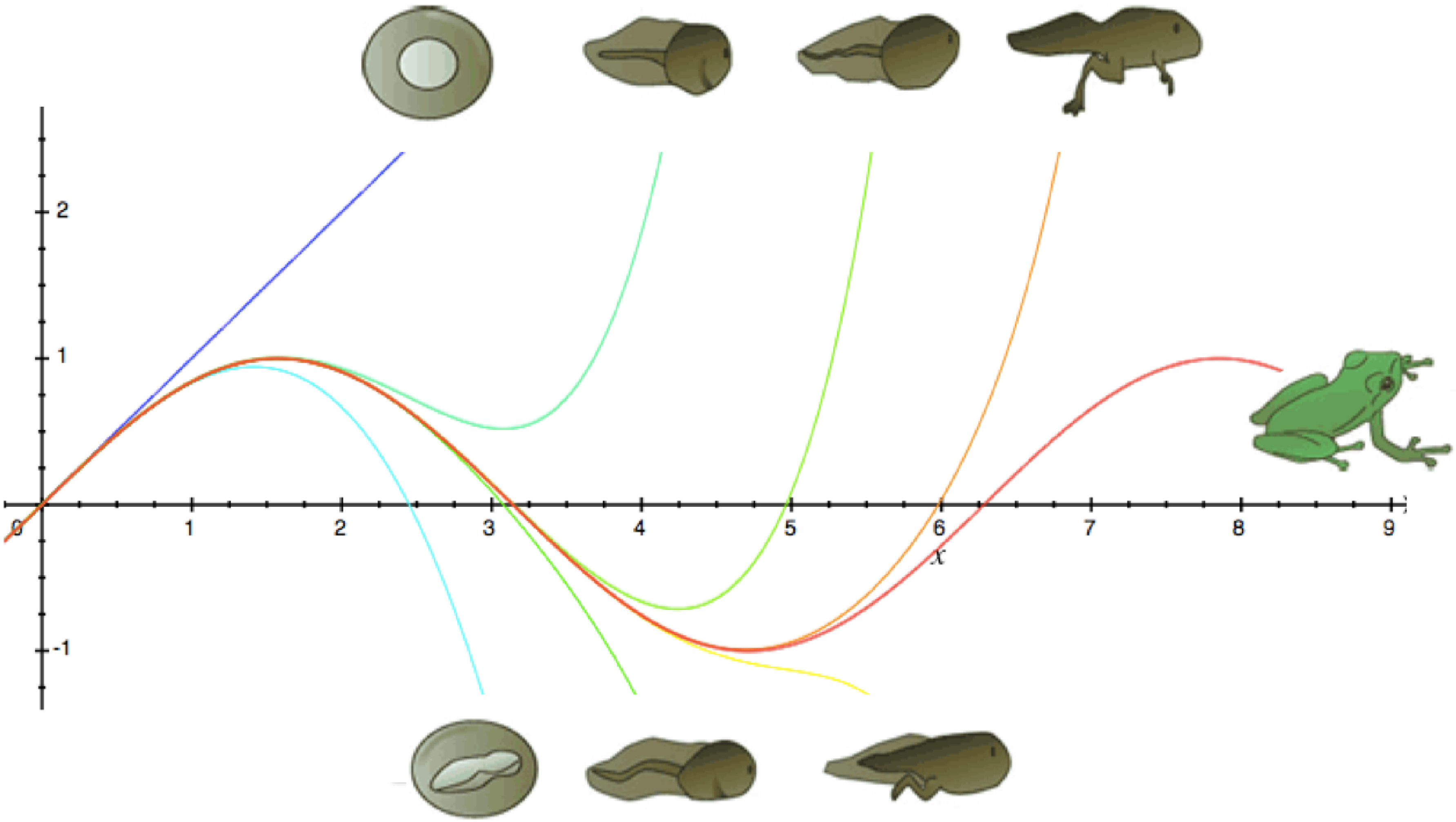
Hochschule **RheinMain**
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

Kapitel 4

Approximation und Interpolation

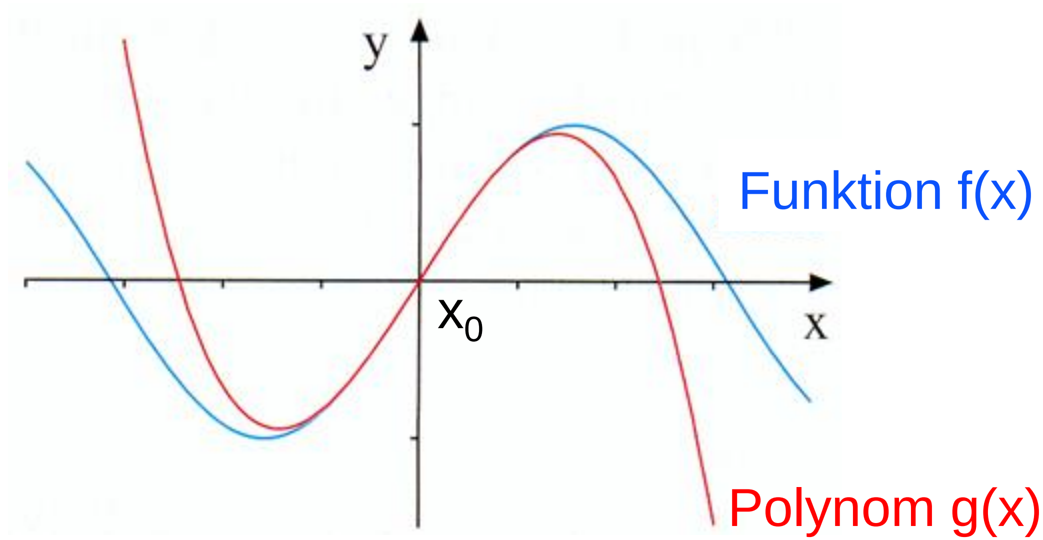
Inhalt

4.1 Approximation durch Polynome



Approximation durch Polynome

Ziel: Eine Funktion f(x) soll an einer Stelle x_0 (**Entwicklungsstelle**) und deren Umgebung möglichst gut durch ein Polynom g(x) (**Taylorpolynom**) angenähert (**approximiert**) werden.



