Лекция 14

14. Понятие о нелинейных задачах на собственные значения

14.1. Линейные задачи на собственные значения

Традиционно в курсе линейной алгебры (а также и функционального анализа) рассматриваются задачи на собственные значения вида

$$\mathbf{Lu} = \lambda \mathbf{Nu} \tag{1}$$

где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}$ - линейные операторы, действующие из некоторого линейного пространства $\mathcal{L}_1$ в другое $\mathcal{L}_2$, λ - число, а $\mathbf{u}$ - элемент пространства $\mathcal{L}_1$. *Решить* такую задачу на собственные значения означает описать все возможные пары $(\lambda, \mathbf{u})$, которые удовлетворяют уравнению (1). В дальнейшем для простоты будем полагать, что $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ - евклидовы пространства. Соответственно, и в $\mathcal{L}_1$ и в $\mathcal{L}_2$ определены скалярные произведения элементов $(\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2})_{\mathcal{L}_{1,2}}$, а также соответствующие нормы

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{L}_{1,2}} = \sqrt{(\mathbf{z}, \mathbf{z})_{\mathcal{L}_{1,2}}}$$

Пример 1. Если $\mathbf{L}$ - самосопряженный оператор в n-мерном линейном пространстве, заданный в некотором базисе симметричной матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

то собственные значения задачи (1) являются корнями полинома

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

где $\mathbf{E}$ - единичная матрица. Из курса линейной алгебры известно, что все эти корни действительны. Если они еще и попарно различны, то решение задачи (1) представляет собой набор из n пар,

$(\lambda_1, \mathbf{u}_1)$,... $(\lambda_n, \mathbf{u}_n)$, причем все собственные значения λ_k, $k = 1, \ldots, n$ являются действительными, а каждый из собственных векторов $\mathbf{u}_k$, $k = 1, \ldots, n$ однозначно (конечно, с точностью до нормировки) определяется соответствующим собственным значением. Кроме того, собственные вектора $\mathbf{u}_k$ образуют базис в n-мерном пространстве.

Пример 2. Задача

$$\ddot{u} = \lambda u, \tag{2}$$

$$u(0) = u(\pi) = 0 \tag{3}$$

является задачей на собственные значения. Линейным пространством, в котором она определена, является пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию (3). Решив явно дифференциальное уравнение (2), заключаем, что все решения задачи (2)-(3) исчерпываются парами $(-k^2, \alpha \sin kt)$, $k = 1, 2, \ldots$, где α - произвольная константа.

Пример 3. Задача

$$\ddot{u} = \lambda u, \tag{4}$$

$$u(0) = u(2\pi) \tag{5}$$

также является задачей на собственные значения. Из явного решения дифференциального уравнения (4) следует, что решениями задачи будут теперь пары $(-k^2, \alpha_1 \cos kt + \alpha_2 \sin kt)$, где α_1 и α_2 - произвольные константы. В этом случае получается, что каждому собственному значению $\lambda = -k^2$ соответствует двумерное собственное пространство с базисом $\cos kt$, $\sin kt$.

Линейность рассматриваемых задач означает, что если пара $(\lambda, \mathbf{u})$ является решением задачи (1), то и пара $(\lambda, \alpha\mathbf{u})$, α - произвольное число, также является ее решением. Для дальнейшего оказывается удобным представить решения линейной задачи на собственные значения в виде *ветвей*, которые можно параметризовать, например, нормой собственного вектора или собственной функции. Приведем следующую графическую иллюстрацию. Будем откладывать на горизонтальной оси значения λ, а по вертикальной - норму собственного элемента $\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_1}$, которая в силу линейности задачи может

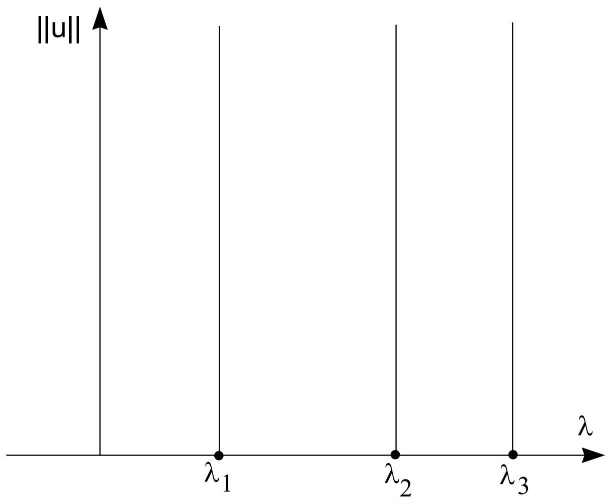

Рис.1.

