

Лекция 3

3. Уравнения, зависящие от параметра. Продолжение по параметру и простейшие бифуркации

Зависимость уравнений от внешнего параметра (а чаще - нескольких параметров) является обычным делом в математических моделях. Традиционным при этом возникает вопрос об изменении свойств модели при вариации параметра.

Появление параметра, как правило, существенно усложняет задачу. Вместе с тем имеются некоторые общие закономерности, описывающие поведение модели при изменении этого параметра. Основным здесь является понятие *бифуркации*. Дело в том, что при прохождении параметром некоторых критических значений, свойства задачи могут качественно меняться. Такие критические значения называются *бифуркационными*, а раздел математики, изучающий такие явления называется *теорией бифуркаций*. Ниже будут рассмотрены основные типы бифуркаций, характерные для уравнения,

$$F(x, \lambda) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

с одним параметром $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.1. Продолжение по параметру

Пусть при некотором значении $\lambda = \lambda_0$ уравнение (1) имеет решение $x = x_0$. Предположим, что функция $F(x, \lambda)$ является непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки (x_0, λ_0) и может быть представлена в близкой точке $(x_0 + \Delta x, \lambda_0 + \Delta \lambda)$ в виде

$$F(x_0 + \Delta x, \lambda_0 + \Delta \lambda) = F(x_0, \lambda_0) +$$

$$+ F_x(x_0, \lambda_0) \Delta x + F_\lambda(x_0, \lambda_0) \Delta \lambda + R(\Delta x, \Delta \lambda)$$

Здесь $R(\Delta x, \Delta \lambda)$ - малая более высокого порядка, чем Δx и $\Delta \lambda$. Приравнявая правую часть последнего равенства к нулю, получаем, что изменение параметра λ на величину $\Delta \lambda$ приводит к изменению решения x на величину

$$\Delta x \approx -\Delta \lambda \cdot \frac{F_\lambda(x_0, \lambda_0)}{F_x(x_0, \lambda_0)} \quad (2)$$

Вывод формулы (2), конечно, не является строгим. Строгое утверждение о существовании близкого решения при малом изменении параметра λ содержится в формулировке *теоремы о неявной функции*, доказательство которой содержится в любом развернутом курсе анализа

Теорема 0.1 (о неявной функции) Пусть $F(x_0, \lambda_0) = 0$ и пусть функция $F(x, \lambda)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, λ_0) вместе со своими частными производными $F_x(x, \lambda)$ и $F_\lambda(x, \lambda)$, причем

$$F_x(x_0, \lambda_0) \neq 0 \quad (3)$$

Тогда существует постоянная α , такая, что:

- (i) уравнение (1) имеет единственное решение $x = x(\lambda)$, определенное при $\lambda \in [\lambda_0 - \alpha; \lambda_0 + \alpha]$, причем $x_0 = x(\lambda_0)$;
- (ii) функция $x = x(\lambda)$ непрерывно дифференцируема при $\lambda \in [\lambda_0 - \alpha; \lambda_0 + \alpha]$, причем

$$\frac{dx}{d\lambda} = -\frac{F_\lambda(x(\lambda), \lambda)}{F_x(x(\lambda), \lambda)}$$

Теорема о неявной функции, по сути, утверждает существование *ветви решений* уравнения (1). Говорят, что решение уравнения $x = x_0$, существующее при $\lambda = \lambda_0$, *может быть продолжено по параметру* λ . Условием существования этой ветви (необходимое условие для продолжения по параметру) является условие (3).

Теорема о неявной функции допускает многочисленные обобщения. В классических учебниках по математическому анализу можно найти обобщение этой теоремы на случай функций многих переменных. В случае векторной функции $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \lambda)$, зависящей от вектора \mathbf{x} и скалярного параметра λ

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_N, \lambda) \\ \vdots \\ F_N(x_1, \dots, x_N, \lambda) \end{pmatrix}$$

для существования ветви решений $\mathbf{x}(\lambda)$ необходимо отличие от нуля якобиана векторной функции $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \lambda)$ в рассматриваемой точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ при заданном значении $\lambda = \lambda_0$

$$|\mathbf{F}'(\mathbf{x}, \lambda)| = \begin{vmatrix} F_{1,x_1}(x_1, \dots, x_N, \lambda) & \cdots & F_{1,x_N}(x_1, \dots, x_N, \lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{N,x_1}(x_1, \dots, x_N, \lambda) & \cdots & F_{N,x_N}(x_1, \dots, x_N, \lambda) \end{vmatrix}$$

