Лекция 5

5. Соответствие функций и асимптотических рядов

Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ - калибровочная система функций на действительной оси при $x \to a$. Естественными вопросами, касающимися соответствия функций и асимптотических рядов, являются следующие:

Вопрос 1. Известно, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$, является асимптотическим к функции $f(x)$. Существует ли какая-нибудь другая функция $g(x)$, для которой этот ряд также является асимптотическим?

Вопрос 2. Известно, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$, является асимптотическим к функции $f(x)$. Существует ли какой-нибудь другой ряд по той же калибровочной системе, также асимптотический к функции $f(x)$?

Вопрос 3. Дан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$. Существует ли функция $f(x)$, для которой этот ряд является асимптотическим?

Покажем, что ответ на Вопрос 1 - утвердительный. Рассмотрим частный случай, когда калибровочная система - степенные функции $\{1, (x-a), (x-a)^2, \ldots\}$, и, соответственно, асимптотический ряд для $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k.$$

Функция $\zeta(x) = e^{-1/(x-a)^2}$ такова, что $\zeta(x) = o\left((x-a)^k\right)$ при $x \to a$ и любом $k > 0$. Значит, асимптотический ряд для функции $g(x) = f(x) + C\zeta(x)$ при любом C совпадает с асимптотическим рядом для $f(x)$, то есть

$$g(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k. \tag{1}$$

Это указывает на следующий важный момент, который необходимо учитывать при использовании асимптотических рядов. Если в соотношении для $g(x)$ взять C очень большим, то формула (1) останется верна, но область ее эффективного применения значительно уменьшится. Таким образом, *a priori*, мы не можем сказать, будет ли асимптотическая формула хорошо описывать данную функцию при заданном значении x.

Ответ на Вопрос 2 дается следующей теоремой:

Теорема 0.1 *(о единственности асимптотического разложения) Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ - калибровочная последовательность при $x \to a$ и*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) + O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \to a \tag{2}$$

Тогда коэффициенты a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, однозначно определяются функцией $f(x)$.

Доказательство. Пусть справедливо еще одно асимптотическое представление функции $f(x)$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(x) + O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \to a \tag{3}$$

Вычитая (3) из (2) получаем

$$0 = \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) \varphi_k(x) + O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \to a \tag{4}$$

Из определения калибровочной последовательности следует равенство

$$(a_1 - b_1)\varphi_1(x) = o(\varphi_1(x)), \quad x \to a$$

Поделив это равенство на $\varphi_1(x)$ и перейдя к пределу при $x \to a$ заключаем, что $a_1 = b_1$.

Далее используем метод индукции. База индукции (случай $n = 1$) имеется. Пусть $a_k = b_k$ при $k \le m < n$. Тогда равенство (4) принимает вид

$$0 = \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - b_k) \varphi_k(x) + O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \to a$$

Снова деля обе части на $\varphi_{m+1}(x)$ и переходя к пределу при $x \to a$, заключаем, что $a_{m+1} = b_{m+1}$. $\blacksquare$

Замечание. Строго говоря, запись

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_n (x-a)^n.$$

не вполне корректна (мы говорим, об асимптотическом ряде для функции, а не для другого асимптотического ряда). Вместе с тем, она имеет право на существование в следующем смысле: и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$ описывают функции из одного и того же класса. Этот класс определен с точностью до членов, имеющих при $x \to a$ малость бо́льшую, чем $(x-a)^n$ для любого n (например, экспоненциально малые члены вида $e^{-1/(x-a)^2}$, о которых шла речь выше). Из доказанной теоремы следует, что тогда при всех k выполняются соотношения $a_k = b_k$.

Перейдем к обсуждению Вопроса 3. Ограничимся случаем, когда $a = 0$ и когда калибровочная система - степенные функции $\{1, x, x^2, \ldots\}$. Сформулируем вопрос так: имеются ли какие-нибудь ограничения на коэффициенты a_k, чтобы ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

являлся бы асимптотическим рядом для некоторой функции $f(x)$? Следующая теорема гласит, что никаких ограничений на коэффициенты a_k не имеется.

