

Г.Л. Алфимов

Методы исследования нелинейных задач

Лабораторный практикум

Утверждено редакционно-издательским советом университета

Москва 2016

УДК 517.55(076)

Рецензент докт. физ.-мат. наук *В.В.Бардушкин*

Алфимов Г.Л.

Методы исследования нелинейных задач: лабораторный практикум. – М.: МИЭТ, 2016. – 48 с.: ил.

Представлен материал лабораторных занятий по курсу «Методы исследования нелинейных задач». Этот курс традиционно читается бакалаврам третьего года обучения специальности «Прикладная математика» НИУ МИЭТ.

Для студентов инженерных специальностей технических вузов.

© МИЭТ, 2016

Предисловие

Данный практикум включает в себя материал лабораторных занятий по курсу «Методы исследования нелинейных задач». Эта дисциплина преподается в НИУ МИЭТ с 2013 г. студентам третьего курса бакалавриата, обучающимся по специальности «Прикладная математика». Появление этого семестрового курса в программе НИУ МИЭТ во многом было обусловлено требованиями современной физики и инженерии: большая часть математических моделей, возникающих в приложениях, являются нелинейными и требуют от исследователя навыков работы с задачами такого типа. Как правило, для получения информации о свойствах нелинейной модели приходится использовать все доступные средства, от строгой математической теории до численных исследований, имеющих иногда лишь эвристическое обоснование. Поэтому лабораторным работам в курсе отводится особое место: с помощью них на простых примерах иллюстрируются те идеи и методы, которые могут быть эффективно использованы при изучении реальных физических задач.

Стоит отметить, что в курсе излагаются *три* различных подхода к нелинейным задачам: *асимптотический, качественный и численный*. Эти подходы в первой части курса иллюстрируются на примерах систем алгебраических и трансцендентных уравнений, а во второй его части - на примерах систем дифференциальных уравнений.

В практикуме представлен материал семи лабораторных работ, достаточно независимых друг от друга. Число лабораторных работ соответствует такому построению семестрового курса, при котором лекции читаются каждую неделю, а лабораторные работы и семинары чередуются между собой. Элементы *асимптотической теории* в практикуме иллюстрируется материалом лабораторной работы № 3. В этой работе предлагается сравнить значение интеграла, найденное при помощи стандартного численного интегрирования, с его асимптотическими приближениями. Лабораторные работы № 2,5 - 7 посвящены иллюстрации возможностей *качественного подхода*, который

включает использование теории бифуркаций и теории динамических систем. В работе № 2 для простейшей системы алгебраических уравнений предлагается описать бифуркацию типа «складка», в работах № 5 - 7 важную роль для исследования системы дифференциальных уравнений играет построение ее фазового портрета. В лабораторных работах № 1 и 4 предлагается найти решение модельной нелинейной задачи при помощи *численных методов*. Впрочем, для выполнения *каждой* из семи работ от учащегося требуется владение численными методами и знакомство со средой MATLAB. Кроме того, предполагается, что учащиеся прослушали традиционные курсы математики, включающие математический анализ, теорию дифференциальных уравнений и теорию функций комплексного переменного.

Автор благодарен слушателям данного курса 2013 - 2015 гг., студентам специальности «Прикладная математика» НИУ МИЭТ за неравнодушное отношение к предмету и множество полезных замечаний. Хотелось бы также выразить особую благодарность П.П. Кизину и М.Е. Лебедеву за помощь при работе с текстом и рисунками.

Лабораторная работа № 1

Исследование средствами MATLAB системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными

Работа посвящена численному исследованию системы уравнений

$$F_1(x, y) = 0; \quad F_2(x, y) = 0.$$

Исследование состоит из двух частей.

Первая часть исследования представляет собой визуализацию на плоскости $(x; y)$ множеств, описываемых уравнениями $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$. Рисовать эти множества удобно, используя процедуру `contour`, предназначенную для построений линий уровня функции двух переменных $F(x, y) = C$. В нашем случае необходимо построить единственную линию уровня, соответствующую $C = 0$. Для того чтобы нарисовать линию $F(x, y) = 0$, необходимо сначала задать сетку командой `meshgrid` и сформировать массив значений функции $F(x, y)$ на этой сетке. Например, для того чтобы нарисовать красным цветом единичную окружность, можно использовать следующий скрипт:

```
{\tt F=@(x,y)x.^2+y.^2-1}
x=-2:0.1:2
y=-2:0.1:2
[X,Y]=meshgrid(x,y)
contour(X,Y,F(X,Y),[0 0], 'red').
```

Результатом первой части работы должен быть *рисунок, показывающий множества* $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$.

Вторая часть исследования состоит в нахождении ближайшего к точке $x = 0, y = 0$ ненулевого решения рассматриваемой системы.

Для этой цели используется *метод Ньютона* (см. напр. [1]) с правильным образом выбранными начальными условиями (задать такие условия было бы затруднительно без успешной реализации первой части работы). Расчетные формулы метода Ньютона имеют вид

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_{1,x}(x_n, y_n) & F_{1,y}(x_n, y_n) \\ F_{2,x}(x_n, y_n) & F_{2,y}(x_n, y_n) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_1(x_n, y_n) \\ F_2(x_n, y_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь x_n, y_n - приближение к решению на n -й итерации. Матрица в правой части составлена из частных производных функций $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$, например $F_{1,x}(x_n, y_n)$ - значение частной производной функции $F_1(x, y)$ в точке $x = x_n, y = y_n$. Процесс прерывается при достижении необходимой точности.

Результатами второй части работы должны быть: (1) картинка, показывающая сходимость итераций на плоскости $(x; y)$; (2) выданные на экран значения x_n и y_n на итерациях; (3) *невязка* задачи. Стоит пояснить, что невязкой называется результат подстановки окончательного решения, полученного на последней итерации итерационного процесса, в уравнения системы (т.е., если процесс оборван на N -й итерации, то невязка состоит из пары чисел $F_1(x_N, y_N)$ и $F_2(x_N, y_N)$.)

Пример. Рассмотрим численное нахождение наименьшего по модулю ненулевого решения уравнения

$$\sin z = z,$$

где $z = x + iy$ - комплексное число. Из курса теории функций комплексного переменного (см. [2]) известно, что исходное уравнение эквивалентно системе двух уравнений

$$\sin x \operatorname{ch} y - x = 0; \quad \cos x \operatorname{sh} y - y = 0.$$

Линии $F_1(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y - x = 0$ и $F_2(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y - y = 0$ строим, используя процедуру `contour` в MATLAB. Результат представлен на рис.1.1. По этому рисунку можно приблизительно указать местоположение ближайшей к нулю точки пересечения кривых, соответствующих уравнениям системы.

Возьмем начальное приближение $x = 8, y = 3$, достаточно близкое к этому пересечению, и запустим процедуру ньютоновских итераций. В рабочем окне программы при этом появится следующий результат:

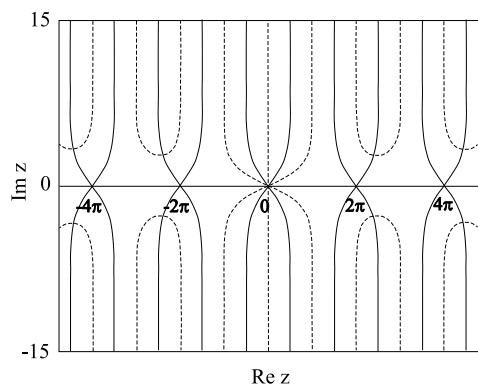


Рис. 1.1. К исследованию уравнения $\sin z = z$: нулевые линии уровня функций $F_1(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y - x$ (пунктир) и $F_2(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y - y$ (сплошная линия)

Re	Im
7.622772647	2.708379223
7.490941103	2.761104336
7.497728673	2.768690717
7.497676279	2.768678282
7.497676278	2.768678283

$$D = 0 + 2.220446049250313e-015i$$

Таким образом, ближайшим к нулю (но ненулевым) решением уравнения $\sin z = z$ является число $z \approx 7.497676278 + 2.768678283i$.

Задачи для самостоятельного исследования

Полагая z комплексным, найти наименьшее по модулю ненулевое решение уравнений.

1. $\cos z = z + 1$,
2. $e^z = z + 1$,
3. $\operatorname{sh} z = z$,
4. $\operatorname{ch} z - 1 = z$,
5. $\cos z = 1 + iz$,
6. $e^z = iz + 1$,
7. $\operatorname{sh} z = iz$,
8. $\operatorname{ch} z - 1 = iz$.

Лабораторная работа № 2

Продолжение по параметру и бифуркация типа «складка»

Как правило, любая содержательная научная или инженерная задача учитывает зависимость рассматриваемых величин от одного или нескольких параметров. При изменении этих параметров могут происходить различные явления. Традиционной является ситуация, когда при изменении параметра изучаемые величины изменяются плавно, до некоторого момента, а потом происходит резкое изменение свойств задачи. При описании на языке математической модели говорят, что первоначально решения задачи *допускают продолжение по параметру*, а потом в системе *происходит бифуркация*. Одной из простейших бифуркаций является *бифуркация типа «складка»*¹. При этой бифуркации два различных семейства решений, зависящих от одного параметра, «схлопываются» друг с другом. Значение параметра, при котором это явление происходит, называется *бифуркационным значением*.

Изучим бифуркацию типа «складка» на следующем примере.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y; a) = x^4 + y^4 - ax^2y - a^2 - 2 = 0; \\ F_2(x, y; a) = x^2 - y^2 - ax = 0. \end{cases}$$

При $a = 0$ эта система уравнений имеет решение $x = y = 1$. Продолжим численно это решение по параметру a . Продолжение будем осуществлять так. Пусть при $a = \tilde{a}$ решение найдено. Зададим \tilde{a} приращение Δa и будем находить методом Ньютона решение системы

¹В некоторых ситуациях эта бифуркация называется также «бифуркацией типа седло-узел».