Справедлив также *комплексный аналог* теоремы о неявной функции. В соответствии с ним если $F(x, \lambda)$ является аналитической функцией по каждому из двух комплексных переменных x и λ в окрестности некоторой точки (x_0, λ_0) и $F_x(x_0, \lambda_0) \neq 0$, то в этой окрестности существует *аналитическая* функция $x(\lambda)$, такая, что $x(\lambda_0) = x_0$. Аналитическая функция $x(\lambda)$ может быть разложена в степенной ряд вида

$$x(\lambda) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n$$

сходящийся в некотором круге $|\lambda - \lambda_0| < R$. Детали, касающиеся аналитической версии теоремы о неявной функции, можно найти в книжке А.И.Маркушевича “Теория аналитических функций”, т.1, глава 4, параграф 5.

Графически существование ветви решений $x(\lambda)$ иллюстрирует Рис.1. Несмотря на свою наглядность и внешнюю простоту, возможность продолжения по параметру позволяет исследовать сложные нелинейные задачи. Например, достаточно распространенной ситуацией является следующая. Необходимо решить некоторую нелинейную систему, число переменных и уравнений в которой исчисляется тысячами (такие системы возникают, например, при дискретизации краевых задач для дифференциальных уравнений). Вообще говоря, не имеется никакой информации о возможных решениях этой системы. Однако известно, что если отбросить некоторые члены в этих уравнениях, (скажем для простоты, один член $g(\cdot)$ в одном из уравнений), то система допускает точное известное решение. Тогда при численном решении этой системы в нужном месте вместо $g(\cdot)$ можно попробовать поместить член $\lambda g(\cdot)$. В случае $\lambda = 0$ имеется точное решение, его можно использовать как начальное приближение для

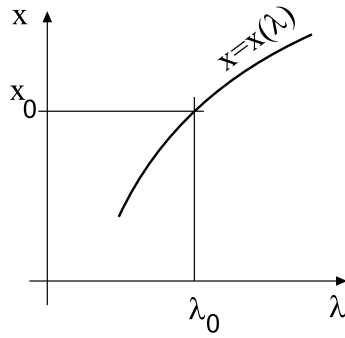


Рис. 1.

решения системы методом Ньютона при $\lambda = \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda$ - достаточно малая величина. Полученный результат можно использовать как начальное приближение для $\lambda = 2\Delta\lambda$ и так далее. Увеличивая параметр λ , при удачном стечении обстоятельств удастся довести его до значения $\lambda = 1$, что соответствует исходной задаче. Пример такого использования метода продолжения по параметру для численного решения дифференциальных уравнений содержится в лабораторной работе N6.

3.2. Бифуркация седло-узел

Пусть теперь функция $F(x, \lambda)$ является дважды дифференцируемой, $F(x_0, \lambda_0) = 0$ и $F_x(x_0, \lambda_0) = 0$. В этом случае условия теоремы о неявной функции не выполняются. Проведем нестрогий анализ этой ситуации, предположив, что $F_{xx}(x_0, \lambda_0) \neq 0$. Разлагая $F(x, \lambda)$ по формуле Тейлора с точностью до членов третьего порядка в точке (x_0, λ_0) , имеем

$$\begin{aligned}
 F(x_0 + \Delta x, \lambda_0 + \Delta \lambda) &= F(x_0, \lambda_0) + F_x(x_0, \lambda_0)\Delta x + F_\lambda(x_0, \lambda_0)\Delta \lambda + \\
 &+ \frac{1}{2} (F_{xx}(x_0, \lambda_0)(\Delta x)^2 + 2F_{x\lambda}(x_0, \lambda_0)\Delta x\Delta \lambda + F_{\lambda\lambda}(x_0, \lambda_0)(\Delta \lambda)^2) + \\
 &+ R(\Delta x, \Delta \lambda)
 \end{aligned} \tag{4}$$

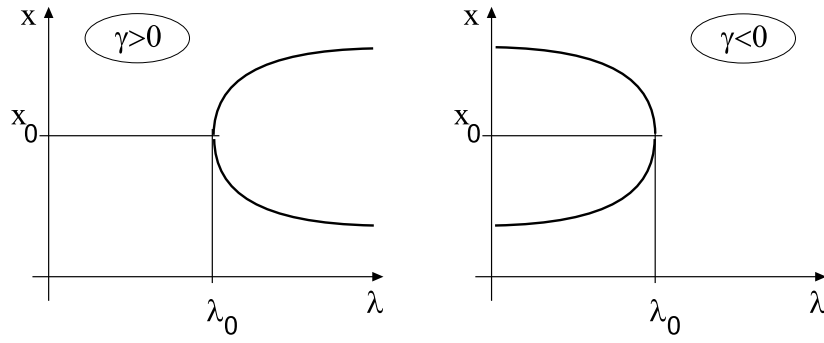


Рис.2.