Taylor-Approximation

Taylors Idee: An der Entwicklungsstelle x_0 soll das Polynom g(x) nicht nur denselben Funktionswert haben wie die Funktion f(x), sondern auch in *möglichst vielen* Ableitungen übereinstimmen:

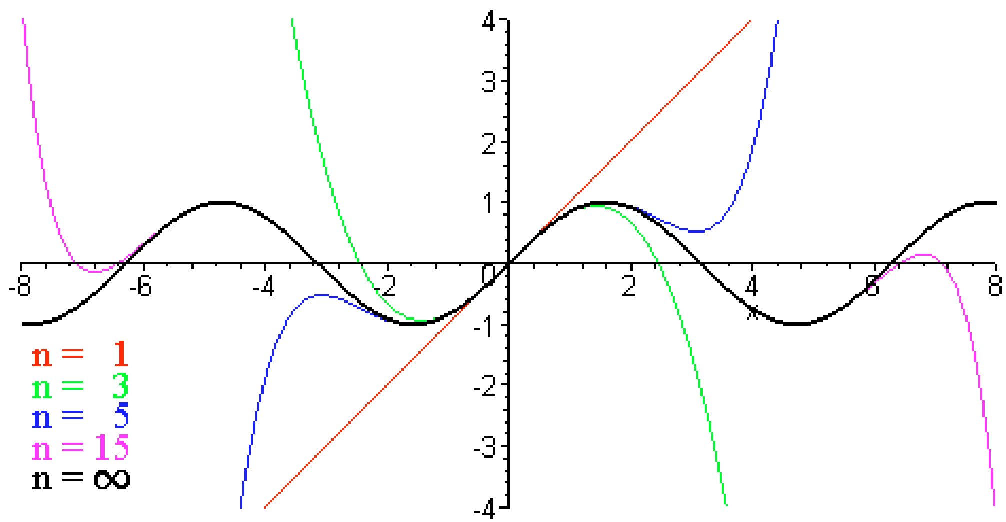
$g(x_0) = f(x_0)$

$g'(x_0) = f'(x_0)$

$g''(x_0) = f''(x_0)$

$g'''(x_0) = f'''(x_0)$

usw.



Je mehr Ableitungen übereinstimmen, desto besser ist die Approximation von g(x) an f(x).

Lineare Approximation von sin(x)

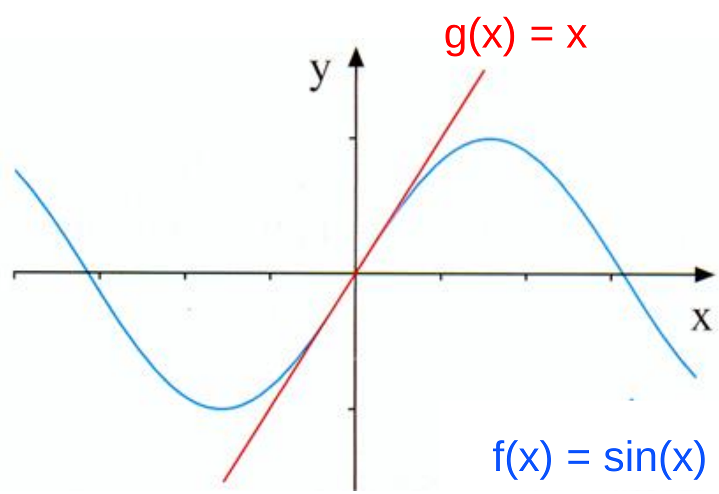
Beispiel: Approximation von $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch eine *lineare* Funktion $g(x) = m \cdot x + b$. Für g(x) soll gelten:

1. Übereinstimmung der Funktionswerte:

$$g(0) = f(0) \quad \Rightarrow \quad m \cdot 0 + b = \sin(0)$$
$$\Rightarrow \quad b = 0$$

2. Übereinstimmung der 1. Ableitung:

$$g'(0) = f'(0) \quad \Rightarrow \quad m = \cos(0)$$
$$\Rightarrow \quad m = 1$$



Die gesuchte lineare Funktion lautet:

$g(x) = x$ (**Taylorpolynom 1. Ordnung**).

Kubische Approximation von sin(x)

Beispiel: Approximation von $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch ein Polynom *dritten Grades* $g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.

Ableitungen:

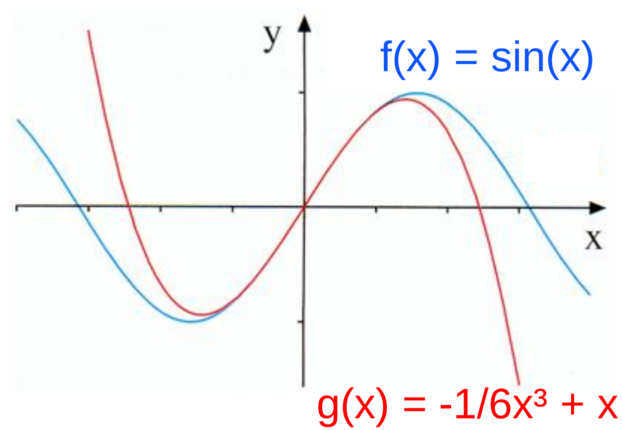
$g'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$	$f'(x) = \cos(x)$
$g''(x) = 6ax + 2b$	$f''(x) = -\sin(x)$
$g'''(x) = 6a$	$f'''(x) = -\cos(x)$

