Лекция 7

8. Метод диаграмм Ньютона.

Вернемся к примеру 4 из предыдущей лекции. Мы получили, что для уравнения

$$\varepsilon^2 x^6 - \varepsilon x^4 - x^3 + 8 = 0 \tag{1}$$

возможно выделение *двух* пар доминирующих членов: x^3 и 8, а также $\varepsilon^2 x^6$ и x^3. Исследование каждого из этих случаев позволяет найти главные члены разложения для трех корней уравнения (1). Для обоснования того, что эти пары являются доминирующими, мы полагали

$$x \sim R\varepsilon^\alpha \tag{2}$$

и находили α для каждой из возможных пар, подтверждая или опровергая предположение о ее доминировании.

Рассмотрим теперь задачу в более общей постановке. Пусть имеется уравнение

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \varepsilon^{m_k} x^{n_k} = 0 \tag{3}$$

где $n_k \geq 0$ и $m_k \geq 0$ - целые числа. Будем считать, что n_k упорядочены по возрастанию и $n_0 = 0$ (это требование является естественным, так как в противном случае корень $x = 0$ отделяется, и степень уравнения понижается). Пусть $n_N = L$ - наибольшая степень x. Рассмотрим задачу о нахождении главных членов всех корней этого уравнения в пределе $\varepsilon \to 0$.

Из суммы в левой части возьмем какие-то два члена, $\varepsilon^{m_1} x^{n_1}$ и $\varepsilon^{m_2} x^{n_2}$. Выберем α таким, чтобы при подстановке (2) в каждый из них, степени ε были одинаковые. Это будет тогда, когда

$$\alpha n_1 + m_1 = \alpha n_2 + m_2$$

откуда

$$\alpha = -\frac{m_2 - m_1}{n_2 - n_1}$$

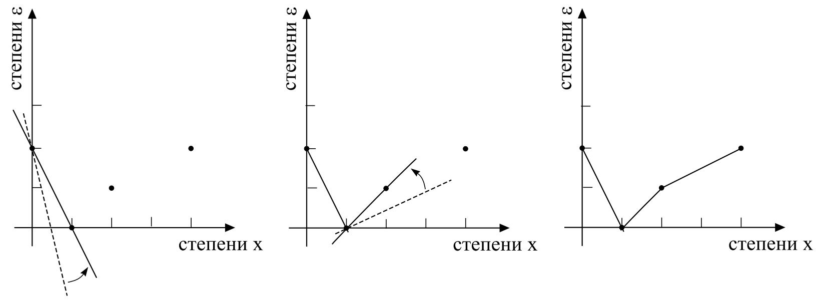

Рис.1.

Если пара $\varepsilon^{m_1}x^{n_1}$ и $\varepsilon^{m_2}x^{n_2}$ является доминирующей, то для всех остальных членов, $k \neq 1$ и $k \neq 2$, выполняется соотношение

$$\alpha n_k + m_k > \alpha n_1 + m_1 = \alpha n_2 + m_2.$$

Этот факт допускает простую геометрическую интерпретацию. На плоскости (n, m) (n - абсцисса, m - ордината) расставим точки (n_k, m_k), $k = 1, \ldots, N$. Любая пара точек (n_1, m_1) и (n_2, m_2) лежит на прямой $\alpha n + m = C$, причем α, взятое с противоположным знаком, равно тангенсу наклона этой прямой к оси n. Если пара (n_1, m_1) и (n_2, m_2) является доминирующей, то остальные точки (n_k, m_k), $k \neq 1$, $k \neq 2$, располагаются *выше* этой прямой.

Эти соображения позволяют предложить простой геометрический метод для нахождения главных членов асимптотики корней уравнения (3) при $\varepsilon \to 0$. Он описывается следующими правилами (см. Рис.1).

1. Расставим на плоскости (n, m) точки (n_k, m_k), $k = 1, \ldots, N$. При этом заметим, что по условию обязательно имеются точки $(n_0 = 0, m_0)$ и (L, m_N).