Здесь $R(\Delta x, \Delta \lambda)$ - малая более высокого порядка, чем $(\Delta x)^2$, $(\Delta \lambda)^2$ и $\Delta x \Delta \lambda$. Приравнявая нулю правую часть последнего уравнения, получаем, что

$$\Delta x \approx \pm \sqrt{-\frac{2F_\lambda(x_0, \lambda_0)}{F_{xx}(x_0, \lambda_0)}} \Delta \lambda \quad (5)$$

Схематически зависимость x от λ вблизи точки (x_0, λ_0) (*бифуркационная диаграмма*) изображена на Рис.2. Удобно ввести обозначение

$$\gamma = -\frac{2F_\lambda(x_0, \lambda_0)}{F_{xx}(x_0, \lambda_0)}$$

Случай $\gamma > 0$ соответствует левой картинке, случай $\gamma < 0$ - правой. Получается, что если $\gamma > 0$, то при прохождении значения $\lambda = \lambda_0$ (называемого *бифуркационным значением* или *точкой бифуркации*) слева направо, “из ничего” возникает сразу два решения (1), которые продолжают по параметру при $\lambda > \lambda_0$. Если же $\gamma < 0$, то при $\lambda < \lambda_0$ существует пара решений задачи, которые сливаются и исчезают при $\lambda = \lambda_0$.

Бифуркация такого типа называется *бифуркацией типа седло-узел*¹. Имеется аналог такой бифуркации для систем уравнений: две

¹Происхождение такого названия станет понятно чуть позже, когда мы будем рассматривать бифуркации состояний равновесия систем дифференциальных уравнений.

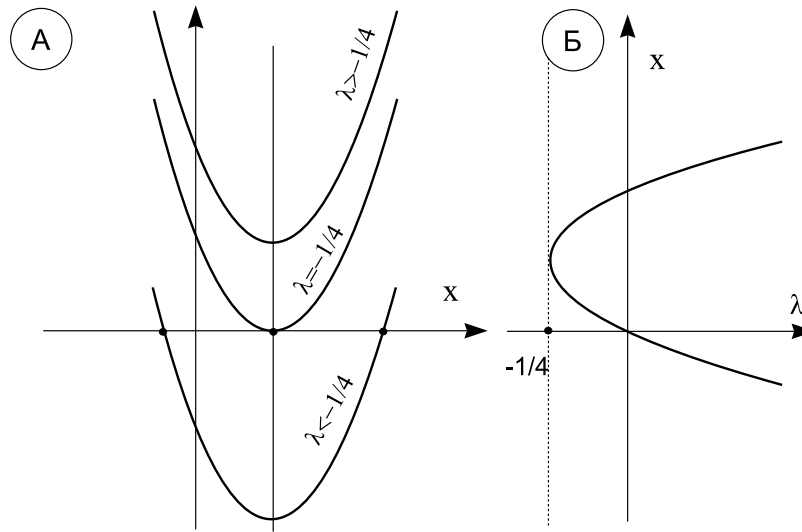


Рис. 3.

ветви решений векторного уравнения $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \lambda) = 0$ сливаются и исчезают при некотором значении $\lambda = \lambda_0$.

Пример. Рассмотрим квадратное уравнение

$$F(x, \lambda) = x^2 - x - \lambda = 0$$

Будем считать λ параметром. Исследуем поведение корней этого уравнения при изменении λ . Проще всего это сделать графически. Построим графики $y = F(x, \lambda)$ при различных значениях λ (Рис.3,А). Очевидно, что при $\lambda > -1/4$ уравнение имеет два корня, при $\lambda = -1/4$ - один корень и при $\lambda < -1/4$ - не имеет корней. На рисунке 3,Б приведена картинка, называемая *бифуркационной диаграммой*. На ней показана зависимость корней уравнения от λ . При увеличении параметра λ в точке бифуркации $\lambda = -1/4$ рождается пара корней, которая существует при всех $\lambda > -1/4$.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$F(x, \lambda) = e^x - \lambda x = 0, \quad \lambda > 0.$$