$g(0) = f(0) \Rightarrow d = \sin(0) = 0$

$g'(0) = f'(0) \Rightarrow c = \cos(0) = 1$

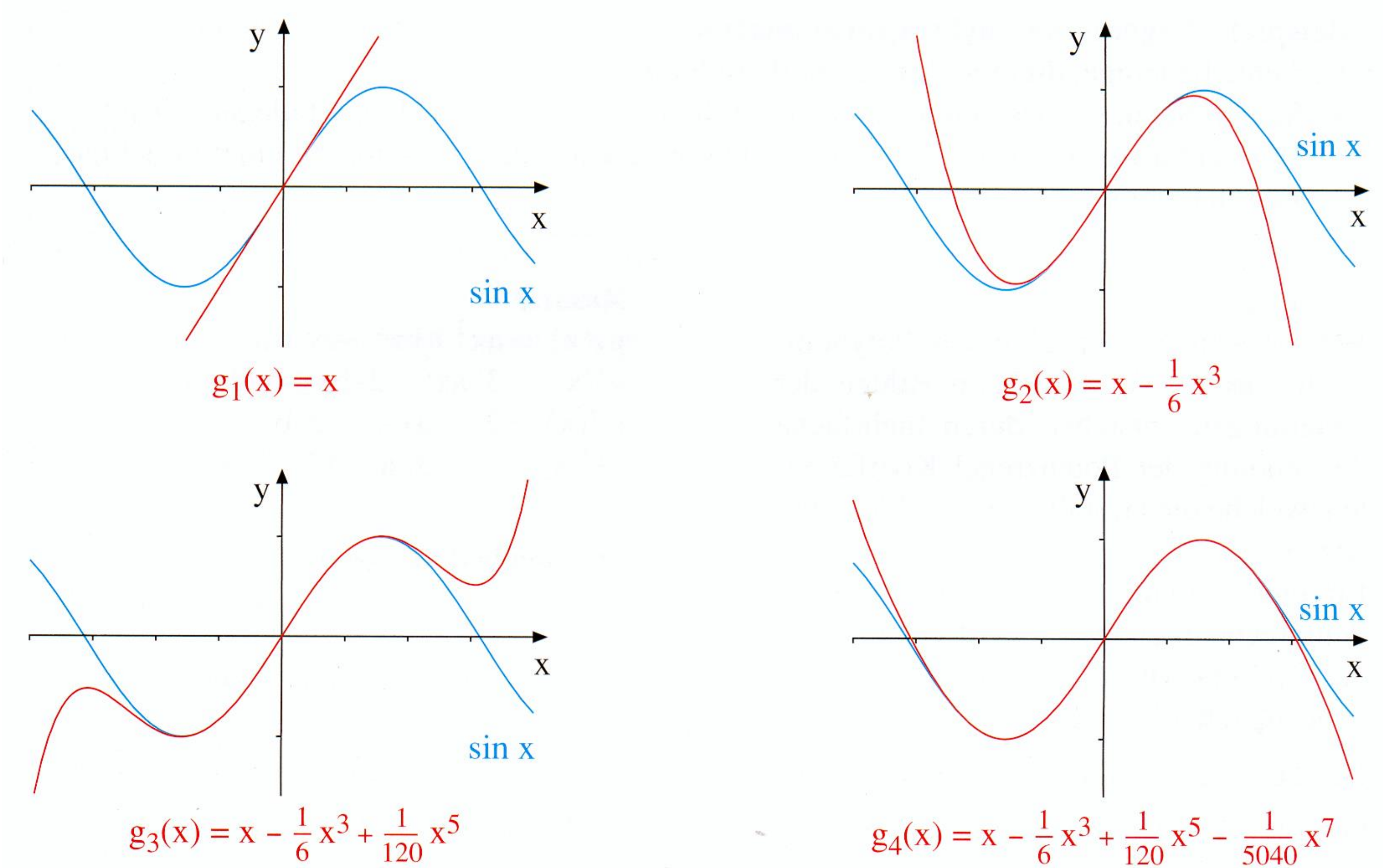
$g''(0) = f''(0) \Rightarrow 2b = -\sin(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

$g'''(0)=f'''(0) \Rightarrow 6a = -\cos(0) = -1 \Rightarrow a = -1/6$



Taylorpolynom 3. Ordnung: $g(x) = -1/6x^3 + x$.

Taylorpolynome der Ordnungen 1, 3, 5, 7 von sin(x)



In GeoGebra: TaylorReihe[sin(x), 0, 7]

Allgemeine Taylorpolynome

Sei f eine *beliebige*, dreimal differenzierbare Funktion. Das **Taylor-polynom dritter Ordnung** an der Stelle $x_0 = 0$ erhalten wir wie folgt.

Ansatz: $g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 3 \cdot ax^2 + 2 \cdot bx + 1 \cdot c,$

$g''(x) = 2 \cdot 3 \cdot ax + 1 \cdot 2 \cdot b,$

$g'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a$

$g(0) = f(0) \quad \Rightarrow d = f(0) \quad \Rightarrow d = f(0) / 0!$

$g'(0) = f'(0) \quad \Rightarrow 1 \cdot c = f'(0) \quad \Rightarrow c = f'(0) / 1!$

$g''(0) = f''(0) \Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot b = f''(0) \quad \Rightarrow b = f''(0) / 2!$

$g'''(0)=f'''(0) \Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a= f'''(0) \quad \Rightarrow a = f'''(0) / 3!$

Es ergibt sich: $g(x) = \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f(0)}{0!}$

Allgemeine Taylorpolynome

Dies lässt sich wie folgt verallgemeinern.

Sei f eine beliebige, an x_0 mindestens n mal differenzierbare Funktion.

Das **Taylorpolynom n-ter Ordnung** an der Stelle $x_0 = 0$ lautet

$$g(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f(0)}{0!}$$

Für eine beliebige Entwicklungsstelle x_0 führen wir eine Verschiebung um x_0 in x-Richtung durch. Es folgt:

Das **Taylorpolynom n-ter Ordnung an der Stelle x_0** lautet

$$g(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \ldots + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f(x_0)}{0!}$$

Beispiel

Beispiel: Taylorpolynom dritter Ordnung von $f(x) = \ln(x)$ an $x_0 = 1$.