для $a = \tilde{a} + \Delta a$. В качестве начального приближения возьмем уже известное решение при $a = \tilde{a}$. Это позволит нам, стартуя со значения $a = 0$, найти, как говорят, *однопараметрическую ветвь решений* (т.е. характеризующуюся параметром a), вплоть до некоторого критического значения, при котором эта ветвь претерпит какую-то бифуркацию. Будем маркировать эту ветвь римской цифрой I.

Процедура метода Ньютона использовалась нами в лабораторной работе № 1. Применяя эту процедуру, будем находить последовательно решения x и y системы, постепенно увеличивая a и следя за определителем матрицы Якоби:

$$J(a) = \begin{vmatrix} F_{1,x}(x_n, y_n; a) & F_{1,y}(x_n, y_n; a) \\ F_{2,x}(x_n, y_n; a) & F_{2,y}(x_n, y_n; a) \end{vmatrix}.$$

По мере приближения к некоторому значению $a = a_*$ сходимость метода Ньютона ухудшается. Определитель матрицы Якоби $J(a)$ при этом стремится к нулю. Вблизи значения $a = a_*$ возможны срывы ньютоновского процесса, когда он начинает расходиться или сходиться к решению, достаточно далекому от ожидаемого.

x	y	a	$J(a)$
1.000000000	1.000000000	0.000000	-16.000000000
1.038928556	0.987663753	0.100000	-15.864009689
1.080452533	0.975339515	0.200000	-15.839243262
1.124100953	0.962482554	0.300000	-15.897430011
1.169314738	0.948457200	0.400000	-16.004488328
1.215467463	0.932538161	0.500000	-16.120170041
1.261881471	0.913901506	0.600000	-16.197616585
1.307834138	0.891597575	0.700000	-16.182820336
1.352549160	0.864494015	0.800000	-16.013741671
1.395165666	0.831166732	0.900000	-15.618595332
1.434670347	0.789688962	1.000000	-14.912234171
1.469754549	0.737189549	1.100000	-13.787877942
1.498478808	0.668778119	1.200000	-12.095627573
1.517261540	0.574145130	1.300000	-9.572359400
1.515440052	0.418261257	1.400000	-5.394993686

Для прояснения ситуации построим с помощью процедуры contour линии, соответствующие первому и второму уравнениям систе-

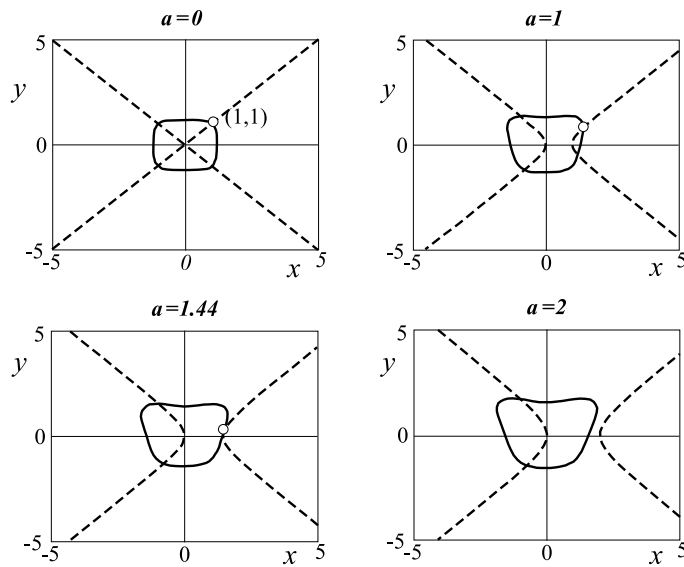


Рис.2.1. Линии $F_1(x, y; a) = 0$ (замкнутая линия) и $F_2(x, y; a) = 0$ (незамкнутые линии) для различных значений a

мы при нескольких значениях $a > 0$, рис.2.1. Следя за той ветвью решений, на которой $a = 0$ соответствует решению $x = y = 1$, находим, что при $a = a_* \approx 1.45$ эта ветвь решений исчезает, сливаясь с другой ветвью решений. На другой ветви значение $a = 0$ соответствует $x = 1, y = -1$. Эту ветвь также можно найти и построить, стартуя со значения $a = 0$ (будем помечать эту ветвь римской цифрой II).

Происходящее явление носит название *бифуркация типа «складка»*. Ее удобно иллюстрировать с помощью *бифуркационной диаграммы*. По горизонтальной оси откладываются значение параметра a , по вертикальной - значение x или y для решений, соответствующих этому параметру. Диаграмма объединяет обе ветви I и II и имеет вид, изображенный на рис.2.2 (левый рисунок - диаграмма на плоскости $(a; y)$, правый рисунок - на плоскости $(a; x)$).

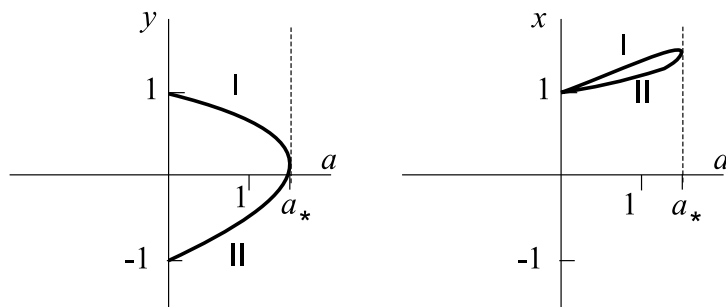


Рис.2.2. Бифуркационные диаграммы: левый рисунок - на плоскости $(a; y)$, правый рисунок - на плоскости $(a; x)$

Задачи для самостоятельного исследования

По аналогии с представленным примером, для приведенных ниже задач необходимо получить следующее:

а) ветвь решений (I), выходящую из предельного решения, соответствующего $a = 0$. Она иллюстрируется кривой на плоскости $(a; x)$, а также кривой на плоскости $(a; y)$. Необходимо также показать на экране значения x и y при каждом из значений a , от $a = 0$ до бифуркационного значения $a = a_*$. При этих же значениях a нужно вычислить $J(a)$, см. приведенную выше таблицу;

б) линии на плоскости (x, y) , соответствующие первому и второму уравнениям системы при нескольких значениях a , меньших и больших значения a_* ;

в) ветвь решений (II), с которой сливается ветвь решений (I) в точке $a = a_*$. Построить бифуркационную диаграмму, образованную ветвями (I) и (II).

1. Исследовать ветвь решений системы

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + 4axy = a^2 + 1; \\ xy + a(x + 2y) = a^2, \end{cases}$$

на которой при $a = 0$ решение имеет вид $x = 0, y = -1$.

2. Исследовать ветвь решений системы

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + axy = a^2 + 1; \\ xy + a(\frac{1}{2}x + y) = a^2, \end{cases}$$

на которой при $a = 0$ решение имеет вид $x = 0, y = 1$.

3. Исследовать ветвь решений системы

$$\begin{cases} x^4 - y^4 + axy = a^2; \\ ax^2 + 2ay^2 - x = 1, \end{cases}$$

на которой при $a = 0$ решение имеет вид $x = -1, y = 1$.

4. Исследовать ветвь решений системы

$$\begin{cases} x^4 - y^4 + axy = a^2; \\ ax^2 + y^2 - ax = 1, \end{cases}$$

на которой при $a = 0$ решение имеет вид $x = -1, y = 1$.

5. Исследовать ветвь решений системы

$$\begin{cases} x^6 + y^6 - ax = a^2 + 1; \\ xy + ax = a, \end{cases}$$

на которой при $a = 0$ решение имеет вид $x = -1, y = 0$.

6. Исследовать ветвь решений системы

$$\begin{cases} x^4 + y^2 + 2axy = a^4 + 1; \\ y = x + 4a + 1, \end{cases}$$

на которой при $a = 0$ решение имеет вид $x = -1, y = 0$.

7. Исследовать ветвь решений системы

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + ax^2y^2 = 2; \\ y^4 - x^4 - axy + a = 0, \end{cases}$$

на которой при $a = 0$ решение имеет вид $x = 1, y = 1$.

8. Исследовать ветвь решений системы

$$\begin{cases} y^4 + x^2 + 2a^2x^2y = a^2 + 1; \\ xy = a, \end{cases}$$

на которой при $a = 0$ решение имеет вид $x = 0, y = 1$.

Лабораторная работа № 3

Метод асимптотических разложений: асимптотическое представление для преобразования Лапласа

Одним из традиционных методов исследования нелинейных задач является метод асимптотических разложений. Асимптотическая теория в настоящее время представляет собой огромный раздел математики с большим количеством приложений. В данной лабораторной работе предлагается познакомиться с одним из основных понятий асимптотической теории - понятием *асимптотического ряда*. Для иллюстрации в данной работе выбран пример преобразования Лапласа, для которого асимптотическое представление строится особенно просто.

Преобразование Лапласа функции $f(t)$ имеет вид

$$Q(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\lambda t} dt. \quad (3.1)$$

Пусть функция $f(t)$ дифференцируема бесконечное число раз и все ее производные, начиная с первой, при $t \rightarrow \infty$ ограничены, или возрастают не быстрее некоторой степени t . Проинтегрируем выражение (3.1) по частям

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= -\frac{1}{\lambda}f(t)e^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} f'(t)e^{-\lambda t} dt = \\ &= \frac{1}{\lambda}f(0) + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} f'(t)e^{-\lambda t} dt. \end{aligned}$$

Так как $f'(t)e^{\lambda t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, получаем, что

$$Q(\lambda) = \frac{1}{\lambda} f(0) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Повторяя интегрирование по частям, приходим к асимптотической формуле:

$$Q(\lambda) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{k+1}} f^{(k)}(0), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Цель настоящей работы - проиллюстрировать эффективность формулы (3.2) для вычисления $Q(\lambda)$ при больших значениях λ .

