Лекция 8

9. Автономные дифференциальные уравнения первого порядка.

В этом разделе мы рассмотрим дифференциальные уравнения вида

$$\dot{u} = f(u) \tag{1}$$

Точка означает производную по независимой переменной t. Уравнения такого типа, очевидно, являются уравнениями 1-го порядка. Правая часть при этом зависит только от функции u и не зависит от t. Уравнения такого типа называют *автономными*[1].

Уравнение (1) является частным случаем уравнения уравнением с разделяющимися переменными. Такие уравнения интегрируются в квадратурах. Действительно, имеем

$$\frac{du}{f(u)} = dt, \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{d\xi}{f(\xi)}$$

Эту возможность решения уравнения (1) необходимо иметь в виду. Однако часто этот подход к рассматриваемому уравнению оказывается неэффективным: интеграл в правой части может "не браться", к тому же переход от функции $t = t(u)$ к обратной функции $u = u(t)$ может быть сопряжен со значительными трудностями. Поэтому в большом количестве примеров оказывается более информативным *качественное* исследование уравнения (1).

9.1. Геометрические интерпретации автономного дифференциального уравнения 1-го порядка

Перечислим некоторые приемы качественного исследования уравнения такого типа.

1. Одним из приемов такого исследования, изучавшийся в курсе дифференциальных уравнений, является использование *поля направлений*, порождаемого рассматриваемым уравнением на плоскости (t, u). В силу того, что производная функции в точке определяет тангенс угла наклона касательной к графику функции, можно

[1] Примером уравнения 1-го порядка, которое не является автономным, является уравнение $\dot{u} = f(t, u)$.

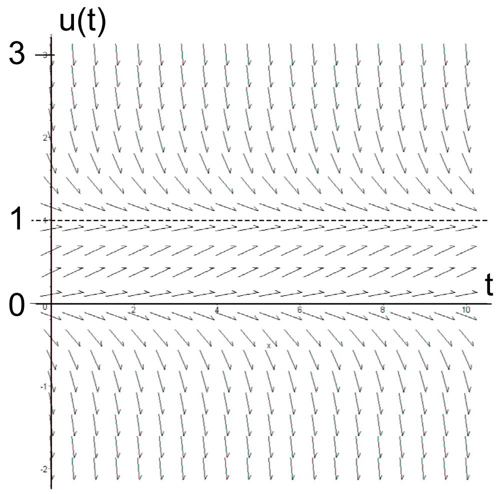

Рис.1.

получить представление о графиках различных решений $u(t)$, изобразив стрелками направление касательных в каждой точке плоскости (t, u). В силу того, что правая часть уравнения не зависит от t, при фиксированном значении u тангенс угла наклона касательной однозначно определяется значением $f(u)$. Поэтому при любом фиксированном значении t поле направлений будет одним и тем же, что упрощает исследование задачи.

Нарисовав поле направлений, можно представить, как ведут себя *интегральные кривые* уравнения (1). Интегральные кривые, по сути, являются графиками решений уравнения (1), соответствующих различным начальным данным.

Пример. Рассмотрим так называемое *логистическое уравнение*

$$\dot{u} = u(1-u) \tag{2}$$

Функция $f(u) = u(1-u)$ обращается в нуль при $u = 0$ и $u = 1$. Нарисуем поле направлений. При $u = 0$ и $u = 1$ векторы направления горизонтальны, выше $u = 1$ они “смотрят” вниз, между прямыми $u = 0$

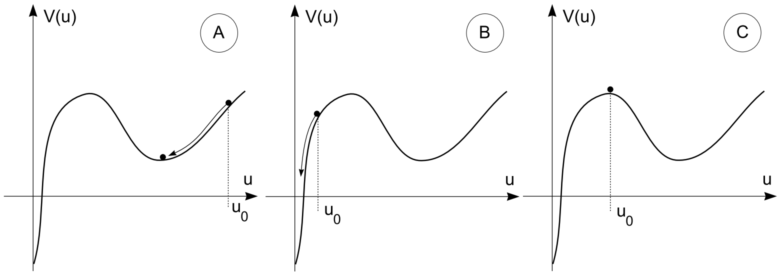

Рис.2.