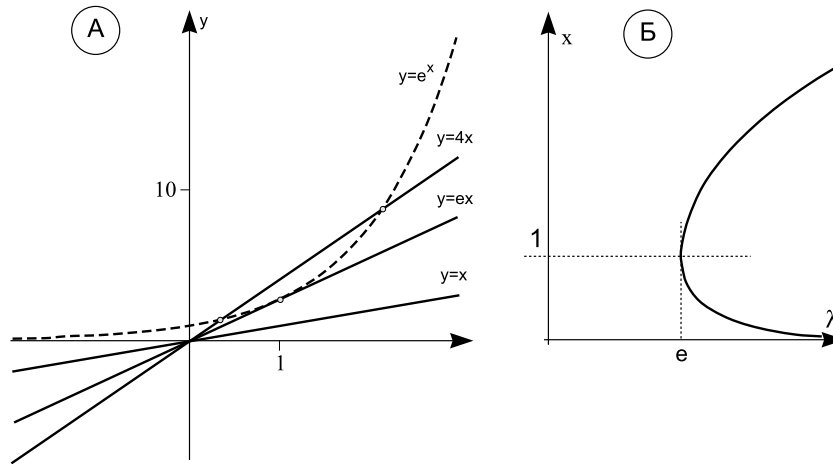


Рис.4.

Используя простые графические аргументы, нетрудно представить, как устроено множество решений этого уравнения при различных λ . На Рис.4А показано взаимное расположение графиков $y = e^x$ и $y = \lambda x$ при различных λ . Можно показать, что графики касаются в точке $x = 1$ при $\lambda = e$, при $\lambda > e$ имеется два корня нашего уравнения, при $0 < \lambda < e$ - ни одного. Бифуркационная диаграмма показана на Рис.4Б. Бифуркация имеет вид, типичный для случая бифуркации седло-узел. Нетрудно посчитать, что

$$F_{xx}(x, \lambda) = e^x, \quad F_{xx}(1, e) = e, \quad F_{\lambda}(x, \lambda) = -x, \quad F_{\lambda}(1, e) = -1$$

откуда $\xi = 2/e > 0$. Соответственно, бифуркационная диаграмма соответствует случаю, показанному на Рис.2, левая картинка.

3.3. Бифуркации второго порядка

Пусть функция $F(x, \lambda)$ является дважды дифференцируемой, причем $F(x_0, \lambda_0) = 0$, $F_x(x_0, \lambda_0) = 0$ и $F_{\lambda}(x_0, \lambda_0) = 0$. Будем считать, что $F_{xx}(x_0, \lambda_0)$ не обращается в нуль. Тогда в соответствии с (4) в окрест-

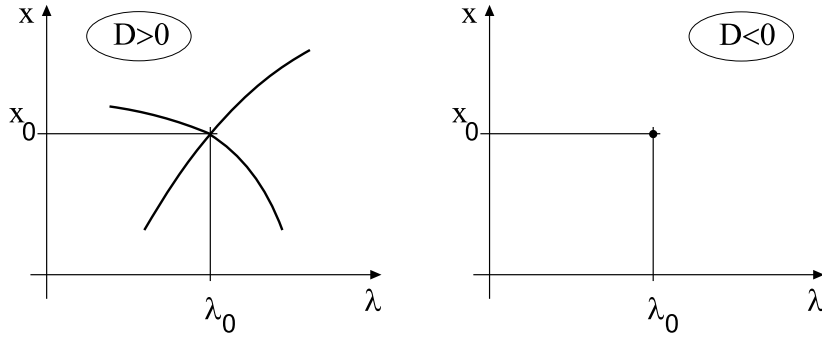


Рис. 5.