Ableitungen: $f'(x) = 1/x \Rightarrow f'(1) = 1$

$f''(x) = -1/x^2 \Rightarrow f''(1) = -1$

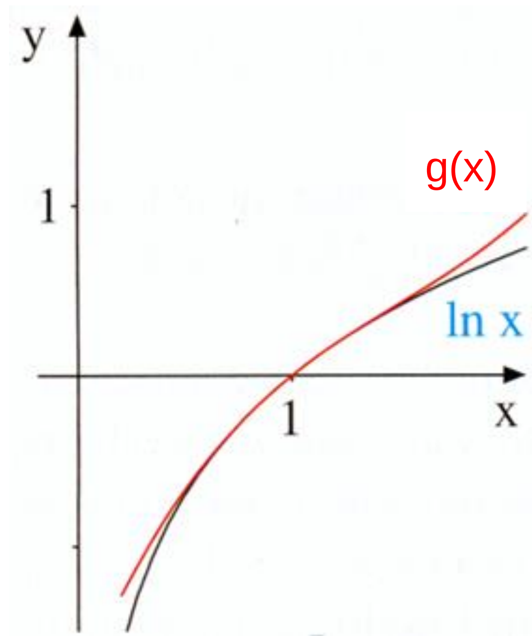
$f'''(x) = 2/x^3 \Rightarrow f'''(1) = 2$

$$g(x) = \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f(1)}{0!}$$

$$= \frac{2}{6}(x-1)^3 + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{0}{1}$$

$$= \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) + x - 1$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + 3x - \tfrac{11}{6}$$



Übung

Bestimmen Sie das Taylorpolynom n-ter Ordnung an der Stelle 0:

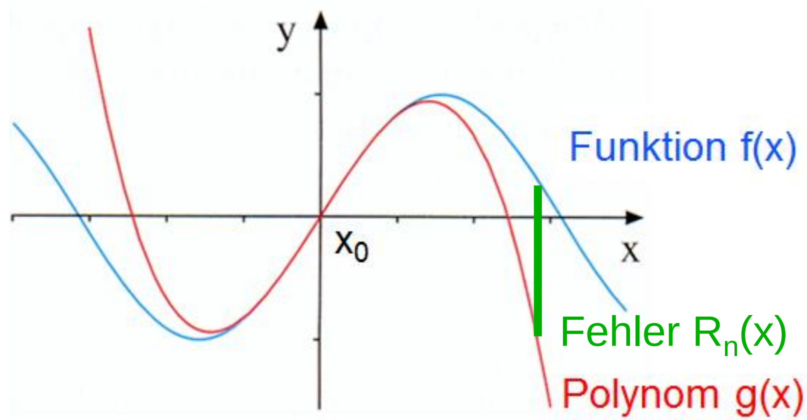
(a) $f(x) = e^x$

(b) $f(x) = \sin(x)$

Approximationsfehler

In der Praxis benötigt man eine Abschätzung für den **Approximationsfehler**

$$R_n(x) = f(x) - g(x).$$



Dieser Fehler heißt auch **Lagrange'sches Restglied**. Es gilt

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Dabei ist ξ eine Zahl zwischen x_0 und x, die i. A. nicht bekannt ist.

Potenzreihen

Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wir aus dem Taylorpolynom die **Taylorreihe**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

An den Stellen x, an denen das Restglied $R_n(x) = f(x) - g(x)$ gegen 0 konvergiert, konvergiert die Taylorreihe gegen die Funktion f.

Allgemein bezeichnet man Reihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

als **Potenzreihen** mit Koeffizienten a_k und Entwicklungsstelle x_0.

Konvergenz von Potenzreihen

1. Beispiel: Die **geometrische Reihe** konvergiert für jedes q mit $|q|<1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

(siehe Kapitel 1). Schreiben wir x statt q, so erhalten wir eine Potenzreihe, die für jedes x mit $|x| < 1$ konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

2. Beispiel: Die Taylorreihe der e-Funktion konvergiert für jedes $x \in \mathbf{R}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x.$$

(Beweis mit Quotientenkriterium, siehe Kapitel 1)

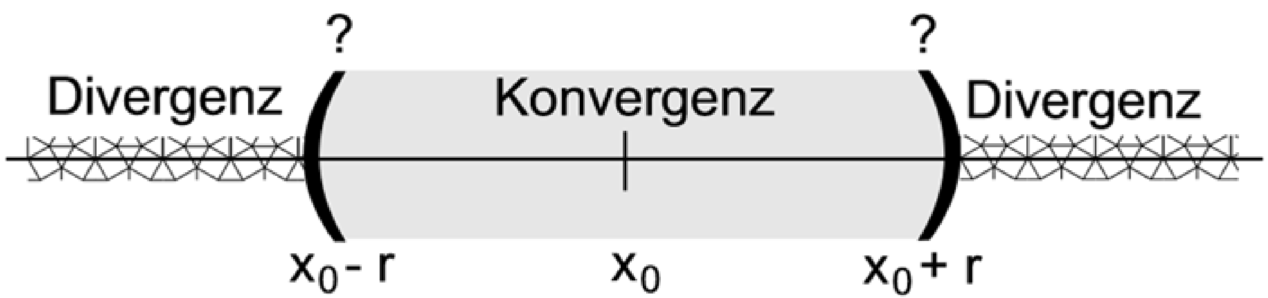
Konvergenzradius

Für jede Potenzreihe, die nicht nur in x_0 konvergiert, existiert ein **Konvergenzradius** $r > 0$, so dass die Potenzreihe für alle x mit

$$x_0 - r < x < x_0 + r$$

konvergiert und für $x < x_0 - r$ und für $x > x_0 + r$ divergiert.

Falls die Reihe für alle $x \in \mathbf{R}$ konvergiert, setzt man $r = \infty$.