и $u = 1$ - “вверх”, ниже $u = 0$ - тоже “вниз”. Получается, что интегральные кривые с ростом t “прижимаются” к состоянию равновесия $u = 1$. Это состояние равновесия является устойчивым. Наоборот, состояние равновесия $u = 0$ является неустойчивым. Представленная качественная картина проста и понятна. Вместе с тем, общее *точное* решение логистического уравнения также может быть записано. Оно имеет вид

$$u(t) = 1 + \frac{1}{Ce^t - 1}. \tag{3}$$

Здесь C - произвольная константа, которая определяется из начального условия.

2. Пусть $f(u) = -V'(u)$. Уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\dot{u} = -V'(u) \tag{4}$$

Умножим обе части уравнения на $-\dot{u}$. Получим

$$-(\dot{u})^2 = V'(u)\dot{u} = \frac{d}{dt}V(u(t)) \leq 0, \tag{5}$$

причем равенство нулю производной достигается лишь в точке равновесия $\dot{u} = 0$.

Соотношение (5) допускает следующую простую геометрическую интерпретацию. Если $u(t)$ - решение уравнения (4), то с течением

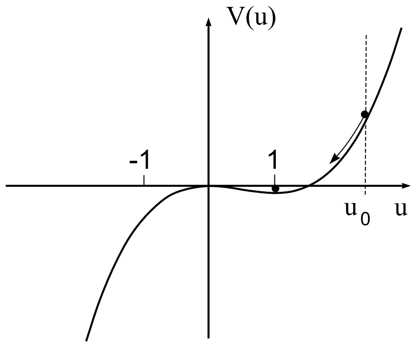

Рис.3.

времени величина $V(u(t))$ не может увеличиваться, причем оставаться постоянной, $u(t) \equiv \tilde{u}$, она может тогда и только тогда, когда $V'(\tilde{u}) = 0$. Нарисуем профиль функции $V(u)$ и возьмем в качестве начального условия некоторое значение $u = u_0$, отметив его точкой на этом профиле. Очевидно, эволюция, описываемая уравнением (4), будет соответствовать движению этой точки *вниз* по поверхности "рельефа" $V(u)$. При этом возможны следующие три ситуации:

1. Точка опускается в ближайший минимум $V(u)$ и там останавливается, см. Рис.2(A). Состояние равновесия, соответствующее этому минимуму, является устойчивым.

2. Если функция $V(u)$ не ограничена снизу, точка может спускаться вниз бесконечно, см. Рис.2(B).

3. Если точка располагается в точке максимума $V(u)$ (которая также является состоянием равновесия), Рис.2(C), она может там оставаться бесконечно долго. Вместе с тем любое возмущение выводит точку из этого состояния равновесия, и ее дальнейшая эволюция определяется п.1 или п.2. Таким образом, точка максимума $V(u)$ соответствует неустойчивому состоянию равновесия уравнения (4).

Пример. Для логистического уравнения (2) функция $V(u)$ имеет вид

$$V(u) = -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3$$

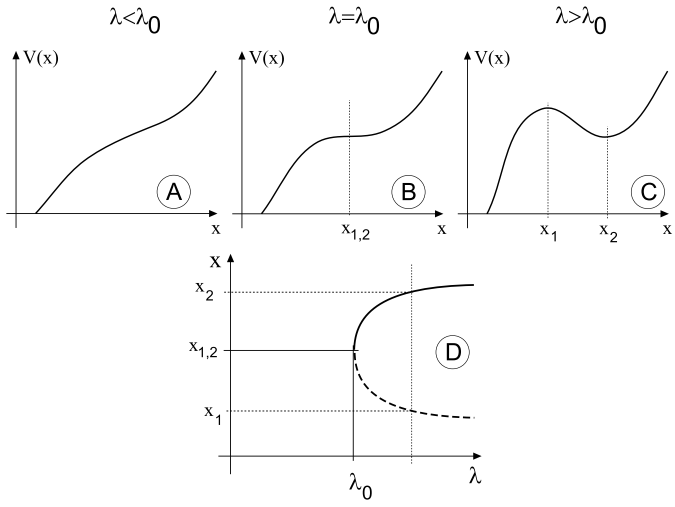

Рис.4.

Рис.3 наглядно иллюстрирует устойчивость состояния равновесия $u = 1$ и неустойчивость состояния равновесия $u = 0$.