быть произвольной. Очевидно, ветви решений будут представляться вертикальными прямыми, выходящими из собственных значений задачи (см. Рис.1).

14.2. Нелинейные задачи на собственные значения

В теории упругости, в гидродинамике и в некоторых других приложениях возникает необходимость обобщить понятие задачи на собственные значения. *Нелинейная задача на собственные значения* записывается в виде

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{N}(\mathbf{u}). \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{L}$ - линейный оператор, определенный в некотором линейном пространстве, λ - число, $\mathbf{u}$ - элемент этого пространства, а $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ - нелинейная функция от этого элемента, такая, что

$$\mathbf{N}(0) = 0. \tag{7}$$

Решением такой задачи на собственные значения также являются пары $(\lambda, \mathbf{u})$, которые удовлетворяют соотношению (6).

Очевидно, что $\mathbf{u} = 0$ является решением задачи (6). Проведем следующие нестрогие рассуждения. Пусть $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ допускает следующее представление

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) = \mathbf{N}_0\mathbf{u} + \mathbf{N}_1(\mathbf{u}) \tag{8}$$

где $\mathbf{N}_0$ - линейный оператор[1], а нелинейная функция $\mathbf{N}_1(\mathbf{u})$ такова, что

$$\lim_{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_1}\to 0} \frac{\|\mathbf{N}_1(\mathbf{u})\|_{\mathcal{L}_2}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_1}} = 0$$

(в дальнейшем значок $\mathcal{L}_1$ у $\|\mathbf{u}\|$ мы будем опускать). Тогда естественно ожидать, что при достаточно малых $\|\mathbf{u}\|$ задачу (6) можно приближенно заменить задачей

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{N}_0\mathbf{u}, \tag{9}$$

Если допустить, что $\mathbf{N}_0$ имеет обратный оператор $\mathbf{N}_0^{-1}$, то задача (9) может быть переписана в стандартном виде

$$\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{L}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

Исходя из этих эвристических соображений, можно сделать следующее предположение:

Принцип линеаризации. Пусть λ_1, λ_2,.. - собственные значения задачи (9). При достаточно малых $\|\mathbf{u}\|$ решение задачи (6) возможно лишь при значениях λ, близких к λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, причем при $\|\mathbf{u}\| \to 0$ собственные значения нелинейной задачи (6) стремятся к некоторым из собственных значений λ_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Это предположение может быть строго доказано при некоторых ограничениях на $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}(\mathbf{u})$. В частности, оно справедливо, если $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ - линейный и нелинейный операторы, действующие в конечномерном пространстве $\mathcal{L}_1$. Формулировка более общих условий, когда это предположение верно, требует введения некоторых понятий из функционального анализа. Мы извлечем из принципа линеаризации

[1]Заметим, что в конечномерном пространстве матрица $\mathbf{N}_0$ - это матрица Якоби $\mathbf{N}(\mathbf{u})$

следующее “руководство к действию”, которое сформулируем так: *для поиска малых по норме решений* $\mathbf{u}$ *задачи (6) необходимо брать* λ, *лежащие вблизи собственных значений линейной задачи (9).* Эти собственные значения линейной задачи порождают *ветви решений* нелинейной задачи на собственные значения. Такие значения называют *точками ветвления.* В отличие от линейной задачи, однако, на этих ветвях решений с ростом $\|\mathbf{u}\|$ собственное значение также меняется. Возможные ситуации показаны на Рис.2. Может оказаться, что