Die Randstellen $x_0 \pm r$ müssen gesondert untersucht werden.

Wichtige Potenzreihen und ihre Konvergenzbereiche

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \text{für } |x| < 1 \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \qquad \text{für } |x| < 1 \\
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

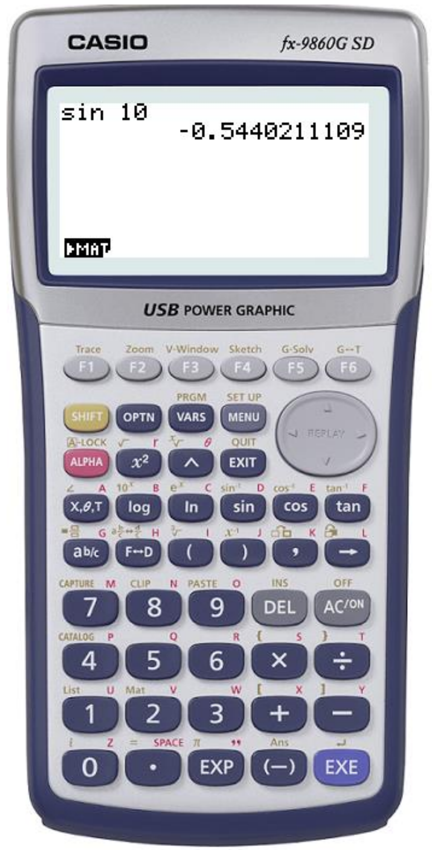
Wie berechnet ein Taschenrechner e^x, sin(x), …?

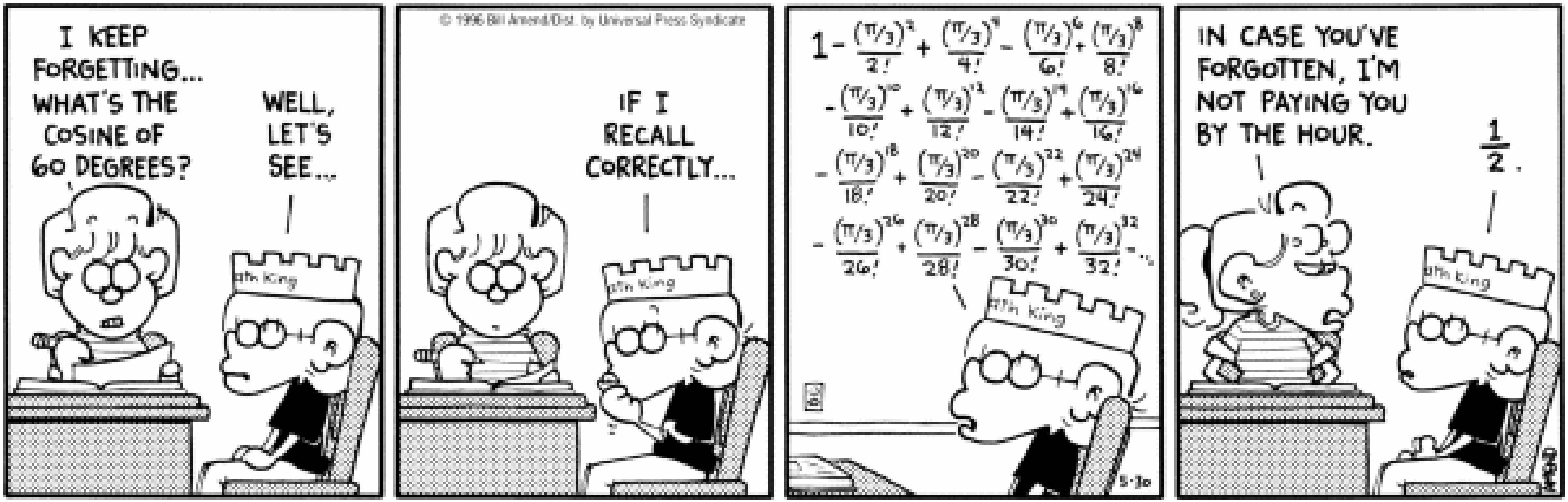
Komplizierte Funktionen wie

e^x, ln(x), sin(x), cos(x), …

werden vom Taschenrechner über ihre Taylorreihe berechnet.

Es werden solange Glieder der Taylorreihe aufsummiert, bis die Genauigkeit ausreicht.




I KEEP FORGETTING... WHAT'S THE COSINE OF 60 DEGREES?
WELL, LET'S SEE...
© 1996 Bill Amend/Dist. by Universal Press Syndicate
IF I RECALL CORRECTLY...
$1-\frac{(\pi/3)^2}{2!}+\frac{(\pi/3)^4}{4!}-\frac{(\pi/3)^6}{6!}+\frac{(\pi/3)^8}{8!}-\frac{(\pi/3)^{10}}{10!}+\frac{(\pi/3)^{12}}{12!}-\frac{(\pi/3)^{14}}{14!}+\frac{(\pi/3)^{16}}{16!}-\frac{(\pi/3)^{18}}{18!}+\frac{(\pi/3)^{20}}{20!}-\frac{(\pi/3)^{22}}{22!}+\frac{(\pi/3)^{24}}{24!}-\frac{(\pi/3)^{26}}{26!}+\frac{(\pi/3)^{28}}{28!}-\frac{(\pi/3)^{30}}{30!}+\frac{(\pi/3)^{32}}{32!}-\dots$
IN CASE YOU'VE FORGOTTEN, I'M NOT PAYING YOU BY THE HOUR.
$\frac{1}{2}$.

