

## Лабораторная работа №2. Быстрое преобразование Фурье. Вычисление дискретной свертки

### Цель работы

Изучить алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) и убедиться в ускорении вычислений при его использования.

### Теоретические сведения

Дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) или дискретным спектром вектора  $\mathbf{X} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  называется вектор  $\mathbf{Y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ , компоненты которого определяются формулой

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-\frac{2\pi i}{N} kj}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (1)$$

Вектор  $\mathbf{X} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  можно восстановить по дискретному спектру при помощи обратного ДПФ (ОДПФ):

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{\frac{2\pi i}{N} kj}, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (2)$$

Вектор  $\mathbf{X} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  обычно представляет собой  $N$  последовательных отсчетов  $x_j = x(j\Delta t)$  аналогового сигнала  $x(t)$ , тогда можно считать, что последовательность  $\mathbf{Y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$  с некоторой точностью представляет последовательные отсчеты  $y_k = y(k\Delta \nu)$  в частотной области. Таким образом, ДПФ является аппроксимацией непрерывного преобразования Фурье.

При нахождении ДПФ непосредственно по формуле для вычисления каждого из  $N$  коэффициентов  $y_k$  требуется около  $N$  комплексных сложений с умножениями, следовательно, для реализации ДПФ требуется около  $N^2$  комплексных умножений со сложениями, т.е. алгоритм вычисления имеет сложность  $O(N^2)$ . Такой способ вычисления ДПФ не является эффективным и не представляет практического интереса.

### Дискретная свертка

Наряду с ДПФ, одной из стандартных и наиболее распространенных вычислительных процедур в цифровой обработке сигналов является *дискретная свертка*. С ее помощью вычисляются корреляционная и автокорреляционная функции, производится цифровая фильтрация сигналов. Многие модели сигнальных процессоров (DSP) специально оптимизируются для эффективного выполнения операции свертки.

Дискретной сверткой последовательностей  $x(n)$  и  $y(n)$  называется последовательность  $u(n)$ , обозначаемая  $u(n) = x(n) * y(n)$ , элементы которой находятся по формуле:

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)y(n-k). \quad (3)$$

При этом имеет место равенство

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^n x(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^n y(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)x(n-k),$$

так как считаем, что при  $n < 0$   $x(n) = y(n) = 0$  и, следовательно,  $u(n) = 0$ .

### Вычисление свертки с помощью БПФ

Пусть  $M$  – длина последовательности  $x(n)$ , т.е.  $x(n) = 0$  при  $n \geq M$ , а  $L$  – длина последовательности  $y(n)$ :  $y(n) = 0$ ,  $n \geq L$ . Дискретная свертка этих

последовательностей  $y(n) = \sum_{m=0}^n x(m)y(n-m) = \sum_{m=0}^n x(m)y(n-m)$  будет иметь длину

$M + L - 1$ , так как для  $n \geq M + L - 1$  приведенная формула свертки дает  $u(n) = 0$ , а для  $n = M + L - 2$  в общем случае  $y(M + L - 2) = x(M - 1)y(L - 1) \neq 0$ .

Использование БПФ для вычисления свертки основано на том, что ДПФ свертки последовательностей есть покомпонентное произведение ДПФ соответствующих последовательностей. Рассмотрим процедуру нахождения свертки с помощью БПФ.

Добавлением нулевых отсчетов сформируем векторы одинаковой размерности  $2N \geq \max(2L, 2M)$  (обычно  $N = 2^n$ ):

$$X = \left( \underbrace{x(0), x(1), \dots, x(M-1), 0, 0, \dots, 0}_{2N} \right), \quad Y = \left( \underbrace{y(0), y(1), \dots, y(L-1), 0, 0, \dots, 0}_{2N} \right)$$

Затем над этими векторами выполним следующие действия.

