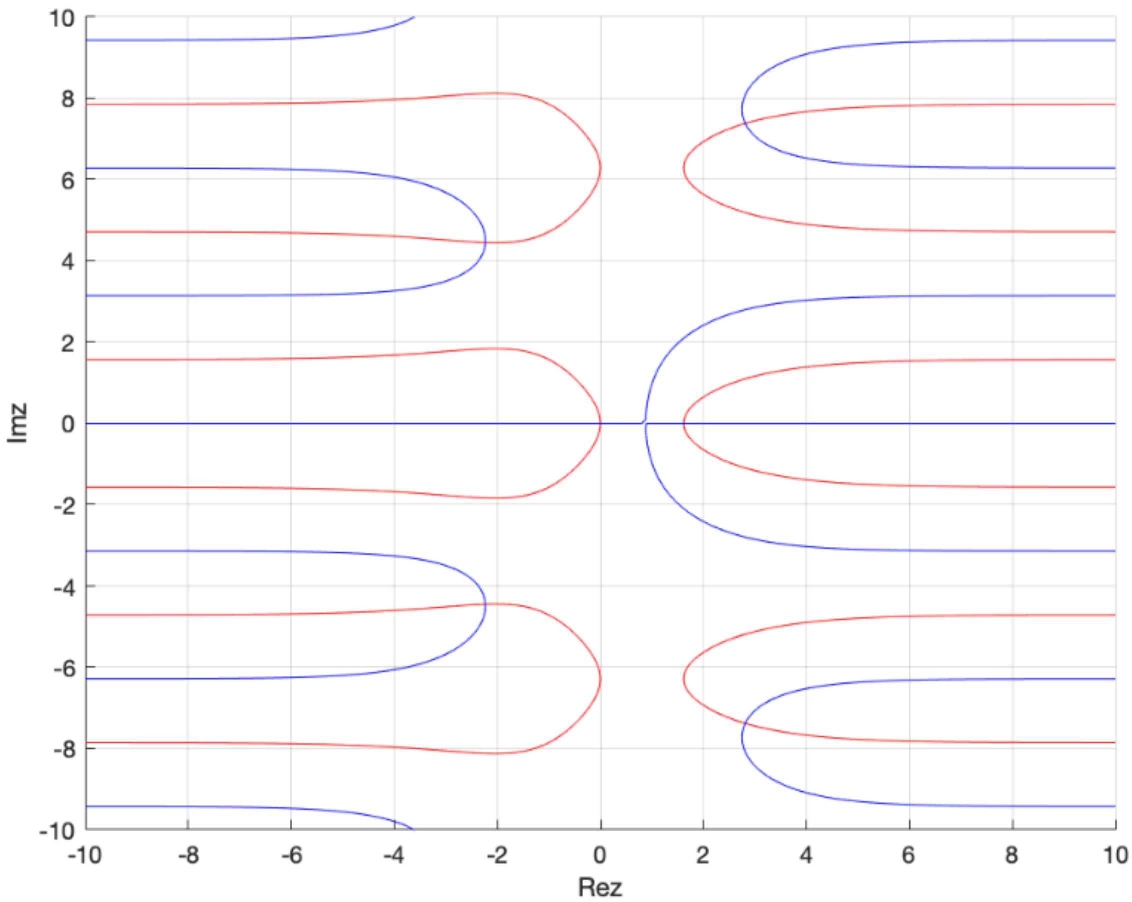
```
hold on
grid on

F=@(x,y)cos(y).*cosh(x)-x-1
x=-10:0.1:10
y=-10:0.1:10
[X,Y]=meshgrid(x,y)
contour(X,Y,F(X,Y),[0,0],'r')

F=@(x,y)sinh(x).*sin(y)-y
x=-10:0.1:10
y=-10:0.1:10
```

```
[X,Y]=meshgrid(x,y)
contour(X,Y,F(X,Y),[0,0],'b')

xlabel('Rez')
ylabel('Imz')
```



В качетсве ненулевой, (по Rez и Imz) приближаемой точки, выберем (-2.5; 4)

Вторая часть исследования

```
syms x y
F_1   = cos(y)*cosh(x)-x-1;
F_2   = sinh(x)*sin(y)-y;
F_1_x = diff(F_1,x)
F_2_x = diff(F_2,x)
F_1_y = diff(F_1,y)
F_2_y = diff(F_2,y)

N=10;
x_n = zeros(1,N);
y_n = zeros(1,N);
x_n(1) = -2.5;
y_n(1) = 4;

for n = 1:N-1
```

```
    A = [subs(subs(F_1_x,x,x_n(n)),y,y_n(n)) subs(subs(F_1_y,x,x_n(n)),y,y_n(n));
         subs(subs(F_2_x,x,x_n(n)),y,y_n(n)) subs(subs(F_2_y,x,x_n(n)),y,y_n(n))];
    B = [subs(subs(F_1,x,x_n(n)),y,y_n(n)); subs(subs(F_2,x,x_n(n)),y,y_n(n))];
    X_n = [x_n(n);y_n(n)];
    X = X_n - inv(A)*B;
    x_n(n+1) = X(1);
    y_n(n+1) = X(2);
end

display('массив Rez')
for n = 1:1:10
    display(x_n(n))
end

display('массив Imz')
for n = 1:1:10
    display(y_n(n))
end
```

Получаем результат

```
массив Rez
  -2.500000000000000
  -2.166399961221900
  -2.229033524122649
  -2.232496555256660
  -2.232541077091990
  -2.232541076151550
  ------------------
  -2.232541076151550
  -2.232541076151550
  -2.232541076151550
  -2.232541076151550

массив Imz
     4
   4.328091718704203
   4.457277264745584
   4.447906636520948
   4.447930321206356
   4.447930320326076
   -----------------
   4.447930320326076
   4.447930320326076
   4.447930320326076
   4.447930320326076
```

Таким образом, метод Ньютона сходится к значению
$z = -2.232541076151550 + i4.447930320326076$ за 5 итераций.

Наблюдаем, что на первой итерации лишь целая часть вещественной и мномой частей стабилизируется к истинному значению.

На втором шаге итерации имеем еще одну значащую цифру.

На третьем 2й и 3й знаки после запятой становятся значимыми.

На четвертой итерации 4й, 5й, 6й и 7й знаки значимы.

На пятой итерации с 8го по 15й знаки значимы.

Такая скорость сходимости как раз соответствует методу Ньютона.