Теорема 0.2 *(о коэффициентах асимптотического ряда) Для любой последовательности a_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ существует функция $f(x)$, непрерывная при $|x| < 1$ и такая, что*

$$f(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \to 0.$$

Для доказательства этой теоремы потребуется следующая лемма:

Лемма : *При любых y справедливо неравенство*

$$1 - e^{-y} \le y \tag{5}$$

Доказательство леммы: Рассмотрим функцию $p(y) = 1 - e^{-y} - y$. Имеем $p'(y) = e^{-y} - 1$, и точка $y = 0$ является для $p(y)$ единственной точкой экстремума. Так как $p''(0) = -1$, то этот экстремум является максимумом. Так как $p(0) = 0$, то $p(y) \le 0$ при всех значениях y. ■

Доказательство теоремы: Рассмотрим функцию

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{k=2,\ a_k \neq 0}^{\infty} a_k x^k \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2^k |a_k| x^2}\right)\right) \tag{6}$$

Во-первых, покажем, что ряд (6) равномерно сходится при $x \in [-1; 1]$. Действительно, по лемме, справедливо соотношение

$$\left| a_k x^k \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2^k |a_k| x^2}\right)\right)\right| \le \left| a_k x^k \cdot \frac{1}{2^k |a_k| x^2}\right| \le \frac{|x|^{k-2}}{2^k}$$

Таким образом, при $x \in [-1; 1]$ каждый k-й член ряда (6) мажорируется по модулю величиной $1/2^k$, а ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд (6) равномерно сходится на отрезке $[-1; 1]$. Так как все члены ряда (6) - непрерывные функции, то его сумма $f(x)$ является непрерывной на отрезке $[-1; 1]$.

Во-вторых, покажем, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ является асимптотическим к $f(x)$ при $x \to 0$, то есть

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = O(|x|^{n+1}) \tag{7}$$

Имеем

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \sum_{k=2,\ a_k \neq 0}^{\infty} a_k x^k \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2^k |a_k| x^2}\right)\right) -$$

$$- \left(a_0 + a_1 x + \sum_{k=2,\ a_k \neq 0}^{n} a_k x^k\right) =$$

$$= a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} - \Sigma_1(x) + \Sigma_2(x) \qquad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(x) &= \sum_{k=2,\ a_k\neq 0}^{n+2} a_k x^k \ \exp\left(-\frac{1}{2^k|a_k|x^2}\right) \\
\Sigma_2(x) &= \sum_{k=n+3,\ a_k\neq 0}^{\infty} a_k x^k \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2^k|a_k|x^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Первые два члена в (8) - члены порядка $O(|x|^{n+1})$. Далее, очевидно $\Sigma_1(x) = O(|x|^m)$, $x \to 0$ вообще для любого $m > 0$. Для $\Sigma_2(x)$ справедлива оценка

$$|\Sigma_2(x)| \leq \sum_{k=n+3}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{2^k} = \frac{|x|^{n+1}}{2^{n+2}(2-|x|)}$$

то есть $\Sigma_2(x) = O(|x|^{n+1})$, $x \to 0$. Таким образом, все члены в правой части (8) имеют порядок $O(|x|^{n+1})$. Теорема доказана. ■

6. Действия с асимптотическими рядами

С асимптотическими рядами можно производить действия, аналогичные действиям со сходящимися рядами. Их можно складывать, умножать, делить, и почленно интегрировать. Сформулируем и докажем соответствующие теоремы.

Теорема 0.3 *(о линейной комбинации асимптотических рядов) Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ - калибровочная последовательность при $x \to a$ и*

$$f(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi_k(x), \quad g(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k\varphi_k(x), \quad x \to a.$$

Тогда линейная комбинация $h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ также разлагается в асимптотический ряд при $x \to a$ и

$$h(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (c_1 a_k + c_2 b_k)\varphi_k(x), \quad x \to a.$$

Доказательство. В силу определения асимптотического ряда для любого n выполняются равенства

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) + o(\varphi_n(x)), \quad x \to a \\ g(x) &= \sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k(x) + o(\varphi_n(x)), \quad x \to a \end{aligned}$$

Следовательно,

$$h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x) = \sum_{k=1}^{n}(c_1 a_k + c_2 b_k)\varphi_k(x) + o(\varphi_n(x)), \quad x \to a$$

что и требовалось доказать. ■

Теоремы о возможности умножении, делении и почленном интегрировании асимптотических рядов в случае произвольной системы калибровочных функций содержат довольно громоздкие выкладки. Поэтому мы ограничимся соответствующими утверждениями для случая калибровочной системы степенных функций $\{1, x, x^2, \ldots\}$ при $x \to 0$.