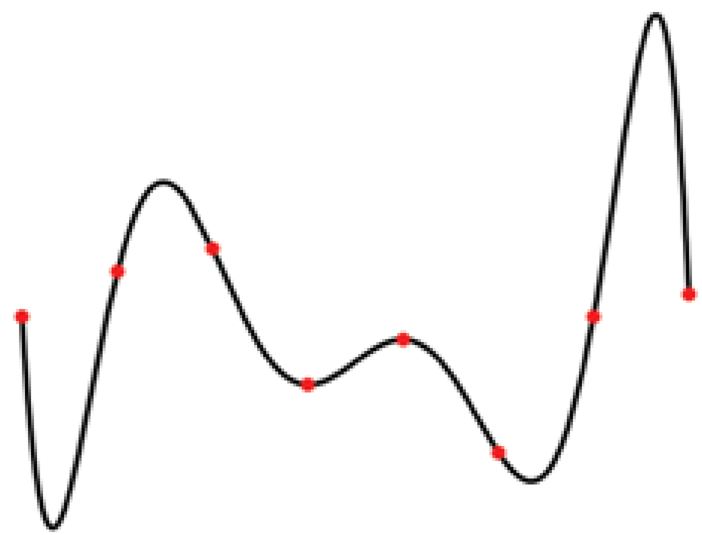
4.2 Interpolation von Polynomen

Interpolationsproblem

In der Praxis werden Daten oft in **Messreihen** erfasst.

Gesucht ist dann ein **Stützpolynom**, auf dessen Graphen alle Messpunkte liegen.

Mit diesem Stützpolynom kann man **interpolieren**, das heißt auf Werte zwischen den eigentlichen Messwerten schließen.



Interpolationspolynom

Durch 2 Messpunkte kann man eine Gerade legen.

Durch 3 Messpunkte kann man eine Parabel legen.

Durch 4 Messpunkte kann man ein Polynom 3. Grades legen.

…

Durch n+1 Messpunkte kann man ein Polynom n-ten Grades legen.

Genauer gilt:

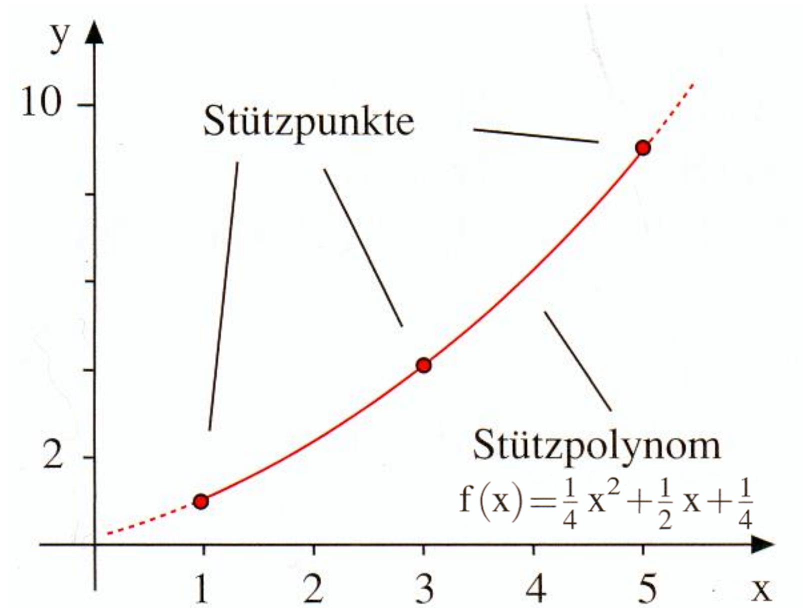
Satz. Zu n+1 Stützpunkten $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mit paarweise verschiedenen x-Werten gibt es *genau ein* Polynom f vom Grad $\leq n$, so dass $f(x_i) = y_i$ für alle $i = 0, 1, \dots, n$ gilt.

Es gibt mehrere Methoden, das Interpolationspolynom zu bestimmen.

1. Methode: Lineares Gleichungssystem lösen

Beispiel: Stützpolynom durch die Messwerte (1, 1), (3, 4), (5, 9).

Standard-Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$



Stützpunkte einsetzen:

$f(1) = 1$:	$a + b + c = 1$	(I)
$f(3) = 4$:	$9a + 3b + c = 4$	(II)
$f(5) = 9$:	$25a + 5b + c = 9$	(III)

Lösen des LGS:

II – I:	$8a + 2b = 3$	(IV)
III – I:	$24a + 4b = 8$	(V)
V – 2·IV:	$8a = 2$	$\Rightarrow$ **$a = \frac{1}{4}$** IV $\Rightarrow$ **$b = \frac{1}{2}$** I $\Rightarrow$ **$c = \frac{1}{4}$**

2. Methode: Newton-Interpolation

Ansatz nach Newton: Durch die n+1 Stützpunkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ geht das Stützpolynom:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}).$$

Vorteile dieses Ansatzes:

1. Das entstehende lineare Gleichungssystem hat Dreiecksform. Es ist daher sehr einfach zu lösen.

2. Bei nachträglicher Aufnahme weiterer Punkte ist das Polynom erweiterbar.

Beispiel

Beispiel: Stützpolynom durch die Punkte (0, 3), (2, 1), (3, 6), (4, 23).

Ansatz nach Newton:

$$f(x) = a + b(x - 0) + c(x - 0)(x - 2) + d(x - 0)(x - 2)\cdot(x - 3)$$

Einsetzen der Punkte liefert ein LGS in Dreiecksform:

$f(0) = 3$:	a	$= 3$
$f(2) = 1$:	$a + 2b$	$= 1$
$f(3) = 6$:	$a + 3b + 3c$	$= 6$
$f(4) = 23$:	$a + 4b + 8c + 8d$	$= 23$

Dieses ist einfach zu lösen: $a = 3$, $b = -1$, $c = 2$, $d = 1$

$$f(x) = 3 - 1(x - 0) + 2(x - 0)(x - 2) + 1(x - 0)(x - 2)\cdot(x - 3) = \mathbf{x^3 - 3x^2 + x + 3}$$

Übung

Bestimmen Sie das Stützpolynom durch die Punkte (0, 2), (4, -2), (6, 8) mit der Methode von Newton.

