Chapitre 2

Calcul Intégral

1. Intégration par parties

Définition 1.1. Intégration par parties ou IPP

Soient $f, g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{C})$ et $a, b \in I$, nous avons

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [fg]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

⊠

Ce sont les fonctions f et g à l'intérieur du crochet qui doivent être de classe $\mathcal{C}^1$, pas les fonctions f' et g qu'on a au départ dans l'intégrale de gauche.

Démonstration

Comme f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, les fonctions $(fg)'$, $f'g$ et fg' sont continues, donc d'après le théorème fondamental du calcul intégral et par linéarité de l'intégrale nous avons

$$[fg]_a^b = \int_a^b (fg)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

■

Exemple

$$\int_0^\pi t\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \overset{f'(t)}{\boxed{\cos t}} \cdot \overset{g(t)}{\boxed{t}}\,\mathrm{d}t = \overset{[fg]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x}{\boxed{[t\sin t]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t}} = -\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = -[-\cos t]_{t=0}^{t=\pi} = -2$$

⊠

On peut faire des intégrations par parties sur des intégrales sans borne inférieure. La formule prend dans ce cas la forme suivante :

$$\boxed{\int^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(x)g(x) - \int^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t}$$

2. Changement de variable

Théorème 2.1. Changement de variable

Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R})$ à valeurs dans J et $f \in \mathcal{C}(J, \mathbf{C})$ ainsi que $a, b \in I$, nous avons

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 2.2. Utilisation de l'exponentielle complexe

Calculer grâce à l'exponentielle complexe l'intégrale

$$\int_0^\pi e^t \sin(3t)\,\mathrm{d}t$$

Correction

Nous avons

$$\sin(3t) = \frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^t \sin(3t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi e^t \left[\frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i}\right]\mathrm{d}t &= \int_0^\pi \frac{e^{t+3it} - e^{t-3it}}{2i}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \frac{e^{t+3it}}{2i}\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi \frac{e^{t-3it}}{2i}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i}\left[\int_0^\pi e^{t+3it}\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi e^{t-3it}\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left(\left[\frac{e^{t(1+3i)}}{1+3i}\right]_0^\pi - \left[\frac{e^{t(1-3i)}}{1-3i}\right]_0^\pi\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1+e^\pi}{1-3i} - \frac{1+e^\pi}{1+3i}\right) \\
&= \frac{3}{10}(1+e^\pi) \simeq 7.24
\end{aligned}$$