Пример. Преобразование Лапласа функции $f(t) = 1/(1 + t^2)$ имеет вид:

$$Q(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{1 + t^2} dt. \quad (3.3)$$

Этот интеграл не берется в элементарных функциях. Используем для его вычисления а) процедуру численного интегрирования `quad` и б) асимптотическое разложение (3.3), которое «работает» для больших значений λ . Стоит не забывать, что процедура численного интегрирования `quad` требует задания конечного промежутка интегрирования, а у нас промежуток интегрирования бесконечный. При замене его на конечный промежуток $[0; A]$ погрешность приближения оценивается следующим образом (подумайте, почему?)

$$|\delta| < \int_A^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{1 + t^2} dt < \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda(1 + A^2)}.$$

Далее, используя MATLAB, найдем суммы:

$$Q_N(\lambda) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{\lambda^{k+1}} \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{1}{1 + t^2} \right) \Big|_{t=0}$$

для различных значений N .

Вычисления существенно упрощает тот факт, что¹

$$\left. \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \left(\frac{1}{1+t^2} \right) \right|_{t=0} = (-1)^k (2k)!,$$

$$\left. \frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}} \left(\frac{1}{1+t^2} \right) \right|_{t=0} = 0.$$

Однако, если бы явной формулы не было известно, можно было бы найти первые несколько производных функции $f(t)$, используя процедуру символьных вычислений `diff`.

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{\lambda^{2k+1}}$$

расходится по признаку Даламбера при любом значении λ . Вместе с тем рассмотрим суммы

$$Q_{2N}(\lambda) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2k)!}{\lambda^{2k+1}}.$$

Изучим случаи $\lambda = 1$, $\lambda = 5$, $\lambda = 10$.

1. Пусть $\lambda = 1$. В этом случае имеем

$$Q(1) \approx \mathbf{0.6214496245}, \quad Q_0(1) = 1;$$

$$Q_2(1) = -1, \quad Q_4(1) = 23;$$

$$Q_6(1) = -697, \quad Q_8(1) = 39623.$$

Очевидно, приближение $Q_0(1)$ является наиболее адекватным, но все равно очень плохим.

2. Пусть $\lambda = 5$. В этом случае имеем

$$Q(5) \approx \mathbf{0.1881427746}, \quad Q_0(5) = 0.2;$$

$$Q_2(5) = 0.184, \quad Q_4(5) = 0.19168;$$

$$Q_6(5) = 0.182464, \quad Q_8(5) = 0.20310784.$$

¹Для вывода этих формул достаточно рассмотреть коэффициенты разложения в ряд Маклорена функции $1/(1+t^2)$.

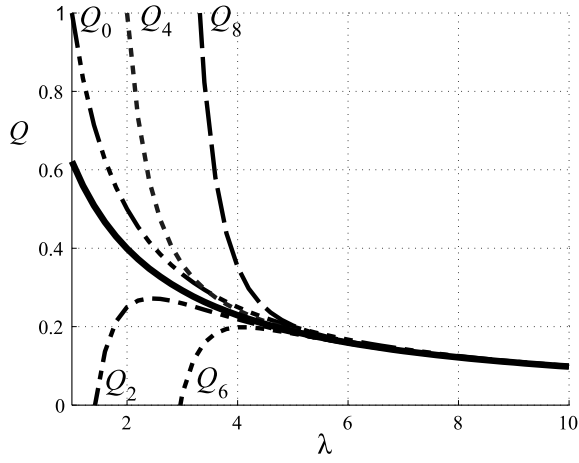


Рис.3.1. Соответствие между интегралом $Q(\lambda)$ (сплошная линия) и его приближениями $Q_N(\lambda)$

В этом случае ближайшим к точному результату является приближение Q_4 .

3. Пусть $\lambda = 10$. В этом случае имеем

$$Q(10) \approx \mathbf{0.09819103505}, \quad Q_0(10) = 0.1;$$

$$Q_2(10) = 0.098, \quad Q_4(10) = 0.09824;$$

$$Q_6(10) = 0.098168, \quad Q_8(10) = 0.09820832.$$

В этом случае на рассмотренных приближениях точность растет по мере увеличения N . Приближение Q_8 оценивает $Q(10)$ с точностью до $2 \cdot 10^{-5}$.

Соответствие между интегралом и его приближениями представлено на рис.3.1.

Задачи для самостоятельного исследования

По аналогии с представленным примером для приведенных ниже задач необходимо получить:

а) значение интеграла $Q(\lambda)$ для нескольких (пяти-семи) значений λ ;

б) значения соответствующих сумм, посчитанных по асимптотической формуле.

Для каждого из найденных таким образом значений укажите погрешность. Для каждого из выбранных значений λ укажите число членов в асимптотической формуле, обеспечивающее максимальную точность.

- | | |
|---------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 1. $\int_0^\infty \ln(t^2 + 1)e^{-\lambda t} dt,$ | 2. $\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t^2 + 1}} dt,$ |
| 3. $\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-t^2} dt,$ | 4. $\int_0^\infty e^{-\lambda t} \sqrt{1 + t^2} dt,$ |
| 5. $\int_0^\infty e^{-\lambda t} \sin(t^2) dt,$ | 6. $\int_0^\infty e^{-\lambda t} \cos(t^2) dt,$ |
| 7. $\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{(1 + t)^2} dt,$ | 8. $\int_0^\infty \frac{te^{-\lambda t}}{(1 + t^2)^{3/2}} dt.$ |

Лабораторная работа № 4

Нахождение решений краевой нелинейной задачи методом продолжения по параметру

Достаточно типичной задачей, возникающей в приложениях различного рода, является следующая. Дано нелинейное уравнение на функцию $u(t)$

$$\mathcal{N}(u(t)) = 0. \quad (4.1)$$

Требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее некоторым граничным условиям на концах некоторого промежутка $[T_a; T_b]$. В качестве таких граничных условий могут возникать условия типа Дирихле или Неймана. Что касается *нелинейного* оператора $\mathcal{N}(u(t))$, он может иметь самую разную природу, быть дифференциальным, интегродифференциальным, разностным, разностно-дифференциальным и т.д.

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение, которое предлагается решить численно с помощью *сеточных методов*. *Первым шагом* при таком подходе является *дискретизация* непрерывной задачи. Дискретизация состоит в введении *сетки* на рассматриваемом интервале $[a; b]$,

$$T_a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T_b$$

введении сеточной функции $\mathbf{u} = \{u_k\}$, $k = 0, \dots, N$ со значениями, соответствующими $u(t)$ в узлах сетки, и замене операторного уравнения (4.1) системой уравнений

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) = 0 \quad (4.2)$$

на компоненты u_k . Число неизвестных ($N + 1$ штука) в системе (4.2) должно равняться числу уравнений в этой системе. Замена уравнения (4.1) системой (4.2) производится по правилам теории численных схем (см. [1], раздел 6), с оценкой порядка аппроксимации и аккуратным учетом граничных условий. Например, при введении равномерной сетки с шагом $h = (T_b - T_a)/N$ можно использовать известные приближения для производных:

$$\dot{u}|_{t=t_k} = \frac{1}{2h}(u_{k+1} - u_{k-1}) + o(h^2); \quad (4.3)$$

$$\ddot{u}|_{t=t_k} = \frac{1}{h^2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + o(h^2). \quad (4.4)$$

Вторым шагом является непосредственное численное решение системы (4.2). Здесь возникают следующие трудности. Во-первых, часто бывает, что про решения системы (4.2) ничего не известно: этих решений может не быть совсем или их может быть больше одного. Во-вторых, даже если некоторая информация о решении задачи имеется, при использовании для решения (4.2) итерационных методов, необходимо задание *хорошего* начального приближения, получение которого является отдельной непростой задачей. Иногда такое приближение удается получить, используя асимптотические методы. Вместе с тем очень часто положение спасает *метод продолжения по параметру*¹, состоящий в следующем:

- в систему (4.2) искусственно вводится параметр. Более общая система имеет вид $\mathbf{N}_\lambda(\mathbf{u}) = 0$. Искусство введения параметра при этом заключается в том, чтобы решение системы $\mathbf{N}_0(\mathbf{u}) = 0$ было известно, а система $\mathbf{N}_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{u}) = 0$ при некотором $\tilde{\lambda} > 0$ совпадала с системой (4.2);

- нелинейная система уравнений $\mathbf{N}_\lambda(\mathbf{u}) = 0$ решается с помощью какого-нибудь итерационного метода для последовательных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \tilde{\lambda}$, причем значения λ_n расположены так, что решение системы для предыдущего значения λ_{k-1} служит хорошим начальным приближением для λ_k (с подобным методом построения ветви решений мы уже сталкивались в лабораторной работе № 2).

¹В англоязычной литературе этот метод иногда называется «Homotopy Continuation Method».

Пример. Рассмотрим граничную задачу²

$$\ddot{u} - (3 + \cos^2 t) u + u^3 = 0; \quad (4.5)$$

$$u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 0. \quad (4.6)$$

Точное решение задачи (4.5) - (4.6) неизвестно. Вместе с тем нетрудно проверить, что решением «подправленного» уравнения

$$\ddot{u} + (1 - \cos^2 t) u + u^3 = 0 \quad (4.7)$$

является функция $u(t) = \cos t$, которая удовлетворяет граничным условиям (4.6). Соответственно, рассмотрим уравнение

$$\ddot{u} + (1 - \lambda - \cos^2 t) u + u^3 = 0 \quad (4.8)$$

и будем использовать описанный выше метод, изменяя λ от 0 до 4.

Опишем подробно нахождение численного решения при *фиксированном* значении λ . Введем на промежутке $[-\pi/2; \pi/2]$ сетку

$$t_k = -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{N}; \quad h = \frac{\pi}{N}; \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Заменяя вторую производную по формуле (4.4), получим следующие уравнения для внутренних узлов $k = 1, 2, \dots, N-1$:

$$\frac{1}{h^2} u_{k-1} - \left(\frac{2}{h^2} + \lambda - 1 + \cos^2 t_k \right) u_k + \frac{1}{h^2} u_{k+1} + u_k^3 = 0.$$

Так как $u_0 = u_N = 0$, то систему можно переписать в виде

$$-C_1 u_1 + A u_2 + u_1^3 = 0;$$

$$A u_{k-1} - C_k u_k + A u_{k+1} + u_k^3 = 0, \quad k = 2, \dots, N-2;$$

$$A u_{N-2} - C_{N-1} u_{N-1} + u_{N-1}^3 = 0,$$

где

$$A = \frac{1}{h^2}; \quad C_k = \frac{2}{h^2} + \lambda - 1 + \cos^2 t_k.$$

²Уравнения такого типа возникают, в том числе, в теории ультрахолодных газов, при описании Бозе-конденсата, удерживаемого оптической ловушкой.

