Лекция 11

11. Преобразование областей под действием фазового потока. Теорема Пуанкаре-Бендиксона

Продолжая изучение системы уравнений вида

$$\dot{u} = f(u,v); \quad (1)$$

$$\dot{v} = g(u,v), \quad (2)$$

мы рассмотрим вопрос о том, как изменяются площади областей на фазовой плоскости под воздействием фазового потока. Также будет сформулировано важное утверждение о возможных типах поведения траекторий, заключенных в ограниченной области фазовой плоскости.

11.1 Преобразование фазового объема под действием фазового потока.

Как уже указывалось раньше, правые части этой системы задают на фазовой плоскости фазовый поток $\mathbf{V}$. Изучим, как изменяется площадь конечной области Ω под воздействием фазового потока. Напомним следующую классическую теорему:

Формула Грина: *Пусть Ω - конечная область на плоскости (u,v), причем $\partial\Omega$ - кусочно-гладкий замкнутый контур. Пусть функции $P(u,v)$,$Q(u,v)$ непрерывны на замкнутом множестве $\bar{G}$, а их частные производные существуют и непрерывны в Ω. Тогда*

$$\int\limits_{\partial\Omega} P\ du + Q\ dv = \iint\limits_{\Omega} \left\{ \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right\}\ dudv$$

Теорема 0.1 *(о фазовом объеме) Пусть Ω_0 - конечная область на плоскости (u,v), ограниченная кусочно-гладким контуром $\partial\Omega_0$. Пусть $f(u,v)$ и $g(u,v)$ - дифференцируемые функции, и Ω_t - множество, получающееся в результате действия фазового потока за время t на Ω_0. Пусть $S(t)$ - площадь Ω_t. Тогда справедлива формула*

$$\dot{S}(t) = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right)\ dudv \quad (3)$$

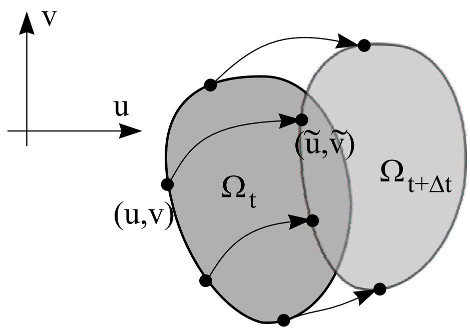

Рис.1. К доказательству теоремы о фазовом объеме

Несмотря на то, что в названии теоремы звучит слово "объем", изучая фазовые потоки на плоскости, мы, конечно, будем говорить о площадях, а не об объемах. Вместе с тем, теорема допускает обобщение на многомерный случай и именно этим объясняется ее название.

Доказательство. Воспользуемся тем, что площадь области Ω на плоскости (u, v), ограниченной контуром $\partial\Omega$, равна

$$S = \iint_{\Omega} dudv = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} -v\ du + u\ dv \tag{4}$$

(последнее равенство следует непосредственно из формулы Грина). Применим формулу (4) к Ω_t. Будем считать (для простоты), что на контуре $\partial\Omega_t$ можно ввести единую параметризацию $u(\xi)$, $v(\xi)$, $\xi \in [a; b)$. Имеем

$$S(t) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(-v(\xi)u'(\xi) + u(\xi)v'(\xi)\right)\ d\xi$$

Здесь штрих означает производную по ξ.

