Лекция 6

7. Регулярные и сингулярные разложения.

Пример 1. Найдем приближения для корней уравнения

$$x^2 - x + \varepsilon = 0 \tag{1}$$

При $\varepsilon = 0$ имеем корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$. Будем искать асимптотические разложения корней уравнения (1) в виде рядов по степеням ε при $\varepsilon \to 0$. Запишем приближение для первого из корней в виде ряда

$$x_1(\varepsilon) = 1 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots$$

Подставим последнее выражение в уравнение и раскроем скобки. Получаем бесконечную цепочку соотношений для последовательного определения коэффициентов a_k

$$\begin{aligned} \varepsilon: &\quad 2a_1 - a_1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -1 \\ \varepsilon^2: &\quad a_1^2 + 2a_2 - a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -1 \\ &\quad \ldots \end{aligned}$$

Таким образом

$$x_1(\varepsilon) = 1 - \varepsilon - \varepsilon^2 + \ldots$$

Нетрудно проверить, что полученное разложение совпадает с разложением в ряд Тейлора по степеням ε выражения для соответствующего корня уравнения (1)

$$\begin{aligned} x_1(\varepsilon) &= \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1-4\varepsilon}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + 1 - \frac{1}{2}\cdot(4\varepsilon) + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\cdot(4\varepsilon)^2 + \ldots\right) = \\ &= 1 - \varepsilon - \varepsilon^2 + \ldots \end{aligned}$$

Ряд для $x_1(\varepsilon)$ является сходящимся, его область сходимости $|\varepsilon| < 1/4$. Ряд для корня $x_2(\varepsilon)$ получается автоматически, так как по теореме Виета $x_1(\varepsilon) + x_2(\varepsilon) = 1$.

Таким образом, $x_1(\varepsilon)$ является аналитической функцией ε и разлагается в сходящийся (а не только асимптотический) ряд в круге $|\varepsilon| < 1/4$.

Пример 2. Найдем приближенные значения корней кубического полинома

$$x^3 - 4.001\ x + 0.002 = 0 \tag{2}$$

Поставленная задача, конечно, не содержит малого параметра. Вместе с тем уравнение (2) получается при подстановке значения $\varepsilon = 0.001$ в уравнение

$$x^3 - (4 + \varepsilon)\ x + 2\varepsilon = 0 \tag{3}$$

что позволяет эффективно решить задачу методом асимптотических разложений. Снова будем искать корни нашего уравнения в виде асимптотических рядов по степеням ε

$$x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n \tag{4}$$

Подставляя $\varepsilon = 0$ в уравнение (3), находим *приближения нулевого порядка* к трем корням этого уравнения

$$\tilde{x}_1 = -2, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 2,$$

которые равны коэффициенту a_0 в разложении (4). Ограничиваясь асимптотическим представлением *второго порядка* для второго из этих корней $\tilde{x}_2 = 0$ запишем:

$$x_2(\varepsilon) = 0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \tag{5}$$

Подставим (5) в уравнение (3) и выпишем коэффициенты при степенях ε,

$$(-4a_1 + 2)\varepsilon + (-4a_2 - a_1)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) = 0.$$

Приравнивая один за другим нулю коэффициенты полученного разложения, имеем

$$a_1 = 1/2, \quad a_2 = -1/8.$$

Процесс можно продолжить, находя последовательно a_3, a_4, и так далее. Положив $\varepsilon = 0.001$ в полученном двучленном разложении, имеем

$$x_2 = 0.004999875$$

Это приближение к корню уравнения (2) оказывается верным с точностью 10^{-9}.

Аналогично можно найти разложение для остальных двух корней уравнения (3):

$$x_1(\varepsilon) = -2 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad x_3(\varepsilon) = 2 + 0 \cdot \varepsilon + 0 \cdot \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

В разложении для корня x_3 *все* коэффициенты a_n будут равны нулю, так как $x = 2$ является корнем уравнения (3) при любом ε. Как и в примере 1, ряды, возникающие в результате описанной процедуры являются *сходящимися* степенными рядами (см задачу 1).