Для решения этой системы будем использовать метод Ньютона. Пусть $\mathbf{u}^{(n)} = \{u_k^{(n)}\}$ - результат, получившийся на n -й итерации. Тогда поправка $\mathbf{v}^{(n)} = \{v_k^{(n)}\}$ получается путем решения следующей линейной системы (индексы n всюду опущены для компактности записи, т.е. вместо $v_k^{(n)}$ записано v_k , и вместо $u_k^{(n)}$ записано u_k):

$$\begin{aligned}(C_1 - 3u_1^2) v_1 - Av_2 &= F_1; \\ -Av_{k-1} + (C_k - 3u_k^2) v_k - Av_{k+1} &= F_k, \quad k = 2, \dots, N-2; \\ -Av_{N-2} + (C_{N-1} - 3u_{N-1}^2) v_{N-1} &= F_{N-1},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}F_1 &= -C_1 u_1 + Au_2 + u_1^3; \\ F_k &= Au_{k-1} - C_k u_k + Au_{k+1} + u_k^3, \quad k = 2, \dots, N-2; \\ F_{N-1} &= Au_{N-2} - C_{N-1} u_{N-1} + u_{N-1}^3 = 0.\end{aligned}$$

Переход к следующей итерации происходит по формуле

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{v}^{(n)}.$$

Процесс останавливается, когда норма вектора $\mathbf{v}^{(n)}$ становится меньше наперед заданного значения.

Тестирование программы удобно проводить, положив $\lambda = 0$. Задав начальное приближение $\mathbf{u}^{(0)}$, соответствующее точному решению $u(t) = \cos t$, убеждаемся, что процесс сходится за одну итерацию.

Приведем результаты расчетов для сетки с $N = 100$. Попытка сразу получить решение уравнения (4.5), стартуя с начального приближения $u(t) = \cos t$, успехом не увенчалась: процесс сошелся к нулевому решению. Тогда, стартуя с этого же начального приближения, последовательно получались решения задачи для различных λ с шагом $\Delta\lambda = 0.5$ от $\lambda = 0$ до $\lambda = 4$. Для каждого из этих значений λ считалось, что итерационный процесс сошелся, если

$$\max_k |u_k^{(n+1)} - u_k^{(n)}| \leq 10^{-5}.$$

Число итераций для достижения точности $\sim 10^{-5}$

λ	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
Число итераций	4	4	3	3	3	3	3	3

Скорость сходимости итерационного процесса отражена в таблице (для каждого значения $\lambda = 0 \div 4$ показано число итераций, необходимое для достижения данной точности). Рис.4.1 показывает профиль найденного решения.

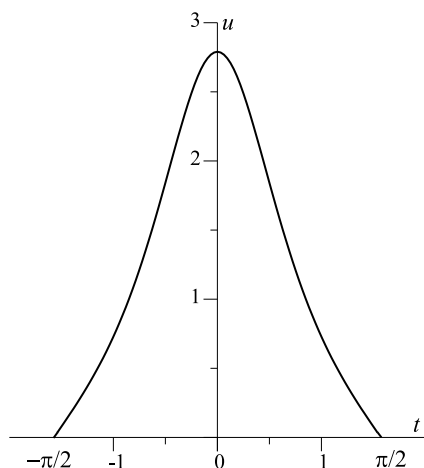


Рис.4.1. Профиль решения задачи Дирихле для уравнения (4.5)

Задачи для самостоятельного исследования

По аналогии с представленным примером, для приведенных ниже задач найдите численно решение краевой задачи Дирихле

$$u(T_a) = u(T_b) = 0,$$

используя представление указанного уравнения на некоторой сетке. Для нахождения решения используйте процедуру продолжения

по искусственно введенному параметру (см. подсказки). Постройте профиль полученного решения.

1. $\ddot{u} - (3 + \cos t)u + u^2 = 0, \quad u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 0.$

Подсказка: замените в уравнении «3» на «-1» и угадайте подходящее решение.

2. $\ddot{u} + (3 + \sin t)u - u^2 = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0.$

Подсказка: замените в уравнении «3» на «1» и угадайте подходящее решение.

3. $\ddot{u} + (t^2 - 1) \operatorname{ch} u = 0, \quad u(-1) = u(1) = 0.$

Подсказка: рассмотрите уравнение $\ddot{u} + (\lambda t^2 - 1) \operatorname{ch} u + (1 - \lambda) = 0$ и найдите при одном из значений λ подходящее решение.

4. $\ddot{u} + (t^2 - 1)e^u = 0, \quad u(-1) = u(1) = 0.$

Подсказка: рассмотрите уравнение $\ddot{u} + (\lambda t^2 - 1)e^u + (1 - \lambda) = 0$ и найдите при одном из значений λ подходящее решение.

5. $\ddot{u} - (3 + \cos^3 t)u + u^4 = 0, \quad u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 0.$

Подсказка: замените в уравнении «3» на «-1» и угадайте подходящее решение.

6. $\ddot{u} + (3 + \sin^3 t)u - u^4 = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0.$

Подсказка: замените в уравнении «3» на «1» и угадайте подходящее решение.

7. $\ddot{u} + (t^2 - 1) \cos u = 0, \quad u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 0.$

Подсказка: рассмотрите уравнение $\ddot{u} + (\lambda t^2 - 1) \cos u + (1 - \lambda) = 0$ и найдите при одном из значений λ подходящее решение.

8. $\ddot{u} - \left(1 - \frac{4}{1+t^2}\right) \cos u = 0, \quad u(-1) = u(1) = 0.$

Подсказка: рассмотрите уравнение $\ddot{u} - \left(1 - \frac{4\lambda}{1+t^2}\right) \cos u + (1 - \lambda) = 0$ и найдите при одном из значений λ подходящее решение.

Лабораторная работа № 5

Фазовый портрет для автономного уравнения второго порядка

Для исследования уравнений вида

$$\ddot{u} + f(u) = 0, \quad \dot{u} \equiv \frac{du(t)}{dt}, \quad \ddot{u} \equiv \frac{d^2u(t)}{dt^2} \quad (5.1)$$

эффективно применяется метод *фазовой плоскости* (см. [3]). Перепишем уравнение (5.1) в виде

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = -f(u), \quad (5.2)$$

и покажем, что система (5.2) обладает *первым интегралом* (напомним, что функция $H(u, v)$ является первым интегралом для системы (5.2), если она постоянна на любом решении этой системы). Умножим первое уравнение системы на \dot{v} , второе - на \dot{u} и вычтем второе уравнение из первого. Получим

$$0 = \dot{u}\dot{v} - \dot{v}\dot{u} = \dot{v}v + \dot{u}f(u) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}v^2 + F(u) \right),$$

где $F(u)$ - первообразная функции $f(u)$.

Отсюда

$$H(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + F(u) \equiv \frac{1}{2}\dot{u}^2 + F(u) = C. \quad (5.3)$$

Здесь C - произвольная константа. Таким образом, $H(u, v)$ является первым интегралом системы (5.2), или, что то же самое, первым интегралом уравнения (5.1).

Рассмотрим плоскость (u, v) (*фазовая плоскость*). Если функция $f(u)$ дифференцируема как функция u , то по теореме существования и единственности из теории дифференциальных уравнений, (см. [4]) через каждую точку (u_0, v_0) плоскости (u, v) проходит единственная кривая, определяемая решением системы уравнений (5.2) с начальными данными $u(0) = u_0, v(0) = v_0$. Из формулы (5.3) следует, что эта кривая описывается уравнением

$$\frac{1}{2}v^2 + F(u) = \frac{1}{2}v_0^2 + F(u_0).$$

Строя на плоскости кривые, определяемые соотношением (5.3) при различных значениях C , мы получаем представление о всех типах решений системы (5.2), а следовательно и уравнения (5.1). Кроме того, так как $v = \dot{u}$, можно считать, что фазовый портрет строится на плоскости (u, \dot{u}) .

Пример. Рассмотрим классическое уравнение маятника

$$\ddot{u} + \sin u = 0. \quad (5.4)$$

Первый интеграл уравнения маятника имеет вид

$$\frac{1}{2}\dot{u}^2 + (1 - \cos u) = C. \quad (5.5)$$

Построим фазовый портрет этого уравнения на плоскости (u, \dot{u}) . Очевидно, на фазовом портрете не будет точек, соответствующих значениям $C < 0$ первого интеграла. Используем процедуру `contour` (см. лабораторную работу № 1) со следующим набором уровней (значений C):

$$C = 0.25, 0.5, 1, 2, 4, 6.$$

Результат представлен на рис.5.1. Полученная структура неограниченно продолжается вправо и влево вдоль горизонтальной оси периодически с периодом 2π . Решение с начальными данными $u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u'_0$, взятыми на одной из кривых, показанных на рис.5.1, будет таким, что точка $(u(t), \dot{u}(t))$ при изменении t будет двигаться именно вдоль этой кривой. Направление движения определяется тем, в какой полуплоскости, верхней или нижней, находится точка. Очевидно, что в верхней полуплоскости $\dot{u} > 0$, поэтому решение u возрастает и движение вдоль кривой происходит *слева направо*. В нижней

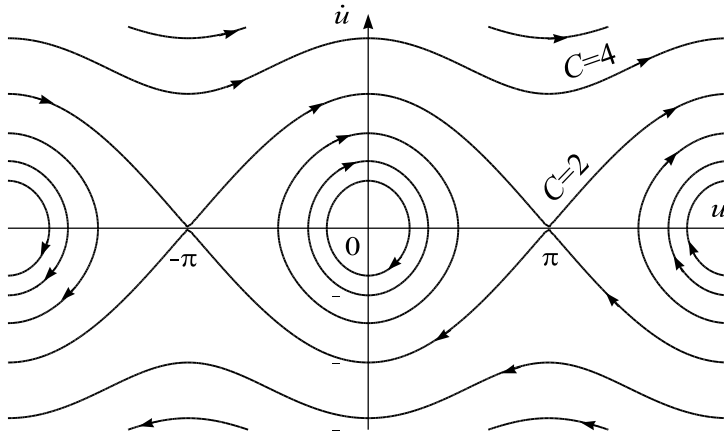


Рис.5.1. Фазовый портрет уравнения маятника

полуплоскости $\dot{u} < 0$, поэтому движение происходит *справа налево*, см. стрелки, обозначающее направление движения на рис.5.1.