9.2. Бифуркации состояний равновесия

Используя представленную выше геометрическую интерпретацию, можно вернуться к рассмотрению бифуркаций решений уравнения $F(x, \lambda)$=0, трактуя их как состояния равновесия уравнения

$$\dot{x} = F(x, \lambda), \quad x = x(t). \tag{6}$$

Как и раньше, введем обозначение $V(x, \lambda) = -\int_{x_0}^{x} F(\xi, \lambda)\, d\xi$.

Бифуркация типа седло узел. При этой бифуркации с ростом (или уменьшением) параметра λ два состояния равновесия, удовлетворяющие соотношению $F(x, \lambda) = 0$, сливаются и исчезают. Характерным примером, где возникает такая бифуркация, является уравнение

$$\dot{x} = \lambda - x^2 \tag{7}$$

Для уравнения (7) точкой бифуркации является значение $\lambda = 0$. С точки зрения графика функции $V(x, \lambda)$ при этой бифуркации происходит слияние и исчезновение двух соседних точек экстремума $V(x, \lambda)$. Одна из этих точек экстремума является максимумом, другая - минимумом, соответственно бифуркация состоит в исчезновении пары - *устойчивого* и *неустойчивого* состояний равновесия. Один из "сценариев" такого слияния показан на Рис.4(A-C). Соответствующая бифуркационная диаграмма показана на Рис.4(D). Сплошными линиями представлены устойчивые состояния равновесия, пунктирными - неустойчивые. Другой "сценарий" слияния максимума и минимума $V(x, \lambda)$, при котором максимум находится справа от минимума, предлагается представить самим.

Транскритическая бифуркация. Бифуркационная диаграмма для транскритической бифуркации показана на Рис.4 лекции 3. Характерный пример такой бифуркации представляет уравнение

$$\dot{x} = \lambda^2 - x^2 \tag{8}$$

при этом бифуркация имеет место при $\lambda = 0$.

Транскритическая бифуркация не является бифуркацией "общего положения". Для нее помимо основного условия $F_x(x_0, \lambda_0) = 0$ требуется дополнительное условие $F_\lambda(x_0, \lambda_0) = 0$, при том, что дискриминант D должен быть положителен. С точки зрения графика функции $V(x, \lambda)$ эта бифуркация состоит в том, что при некотором значении $\lambda = \lambda_0$ максимум и минимум функции $V(x, \lambda)$, существующие при $\lambda < \lambda_0$, сливаются, а затем при $\lambda > \lambda_0$ "разбегаются" снова. Этот сценарий бифуркации иллюстрируется графиками на Рис.5(A-C). Соответствующая бифуркационная диаграмма представлена на Рис.5(D). Сплошными линиями представлены устойчивые состояния равновесия, пунктирными - неустойчивые.

Изолированное состояние равновесия. Изолированное состояние равновесия называется таковым в силу того, что оно существует только при выделенном значении $\lambda = \lambda_0$ и не может быть продолжено по этому параметру. Такая ситуация также не является ситуацией общего положения. Для нее помимо основного условия $F_x(x_0, \lambda_0) = 0$ требуется выполнение дополнительного условия $F_\lambda(x_0, \lambda_0) = 0$, причем дискриминант D должен быть отрицателен. Примером уравне-

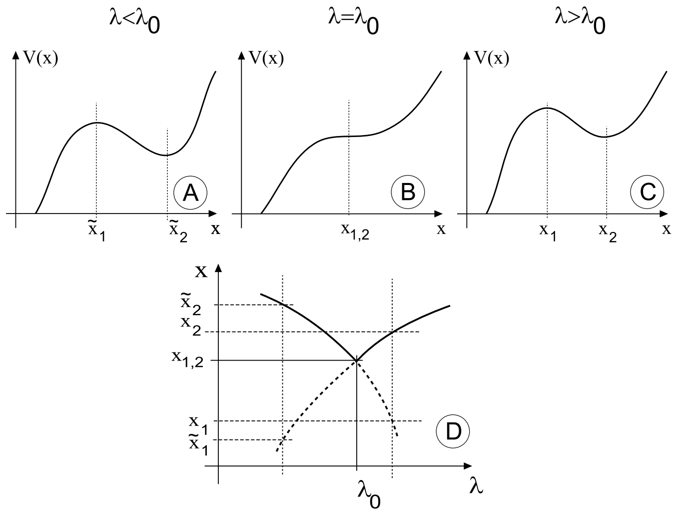

Рис.5.