Сходимость рядов, описывающих возмущения корней алгебраического или даже трансцендентного уравнения, можно утверждать в гораздо более общем случае. Напомним, что справедлив комплексный аналог *теоремы о неявной функции*. В соответствии с ним если $F(z, \varepsilon)$ является аналитической функцией двух комплексных переменных z и ε в окрестности некоторой точки (z_0, ε_0) и $F_z(z_0, \varepsilon_0) \neq 0$, то в этой окрестности существует *аналитическая* функция $z(\varepsilon)$, такая, что $z(\varepsilon_0) = z_0$. Аналитическая функция $z(\varepsilon)$ может быть разложена в степенной ряд вида

$$z(\varepsilon) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\varepsilon - \varepsilon_0)^n$$

сходящийся в некотором круге $|\varepsilon - \varepsilon_0| < R$. Детали, касающиеся аналитической версии теоремы о неявной функции, можно найти в книжке А.И.Маркушевича "Теория аналитических функций", т.1, глава 4, параграф 5.

> Асимптотические разложения, представленные сходящимися в некоторой области степенными рядами, называются *регулярными* асимптотическими разложениями.

Однако, как мы знаем, не все асимптотические разложения являются регулярными.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon x^2 + x - 1 = 0 \tag{6}$$

Это уравнение является квадратным и, следовательно, имеет два корня (может быть, совпадающих). При $\varepsilon = 0$ это уравнение вырождается в тривиальное уравнение $x - 1 = 0$ с корнем $x_1 = 1$. Будем искать корень уравнения (6) в виде асимптотического ряда, описывающего поправки к корню $x_1 = 1$. Запишем

$$x(\varepsilon) = 1 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

Получаем

$$(1-1) + (a_1+1)\varepsilon + (2a_1 + a_2)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) = 0$$

Следовательно

$$x_1(\varepsilon) = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

Поиски асимптотического разложения для второго корня уравнения (6) осложняются тем, что этот корень "исчезает" при переходе $\varepsilon \to 0$. "Подглядеть" ответ можно, используя формулу корней квадратного уравнения. Для корней $x_{1,2}(\varepsilon)$ она дает

$$x_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon}\left(-1 + \sqrt{1+4\varepsilon}\right), \quad x_2(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon}\left(-1 - \sqrt{1+4\varepsilon}\right)$$

Используя эту формулу и стандартные разложения можно представить $x_1(\varepsilon)$ в виде сходящегося ряда по степеням ε

$$\begin{aligned} & x_1(\varepsilon) = \\ = \ & \frac{1}{2\varepsilon}\left(-1 + \left[1 + 2\varepsilon + \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 4^2}{2!}\varepsilon^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdot 4^3}{3!}\varepsilon^3 + \ldots\right]\right) = \\ = \ & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(n+1)!}\varepsilon^n \end{aligned} \tag{7}$$

Область сходимости этого ряда в комплексной плоскости $|\varepsilon| < 1/4$. Нетрудно заметить, что коэффициенты представленного ряда при $n = 1$ и $n = 2$ совпадают с найденными ранее. Разложение (7) является *регулярным.*

Разложение для $x_2(\varepsilon)$ удобно записать, используя теорему Виета. Так как $x_1(\varepsilon) + x_2(\varepsilon) = -1/\varepsilon$, имеем

$$x_2(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(n+1)!} \varepsilon^n \tag{8}$$

Это разложение не имеет вида сходящегося ряда Тейлора и не определено при $\varepsilon = 0$ (понятно, что, на самом деле, это - ряд Лорана, сходящийся в проколотом круге $0 < |\varepsilon| < 1/4$). Разложения, такого типа, не имеющие предела при $\varepsilon \to 0$, называют *сингулярными* разложениями. В дальнейшем мы будем называть сингулярным любое асимптотическое разложение, отличное от сходящегося степенного ряда.

Пример 4, (Bender and Orszag, 1968). Найдем приближения для корней полинома

$$\varepsilon^2 x^6 - \varepsilon x^4 - x^3 + 8 = 0 \tag{9}$$

При $\varepsilon = 0$ мы получаем уравнение $-x^3 + 8 = 0$. Его корни

$$x_1 = 2e^{2\pi i/3}, \quad x_2 = 2e^{4\pi i/3}, \quad x_3 = 2.$$

Построение асимптотических разложений для корней $x_1(\varepsilon)$,$x_2(\varepsilon)$ и $x_3(\varepsilon)$ проводится аналогично тому, как это делалось в примере 1. Они имеют вид

$$x_k(\varepsilon) = 2e^{2\pi k i/3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \varepsilon^n, \quad k = 1, 2, 3 \tag{10}$$

причем коэффициенты $a_{n,k}$ находятся рекуррентно. Возникающие при этом разложения являются регулярными.