На рис.5.1 можно выделить следующие элементы:

1. Состояния равновесия. Это - точки $u = n\pi$, $\dot{u} = 0$, лежащие на горизонтальной оси. Стоит заметить, что точки, соответствующие четным значениям n , лежат в уровне $C = 0$ первого интеграла, а точки, соответствующие нечетным значениям n , - в уровне $C = 2$.

2. Периодические решения. Эти решения соответствуют замкнутым траекториям, охватывающим состояния равновесия $u = 2n\pi$. Для решений этого типа константа первого интеграла лежит в диапазоне $0 < C < 2$.

3. Вращательные решения (или решения с набегом фазы). Для этих решений константа первого интеграла удовлетворяет неравенству $C > 2$. Им соответствуют волнистые незамкнутые линии в верхней и нижней частях рис.5.1.

4. Гетероклинические траектории (или *сепаратрисы*). Сепаратрисам на рис.5.1 соответствуют линии, соединяющие состояния равновесия $u = (2n-1)\pi$ и $u = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Оправдывая свое название (англ. separate - разделять), эти линии разделяют области фазовой плоскости (u, \dot{u}) , заполненные периодическими и вращательными решениями. Для сепаратрис имеем $C = 2$. Важно подчеркнуть,

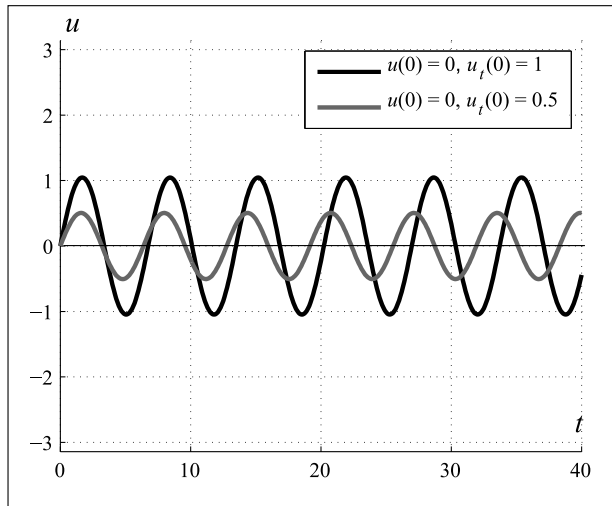


Рис.5.2. Периодические решения уравнения маятника

что решение $u(t)$, соответствующее сепаратрисе, лишь *асимптотически* приближается к состоянию равновесия $u = (2n+1)\pi$ при $t \rightarrow \infty$ (или $t \rightarrow -\infty$), при этом не существует значения $t = t_0$, при котором $u(t_0) = (2n+1)\pi$ и $\dot{u}(t_0) = 0$. Иначе говоря, сепаратриса не «проходит» через состояние равновесия в непосредственном смысле этого слова.

Нарисуем на плоскости (t, u) «развертки» представителей каждого из этих семейств решений. Взяв начальные данные $u(0), \dot{u}(0)$ в области, соответствующей периодическим решениям, и используя программу решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений ode45, получим профили решений, изображенные на рис.5.2. Здесь начальные данные $u(0) = 0, \dot{u}(0) = 0.5$ для первого решения и $u(0) = 0, \dot{u}(0) = 1$ для второго решения.

Далее, взяв начальные данные $u(0), \dot{u}(0)$ в области, соответствующей вращательным решениям, и снова решив численно задачу Коши, получим профили решений, изображенные на рис.5.3. Здесь начальные данные $u(0) = -4\pi, \dot{u}(0) = 2.1$ для первого решения и $u(0) = -4\pi, \dot{u}(0) = 2.2$ для второго решения.

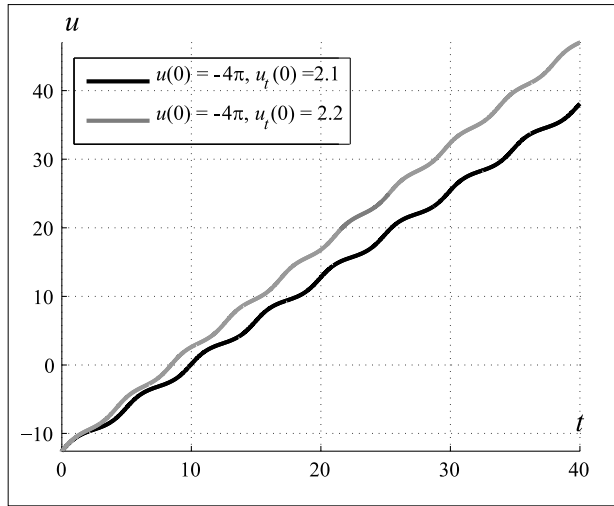


Рис. 5.3. Вращательные решения уравнения маятника

Наконец, для численного нахождения решения, отвечающего сепаратрисе, выходящей из состояния равновесия $u = -\pi$ и приходящей в состояние равновесия $u = \pi$, возьмем специально подобранные начальные данные вблизи первого из состояний равновесия. Линеаризуем исходное уравнение вблизи состояния равновесия $u = -\pi$, положив $u = -\pi + U$, $U \ll 1$. Тогда

$$\ddot{U} - U \approx 0.$$

Решением линеаризованного уравнения, соответствующим выходящей траектории, является $U(t) = e^t$, при этом $\dot{U}(t) = e^t$. В силу того, что в малой окрестности состояния равновесия на выходящей траектории $\dot{U} = U$, в качестве начальных условий для численного счета возьмем

$$u(0) = -\pi + \varepsilon, \quad \dot{u}(0) = \varepsilon,$$

где $\varepsilon \ll 1$.

Используем аналогичные рассуждения для построения решения, соответствующего другой сепаратрисе. Она выходит из состояния

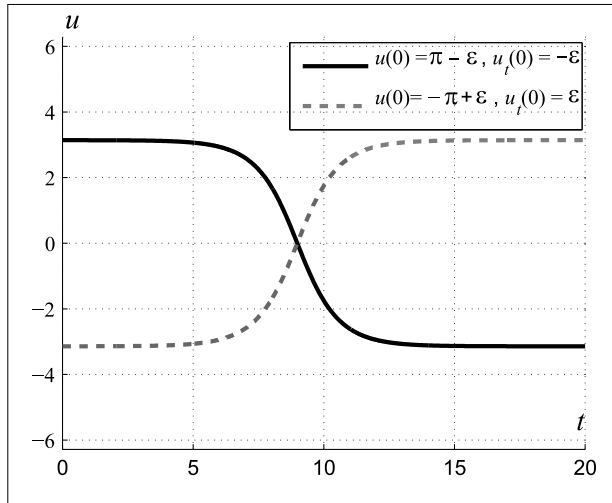


Рис. 5.4. Решения типа кинка уравнения маятника

равновесия $u = \pi$ и приходит в состояние равновесия $u = -\pi$. Начальные условия в этом случае таковы

$$u(0) = \pi - \varepsilon, \quad \dot{u}(0) = -\varepsilon.$$

Профили соответствующих решений показаны на рис. 5.4 ($\varepsilon = 0.0005$).

Решения, асимптотически приближающиеся к различным состояниям равновесия при $t \rightarrow \pm\infty$, в некоторых физических приложениях называются *кинками*. Можно проверить, что для уравнения (5.4) решение типа кинка, соответствующее первой из двух упомянутых сепаратрис, описывается точной формулой

$$u(t) = -\pi + 4 \operatorname{arctg} e^t.$$

Задачи для самостоятельного исследования

По аналогии с представленным примером, для приведенных ниже задач необходимо: i) построить фазовый портрет; ii) построить развертку нескольких характерных решений уравнения разных типов, решив численно задачу Коши.

При выполнении лабораторной работы могут оказаться полезными следующие советы и замечания:

1. Множество линий уровня для процедуры `contour` лучше задавать «вручную».

2. В процедуре `ode45` по умолчанию установлена невысокая точность. Изменить точность можно, используя команду `odeset`.

3. Для лучшей визуализации решений задачи можно использовать процедуру `quiver`, которая рисует на фазовой плоскости поле направлений.

4. В некоторых заданиях имеются траектории, которые выходят из некоторого состояния равновесия и в него же входят. Такие траектории называются гомоклиническими сепаратрисами.

$$1. \ddot{u} - 2u + \operatorname{sh} u = 0, \quad 2. \ddot{u} + u - \frac{4u}{1+u^2} = 0,$$

$$3. \ddot{u} + \frac{\sin 2u}{1+\sin^2 u} = 0, \quad 4. \ddot{u} - \frac{\sin u}{1+\cos^2 u} = 0,$$

$$5. \ddot{u} + u(u-1)(u+2) = 0, \quad 6. \ddot{u} - 2u + e^u - 1 = 0,$$

$$7. \ddot{u} - (2 + \cos u) \sin u = 0, \quad 8. \ddot{u} + \sin u \cdot e^{\cos u} = 0.$$

Лабораторная работа № 6

Нахождение решений краевой задачи для дифференциального уравнения методом «стрельбы»

Напомним, что для постановки *краевой* (или *граничной*) задачи для обыкновенного дифференциального уравнения необходимо задать условия на двух концах исследуемого интервала. Эти условия называются *граничными условиями*. Количество и допустимые типы этих условий определяются самим уравнением.

Пусть уравнение второго порядка вида

$$\ddot{u} = f(t, u, \dot{u}) \quad (6.1)$$

исследуется на промежутке $0 < t < L$. Наиболее часто встречающиеся граничные условия таковы:

1. Условие Дирихле на одном из концов промежутка, $t = 0$ или $t = L$ имеет вид

$$u(0) = a \quad (\text{соответственно } u(L) = a),$$

где a - некоторое число.