2. Проведем через точку $(0; m_0)$ вертикальную прямую. Будем поворачивать ее по часовой стрелке, таким образом, чтобы она все время проходила через точку $(0; m_0)$, до тех пор, пока она не пройдет еще через какую-нибудь точку (n_{k_1}, m_{k_1}). Когда это произойдет в первый раз, мы получим ситуацию, при которой наша прямая проходит, как минимум, через две точки множества (n_k, m_k), $k = 1, \ldots, N$, причем все остальные точки этого множества выше ее или на ней. Та-

ким образом, члены $a_0\varepsilon^{m_0}$ и $a_{k_1}\varepsilon^{m_{k_1}}x^{n_{k_1}}$ являются *доминирующими.* Возьмем значение углового коэффициента $\alpha = \alpha_1$ для этой прямой, подставим выражение (2) в уравнение (3). После сокращения на ε^{m_0}, получим уравнение, которое при $\varepsilon = 0$ имеет вид $a_0 + a_k R^{n_{k_1}} = 0$. Найдем n_{k_1} корней этого уравнения. Каждый из них определяет первый член асимптотики соответствующего корня.

3. Продолжим вращение против часовой стрелки получившейся прямой. Теперь будем вращать ее таким образом, чтобы она все время проходила через точку (n_{k_1}, m_{k_1}), до тех пор, пока она не пройдет еще через какую-нибудь точку (n_{k_2}, m_{k_2}). Когда это произойдет, мы снова получим ситуацию, при которой наша прямая проходит, как минимум, через две точки множества (n_k, m_k), $k = 1, \ldots, N$, причем все точки этого множества располагаются на прямой или выше ее. Таким образом, теперь доминирующими оказываются члены $a_{k_1}\varepsilon^{m_{k_1}}x^{n_{k_1}}$ и $a_{k_2}\varepsilon^{m_{k_2}}x^{n_{k_2}}$. Используя коэффициент $\alpha = \alpha_2$, для этой прямой найдем главные члены асимптотики для следующих $n_{k_2} - n_{k_1}$ корней уравнения (3).

4. Продолжая действовать таким образом, найдем все возможные положения прямой, соответствующие доминантным парам. В своем финальном положении прямая должна проходить через точку (L, m_N). Нетрудно проверить, что этот процесс позволяет найти главные члены асимптотики всех корней уравнения (3).

Описанный метод называется *методом диаграмм Ньютона.* Мы видим, что он позволяет найти главный член приближения для каждого из корней уравнения (3). Вместе с тем, если найден главный член асимптотики корня $\tilde{x} = R\varepsilon^\alpha + o(\varepsilon^\alpha)$, полагая

$$\tilde{x} = R\varepsilon^\alpha + y,$$

можно найти следующий член этой асимптотики. Для этого необходимо подставить последнее выражение в уравнение (3) и вновь использовать метод диаграмм Ньютона для нахождения главного члена разложения каждого из корней y.

Метод диаграмм Ньютона применим не только в случае, когда все m_k и n_k, $k = 0, .., N$ являются целыми, но и тогда, когда они все являются *рациональными.* Однако, даже в случае целых значений m_k и n_k значения степеней α *не обязаны быть целыми.* Таким образом, в результате многократного применения метода диаграмм

Ньютона, получаем следующие разложения каждого из корней x_i, $i = 1, \ldots, N$

$$x_i = R_{i,1}\varepsilon^{\alpha_{i,1}} + R_{i,2}\varepsilon^{\alpha_{i,2}} + \ldots \tag{4}$$

причем степени $\alpha_{i,1}$ являются, вообще говоря, рациональными.

Следующая теорема гласит, что эти ряды являются не только асимптотическими, но и сходящимися, при достаточно малых ε.