Вместе с тем, при $\varepsilon \to 0$ еще три корня исходного уравнения (9) (назовем их x_4, x_5, x_6) пропадают. Объяснение этого явления заключается в том, что при $\varepsilon \to 0$ корни x_4, x_5, x_6 стремятся к бесконечности, поэтому нельзя пренебрегать членами $\varepsilon^2 x^6$ и εx^4 в сравнении с $-x^3+8$. Соответственно, асимптотические разложения этих трех корней при малых ε заведомо будут сингулярными. Иерархия степеней в этих разложениях будет определяться правильным выбором *доминирующих* членов уравнения, то есть наибольших по порядку величины при $\varepsilon \to 0$. При этом очевидно, что член наибольшего порядка обязательно должен быть скомпенсирован еще каким-то членом такого же порядка.

Попробуем *угадать* доминирующие члены. Процедуру угадывания организуем так: перебирая парами члены уравнения, будем выдвигать предположение о том, что именно они являются членами наибольшего порядка, чтобы затем сделать заключение о возможности или невозможности такой ситуации. В уравнении имеется четыре члена, соответственно рассмотрим *шесть* ситуаций (во всех случаях $\varepsilon \to 0$).

(а) Пусть члены $\varepsilon^2 x^6$ и εx^4 имеют один и тот же порядок величины (будем записывать $\varepsilon^2 x^6 \sim \varepsilon x^4$) и являются доминирующими. Тогда $x = O(\varepsilon^{-1/2})$ и члены $\varepsilon^2 x^6$ и εx^4 имеют порядок $O(\varepsilon^{-1})$. Но тогда $x^3 = O(\varepsilon^{-3/2})$ и именно этот член имеет наибольший порядок, что противоречит исходной гипотезе.

(б) Пусть $\varepsilon x^4 \sim x^3$ и порядок этих членов является доминирующим. Тогда $x = O(\varepsilon^{-1})$ и $\varepsilon x^4 \sim x^3 = O(\varepsilon^{-3})$. Но тогда $\varepsilon^2 x^6 = O(\varepsilon^{-4})$ и именно этот член является доминирующим. Мы снова пришли к противоречию.

(в) Пусть доминирующими членами являются $\varepsilon^2 x^6$ и 8, $\varepsilon^2 x^6 \sim 8$. Тогда $x = O(\varepsilon^{-1/3})$. Соответственно, $x^3 = O(\varepsilon^{-1})$ и наше предположение снова неверно.

(г) Пусть доминирующими членами являются εx^4 и 8, то есть $\varepsilon x^4 \sim 8$. Тогда $x = O(\varepsilon^{-1/4})$ и наибольший член уравнения $x^3 = O(\varepsilon^{-3/4})$. Опять противоречие.

(д) Пусть $x^3 \sim 8$ и именно они являются доминирующими членами. Тогда $x = O(1)$, а члены $\varepsilon^2 x^6$ и εx^4 малы по сравнению с x^3 и 8. Таким образом мы возвращаемся к ситуации, когда корни уравнения могут быть представлены как "поправки" корней невозмущенного ($\varepsilon = 0$) уравнения, $2e^{2\pi i/3}$,$2e^{4\pi i/3}$ и 2, см. выше.

(e) Пусть доминирующими членами являются $\varepsilon^2 x^6$ и x^3, $\varepsilon^2 x^6 \sim x^3$. Тогда $x = O(\varepsilon^{-2/3})$. Это допустимо, так как $\varepsilon^2 x^6 \sim x^3 = O(\varepsilon^{-2})$ больше, чем $\varepsilon x^4 = O(\varepsilon^{-5/3})$ и $8 = O(1)$.

Таким образом, "исчезающие" корни имеют при $\varepsilon \to 0$ порядок $O(\varepsilon^{-2/3})$. Это указывает на то, что решению задачи может помочь замена $x = \varepsilon^{-2/3} y$. После этой замены уравнение (9) переписывается в виде

$$y^6 - y^3 + 8\varepsilon^2 - \varepsilon^{1/3} y^4 = 0 \tag{11}$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение имеет шесть корней,

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = 0, \quad \tilde{y}_4 = e^{2\pi i/3}, \quad \tilde{y}_5 = e^{4\pi i/3}, \quad \tilde{y}_6 = 1$$

соответственно, при предельном переходе $\varepsilon \to 0$ ни один из корней не исчезает. Поправки к этим корням можно искать, используя разложения вида

$$y_k(\varepsilon) = \tilde{y}_k + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,k} \varepsilon^{n/3} \tag{12}$$