2. Условие Неймана на одном из концов промежутка, $t = 0$ или $t = L$ имеет вид

$$\dot{u}(0) = a \quad (\text{соответственно } \dot{u}(L) = a),$$

где a - некоторое число.

Корректная постановка граничной задачи предполагает наличие условий такого типа на обоих концах промежутка, например,

$$u(0) = u(L) = 0, \quad \text{задача Дирихле,}$$

$$\dot{u}(0) = \dot{u}(L) = 0, \quad \text{задача Неймана,}$$

$$\dot{u}(0) = u(L) = 0,$$

$$u(0) = \dot{u}(L) = 0,$$

и т.д.

3. Периодические краевые условия имеют вид

$$u(0) = u(L); \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(L).$$

В отличие от граничной задачи, *начальная задача* (называемая также *задачей Коши*) предполагает задание условий только на одном из концов исследуемого промежутка, например при $t = 0$. Для уравнения (6.1) задача Коши определяется условиями

$$u(0) = u_0; \quad \dot{u}(0) = u'_0,$$

где u_0, u'_0 - некоторые числа. В курсе теории дифференциальных уравнений при весьма необременительных ограничениях доказывалась *теорема о существовании и единственности* решения начальной задачи. Имеется существенная разница между начальной и граничной задачами: решение начальной задачи, в соответствии с теоремой, как правило, существует и единственно, в то время как решение граничной задачи, вообще говоря, совершенно не обязано существовать, и если существует, может оказаться не единственным.

Для численного нахождения решений краевой задачи оказывается удобным использовать так называемый «метод стрельбы». Он позволяет свести решение краевой задачи к решению системы нелинейных уравнений. Приведем два примера, иллюстрирующих суть метода. Решение уравнения (6.1) с начальными условиями $u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u'_0$ будет обозначаться $u(t; u_0, u'_0)$.

1. Пусть необходимо решить уравнение (6.1) с граничными условиями Дирихле на обоих концах промежутка заданной длины L , $u(0) = u(L) = 0$. Заметим, что решение задачи Коши $u(t; 0, u'_0)$ будет

решением краевой задачи Дирихле, если u'_0 выбрано таким образом, что

$$u(L; 0, u'_0) = 0. \quad (6.2)$$

Условие (6.2) можно рассматривать как уравнение на u'_0 . Тем самым задача сводится к нахождению нулей функции $u(L; 0, u'_0)$ как функции u'_0 . Для вычисления значения этой функции при заданном u'_0 необходимо решить начальную задачу для уравнения (6.1). Это нетрудно сделать, используя стандартные численные алгоритмы, например, метод Рунге-Кутты. Для нахождения нулей функции $u(L; 0, u'_0)$ можно использовать, например метод дихотомии.

2. Пусть необходимо решить уравнение (6.1) с периодическими граничными условиями. Рассмотрим функции

$$\Delta_1(L; u_0, u'_0) = u(L; u_0, u'_0) - u_0; \quad \Delta_2(L; u_0, u'_0) = \dot{u}(L; u_0, u'_0) - u'_0.$$

Если найдены значения u_0 и u'_0 , такие, что

$$\Delta_1(L; u_0, u'_0) = 0; \quad \Delta_2(L; u_0, u'_0) = 0, \quad (6.3)$$

то $u(t; u_0, u'_0)$ является искомым решением периодической граничной задачи. Систему уравнений (6.3) можно исследовать численно стандартными способами, например, используя ее графическое представление (см. лабораторную работу № 1). Этому не препятствует тот факт, что для нахождения значений функций $\Delta_1(L; u_0, u'_0)$ и $\Delta_2(L; u_0, u'_0)$ необходимо использовать численную процедуру решения задачи Коши.

Пример. Для уравнения

$$\ddot{u} - u + u^6 = 0 \quad (6.4)$$

найдем решения:

(а) задачи Дирихле $u(0) = u(\pi) = 0$;

(б) периодической задачи $u(0) = u(L)$, $\dot{u}(0) = \dot{u}(L)$ при $L = \pi/2$ и $L = \pi$.

Уравнение (6.4) допускает первый интеграл

$$\frac{1}{2}\dot{u}^2 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{7}u^7 = C. \quad (6.5)$$

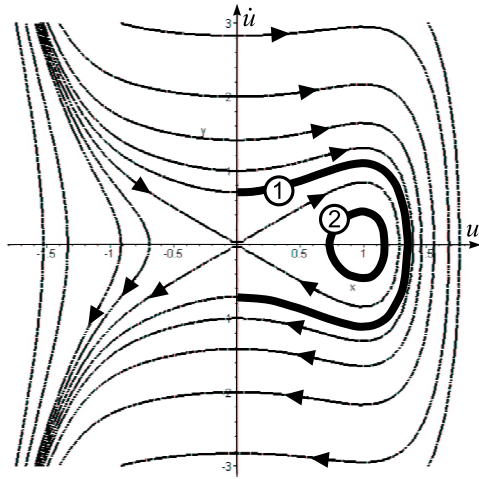


Рис. 6.1. Фазовый портрет уравнения (6.4): 1 - фрагмент траектории, соответствующий решению задачи Дирихле; 2 - замкнутая траектория, соответствующая периодической орбите

Используя первый интеграл, построим фазовый портрет для этого уравнения (рис.6.1).

1. Рассмотрим п. (а). Решениям задачи Дирихле на фазовом портрете соответствуют дуги траекторий, которые начинаются и заканчиваются на оси u' . Среди них необходимо выбрать те, которые соответствуют длине промежутка $L = \pi$, что соответствует выполнению условия (6.2). Фазовый портрет подсказывает, что значения u'_0 необходимо брать положительными. Построим график функции $u(\pi; 0, u'_0)$ как функции u'_0 (рис.6.2). Из этого графика видно, что уравнение $u(\pi; 0, u'_0) = 0$ имеет корень на промежутке $u'_0 \in [0.6; 0.8]$. Уточнение с помощью метода дихотомии дает приближенное значение корня $u'_0 = \tilde{u}'_0 \approx 0.74732$. Решение задачи Коши с начальными условиями $u(0) = 0, \dot{u}(0) = \tilde{u}'_0$ и соответствует решению краевой задачи (профиль решения показан на рис.6.3).

2. Рассмотрим п. (б). Периодическим решениям на фазовом портрете соответствуют замкнутые траектории. Задача состоит в том, чтобы из этих траекторий выбрать те, которые соответствуют реше-

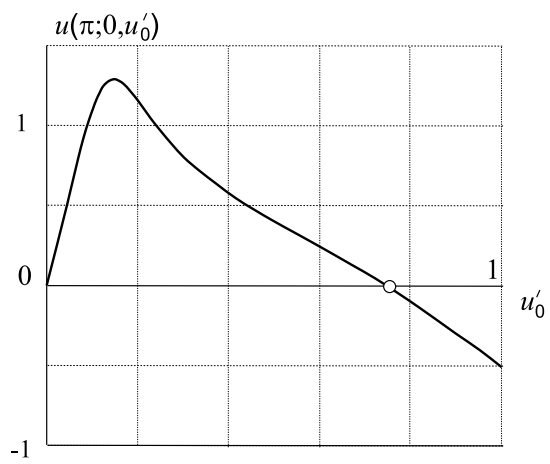


Рис. 6.2. График функции $u(\pi; 0, u'_0)$ как функции u'_0

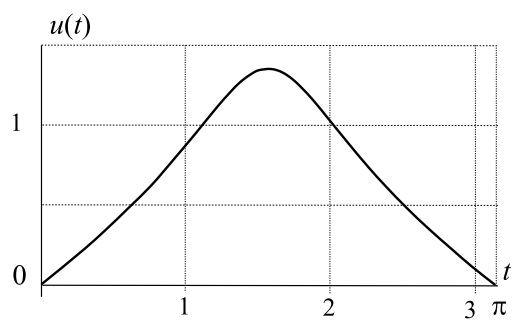


Рис. 6.3. Профиль решения задачи Дирихле

ниям с периодами $L = \pi/2$ и $L = \pi$, если таковые существуют. Из рис.6.1 следует, что эти замкнутые траектории лежат внутри сепаратрисы состояния равновесия седлового типа $u = 0$.

Каждой из замкнутых траекторий соответствует бесконечное семейство решений периодической краевой задачи, которые переводятся друг в друга сдвигом по независимой переменной t . Выделим из этого семейства те, которые удобнее всего исследовать. Заметим, что для любого решения из этого семейства периодических решений имеется значение $t = t_0$, такое, что $\dot{u}(t_0) = 0$. В силу автономности уравнения (6.4) можно без ограничения общности считать, что $t_0 = 0$ и ограничить рассмотрение только решениями, для которых выполняется условие $\dot{u}(0) = 0$.

Далее рассмотрим решение задачи Коши $u(t) = u(t; u_0, 0)$ (напомним, что это решение уравнения (6.4) с начальными условиями $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = 0$). Покажем, что для того, чтобы решение было периодическим с периодом L , достаточно выполнения условия $\Delta_1(L; u_0, 0) = 0$. Действительно, в этом случае $u(0) = u(L) = u_0$, а из существования первого интеграла (6.5) следует, что

$$\frac{1}{2}\dot{u}^2(0) - \frac{1}{2}u^2(0) + \frac{1}{7}u^7(0) = \frac{1}{2}\dot{u}^2(L) - \frac{1}{2}u^2(L) + \frac{1}{7}u^7(L),$$

откуда $0 = \dot{u}(0) = \dot{u}(L)$. Это означает, что равенство $\Delta_2(L; u_0, 0) = 0$ выполняется автоматически.