Рассмотрим теперь область $\Omega_{t+\Delta t}$, полученную действием фазового потока на область Ω_t за время Δt (Рис.1). Опустим доказательства того что (а) это именно *область*, т.е. связное открытое множество; (б) кусочно гладкая граница $\partial\Omega_t$ перейдет в кусочно гладкую границу $\partial\Omega_{t+\Delta t}$. Для площади области $\Omega_{t+\Delta t}$ имеем

$$S(t + \Delta t) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{t+\Delta t}} -v\ du + u\ dv$$

Каждая точка $(\tilde{u}, \tilde{v})$ границы $\partial\Omega_{t+\Delta t}$ является результатом воздействия фазового потока за время Δt на какую-то точку (u, v) границы $\partial\Omega_t$, причем

$$\tilde{u} = u + f(u,v)\Delta t + o(\Delta t), \quad \tilde{v} = v + g(u,v)\Delta t + o(\Delta t)$$

Введем на $\partial\Omega_{t+\Delta t}$ параметризацию. Это будем делать так: используем тот же параметр $\xi \in [a; b)$, причем точке $(\tilde{u}, \tilde{v})$ будет сопоставлять то же значение ξ, которое соответствовало *прообразу* этой точки при действии фазового потока, т.е. точке (u, v), лежащей на границе $\partial\Omega_t$. Имеем

$$\begin{aligned}
& S(t+\Delta t) = \\
= \quad & \frac{1}{2}\int_a^b [-(v + g(u,v))\Delta t) \cdot (u' + (f_u(u,v)u' + f_v(u,v)v')\Delta t) \; + \\
+ \quad & (u + f(u,v)\Delta t) \cdot (v' + (g_u(u,v)u' + g_v(u,v)v')\Delta t)] \;\; d\xi + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

Здесь всюду предполагается, что $u = u(\xi)$, $v = v(\xi)$ и использованы формулы для полной производной по ξ от $f(u(\xi), v(\xi))$ и $g(u(\xi), v(\xi))$. Далее

$$\begin{aligned}
& S(t+\Delta t) = \frac{1}{2}\int_a^b [-vu' + uv'] \;\; d\xi + \\
+ \quad & \frac{\Delta t}{2}\int_a^b [-g(u,v)u' - f_u(u,v)u'v - f_v(u,v)v'v + \\
+ \quad & f(u,v)v' + g_u(u,v)u'u + g_v(u,v)v'u] \;\; d\xi + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

Переходя к интегралам второго рода, имеем

$$\begin{aligned}
& S(t+\Delta t) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_t} -v \; du + u \; dv + \\
+ \quad & \frac{\Delta t}{2}\int_{\partial\Omega_t} (-g(u,v) - f_u(u,v)v + g_u(u,v)u) \;\; du + \\
+ \quad & (f(u,v) - f_v(u,v)v + g_v(u,v)u) \;\; dv + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

Первый из двух интегралов в правой части равен $S(t)$. Ко второму интегралу применим формулу Грина. Так как

$$\frac{\partial}{\partial u}(f(u,v) - f_v(u,v)v + g_v(u,v)u) =$$
$$= f_u(u,v) - f_{uv}(u,v)v + g_v(u,v) + g_{uv}(u,v)u$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(-g(u,v) - f_u(u,v)v + g_u(u,v)u) =$$
$$= -g_v(u,v) - f_{uv}(u,v)v - f_u(u,v) + g_{uv}(u,v)u$$

то две пары членов взаимно уничтожатся, а $f_u(u,v)$ и $g_v(u,v)$ удвоятся. Окончательно, получим

$$S(t+\Delta t) - S(t) = \Delta t \int_{\Omega_t} (f_u(u,v) + g_v(u,v))\ dudv + o(\Delta t)$$

откуда и следует формула (3). ■

Замечание. Под интегралом в формуле (3) стоит дивергенция div F двухкомпонентного векторного поля $F = (f(u,v), g(u,v))$.

Следствие 1. Если $f_u(u,v)+g_v(u,v) > 0$ или $f_u(u,v)+g_v(u,v) < 0$ в некоторой области G плоскости (u,v), то система (1)-(2) не имеет замкнутых траекторий в этой области. Действительно, если бы такая траектория имелась, то фазовый поток либо с ростом t, либо с его уменьшением, увеличивал бы площадь охватываемой ей области, а это неизбежно бы привело к пересечению траекторий.