ности точки (x_0, λ_0) функцию $F(x, \lambda)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 & F(x_0 + \Delta x, \lambda_0 + \Delta \lambda) = \\
 & = \frac{1}{2} (F_{xx}(x_0, \lambda_0)(\Delta x)^2 + 2F_{x\lambda}(x_0, \lambda_0)\Delta x\Delta \lambda + F_{\lambda\lambda}(x_0, \lambda_0)(\Delta \lambda)^2) + \\
 & \quad + R(\Delta x, \Delta \lambda)
 \end{aligned} \tag{6}$$

Приравнивая правую часть нулю, вводя переменную $k = \Delta x / \Delta \lambda$ и отбрасывая члены высшего порядка малости, получаем квадратное уравнение на k

$$F_{xx}(x_0, \lambda_0)k^2 + 2F_{x\lambda}(x_0, \lambda_0)k + F_{\lambda\lambda}(x_0, \lambda_0) = 0 \tag{7}$$

Наличие корней у этого уравнения определяется дискриминантом

$$D = F_{x\lambda}^2(x_0, \lambda_0) - F_{xx}(x_0, \lambda_0)F_{\lambda\lambda}(x_0, \lambda_0)$$

Далее возможны три случая:

- (i) если $D < 0$, то уравнение корней не имеет. В этом случае точка (x_0, λ_0) является *изолированным решением*: продолжение по параметру λ решения x_0 невозможно;
- (ii) если $D > 0$ и $F_{xx}(x_0, \lambda_0) \neq 0$, то через точку (x_0, λ_0) на бифуркационной диаграмме проходят две кривые с касательными,

имеющими тангенсы наклона, равные

$$k_{1,2} = \frac{-F_{x\lambda}(x_0, \lambda_0) \pm \sqrt{D}}{F_{xx}(x_0, \lambda_0)}$$

Отдельно стоит сказать о случае $F_{xx}(x_0, \lambda_0) = 0$. Тогда необходимо вернуться к уравнению (6), при этом оказывается, что $\Delta\lambda$ и Δx связаны соотношением

$$\Delta\lambda(2kF_{x\lambda}(x_0, \lambda_0) + F_{\lambda\lambda}(x_0, \lambda_0)) = 0$$

Если $F_{x\lambda}(x_0, \lambda_0) \neq 0$, то через точку (x_0, λ_0) проходят две кривые, одна из которых в точке (x_0, λ_0) имеет вертикальную касательную, а вторая - касательную с тангенсом угла наклона

$$k = -\frac{F_{\lambda\lambda}(x_0, \lambda_0)}{2F_{x\lambda}(x_0, \lambda_0)}$$

Бифуркация в этих случаях называется *транскритической*.

- (iii) если $D = 0$, ничего определенного про поведение кривых на бифуркационной диаграмме сказать нельзя, без учета членов третьего порядка малости по Δx и $\Delta\lambda$.

Схематически случаи (i) и (ii) представлены на Рис.5.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$F(x, \lambda) = x^2 - \lambda x = 0$$

Значение $x = 0$ является корнем этого уравнения при любом значении λ , второй корень - $x = \lambda$. Бифуркационная диаграмма изображена на Рис.6. При $\lambda = 0$ эти ветви решений пересекаются, и эта точка является точкой бифуркации. Вычислим

$$F(0, 0) = 0, \quad F_x(0, 0) = 0, \quad F_\lambda(0, 0) = 0$$

$$F_{xx}(0, 0) = 2, \quad F_{x\lambda}(0, 0) = -1, \quad F_{\lambda\lambda}(0, 0) = 0$$

$$D = 1; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 1.$$

что соответствует Рис.5, левая картинка.

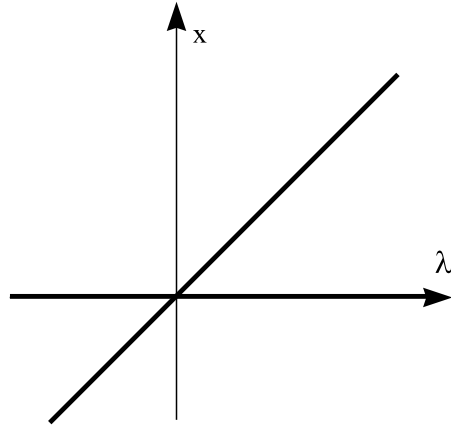


Рис. 6.

3.4. Бифуркация типа “вилка”

Рассмотрим теперь бифуркацию, которую можно описать, лишь учитывая члены третьей степени в разложении $F(x, \lambda)$. Такая ситуация может показаться “экзотикой”, так как для этого должны обратиться в нуль члены первой и (по большей части) второй степени. Вместе с тем такая бифуркация часто встречается в системах с дополнительной симметрией.