ния, имеющего состояние равновесия лишь при единственном значении $\lambda = 0$, является уравнение

$$\dot{x} = \lambda^2 + x^2 \tag{9}$$

С точки зрения графика функции $V(x, \lambda)$ изолированное состояние равновесия означает, что при значениям λ, близких к λ_0, функция $V(x, \lambda)$ не имеет максимумов и минимумов вблизи точки $x = x_0$, а при $\lambda = \lambda_0$ имеет в точке $x = x_0$ горизонтальную касательную. Эта ситуация иллюстрируется графиками на Рис.6(A-C). Соответствующая бифуркационная диаграмма (состоящая из единственной точки) представлена на Рис.6(D).

Бифуркация "вилка". Бифуркация "вилка" характерна для систем с дополнительными симметриями. В частности, как было показано в лекции 3, если функция $F(x, \lambda)$ есть нечетная функция переменной x при любом λ

$$F(-x, \lambda) = -F(x, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

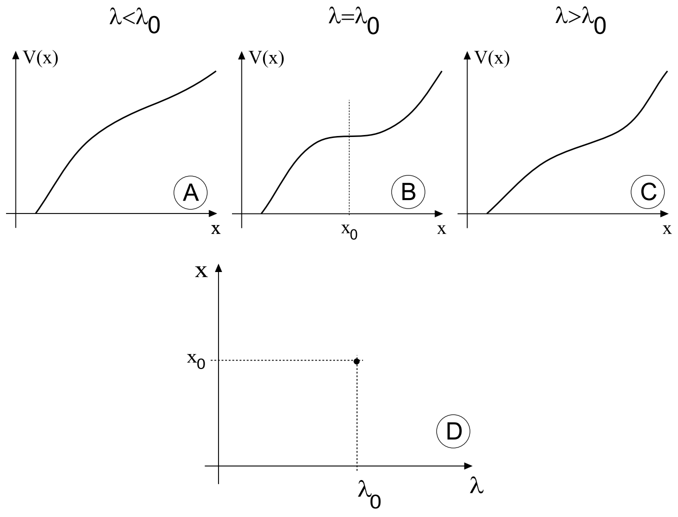

Рис.6.

то условием для возникновения бифуркации “вилка” является условие

$$F_x(0, \lambda_0) = 0 \tag{10}$$

Это условие не является обременительным, поэтому бифуркация “вилка” часто встречается в различных приложениях. Примером уравнения, для которого эта бифуркация имеет место (при $\lambda = 0$), является уравнение

$$\dot{x} = x(\lambda - x^2)$$

Пусть $F(x, \lambda)$ - нечетная функция. Тогда при любом λ функция

$$V(x, \lambda) = -\int_0^x F(\xi, \lambda)\, dx$$

является четной. Если при некотором значении $\lambda = \lambda_0$ имеет место бифуркация “вилка”, то либо при $\lambda \gtrsim \lambda_0$, либо при $\lambda \lesssim \lambda_0$ функция $V(x, \lambda)$ имеет вблизи точки $x = 0$ два симметричных экстремума