- собственное значение линейной задачи порождает единственную ветвь решений нелинейной задачи ($\lambda = \lambda_1$);
- собственное значение линейной задачи не порождает ветви решений нелинейной задачи ($\lambda = \lambda_2$);
- собственное значение линейной задачи порождает несколько ветвей решений нелинейной задачи ($\lambda = \lambda_3$);
- собственное значение линейной задачи порождает ветвь решений нелинейной задачи, которая впоследствии также “ветвится” ($\lambda = \lambda_4$);
- ветви решений, порожденные разными собственными значениями линейной задачи, сливаются ($\lambda = \lambda_5$ и $\lambda = \lambda_6$);
- существуют семейства решений нелинейной задачи на собственные значения никак не связанные с собственными значениями линейной задачи (9).

14.3. Исследование окрестности точки ветвления

Построение ветви решений нелинейной задачи на собственные значения, как правило, можно выполнить лишь используя численный счет. Вместе с тем, для исследования окрестности точки ветвления можно эффективно использовать асимптотические методы. Введем ε - малый параметр, и будем искать решение $\mathbf{u}$ в виде асимптотического разложения

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2 + \varepsilon^3 \mathbf{u}_3 + \dots \tag{10}$$

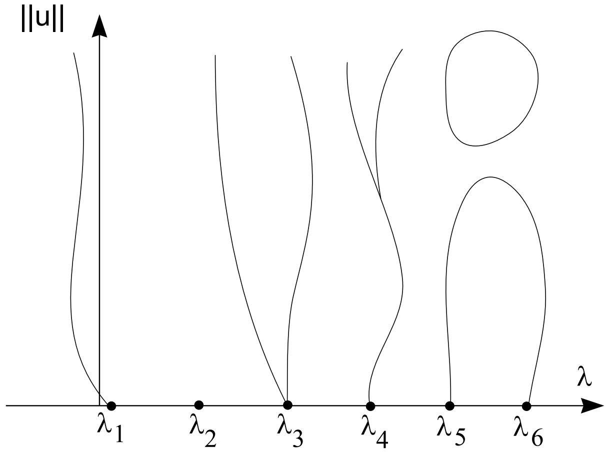

Рис.2.

Кроме того, так как собственное значение λ на ветви также изменяется, необходимо также разложить λ в асимптотический ряд по степеням ε,

$$\lambda = \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 + \dots. \tag{11}$$

Далее, нам будет необходимо подставить эти разложения в (6) и приравнять члены при одинаковых степенях ε. Учитывая представление (8), получим

$$\varepsilon\mathbf{L}\mathbf{u}_1 + \dots = (\mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \dots)\,(\varepsilon\mathbf{N}_0\mathbf{u}_1 + \mathbf{N}_1(\varepsilon\mathbf{u}_1 + \dots))$$

Так как $\mathbf{N}_1(\varepsilon\mathbf{u}_1 + \dots) = o(\varepsilon)$, то первом порядке по ε получаем линейную задачу на собственные значения

$$\mathbf{L}\mathbf{u}_1 = \mu_0\mathbf{N}_0\mathbf{u}_1$$

из которой определяется μ_0 и $\mathbf{u}_1$. Потребуем, чтобы норма $\mathbf{u}_1$ была фиксирована (например, равна единице) и перейдем к исследованию членов порядка ε^2, затем ε^3 и так далее. Заметим, что для дальнейших шагов необходимо будет подставить выражение (10) в нелинейность $\mathbf{N}_1(\mathbf{u})$, что является достаточно трудоемкой процедурой. Однако структура уравнений для высших приближений будет схожа. Для порядка ε^n уравнение будет иметь вид

$$\mathbf{L}\mathbf{u}_n = \mu_0 \mathbf{N}_0 \mathbf{u}_n + \mathbf{F}\left(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}\right)$$

Для одновременного нахождения коэффициентов рядов рядов (10) и (11) важную роль будет играть *условие разрешимости* этого уравнения.

Поясним сказанное следующим примером.

