Matrix Multiplication

Bernd Schröder

Definition

Matrix Multiplication (Informally)

1. Matrix addition is componentwise and so is multiplication with a scalar.

Matrix Multiplication (Informally)

- 1. Matrix addition is componentwise and so is multiplication with a scalar.
- 2. Matrix multiplication is more complicated.

Matrix Multiplication (Informally)

- 1. Matrix addition is componentwise and so is multiplication with a scalar.
- 2. Matrix multiplication is more complicated.
- 3. Take 1: To multiply an $m \times n$ matrix with a vector with n rows, for each row of the matrix, go along the row, multiply each entry with the corresponding entry of the vector. Add these products and enter the result in the corresponding row of the resulting vector.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & 2 & 3 \\
1 & 4 & -1 \\
3 & 2 & 4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\
4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4$$

Definition

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Definition

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \end{bmatrix} & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ \hline 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ \boxed{3} & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{3} \\ -1 & 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ \begin{bmatrix} \overline{3} \end{bmatrix} & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \overline{3} \end{bmatrix} \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{3} \\ \overline{3} \end{bmatrix}$$

Second Example

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \end{bmatrix} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & \boxed{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & \boxed{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \boxed{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

Definition

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & \boxed{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \boxed{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & \boxed{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \boxed{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -22 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Matrix Multiplication (Formally)

Informal Definition

Matrix Multiplication (Formally)

1. Let m, n, p be positive integers. For the real $m \times n$ matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{jk} \end{pmatrix}_{\substack{j=1,\dots,m\\k=1,\dots,n}}$$
 and the real $p \times m$ matrix

 $B = (b_{ij})_{i=1,...,p}$, we define the **product** to be the real j = 1,...,m

$$p \times n$$
 matrix $BA := \left(\sum_{j=1}^m b_{ij} a_{jk}\right) \left. \begin{array}{c} i = 1, \dots, p \\ k = 1, \dots, n \end{array} \right.$

Matrix Multiplication (Formally)

1. Let m, n, p be positive integers. For the real $m \times n$ matrix $A = (a_{jk})_{j=1,...,m}$ and the real $p \times m$ matrix k = 1,...,n $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,...,p\\j=1,...,m}}$, we define the **product** to be the real

$$j = 1,...,m$$

$$p \times n \text{ matrix } BA := \left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jk}\right) \quad i = 1,...,p$$

$$k = 1,...,n$$

2. Informally, the right matrix *A* is a collection of column vectors. We multiply the left matrix *B* with each of the columns of *A* and report the results as columns next to each other.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} & 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{0} & \frac{2}{1} \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{1} & \frac{1}{1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3 / \sqrt{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad -3 \\ 2 \\ 1 \quad -4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Informal Definition

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
\boxed{3} & -\overline{1} & \overline{2} \\
-\overline{4} & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
2 & 1 & \overline{-3} \\
7 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
1 & \begin{bmatrix} -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 6 \\
1 & 6
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ 1 & 6 & -17 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ -7 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & -1 & 2 \\
-4 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
2 & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & -3 \\
7 & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & 0 \\
1 & \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} & -4
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 6 & -17 \\
-7 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & -1 & 2 \\
-4 & 0 & 1 \\
-2 & 2 & 3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
2 & 1 & -3 \\
7 & 1 & 0 \\
1 & 2 & -4
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 6 & -17 \\
-7 & -2
\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -3$$

$$=\begin{pmatrix} 1\\-7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ -7 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ -7 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definition

$$6 -1$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -17 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ -7 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & -1 & 2 \\
-4 & 0 & 1 \\
-2 & 2 & 3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
2 \\
7 \\
1 & 1 & 0 \\
2 & -4
\end{pmatrix} =
\begin{pmatrix}
1 & 6 & -17 \\
-7 & -2 & 8
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ -7 & -2 & 8 \\ 13 & & & \end{pmatrix}$$

Second Example

Informal Definition

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ -7 & -2 & 8 \\ 13 & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & -3 \\ 7 & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ -7 & -2 & 8 \\ 13 & & & \end{pmatrix}$$

Informal Definition

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \begin{bmatrix} \bar{1} \\ 1 \end{bmatrix} & -3 \\ 7 & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 1 & \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ -7 & -2 & 8 \\ 13 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Informal Definition

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ -7 & -2 & 8 \\ 13 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ -7 & -2 & 8 \\ 13 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Informal Definition

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -17 \\ -7 & -2 & 8 \\ 13 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$