Допустим, что при любом значении $\lambda \in \mathbb{R}$ функция $F(x, \lambda)$ является *нечетной*

$$F(-x, \lambda) = -F(x, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Отсюда следует, что $x = 0$ является решением уравнения $F(x, \lambda) = 0$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. Кроме того, нечетными являются функции $F_{xx}(x, \lambda)$, $F_{xxx}(x, \lambda)$ и так далее. Значит

$$F_{xx}(0, \lambda) = F_{xxx}(0, \lambda) = \dots = 0$$

Кроме того, нечетными являются функции $F_\lambda(x, \lambda)$, $F_{\lambda\lambda}(x, \lambda)$, \dots , а также функции $F_{xx\lambda}(x, \lambda)$, $F_{xx\lambda\lambda}(x, \lambda)$. Значит

$$F_\lambda(0, \lambda) = F_{\lambda\lambda}(0, \lambda) = \dots = F_{xx\lambda}(0, \lambda) = F_{xx\lambda\lambda}(0, \lambda) = \dots = 0$$

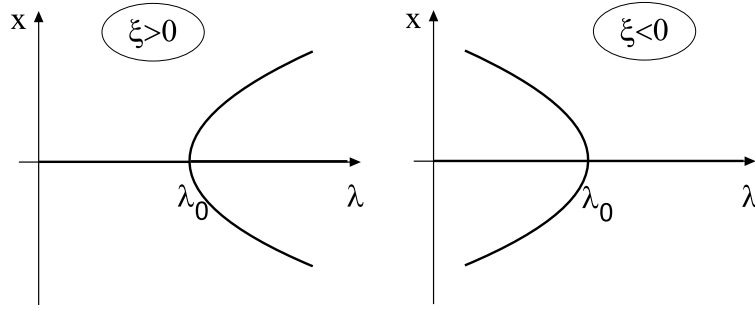


Рис. 7.

Пусть при некотором $\lambda = \lambda_0$ имеет место соотношение

$$F_x(0, \lambda_0) = 0 \quad (8)$$

Запишем представление $F(x, \lambda)$ с учетом членов третьего порядка в окрестности точки $(0, \lambda_0)$:

$$\begin{aligned} F(\Delta x, \lambda_0 + \Delta \lambda) &= F(0, \lambda_0) + F_x(0, \lambda_0)\Delta x + F_\lambda(0, \lambda_0)\Delta \lambda + \\ &+ \frac{1}{2} (F_{xx}(0, \lambda_0)(\Delta x)^2 + 2F_{x\lambda}(0, \lambda_0)\Delta x\Delta \lambda + F_{\lambda\lambda}(0, \lambda_0)(\Delta \lambda)^2) + \\ &+ \frac{1}{6} (F_{xxx}(0, \lambda_0)(\Delta x)^3 + 3F_{xx\lambda}(0, \lambda_0)(\Delta x)^2\Delta \lambda + \\ &+ 3F_{x\lambda\lambda}(0, \lambda_0)\Delta x(\Delta \lambda)^2 + F_{\lambda\lambda\lambda}(0, \lambda_0)(\Delta \lambda)^3) + R(\Delta x, \Delta \lambda) \end{aligned}$$

где $R(\Delta x, \Delta \lambda)$ включает члены четвертой степени и выше по Δx и $\Delta \lambda$. Вычеркивая члены, равные нулю, из разложения и, удерживая члены наименьшей степени, (в частности, член $\sim \Delta x(\Delta \lambda)^2$ необходимо выкинуть, так как он меньше по порядку величины члена $\sim \Delta x\Delta \lambda$), получаем

$$F(\Delta x, \lambda_0 + \Delta \lambda) \approx F_{x\lambda}(0, \lambda_0)\Delta x\Delta \lambda + \frac{1}{6}F_{xxx}(0, \lambda_0)(\Delta x)^3$$

Приравнявая выражение в правой части последнего равенства нулю, получаем, что через точку $(0, \lambda_0)$ проходят три ветви: одна с

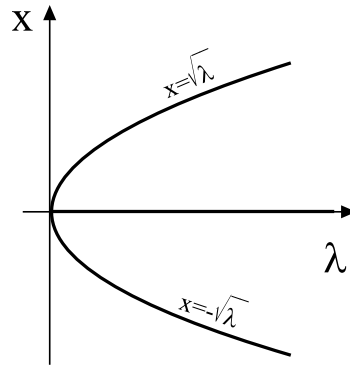


Рис. 8.