При $k = 1, 2, 3$ получаем $b_{1,k} = 0$ и $b_{2,k} = 2e^{2\pi k i/3}$. Поэтому порядок величины $x = \varepsilon^{-2/3} y$ не $O(\varepsilon^{-2/3})$, а $O(1)$. Можно проверить, что последующие члены разложения (12) при $k = 1, 2, 3$ соответствуют членам разложения (10). Разложения для $x_k(\varepsilon)$ при $k = 4, 5, 6$ находятся из разложений (12). Можно проверить, что

$$\begin{aligned}
x_4(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^{2/3}} e^{2\pi i/3} + \frac{1}{3\varepsilon^{1/3}} e^{-2\pi i/3} + O(1), \\
x_5(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^{2/3}} e^{4\pi i/3} + \frac{1}{3\varepsilon^{1/3}} e^{-4\pi i/3} + O(1), \\
x_6(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^{2/3}} + \frac{1}{3\varepsilon^{1/3}} + O(1)
\end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемом примере из шести корней три описываются регулярными асимптотическими разложениями и еще три - сингулярными асимптотическими разложениями.

Даже если коэффициенты полинома аналитически зависят от малого параметра, и асимптотические разложения корней полинома являются регулярными, эти разложения могут оказаться достаточно бесполезными из-за высокой чувствительности корней к изменению коэффициентов полинома. Классическим примером является полином Уилкинсона

$$\prod_{k=1}^{20}(x-k)+\varepsilon x^{19}=x^{20}-(210-\varepsilon)x^{19}+\ldots+20! \tag{13}$$

Корни невозмущенного полинома ($\varepsilon=0$), очевидно, натуральные числа от 1 до 20. При малом возмущении $\varepsilon=10^{-9}$ асимптотическое разложение первого порядка позволяет вычислить с точностью до 10^{-9} первые восемь корней полинома (13), представляющих собой возмущения корней $x=1,\ldots,x=8$. Для высших корней полинома (13) ситуация ухудшается: одиннадцатый корень вычисляется лишь с точностью порядка 10^{-3}, а корни с тринадцатого по восемнадцатый вообще становятся комплексными, разбиваясь на пары комплексно-сопряженных величин. Таким образом, не удивительны ситуации, когда расходящиеся асимптотические ряды (при правильном подходе) могут дать более достоверную и точную информацию, чем сходящиеся ряды, соответствующие регулярным разложениям.

Задачи:

1. Решить в явном виде уравнение (2) при произвольном ε. Используя полученные формулы выяснить, какой радиус сходимости имеют найденные разложения его корней.

2. Выписать первые два члена разложения для корней уравнения

$$x^3-\varepsilon x-1=0$$

3. Найти первые два члена асимптотического разложения при $\varepsilon\to 0$ указанных корней уравнений

$$(a)\quad \sin(x+\varepsilon)=2\varepsilon,\quad x=0$$

$$(b)\quad \cos(x+\varepsilon)=x+1,\quad x=0$$

$$(c)\quad e^x=2x+1+\varepsilon,\quad x=0$$

$$(d)\quad e^{x+\varepsilon}=2x+1,\quad x=0$$

$$(e)\quad \ln x+\varepsilon=1-x,\quad x=1$$

4. Проанализировать, как ведут себя при малых $\varepsilon > 0$ корни уравнения

$$e^x = 1 + \sqrt{x^2 + \varepsilon}$$

5. Исследовать поведение корней уравнений

$$(a) \quad \varepsilon x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(b) \quad \varepsilon x^8 - \varepsilon^2 x^6 + x - 2 = 0$$

при малых $\varepsilon > 0$.

6. Найти асимптотическое приближение для "старших" (наибольших по модулю) действительных корней уравнения

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{x}$$

7. Построить поправку 1-го порядка для корня $x = k$, $k = 1, 2, \ldots, 20$, полинома Уилкинсона (13), показав, что

$$x_k = k + (-1)^{k+1} \frac{\varepsilon k^{19}}{(k-1)!(20-k)!} + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0$$

Далее:

(а) Выяснить, какой из корней оказывается наиболее чувствителен к возмущению. Оценить границу ε, при котором все корни изменяются не более, чем на 1%.

(б) Выяснить, какое значение ε предсказывается поправкой первого порядка для появления комплексных корней?

(в) Можно ли как-то оценить радиус сходимости рядов теории возмущений?

8. Найти поправку наинизшего порядка при $\varepsilon \to 0$ для собственных значений матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 19 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon & 20 \end{pmatrix}$$

9. Найти поправку наинизшего порядка при $\varepsilon \to 0$ для собственных значений матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \varepsilon & 0 & \cdots & 19 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & \cdots & 0 & 20 \end{pmatrix}$$