

# Лабораторная работа 4. Нахождение решений краевой нелинейной задачи методом продолжений по параметру.

Третьяк И.Д. ([Tretyak01D@gmail.com](mailto:Tretyak01D@gmail.com))

ПМ-31 Вариант 20 == 4 (mod 8)

Решаемая задача Дирихле

$$\begin{cases} \ddot{u} + (t^2 - 1)e^u = 0 \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Введение параметра

Рассмотрим вместо него задачу с введением параметра

$$\begin{cases} \ddot{u} + (\lambda t^2 - 1)e^u + (1 - \lambda) = 0 \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Тогда при  $\lambda = 1$  имеем исходное уравнение системы  $\ddot{u} + (1 * t^2 - 1)e^u + (1 - 1) = 0$

А при  $\lambda = 0$  имеем очень просто решаемое аналитически уравнение  $\ddot{u} + (0 * t^2 - 1)e^u + (1 - 0) = 0$   
Что можно переписать в виде  $\ddot{u} = e^u - 1$ .

Решим систему:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= e^u - 1 \\ u(-1) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \ddot{u} - e^u du &= \int -1 dt \Leftrightarrow \dot{u} = e^u - t + C_1 \\ \int \dot{u} - e^u du &= \int -t + C_1 dt \Leftrightarrow u + e^u = -t^2/2 + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

Из граничных условий имеем

$$\begin{aligned} u(1) - e^{(u(1))} &= -1/2 + C_1 + C_2 = -1 \\ u(-1) - e^{(u(-1))} &= -1/2 - C_1 + C_2 = -1 \end{aligned}$$

Решение такой системы

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= -1/2 \end{aligned}$$

Тогда аналитическое решение исходной задачи имеет вид

$$u - e^u = -t^2/2 - 1/2 \Leftrightarrow e^u - u = t^2/2 + 1/2$$

**Формулировка краевой задачи**