Пример. Рассмотрим задачу

$$\ddot{u} + \lambda u e^u = 0 \tag{12}$$

где $u(t)$ удовлетворяет следующим граничным условиям

$$u(0) = u(\pi) = 0 \tag{13}$$

и λ является собственным параметром. Задача (12)-(13) является примером нелинейной задачи на собственные значения. Функция $u(t) \equiv 0$ является ее решением при любом значении λ. В то же время, имеются и другие решения этой задачи. Предположим, что $u(t)$ мало и запишем разложения в ряды $u(t)$ и λ по малому параметру ε

$$\begin{aligned} u(t) &= \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \varepsilon^3 u_3(t) + \ldots \\ \lambda &= \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + \ldots. \end{aligned}$$

Подставим эти разложения в уравнение (12). Имеем

$$\begin{aligned} & \varepsilon \ddot{u}_1 + \varepsilon^2 \ddot{u}_2 + \varepsilon^3 \ddot{u}_3 + \ldots + \\ + \quad & (\mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + \ldots) \cdot (\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \ldots) \times \\ \times \quad & \left\{ 1 + (\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \ldots) + \frac{1}{2} (\varepsilon u_1 + \ldots)^2 + \ldots \right\} = 0 \end{aligned}$$

Собирая члены при ε, получаем

$$\ddot{u}_1 + \mu_0 u_1 = 0$$

Учитывая граничные условия (13), заключаем, что $\mu_0 = k^2$ и $u_1(t) = \alpha \sin kt$, $k = 1, 2, \ldots$, где α - любое действительное число. Положим $\alpha = 1$ и ограничимся описанием ветви, соответствующей $k = 1$. Таким образом, для дальнейшего исследования имеем

$$u_1(t) = \sin t, \quad \mu_0 = 1$$

Собирая члены при ε^2, получаем

$$\ddot{u}_2 + \mu_0 u_2 = -\mu_1 u_1 - u_1^2 \tag{14}$$

Это уравнение имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям (13) *только при* $\mu_1 = -\frac{8}{3\pi}$. Это нетрудно проверить "в лоб", убедившись, что общее решение уравнения (14) есть

$$u_2(t) = -\frac{1}{2} + \left(A + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\mu_1 t\right)\cos t + \left(B - \frac{1}{2}\mu_1\right)\sin t - \frac{1}{6}\cos 2t$$

где A и B - произвольные константы. Оно удовлетворяет граничным условиям (13) лишь при $A = 0$, $\mu_1 = -\frac{8}{3\pi}$ и произвольном B. Соответствующее решение $u_2(t)$ имеет вид

$$u_2(t) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3\pi}t\right)\cos t + B_1 \sin t - \frac{1}{6}\cos 2t,$$

где B_1 - произвольная константа. Случай $B_1 \neq 0$ можно свести к случаю $B_1 = 0$ путем переопределения параметра ε: $\varepsilon \to \varepsilon + B_1\varepsilon^2$, "добавив" поправку $B_1\varepsilon^2 \sin t$ к члену первого порядка по ε. Такое переопределение параметра ε не затронет коэффициенты, найденные ранее. Далее, положив $B_1 = 0$ и считая, что

$$u_2(t) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3\pi}t\right)\cos t - \frac{1}{6}\cos 2t,$$

можно продолжить процедуру нахождения поправок $u_k(t)$ и, одновременно, μ_k, $k = 2, 3, \ldots$.

Вычисление коэффициента μ_1 "в лоб" трудоемко, а в некоторых случаях - и невозможно. Более эффективно использовать следующую лемму.

Лемма. *Необходимым и достаточным условием разрешимости граничной задачи*

$$\ddot{u} + u = f(t), \quad u(0) = u(\pi) = 0 \tag{15}$$

где $f(t)$ *- непрерывно дифференцируемая функция, является условие*[2]

$$\int_0^\pi f(t) \sin t \; dt = 0 \tag{16}$$

Доказательство. Умножим обе части уравнения на $u_1(t) = \sin t$

$$\int_0^\pi \ddot{u} u_1 \; dt + \int_0^\pi u u_1 \; dt = \int_0^\pi f u_1 \; dt$$