Теорема 0.4 *(об умножении асимптотических рядов) Пусть*

$$f(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad g(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad x \to 0.$$

Тогда функция $h(x) = f(x)g(x)$ также разлагается в асимптотический ряд при $x \to 0$ и

$$h(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad x \to 0.$$

причем коэффициенты c_k вычисляются путем формального перемножения многочленов: $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$

Доказательство. Для любого n имеем равенства

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o(x^n), \quad g(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k x^k + o(x^n), \quad x \to 0$$

Тогда

$$\begin{aligned}
h(x) &= f(x)g(x) = \\
&= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots + \\
&+ (a_0b_n + \ldots + a_nb_0)x^n + (a_1b_n + \ldots + a_nb_1)x^{n+1} + \ldots \\
&+ a_nb_nx^{2n} + \left(\sum_{k=0}^{n} a_kx^k\right) \cdot o(x^n) + \left(\sum_{k=0}^{n} b_kx^k\right) \cdot o(x^n) + \\
&+ o(x^n) \cdot o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} c_kx^k + o(x^n)
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

Теорема 0.5 *(о делении асимптотических рядов) Пусть*

$$f(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k, \quad g(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_kx^k, \quad x \to 0.$$

и $a_0 \neq 0$. *Тогда функция* $h(x) = f(x)/g(x)$ *также разлагается в асимптотический ряд при* $x \to 0$ *и*

$$h(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k, \quad x \to 0.$$

где c_k *- некоторые постоянные.*

Доказательство. Вследствие предыдущей теоремы достаточно доказать, что существует разложение в асимптотический ряд функции $1/f(x)$. Имеем

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_kx^k + o(x^n)} = \frac{1}{a_0(1 - z_n(x))}$$

причем

$$z_n(x) = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_kx^k + \beta_n(x) = O(x), \quad \beta_n(x) = o(x^n).$$

Так как $z_n(x) = O(x)$, то при малых x справедливо разложение по формуле Тейлора

$$\frac{1}{1 - z_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} (z_n(x))^k + O((z_n(x))^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (z_n(x))^k + O(x^{n+1})$$

Раскроем скобки в выражениях $(z_n(x))^k$, сгруппируем одинаковые степени x и учтем, что степени $\beta_n(x)$ также являются величинами малости $o(x^n)$. Тем самым определятся коэффициенты c_k, при которых

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n). \quad \blacksquare$$

Теорема 0.6 *(об интегрировании асимптотических рядов) Пусть $f(x)$ определена и интегрируема по Риману на отрезке $[0; A]$ и при $x \to 0$ разлагается в асимптотический ряд*

$$f(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \to 0.$$

Тогда функция $h(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi$ также разлагается в асимптотический ряд при $x \to 0$ и

$$h(x) \overset{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad x \to 0.$$

Доказательство. Для $f(x)$ при любом натуральном n справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \beta_n(x)$$

с некоторой функцией $\beta_n(x) = o(x^n)$, $x \to 0$. Проинтегрируем это равенство от 0 до x:

$$\int_0^x f(s)\, ds = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \beta_n(s)\, ds$$

причем так как $\beta_n(x) = o(x^n)$, то $\int_0^x \beta_n(s)\, ds = o(x^{n+1})$, что и требовалось доказать. ■

Дифференцировать почленно асимптотические ряды, вообще говоря, *нельзя.*

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x) = e^{-x} \sin(e^x)$$

Разложим эту функцию в асимптотический ряд по калибровочной системе $\{1, 1/x, 1/x^2, \ldots\}$ при $x \to +\infty$. В силу того, что экспонента убывает быстрее любой степени, а синус - ограниченная функция, то все коэффициенты разложения являются нулями

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot \left(\frac{1}{x^k}\right)$$

Вместе с тем производная $f'(x) = \cos e^x - e^{-x} \sin e^x$ на бесконечности осциллирует, не стремится к нулю и, вообще, не имеет асимптотического разложения по рассматриваемой калибровочной системе.

Вместе с тем дифференцирование асимптотических рядов, как правило, возможно. Для обоснования законности такого дифференцирования часто привлекают следующие аргументы. Продифференцируем формально функцию $f(x)$ и ее асимптотический ряд по некоторой калибровочной системе. Пусть $f'(x)$ - непрерывная функция, и можно некоторым способом показать, что ее разложение в асимптотический ряд по этой калибровочной системе *существует.* Тогда, интегрируя почленно это разложение, по теореме об интегрировании асимптотических рядов, мы приходим к разложению для функции $f(x)$, которое для заданной калибровочной системы единственно. Таким образом, почленное дифференцирование ряда для функции $f(x)$ было законно.

В некотором смысле ситуация напоминает правила дифференцирования сходящихся рядов, когда возможность дифференцирования обосновывается *a posteriori*, используя то, что результатом дифференцирования оказался равномерно сходящийся ряд.