горизонтальной касательной ($\Delta x = 0$), а две другие, описываемые уравнением

$$\Delta x \approx \pm \sqrt{\xi \Delta \lambda}, \quad \xi = -\frac{6F_{x\lambda}(0, \lambda_0)}{F_{xxx}(0, \lambda_0)}$$

Бифуркационная диаграмма при $\xi > 0$ соответствует левой картинке на Рис.7, при $\xi < 0$ - правой. Вид бифуркационных диаграмм объясняет традиционное название этой бифуркации - *бифуркация типа “вилка”*. Следует отметить, что именно наличие симметрии (нечетность функции $F(x, \lambda)$) явилось причиной того, что единственным условием для этой бифуркации является условие (8). Бифуркация “вилка” возникает и в многомерных задачах, где ее наличие также обусловлено присутствием симметрии.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$F(x, \lambda) = x(\lambda - x^2) = 0$$

Это уравнение имеет единственное действительное решение $x = 0$ при $\lambda \leq 0$ и три решения $x = 0$, $x = \sqrt{\lambda}$ и $x = -\sqrt{\lambda}$ при $\lambda > 0$. Бифуркационная диаграмма имеет вид, представленный на Рис.8. При $\lambda = 0$ нулевое решение претерпевает бифуркацию “вилка”. Действительно, функция $F(x, \lambda)$ является нечетной функцией x при любом

λ , причем

$$\xi = -\frac{6F_{x\lambda}(0,0)}{F_{xxx}(0,0)} = 1 > 0$$

Это согласуется с рассуждениями, приведенными выше: ветви, рождающиеся при бифуркации, направлены вправо, как на Рис.7, левая картинка.

Задачи

1. Выяснить типы бифуркаций и найти значения бифуркационного параметра λ для решений уравнения

$$F(x, \lambda) = x^2 + \lambda x + \lambda = 0$$

2. Выяснить типы бифуркаций и найти значения бифуркационного параметра λ для решений уравнения

$$F(x, \lambda) = x^3 + x^2 - 2x + \lambda = 0$$

3. Выяснить типы бифуркаций и найти значения бифуркационного параметра λ для решений уравнения

$$F(x, \lambda) = x^4 + \lambda^2 x^2 + \lambda^4 = 0$$

4. При каких значениях λ действительные решения уравнения

$$F(x, \lambda) = x^4 + \lambda x^3 + 2x^2 + \lambda x + 1 = 0$$

претерпевают бифуркации? Определите тип этих бифуркаций.

5. При каких значениях λ действительные решения уравнения

$$F(x, \lambda) = \lambda^2 - (3e^{-x} + 2e^x)\lambda + e^{2x} + 2e^{-2x} + 3 = 0$$

претерпевают бифуркации? Определите тип этих бифуркаций.

6. Выяснить типы бифуркаций и найти значения бифуркационного параметра λ для решений уравнения

$$F(x, \lambda) = \operatorname{th} x - \lambda(x + x^3) = 0$$

7*. Выяснить типы бифуркаций и найти значения бифуркационного параметра λ для решений уравнения

$$F(x, \lambda) = \lambda^4 - 2\lambda x + x^2 = 0$$

8. Выяснить тип бифуркации и найти значение бифуркационного параметра λ для нулевого решения уравнения

$$F(x, \lambda) = \operatorname{arctg} x - \lambda x = 0$$

9. Выяснить тип бифуркации и найти значение бифуркационного параметра λ для уравнения

$$F(x, \lambda) = \operatorname{ch} x - \frac{\lambda}{1+x^2} = 0$$

10. Выяснить тип бифуркаций для уравнения

$$F(x, \lambda) = x^2 - e^{\lambda x} + 1 = 0$$

(Подсказка: имеются бифуркации двух типов, в одном из случаев бифуркационное значение можно найти только приближенно.)

11. При каких значениях λ решения системы уравнений

$$F_1(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda^2 = 0; \quad F_2(x, y, \lambda) = \lambda xy - 1 = 0$$

претерпевают бифуркации? Определите тип этих бифуркаций.

12. При каких значениях λ решения системы уравнений

$$F_1(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0; \quad F_2(x, y, \lambda) = y - \lambda x + 1 = 0$$

претерпевают бифуркации? Определите тип этих бифуркаций.

13. Исследуйте бифуркации, которые претерпевают действительные собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 + \alpha & 0 & 2\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 - 2\alpha \end{pmatrix}$$

при изменении α от $\alpha = 0$ до $\alpha = 1$.