Следствие 2. Фазовый поток гамильтоновой системы сохраняет площади. Действительно, для гамильтоновой системы имеем

$$\begin{aligned} \dot{u} &= H_v(u,v) \\ \dot{v} &= -H_u(u,v) \end{aligned}$$

Таким образом

$$f_u(u,v) + g_v(u,v) = H_{vu}(u,v) - H_{uv}(u,v) = 0$$

Таким образом, для площади любой конечной области Ω_t, преобразуемой фазовым потоком, имеем $\dot{S}(t) = 0$.

11.2. Теорема Пуанкаре-Бендиксона

Анализируя приведенные выше примеры фазовых портретов, можно выделить различные типы траекторий, которые на этих портретах наблюдались. В частности, мы сталкивались с траекториями, которые на фазовой плоскости "уходили на бесконечность" (u и/или v неограниченно росли по модулю), входили в состояние равновесия или выходили из него, соединяли два состояния равновесия и т.д. В некоторых примерах возникали замкнутые траектории, соответствующие периодическим решениям. Естественно возникает следующий вопрос: *насколько сложной в принципе может быть траектория, описываемая системой (1)-(2)?* Вопрос этот достаточно серьезен: в дальнейшем мы столкнемся с тем, что системы дифференциальных уравнений могут описывать очень сложную хаотическую динамику.

Однако для автономных систем второго порядка вида (1)-(2) имеется строгий результат, "запрещающий" очень сложное поведение траекторий. Этот результат формулируется следующим образом.

Теорема 0.2 *(Пуанкаре-Бендиксона) Пусть*

- $\bar{\Omega}$ *- замкнутое и ограниченное подмножество плоскости* (u, v)*;*
- *функции* $f(u, v)$ *и* $g(u, v)$ *непрерывно дифференцируемы в некотором открытом множестве, включающем* $\bar{\Omega}$*;*
- *система (1)-(2) не имеет в* $\bar{\Omega}$ *состояний равновесия;*
- *имеется решение* $(u(t), v(t))$ *системы (1)-(2), которому при* $t > 0$ *на фазовой плоскости соответствует траектория* γ*, причем* $(u(t), v(t)) \in \bar{\Omega}$ *при всех* $t > 0$.

Тогда γ *либо сама является замкнутой траекторией, либо* γ *неограниченно приближается к некоторой замкнутой траектории при* $t \to +\infty$.

Доказательство теоремы Пуанкаре-Бендиксона нетривиально и выходит за пределы нашего курса.

Задачи:

1. На фазовой плоскости выделена конечная область. Она преобразуется фазовым потоком, задаваемым системой уравнений

$$\dot{u} = u + \sin 2v; \quad \dot{v} = v + \sin 2u.$$

Определите, через какое время t площадь области удвоится.

2. Выясните поведение траекторий вблизи неподвижной точки $(0;0)$ для системы уравнений

$$\dot{u} = v + u\sqrt{u^2 + v^2}; \quad \dot{v} = -u + v\sqrt{u^2 + v^2}.$$

3. Выясните поведение траекторий вблизи неподвижной точки $(0;0)$ для системы уравнений

$$\dot{u} = -v + u^3; \quad \dot{v} = u + v^3.$$

4. Выясните, возможны ли замкнутые траектории на фазовой плоскости для системы уравнений

$$\dot{u} = -u - uv; \quad \dot{v} = u - v + \frac{1}{2}v^2$$

5. Выясните, возможны ли замкнутые траектории, целиком лежащие в первом квадранте фазовой плоскости для системы уравнений

$$\dot{u} = u + u^3 v; \quad \dot{v} = v + uv^3$$

6. Придумайте систему, у которой имеется ровно одна неподвижная точка и ровно три замкнутых траектории.

7. Покажите, что уравнение $\ddot{u} = F(u)$ не может иметь ровно два состояния равновесия, каждое из которых имеет тип “седло”.