Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Marc Zschiegner

2. Übungsblatt

Beispielaufgabe. *Versuchen Sie die folgende Aufgabe möglichst selbstständig zu lösen. Helfen Sie sich gegenseitig im StudIP-Forum Ihrer Übungsgruppe. Diese Beispielaufgabe wird am* ***06. bzw. 07.05.2020*** *in den Übungsgruppen besprochen. Zu ausgewählten Aufgaben werden Lösungsvideos auf Amigo hochgeladen.*

A Eine Autofabrik baut einen Typ A zu 30000 € und einen Typ B zu 20000 €. Je Arbeitstag können entweder 15 Autos vom Typ A oder 30 Autos vom Typ B hergestellt werden. Die Firma rechnet mit einem jährlichen Absatz von höchstens 6000 Autos.
Wie viele Autos von jedem Typ wird die Firma im Laufe eines Jahres (höchstens 240 Arbeitstage) herstellen, um möglichst hohe Gesamteinnahmen zu erzielen? [*Tipp:* Nehmen Sie an, dass Typ A an x Tagen, Typ B an y Tagen gebaut wird.]

Hausaufgaben. *Berabeiten Sie die folgenden Aufgaben möglichst selbstständig. Helfen Sie sich gegenseitig im StudIP-Forum Ihrer Übungsgruppe. Abgabe der HA:*
- Schreiben Sie die Lösungen aller drei Aufgaben in eine einzige, max. 10 MB große pdf-Datei „Vorname_Nachname_ BlattNr.pdf“ (z .B. „Max_Mustermann_02.pdf“).
- Laden Sie diese Datei bis zum ***12.05.2020, 22:00 Uhr*** *in den Ordner „Abgaben der Übungsblätter“ Ihrer StudIP-Übungsgruppe hoch.*

1 In einer Fabrik werden zwei verschiedene Sorten von Kabeln hergestellt und für 150 € (Typ A) bzw. 100 € (Typ B) verkauft. Für Kabel des Typ A benötigt man 16 kg Plastik und 4 kg Kupfer. Für Kabel des Typ B benötigt man 6 kg Plastik und 12 kg Kupfer. Die produzierte Menge von B darf nicht größer sein als die doppelte Menge von A. Außerdem beträgt der Materialvorrat derzeit nur 252 kg Plastik und 168 kg Kupfer. Welche Mengen der beiden Kabelsorten maximieren unter Einhaltung der Nebenbedingungen den Umsatz der Firma? [5 P]

2 Aus Gemüse (G) und Fleisch (F), die die Mineralien M1, M2, M3 und M4 enthalten, soll ein Fertiggericht hergestellt werden, das möglichst kostengünstig sein muss. Gleichzeitig müssen Diätanforderungen in Form von Mindestmengen der Mineralstoffe erfüllt werden, die mit einer Mahlzeit aufgenommen werden. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Inhaltsstoffe: [6 P]

	Menge der Mineralien [mg je 100g]		**Mindestmengen an Mineralien in den Rationen [mg]**
	G	**F**	
M1	2	1	12
M2	1	2	15
M3	1	0	2
M4	0	1	3
Kosten [Euro je 100 g]	3	4	

3 Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 0{,}5x + \quad y &= 4 \\ -0{,}5x + 0{,}9y &= 0{,}64 \end{aligned}$$

mit dem folgenden **Iterationsverfahren**.

Startwerte: Wir wählen zwei (beliebige) Startwerte: $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$.

1. Ausgleichsrechnung: Wir setzen diese Startwerte in die erste Zeile des LGS ein. Es ergibt sich der Istwert

$$i = 0{,}5 \cdot \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_.$$

Wir bilden die Differenz d aus Sollwert s = 4 und Istwert i:

$$d = s - i = 4 - \_\_\_ = \_\_\_.$$

Diese Differenz soll auf die Variablen x und y so verteilt werden, dass die erste Gleichung erfüllt wird. Dazu wird mit Hilfe der Koeffizienten $a_1 = 0{,}5$ und $a_2 = 1$ der ersten Zeile gewichtet. Für den Zuschlag für x wird die Differenz d mit $a_1/(a_1^2 + a_2^2)$ multipliziert, für den Zuschlag für y mit dem Faktor $a_2/(a_1^2 + a_2^2)$. Somit ergeben sich die neuen x- und y-Werte:

$$x_1 = x_0 + d \cdot \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} = 1 + \_\_\_ \cdot \_\_\_ = \_\_\_$$

$$y_1 = y_0 + d \cdot \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} = 1 + \_\_\_ \cdot \_\_\_ = \_\_\_$$

Überprüfen Sie, dass diese neuen Werte die erste Gleichung genau erfüllen.

2. Ausgleichsrechnung: Wir setzen nun die *neuen* Werte in die *zweite* Gleichung des LGS ein und gehen analog wie oben vor. Als Istwert ergibt sich

$$i = -0{,}5 \cdot \_\_\_ + 0{,}9 \cdot \_\_\_ = \_\_\_.$$

Die Differenz d aus Sollwert s = 0,64 und Istwert i ist

$$d = s - i = 0{,}64 - \_\_\_ = \_\_\_.$$

Nun gewichten wir mit den Koeffizienten $b_1 = -0{,}5$ und $b_2 = 0{,}9$ der *zweiten* Zeile. Wir verteilen die Differenz auf x und y, so dass die zweite Gleichung erfüllt ist. Es ergeben sich die neuen x- und y-Werte:

$$x_2 = x_1 + d \cdot \frac{b_1}{b_1^2 + b_2^2} = \_\_\_ + \_\_\_ \cdot \_\_\_ = \_\_\_$$

$$y_2 = y_1 + d \cdot \frac{b_2}{b_1^2 + b_2^2} = \_\_\_ + \_\_\_ \cdot \_\_\_ = \_\_\_$$

Iteration und Konvergenz: Nun setzt man das Verfahren mit diesen neuen Werten wieder mit der ersten Gleichung fort, usw. Die Punkte (x_n, y_n) konvergieren dann gegen die Lösung des LGS. [*Hinweis:* Sie brauchen keine weiteren Punkte ausrechnen!]

Veranschaulichung: Zeichnen Sie die Gleichungen des LGS als Geraden in ein Koordinatensystem. Zeichnen Sie außerdem die oben berechneten Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ein. Machen Sie sich anschaulich klar, wie das Iterationsverfahren arbeitet [*Tipp:* „Senkrechte Projektion“]. [4 P]

Worüber Mathematiker lachen