3. Methode: Lagrange-Interpolation

Ansatz nach Lagrange: Durch die n+1 Stützpunkte (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n) geht das Stützpolynom:

$$f(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + \ldots + y_n \cdot L_n(x),$$

wobei die **Lagrange-Grundpolynome $L_k(x)$** für k = 0, 1, …, n wie folgt definiert sind:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdot (x_k - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_n)}$$

Man bestimmt zunächst die n Grundpolynome $L_k(x)$ und setzt daraus das gesuchte Interpolationspolynom f(x) zusammen.

Beispiel

Beispiel: Stützpolynom durch die Punkte (-1, 3), (0, 1), (2, 3).

Bestimmung der Lagrange-Grundpolynome:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} = \frac{1}{3}(x^2-2x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} = -\frac{1}{2}(x^2-x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = \frac{1}{6}(x^2+x)$$

Zusammensetzen des Interpolationspolynoms:

$$\begin{aligned} p(x) &= 3 \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) + 3 \cdot L_2(x) \\ &= (x^2-2x) - \frac{1}{2}(x^2-x-2) + \frac{1}{2}(x^2+x) \\ &= x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

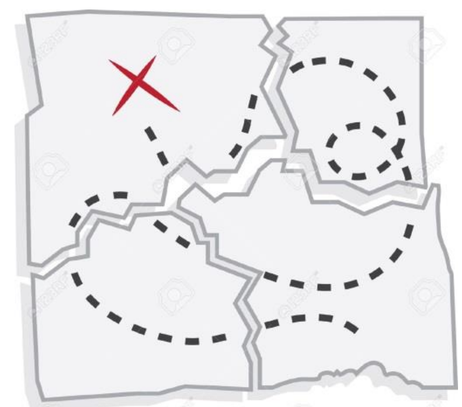
In GeoGebra:

Polynom[(-1,3),(0,1),(2,3)]

Anwendung: Secret Sharing Schemes

In der **Kryptographie** spielen **geheime Schlüssel** eine wichtige Rolle.

Secret Sharing Schemes ermöglichen, die Verantwortung für einen geheimen Datensatz nicht mehr an einer Stelle konzentrieren zu müssen, sondern kontrollierbar *aufteilen* zu können.

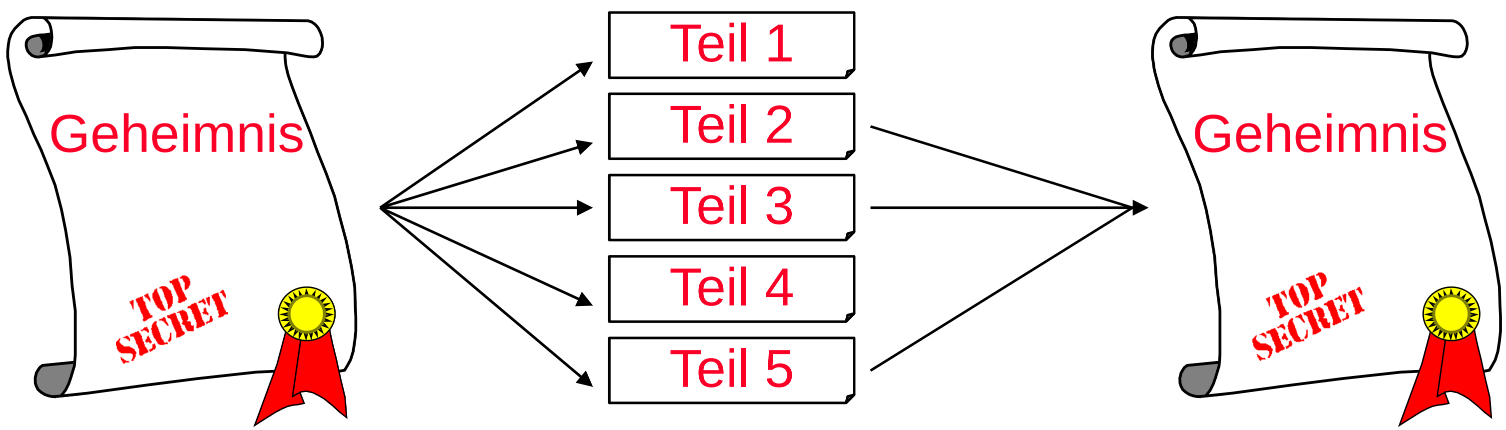


Beispiele: (a) Aufteilen einer Schatzkarte
(b) „Vieraugenprinzip“ (Geheimnis kann nur von jeweils zwei Teilnehmern, aber von keinem alleine, rekonstruiert werden)

Vorteile: - Niemand muss gesamte Verantwortung auf sich nehmen.
- Keine Unbefugten können die Daten missbrauchen.

Secret Sharing Schemes

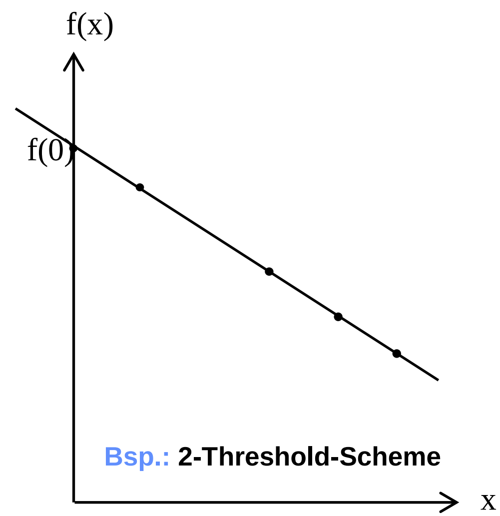
Idee: Ein Geheimnis wird so aufgeteilt, dass es nur von gewissen, vorher festgelegten Teilnehmerkonstellationen rekonstruiert werden kann.



Anwendungen: Kryptographische Schlüssel, Kollektivunterschriften, ...

Threshold Schemes

Zur Rekonstruktion müssen mindestens t Teilinformationen vorliegen.