1. БПФ:  $X \rightarrow \hat{X}$  и  $Y \rightarrow \hat{Y}$ .
2. Покомпонентное перемножение полученных дискретных спектров:  

$$\hat{U} = \sqrt{2N}(\hat{x}_0\hat{y}_0, \dots, \hat{x}_{2N-1}\hat{y}_{2N-1}).$$

3. Обратное БПФ:  $\hat{U} \rightarrow U$ .

В полученном векторе размерности  $2N$  первые  $M + L - 1$  компонент представляют собой свертку  $u(n)$  последовательностей  $x(n)$  и  $y(n)$ , а остальные компоненты – нулевые:

$$U = \left( \underbrace{u(0), u(1), \dots, u(L-1)}_L, \underbrace{u(L), \dots, u(L+M-2)}_{M-1}, 0, 0, \dots, 0 \right).$$

Использование описанной процедуры в вычислительном плане может быть более эффективно, чем непосредственная реализация формулы свертки (3).

### Задание

1. Реализовать на С или С++ алгоритмы непосредственного вычисления ДПФ и ОДПФ по формулам (1) и (2) для комплексного входного сигнала с двойной точностью (*double*). Входные данные загружать из текстового файла (разделитель – пробел), сгенерированного, например, в MATLAB.
2. Реализовать на С или С++ алгоритмы прямого и обратного БПФ для комплексного входного сигнала длиной  $2^n$ ,  $n$  – любое натуральное число:
  - а) с прореживанием по времени и двоично-инверсными перестановками (вариант 1);
  - б) с прореживанием по времени без двоично-инверсных перестановок (вариант 2);
  - в) с прореживанием по частоте и двоично-инверсными перестановками (вариант 3);
  - г) с прореживанием по частоте без двоично-инверсных перестановок (вариант 4);
3. Убедиться в корректности работы алгоритмов:
  - а) проверить выполнение равенства  $X = \text{ОДПФ}(\text{ДПФ}(X))$ , а также равенства  $X = \text{ОБПФ}(\text{БПФ}(X))$ ;
  - б) сравнить результаты ДПФ( $X$ ) и БПФ( $X$ );
  - в) сравнить результаты работы реализованного алгоритма, например, с результатами процедуры *fft*, встроенной в MATLAB.

(рекомендуется для сравнения использовать значение ошибки)
4. Проанализировать зависимость времени выполнения БПФ и непосредственного вычисления ДПФ от длины  $N$  преобразования.
5. Реализовать на С или С++ процедуру прямого вычисления свертки двух последовательностей по формуле (3). Входные данные загружать из текстового файла (разделитель – пробел), сгенерированного, например, в MATLAB.
6. Реализовать процедуру нахождения дискретной свертки, основанную на БПФ. При вычислении БПФ использовать результаты п. 2 задания.

7. Убедиться в корректности работы процедуры из п. 5 и п. 6 задания, сравнив полученные результаты с результатами работы встроенной функций MATLAB *conv*.

*(рекомендуется для сравнения использовать значение ошибки)*

8. Сравнить производительность алгоритмов вычисления свертки по определению (3) и с помощью БПФ в двух случаях: когда размер одной из последовательностей фиксирован, и когда меняются длины обеих последовательностей.

### **Контрольные вопросы**

1. Дать определение ДПФ и ОДПФ.
2. Перечислить основные свойства ДПФ.
3. Что такое матрица ДПФ  $\mathbf{W}$ ? Доказать унитарность матрицы ДПФ.
4. Что такое факторизация матрицы ДПФ?
5. Как выглядит матрица  $\mathbf{W}_3$  для 8-точечного преобразования?
6. Как можно обобщить БПФ на векторы произвольной длины, т.е.  $N$  не является степенью 2?
7. Как можно дополнительно ускорить рассмотренные алгоритмы БПФ?
8. Что такое дискретная свертка последовательностей?
9. Доказать, что ДПФ свертки последовательностей есть покомпонентное произведение ДПФ этих последовательностей.

### **Литература**

1. Умняшкин С.В. Основы теории цифровой обработки сигналов: учебное пособие. М.: Техносфера, 2021. – 550 с.