Теорема 0.1 *(Пюизе) Если в уравнении (3) все числ m_k и n_k являются рациональными, то существует такое ε_0, что ряд (4) сходится к соответствующему корню уравнения при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.*

Пример. Найдем первые два члена асимптотики корней уравнения

$$\varepsilon x^3 - x + \varepsilon = 0 \tag{5}$$

На плоскости (n, m) построим три точки, соответствующие трем членам уравнения: ε (точка $(0;1)$), x (точка $(1;0)$) и εx^3 (точка $(3;1)$). Коэффициент в уравнении при x^2 равен нулю, следовательно на диаграмме Ньютона отсутствуют вершины с $n = 2$. Следуя правилам, приведенным выше, приходим к диаграмме, изображенной на рисунке Рис.2.

Степени α равны угловым коэффициентам ребер диаграммы Ньютона, взятым с противоположным знаком. Это означает, что имеются две возможности: $\alpha = 1$ и $\alpha = -1/2$. Рассмотрим эти случаи поочередно.

1. Пусть $\alpha = 1$. Подставим выражение $x(\varepsilon) = R\varepsilon + o(\varepsilon)$ в уравнение. В первом порядке по ε имеем $R = 1$. Таким образом, приближение к первому из корней описывается формулой

$$x_1(\varepsilon) = \varepsilon + o(\varepsilon) \tag{6}$$

2. Пусть $\alpha = -1/2$. Подставим выражение $x(\varepsilon) = R\varepsilon^{-1/2} + o(\varepsilon^{-1/2})$ в уравнение. Баланс первого и второго членов уравнения дает $R^3 - R = 0$, то есть $R = 0$, $R = 1$ и $R = -1$. Первый из этих случаев нужно отбросить, так как асимптотическое поведение корня не имеет

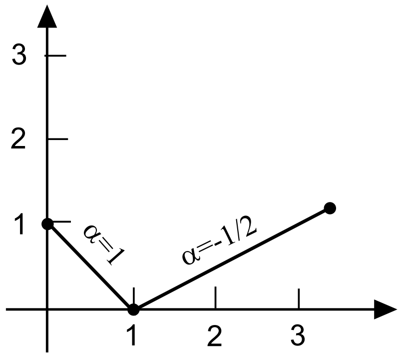

Рис.2.

вида $\sim \varepsilon^{-1/2}$. Получаем, что асимптотика второго и третьего корней такова

$$x_{2,3}(\varepsilon) = \pm\varepsilon^{-1/2} + o(\varepsilon^{-1/2}). \tag{7}$$

Найдем следующие члены асимптотических рядов для корней $x_{1,2,3}(\varepsilon)$. Для $x_1(\varepsilon)$ запишем

$$x_1 = \varepsilon + y$$

Подставим это выражение в уравнение (5). Получим

$$\varepsilon y^3 + 3\varepsilon^2 y^2 + (3\varepsilon^3 - 1)y + \varepsilon^4 = 0 \tag{8}$$

Диаграмма Ньютона для этого уравнения показана на Рис.3 (стоит обратить внимание на то, что имеются два члена, содержащие y в первой степени, но только один из них послужил вершиной диаграммы). Имеем два случая: $y = R_1\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4)$ и $y = R_1\varepsilon^{-1/2} + o(\varepsilon^{-1/2})$. Второй из этих случаев необходимо отбросить, так как поправка к разложению (6), вносимая вторым членом ($\sim \varepsilon^{-1/2}$), оказывается по порядку величины больше, чем главный член ($\sim \varepsilon$). В первом случае, подставляя выражение для y в уравнение, и отбрасывая слагаемые порядка, большего, чем ε^4, имеем $R_1 = 1$. Окончательно, асимптотика корня $x_1(\varepsilon)$ с точностью до первых двух членов имеет вид

$$x_1(\varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^4 + o(\varepsilon^4)$$

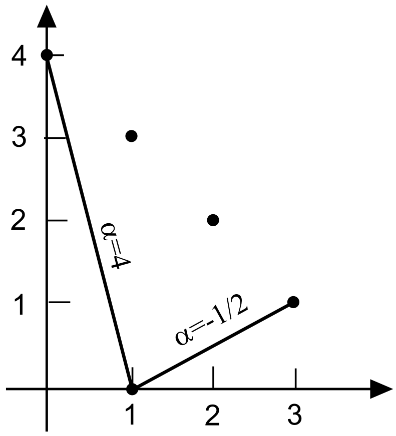

Рис.3.