Таким образом, поиск периодических решений свелся к нахождению значений u_0 , таких, что $\Delta_1(L; u_0, 0) = 0$. График функции $\Delta_1(L; u_0, 0)$ как функции u_0 , построенный для $L = \pi/2$ (рис.6.4, пунктирная линия), пересекается с осью u_0 только в точке $u_0 = 1$. Стоит обратить внимание, что в той же точке пересекается с осью u_0 и график функции $\Delta_2(L; u_0, 0)$, что согласуется с нашими рассуждениями. Точка пересечения $u_0 = 1$ соответствует состоянию равновесия $u(t) \equiv 1$. Это тривиальное решение можно интерпретировать как периодическое решение с любым периодом. Других периодических решений с периодом $L = \pi/2$ данное уравнение не допускает. Аналогичный график, построенный для $L = \pi$, имеет три общие точки с осью u_0 : $u_0^* \approx 0.72831$, $u_0^* = 1$ и $u_0^* \approx 1.174233$ (рис.6.5). Точка пересечения $u_0^* = 1$ соответствует состоянию равновесия $u(t) \equiv 1$. В остальных двух точках график $\Delta_1(L; u_0, 0) = 0$ не пересекает ось абсцисс, а

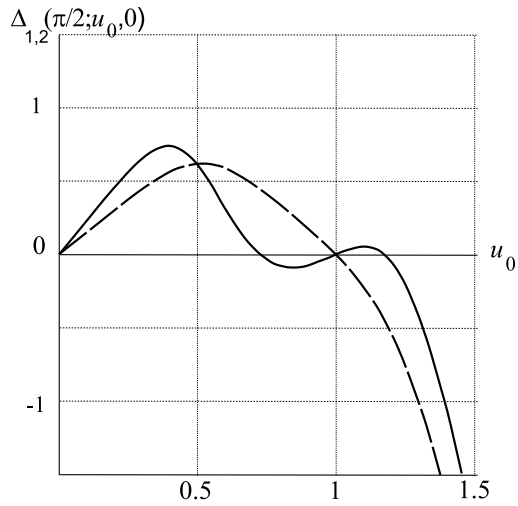


Рис.6.4. Графики функций $\Delta_1(\pi/2; u_0, 0)$ (пунктирная линия) и $\Delta_2(\pi/2; u_0, 0)$ (сплошная линия)

лишь касается ее. Это означает, что функция $\Delta_1(L; u_0, 0) = 0$ имеет в этих точках нули порядка большего, чем первый.

Точки касания соответствуют двум π -периодическим решениям уравнения (6.4), которые переходят друг в друга при сдвиге на $\pi/2$. Искать их численно удобнее, используя функцию $\Delta_2(L; u_0, 0)$, которая, в соответствии с нашими рассуждениями, также имеет нули в точках $u_0 = u_0^*$. Эти нули оказываются простыми, и для их нахождения удобно использовать метод дихотомии. Каждое из двух решений задачи Коши $u(t; u_0^*, 0)$ и является искомым решением периодической задачи. Один из профилей этих решений для $u_0^* \approx 1.174233$ показан на рис.6.6.

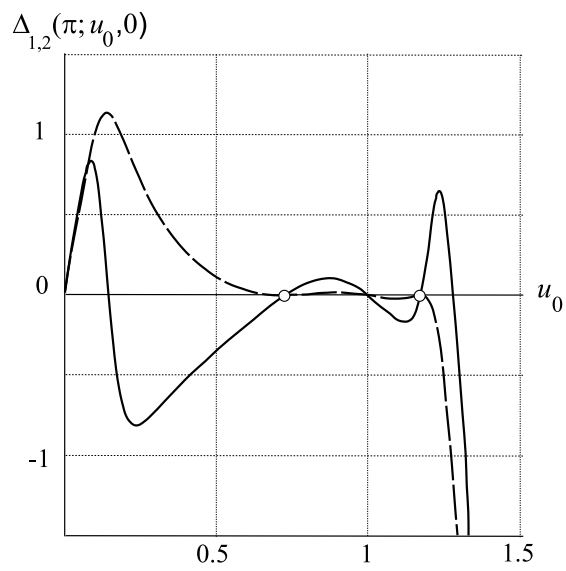


Рис. 6.5. Графики функций $\Delta_1(\pi; u_0, 0)$ (пунктирная линия) и $\Delta_2(\pi; u_0, 0)$ (сплошная линия)

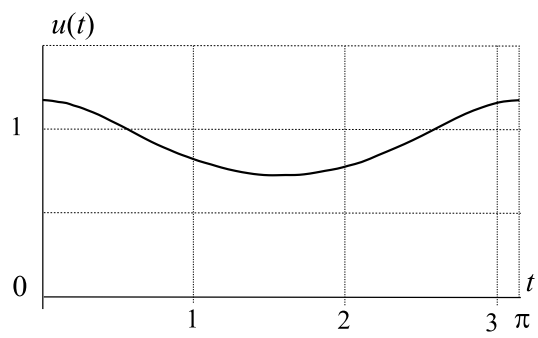


Рис. 6.6. Профиль π -периодического решения, $u_0^* \approx 1.174233$

Задачи для самостоятельного исследования

По аналогии с представленным примером, для приведенных ниже задач необходимо: (i) построить фазовый портрет; (ii) найти численно решение краевой задачи Дирихле $u(0) = u(L) = 0$ (построить профиль); (iii) найти численно решение периодической краевой задачи для данного периода L (построить профиль).

1. $\ddot{u} + \frac{2(u-1)}{u^2+1} = 0,$

(a) Задача Дирихле: $u(0) = u(3\pi) = 0,$

(б) Периодическая задача: период $L = 3\pi.$

2. $\ddot{u} + u - \frac{1}{2} \operatorname{sh} u = 0,$

(a) Задача Дирихле: $u(0) = u(2\pi) = 0,$

(б) Периодическая задача: период $L = 3\pi.$

3. $\ddot{u} + \frac{2u}{(1+u^2)^2} = 0,$

(a) Задача Дирихле: $u(0) = u(2\pi) = 0,$

(б) Периодическая задача: период $L = 2\pi.$

4. $\ddot{u} + u^2 - \frac{2}{1+u^2} = 0,$

(a) Задача Дирихле: $u(0) = u(\pi) = 0,$

(б) Периодическая задача: период $L = \frac{3\pi}{2}.$

5. $\ddot{u} + \frac{1-u^2}{1+u^2} = 0,$

(a) Задача Дирихле: $u(0) = u(2\pi) = 0,$

(б) Периодическая задача: период $L = 3\pi.$

6. $\ddot{u} + u(u - 1)e^u = 0,$

(а) Задача Дирихле: $u(0) = u(\pi) = 0,$

(б) Периодическая задача: период $L = 2\pi.$

7. $\ddot{u} + (u^2 - 1)e^{-u} = 0,$

(а) Задача Дирихле: $u(0) = u(3\pi) = 0,$

(б) Периодическая задача: период $L = 4\pi.$

8. $\ddot{u} - u^2 + u^3 = 0,$

(а) Задача Дирихле: $u(0) = u(2\pi) = 0,$

(б) Периодическая задача: период $L = \pi.$ В обоих пунктах ограничьтесь нахождением решений с амплитудой, меньшей 4.

Лабораторная работа № 7

Сложная динамика в системах порядка, большого двух

Теорема Пуанкаре - Бендиксона (см. напр. [4]) гласит, что траектория автономной динамической системы второго порядка, ограниченная в некоторой области фазовой плоскости, стремится либо к состоянию равновесия, либо к предельному циклу. Таким образом, динамика автономных систем второго порядка не может быть «слишком сложной». Уже для систем третьего порядка эта теорема оказывается несправедливой. В данной лабораторной работе мы увидим, что системы порядка, большего двух, допускают сложное поведение, кажущееся «хаотическим». В частности, такое поведение возможно и у неавтономных систем второго порядка

$$\dot{u} = f(t, u, v), \quad (7.1)$$

$$\dot{v} = g(t, u, v), \quad (7.2)$$

которые можно записать в виде автономной системы третьего порядка стандартным образом

$$\dot{u} = f(\theta, u, v),$$

$$\dot{v} = g(\theta, u, v),$$

$$\dot{\theta} = 1.$$

Для описания поведения решений таких систем нам потребуется понятие *отображения Пуанкаре*. Мы определим это отображение на примере неавтономной системы (7.1)-(7.2), с периодической зависимостью правых частей от независимой переменной t .

Итак, пусть функции $f(t, u, v)$ и $g(t, u, v)$ непрерывны и, кроме того, они являются периодическими функциями переменной t . Для определенности положим, что период по t функций $f(t, u, v)$ и $g(t, u, v)$ равен π . Предположим, что все решения системы (7.1)-(7.2) продолжаются на всю числовую ось. Начальные условия $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$ однозначно определяют решение системы $u(t)$, $v(t)$. Поставим в соответствие точке плоскости (u_0, v_0) другую точку этой же плоскости $(u(\pi), v(\pi))$, соответствующую значениям решения $u(t)$, $v(t)$ при $t = \pi$. Отображение

$$T : (u(0), v(0)) \rightarrow (u(\pi), v(\pi))$$

и называется отображением Пуанкаре. Можно показать, что при сделанных выше предположениях о $f(t, u, v)$ и $g(t, u, v)$:

- T определено для любой точки плоскости (u, v) и взаимнооднозначно отображает эту плоскость в себя;

- T непрерывно;

- T^{-1} существует и тоже является непрерывным.

Можно сказать, что отображение Пуанкаре является *гомеоморфизмом* плоскости (u, v) в себя.

Введем еще одно определение. Будем называть *орбитой* последовательность точек плоскости, получающихся в результате итераций отображения Пуанкаре,

$$\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_1 = T\mathbf{u}_0, \quad \dots, \quad \mathbf{u}_{n+1} = T\mathbf{u}_n, \dots,$$

где $\mathbf{u}_n = (u_n, v_n)$, $n = 0, 1, \dots$.

Орбиты отображения Пуанкаре легко визуализировать. Численное исследование этих орбит может дать достаточно полное представление о поведении решений исходной системы уравнений.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{u} - (1 + \lambda \cos 2t)u + u^3 = 0, \quad (7.3)$$

где λ - параметр. Это уравнение очевидным образом сводится к системе (7.1)-(7.2)

$$\dot{u} = v, \quad (7.4)$$

$$\dot{v} = (1 + \lambda \cos 2t)u - u^3. \quad (7.5)$$

Можно показать, что все решения уравнения (7.3) являются ограниченными функциями. Правые части системы (7.4)-(7.5) являются π -периодическими функциями t . Следовательно, отображение Пуанкаре для системы (7.4)-(7.5) определено, причем все орбиты этого отображения ограничены на плоскости (u, v) .