и, дважды интегрируя по частям в левой части последнего равенства, получим

$$\int_0^\pi \ddot{u} u_1 \; dt + \int_0^\pi u u_1 \; dt = -\int_0^\pi \dot{u} \dot{u}_1 \; dt + \int_0^\pi u u_1 \; dt =$$

$$= \int_0^\pi u \ddot{u}_1 \; dt + \int_0^\pi u u_1 \; dt = \int_0^\pi u(\ddot{u}_1 + u_1) \; dt = 0$$

(внеинтегральные члены оказались равны нулю вследствие граничных условий). Таким образом, условие (16) является *необходимым* для разрешимости задачи (15). Для доказательства *достаточности* разложим в ряд Фурье функцию $f(t)$, доопределив ее нечетным образом. В силу условия (16) разложение имеет вид

$$f(t) = \sum_{m=2}^{\infty} b_m \sin mt$$

и решение задачи (15) записывается в явном виде в виде ряда

$$u(t) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{b_m}{1 - m^2} \sin mt$$

который равномерно сходится.■

[2]Это условие, по сути, есть условие ортогональности правой части $f(t)$ решению однородной краевой задачи $\ddot{u} + u = 0$, $u(0) = u(\pi) = 0$. Оно является частным проявлением некоторого более общего принципа, см. *Альтернатива Фредгольма*

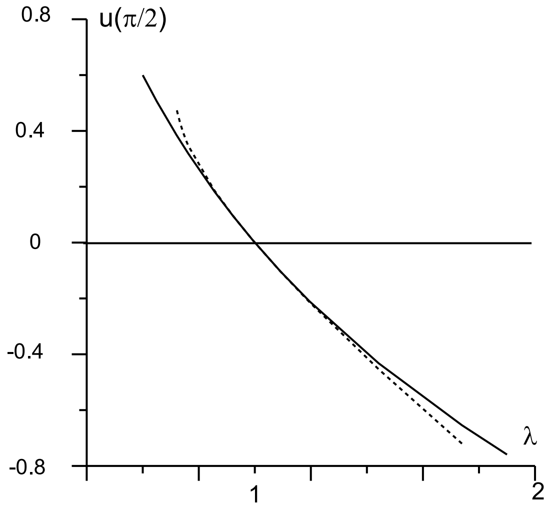

Рис.3.

Используя последнюю лемму, можно найти μ_1, исходя только из условия разрешимости задачи (14), представленного формулой (16)

$$\int_0^\pi (-\mu_1 u_1 - u_1^2) \sin t \; dt = 0$$

откуда

$$\mu_1 = -\frac{\int_0^\pi \sin^3 t}{\int_0^\pi \sin^2 t} = -\frac{4/3}{\pi/2} = -\frac{8}{3\pi}$$

Для проведения дальнейших выкладок гораздо удобнее использовать какую-нибудь программу аналитических вычислений. Для $u_3(t)$ получаем

$$\ddot{u}_3 + u_3 = -\left(\mu_1 u_2 + 2u_1 u_2 + \mu_1 u_1^2 + \frac{1}{2} u_1^3 + \mu_2 u_1\right);$$

откуда, умножая правую часть последнего уравнения на u_1, интегрируя результат от 0 до π и используя Лемму, получаем

$$\mu_2 = \frac{1}{72}\left(\frac{128}{\pi^2} + 33\right).$$

Окончательно имеем

$$u(t) = \varepsilon \sin t + \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3\pi} t \right) \cos t - \frac{1}{6} \cos 2t \right) + o\left(\varepsilon^2\right), \quad (17)$$

$$\lambda = 1 - \frac{8}{3\pi}\varepsilon + \frac{1}{72}\left(\frac{128}{\pi^2} + 33\right)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad (18)$$

Для проверки того, насколько хорошо “работает” данное разложение, решим задачу численно. На Рис.3 показана зависимость значения $u(\pi/2)$ (в середине промежутка) от собственного параметра λ. Представлена зависимость, посчитанная численно (сплошная линия) и по асимптотическим формулам (17) и (18) (пунктир). Видно, что в окрестности точки $\lambda = 1$ графики хорошо соответствуют друг другу.