Найдем следующий член в разложении (7). Подставив

$$x_2 = \varepsilon^{-1/2} + y$$

в уравнение (5), получаем уравнение

$$\varepsilon y^3 + 3\varepsilon^{1/2} y^2 + 2y + \varepsilon = 0 \tag{9}$$

Диаграмма Ньютона в этом случае имеет вид, представленный на Рис.4. Возможны два случая: $y = R_1\varepsilon + o(\varepsilon)$ и $y = R_1\varepsilon^{-1/2} + o(\varepsilon^{-1/2})$. Второй из этих случаях необходимо отбросить, так как поправка имеет порядок главного члена ($\sim \varepsilon^{-1/2}$). В первом же из этих случаев, подставляя выражение для y в уравнение (9) и отбрасывая члены порядка большего, чем ε, получаем $R_1 = -1/2$. Таким образом

$$x_2(\varepsilon) = \varepsilon^{-1/2} - \frac{1}{2}\varepsilon + o(\varepsilon)$$

Нахождение асимптотики для $x_3(\varepsilon)$ производится аналогично. При подстановке $x_3 = -\varepsilon^{-1/2} + y$ в уравнение (5) получаем

$$\varepsilon y^3 - 3\varepsilon^{1/2} y^2 + 2y + \varepsilon = 0 \tag{10}$$

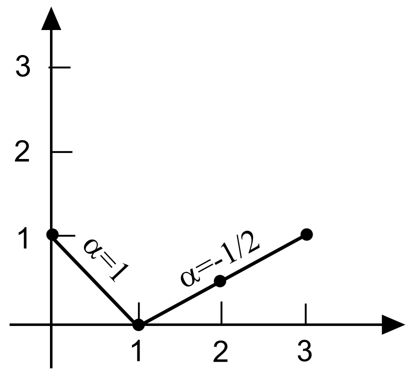

Рис.4.

Диаграмма Ньютона для этого уравнения совпадает с соответствующей диаграммой для уравнения (9). Повторяя рассуждения, получаем, что асимптотическое представление для $x_3(\varepsilon)$ имеет вид

$$x_3(\varepsilon) = -\varepsilon^{-1/2} - \frac{1}{2}\varepsilon + o(\varepsilon)$$

Задачи:

1. Найдите первый и второй члены разложения корней следующих уравнений по малому параметру ε

$$(a) \quad \varepsilon x^3 - x^2 + x - \varepsilon^2 = 0$$

$$(b) \quad \varepsilon x^3 + (1+\varepsilon)x + 1 = 0$$

$$(c) \quad x^3 - 3\varepsilon x + \varepsilon^2 = 0$$

$$(d) \quad \varepsilon^3 x^3 - x^2 + 2\varepsilon x + 1 = 0$$

$$(e) \quad \varepsilon^2 x^3 - 2\varepsilon^2 x^2 + x + 1 = 0$$

2. Найдите главный член разложения для каждого из корней

уравнения

$$(a) \quad \varepsilon^4 x^7 - 3\varepsilon^3 x^5 + \varepsilon^2 x^3 + 2x + \varepsilon = 0$$

$$(b) \quad 2\varepsilon^3 x^6 + \varepsilon^2 x^4 + \varepsilon x^2 + \varepsilon^2 = 0$$

$$(c) \quad \varepsilon x^9 + \varepsilon^2 x^7 + \varepsilon x^6 + (2\varepsilon^3 - 1)x^4 + \varepsilon x^2 + \varepsilon^4 = 0$$

$$(d) \quad \varepsilon^2 x^8 - 3\varepsilon^3 x^6 + x^4 - \varepsilon = 0$$