Используя программу `ode45`, запрограммируем в среде MATLAB модуль, вычисляющий по заданной паре $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ ее отображение Пуанкаре $T\tilde{\mathbf{u}}$. Зафиксируем значение λ . При этом значении λ построим несколько (пять-десять) орбит отображения Пуанкаре. Для точного представления о каждой орбите необходимо брать достаточно много итераций отображения Пуанкаре, порядка нескольких сотен. Каждая орбита однозначно задается начальной точкой; эту точку оказывается удобно брать на оси $v = 0$.

Приведем результаты расчетов при значениях $\lambda = 0$, $\lambda = 0.005$, $\lambda = 0.01$ и $\lambda = 0.1$.

1. $\lambda = 0$. В этом случае зависимость от t в правой части отсутствует, и уравнение является автономным. Орбиты отображения Пуанкаре лежат на фазовых кривых, которые ранее строились для уравнения

$$\ddot{u} - u + u^3 = 0 \quad (7.6)$$

(рис.7.1, верхняя часть).

2. $\lambda = 0.005$. Орбиты отображения Пуанкаре в целом по-прежнему следуют фазовым кривым уравнения (7.6) (рис.7.1, нижняя часть). Однако сепаратрисы точки $(0, 0)$ «размываются» и в их окрестности возникает тонкий слой, называемый *стохастическим*. Орбита отображения Пуанкаре с начальной точкой внутри этого слоя остаются внутри него, причем итерации попадают как на левую, так и на правую половину сепаратрисной «восьмерки». Последовательность попаданий на обе половины этой «восьмерки» кажется случайной.

3. $\lambda = 0.01$. Картинка в целом сохраняется, однако толщина стохастического слоя растет, (см. рис.7.2, верхняя часть).

4. $\lambda = 0.1$. Стохастическая область разрастается, занимая большую часть окрестности начала координат. Внутри нее, однако, встречаются «островки» регулярных орбит, (см. рис.7.2, нижняя часть).

Из рисунков видно, что с ростом параметра λ поведение орбит отображения Пуанкаре оказывается все более сложным. Можно пред-

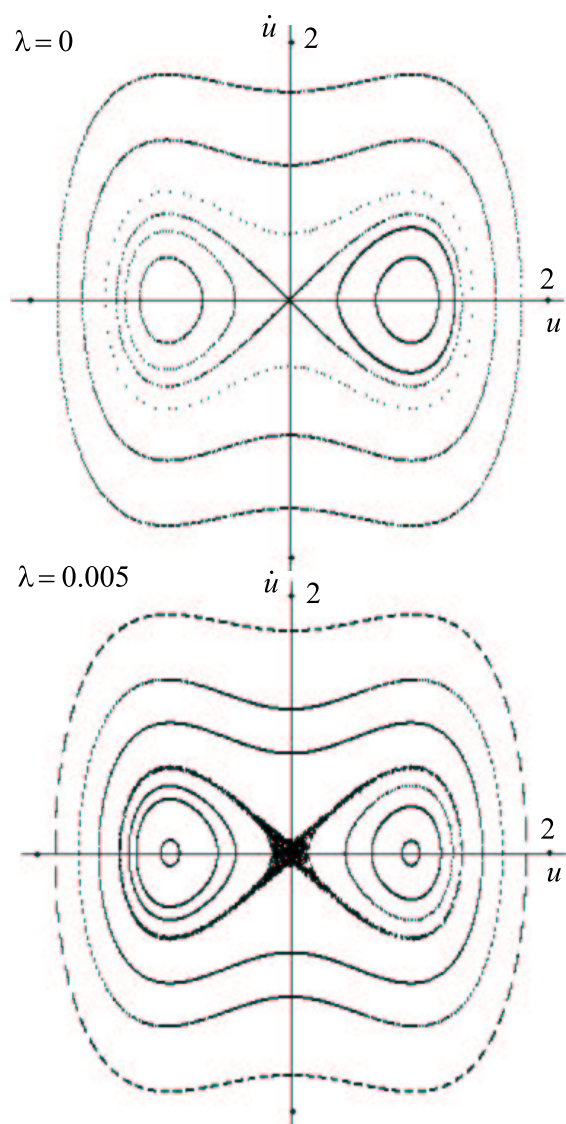


Рис. 7.1. Орбиты отображения Пуанкаре для $\lambda = 0$ и $\lambda = 0.005$

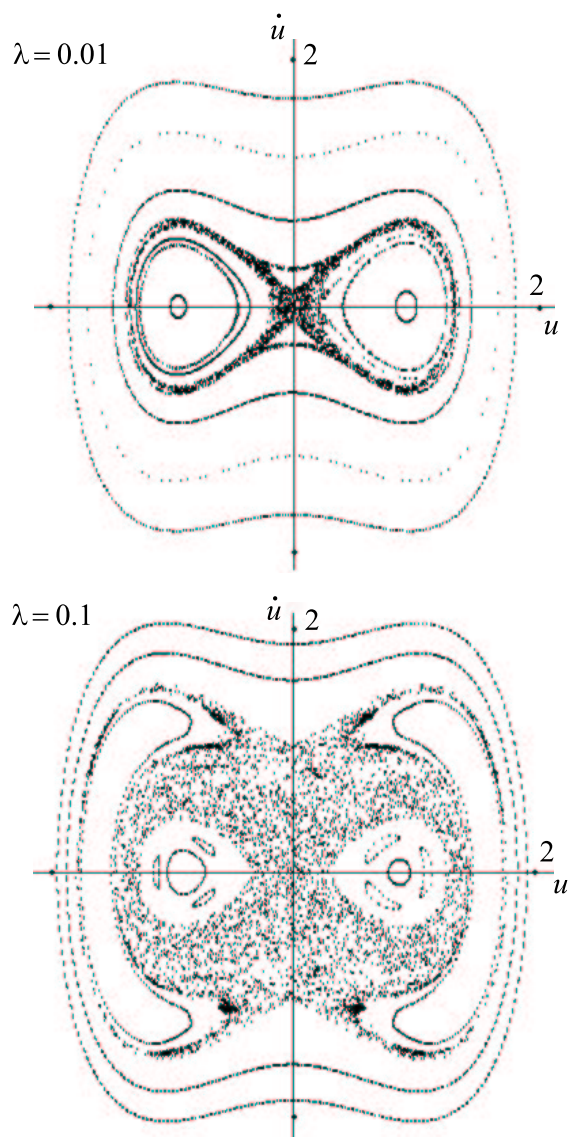


Рис. 7.2. Орбиты отображения Пуанкаре для $\lambda = 0.01$ и $\lambda = 0.1$

положить, что эти орбиты «заметают» на плоскости (u, v) целые области. При этом внутри этих областей сохраняются «островки» регулярного поведения. Приведенная картина является типичной для нелинейных систем, определенных в фазовом пространстве размерности, большей двух.

Задачи для самостоятельного исследования

По аналогии с представленным примером, для приведенных ниже задач необходимо построить несколько орбит отображения Пуанкаре для нескольких значений $\lambda > 0$. Начать исследование необходимо со случая $\lambda = 0$, когда результат известен.

1. $\ddot{u} - u + (1 + \lambda \cos 2t)u^3 = 0,$

2. $\ddot{u} - u + u^3 = \lambda \cos 2t,$

3. $\ddot{u} - u + \lambda \dot{u} \cos 2t + u^3 = 0,$

4. $\ddot{u} - u + \lambda \dot{u}^2 \cos 2t + u^3 = 0,$

5. $\ddot{u} - u + (1 + \lambda \dot{u} \cos 2t)u^3 = 0,$

6. $\ddot{u} - u + u^3 + \lambda u^5 \cos 2t = 0,$

7. $\ddot{u} - u + u^3 + \frac{\lambda \cos 2t}{1 + u^2} = 0,$

8. $\ddot{u} - u + u^3 + \frac{\lambda u \cos 2t}{1 + u^2} = 0.$

Рекомендуемая литература

1. **Косарев В.И.** 12 лекций по вычислительной математике. - М.: Изд-во МФТИ, 2000. - 224 с.
2. **Алфимов Г.Л., Альшина Е.А.** Специальные разделы математического анализа: учеб. пособие. - М.: МИЭТ, 2011. - 216 с.
3. **Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.** Нелинейные колебания. - М.: Изд-во физико-математической литературы, 2005. - 292 с.
4. **Федорюк М.В.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: ЛИБРОКОМ, 2009. - 448 с.

Содержание

Предисловие	3
Лабораторная работа № 1. Исследование средствами MATLAB системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными	5
Лабораторная работа № 2. Продолжение по параметру и бифуркация типа «складка»	8
Лабораторная работа № 3. Метод асимптотических разложений: асимптотическое представление для преобразования Лапласа	13
Лабораторная работа № 4. Нахождение решений краевой нелинейной задачи методом продолжения по параметру	18
Лабораторная работа № 5. Фазовый портрет для автономного уравнения второго порядка	24
Лабораторная работа № 6. Нахождение решений краевой задачи для дифференциального уравнения методом «стрельбы»	31
Лабораторная работа № 7. Сложная динамика в системах порядка, большего двух	41
Рекомендуемая литература	47

Учебное издание

Алфимов *Георгий Леонидович*

Методы исследования нелинейных задач. Лабораторный практикум

Редактор *Н.А. Кузнецова*. Технический редактор *Л.Г. Лосякова*. Корректор *Л.Г. Лосякова*. Верстка автора.

Подписано в печать с оригинал-макета 11.11.2016. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Computer Modern. Усл. печ. л. 2,78. Уч.-изд. л. 2,4. Тираж 100 экз. Заказ 70.

Отпечатано в типографии ИПК МИЭТ.

124498, г. Москва, г. Зеленоград, площадь Шокина, дом 1, МИЭТ.