Nachtrag: Serie 5 Aufgabe 1
Thema: Matrix zu SWAP bestimmen

Wir diskutieren zwei Möglichkeiten:

1. Möglichkeit Wir verwenden das durch Matrizen beschriebene lineare Abbildungen bereits vollständig durch ihre Wirkung auf der Basis festgelegt sind. Das kennen wir bereits aus der Betrachtung von $U_f : |x,y\rangle \mapsto |x, y \oplus f(x)\rangle$ (vgl. Vorlesung).
Überlege wie SWAP auf der Basis wirkt:
Da SWAP auf dem (Tensor-)Produkt zweier Qubits operiert sind wir im $\mathbb{C}^2$ (vierdimensional!) mit der (Standard) Basis

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle|0\rangle \quad , \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle \otimes |1\rangle = |0\rangle|1\rangle ,$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = |1\rangle \otimes |0\rangle = |1\rangle|0\rangle \quad , \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = |1\rangle \otimes |1\rangle = |1\rangle|1\rangle .$$

Wir untersuchen gemäß $SWAP : |\alpha\rangle|\beta\rangle \mapsto |\beta\rangle|\alpha\rangle$
die Wirkung und stellen die Matrix A_{SWAP} auf, die die Abbildung auf der Basis beschreibt (vgl. Teil (i) der Aufgabe)

„Vorteil": Amplituden müssen nicht berücksichtigt werden und der Übersetzungsschritt in Vektoren / Matrizen „entfällt", da dies bereits in der Notation enthalten ist.

In Teil (ii) werden Amplituden berücksichtigt wenn wir zeigen das SWAP auf dem (Tensor) Produkt beliebiger Zustände die Reihenfolge der Faktoren vertauscht

2. Möglichkeit: Betrachte direkt das (Tensor) Produkt zweier beliebiger Zustände und bestimme aus der Forderung was die Abbildung leisten soll eine entsprechende Abbildungsmatrix

Mit $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ schreiben wir zuerst die entsprechenden Vektoren bzw. deren Tensorprodukte:

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}\right) \otimes \left(\begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \end{pmatrix}$$

soll abgebildet werden auf

$$(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\alpha \\ \gamma\beta \\ \delta\alpha \\ \delta\beta \end{pmatrix}$$

Es ist also eine Matrix zu bestimmen, die

$$\begin{pmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \beta\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\delta \end{pmatrix}$$

leistet. Die Matrix kann man direkt ablesen (Zeile mal Spalte):

$$A_{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$