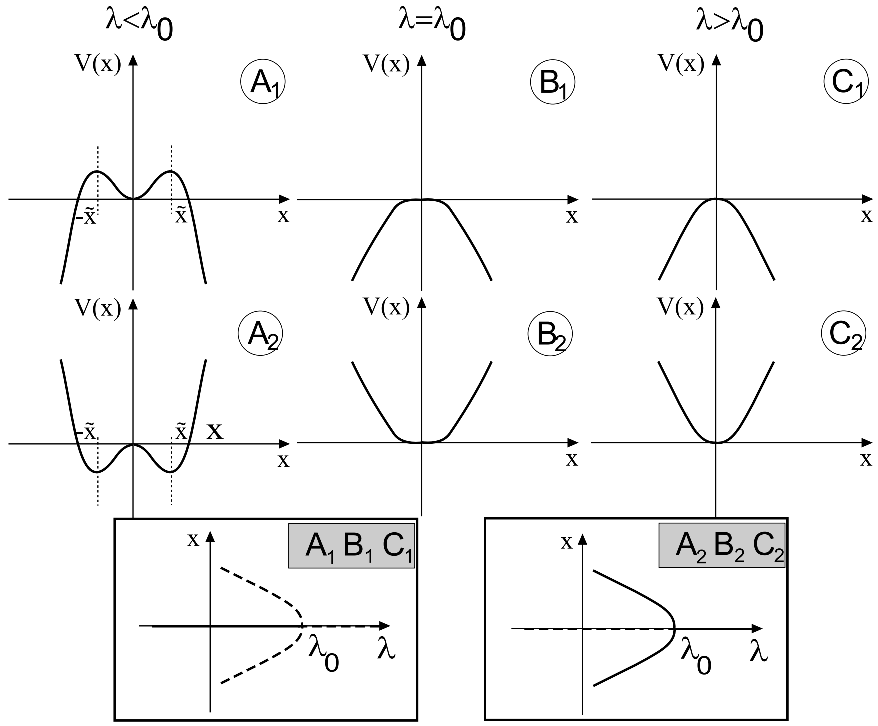

Рис.7.

$x = \pm\tilde{x}$. При этом $x = 0$ также является экстремумом этой функции при любом λ, и если $x = 0$ является минимумом, то $x = \pm\tilde{x}$ являются максимумами, а если $x = 0$ является максимумом, то $x = \pm\tilde{x}$ являются минимумами. Бифуркация "вилка" при этом состоит в том, что при $\lambda = \lambda_0$ экстремумы $x = \pm\tilde{x}$ сливаются с экстремумом в $x = 0$, при этом экстремум в $x = 0$ меняет свой тип (с максимума на минимум или наоборот).

Рисунок 7 иллюстрирует два сценария, по которым может произойти бифуркация "вилка". Предполагается, что в обоих случаях при $\lambda < \lambda_0$ имеется три состояния равновесия уравнения. В первом из рассматриваемых сценариев состояния равновесия $x = \pm\tilde{x}$ являются неустойчивыми, а $x = 0$ - устойчивым состоянием равновесия.

В результате бифуркации при $\lambda > \lambda_0$ пара состояний $x = \pm\tilde{x}$ “схлопываются” и исчезают, а $x = 0$ теряет устойчивость. Такой тип бифуркации “вилка” называется *субкритическим*, см. графики $A_1 - C_1$ на Рис.7. Второй сценарий предполагает, что при $\lambda < \lambda_0$ состояния равновесия $x = \pm\tilde{x}$ являются устойчивыми, а $x = 0$ - является неустойчивым. В точке бифуркации состояния равновесия $x = \pm\tilde{x}$ исчезают, а $x = 0$ приобретает устойчивость (*суперкритический* тип бифуркации, см. графики $A_2 - C_2$ на Рис.7.)

Задачи:

1. Убедитесь в том, что общее решение логистического уравнения (2) имеет вид (3). Выясните:

- каким значениям константы C соответствуют решения, стремящиеся к 1 при $t \to \infty$?
- каким значениям константы C соответствуют решения, стремящиеся к $-\infty$ при $t \to \infty$?
- ли у этого уравнения решения, стремящиеся к $+\infty$ или $-\infty$ при стремлении t к некоторому *конечному* значению t_0?

2. Найти состояния равновесия и выяснить их устойчивость для следующих уравнений

$$1. \quad \dot{u} = \operatorname{sh} u - \frac{1}{6}\operatorname{sh} 2u$$

$$2. \quad \dot{u} = \frac{\sin^3 u}{1 + \cos u}$$

$$3. \quad \dot{u} = u - \frac{u}{1 + u^2/6}$$

3. Найти значения λ, при которых состояния равновесия претерпевают бифуркации и выяснить типы этих бифуркаций

1. $\dot{u} = \operatorname{sh} u - \lambda \operatorname{sh} 2u$
2. $\dot{u} = e^{-u} - u^2 - \lambda$
3. $\dot{u} = \lambda \operatorname{th} u - u$
4. $\dot{u} = -\lambda u + \sin u$
5. $\dot{u} = u(1-u) - \lambda$
6. $\dot{u} = u + u^3 - \lambda u^5$