Idee (Shamir 1979):

Geheimnis = Punkt auf der y-Achse,

f = Polynom vom Grad t – 1 durch diesen Punkt,

Teilinformationen = Punkte $(x_i, f(x_i))$ des Graphen.

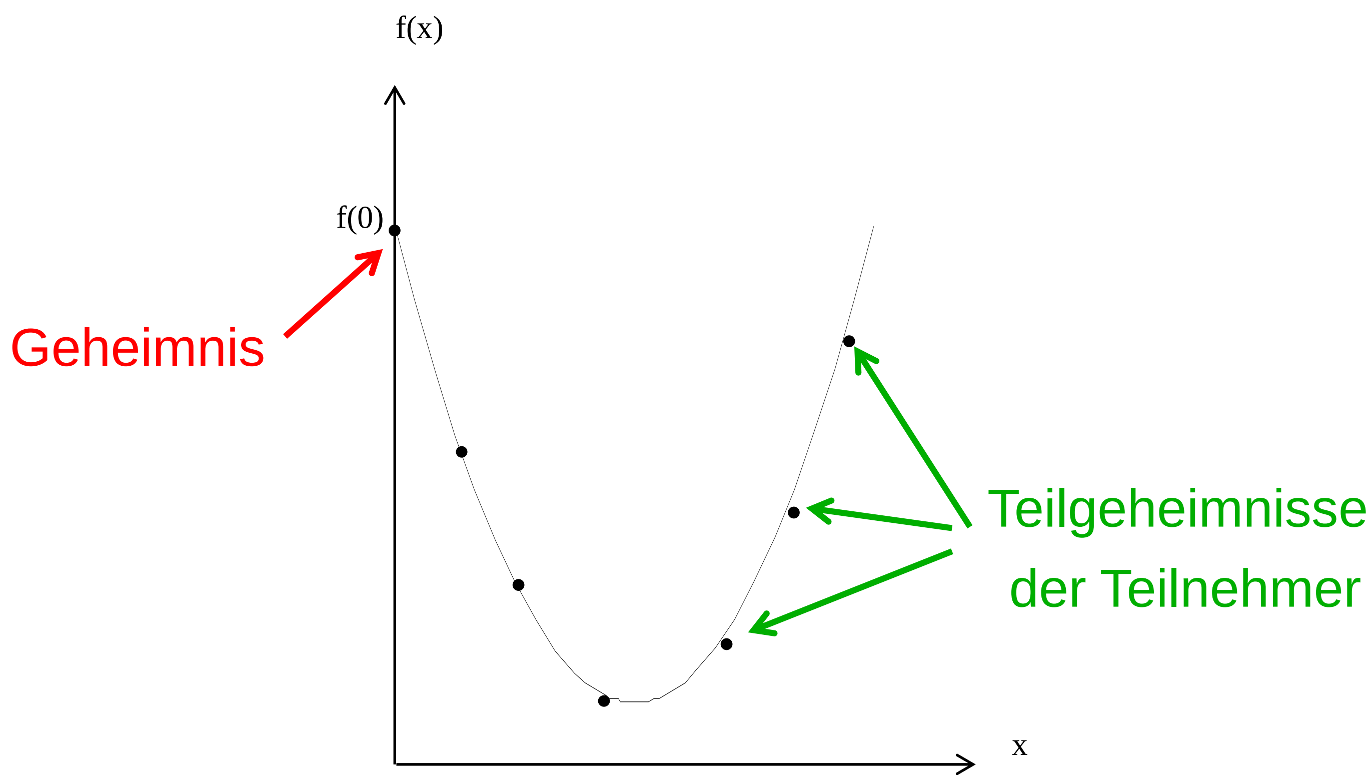
Anwendung:

$\geq$ t Teilgeheimnisse $\Rightarrow$ Polynom f berechnen

(z. B. mit Lagrange-Interpolation) $\Rightarrow$ Geheimnis f(0) bestimmen.

< t Teilnehmer $\Rightarrow$ Geheimnis nur raten.

Ein 3-Threshold Scheme nach Shamir



Übung

Bei einem 3-Threshold-Scheme haben die vier Teilnehmer die Punkte:

Teilnehmer A: (1, 2)

Teilnehmer B: (2, 4)

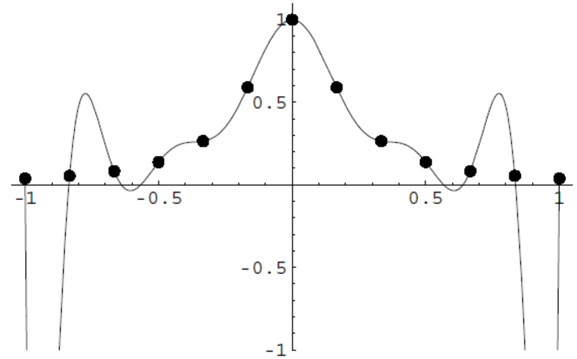
Teilnehmer C: (3, 8)

Teilnehmer D: (4, 14)

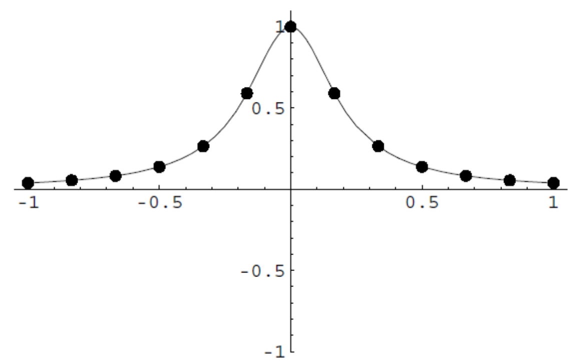
Wie lautet das Geheimnis?

Ergänzung 1: Spline-Interpolation

Phänomen von Runge: Es kann vorkommen, dass das Interpolationspolynom am Rand stark oszilliert und daher zur Interpolation zwischen den Stützpunkten nur bedingt geeignet ist.



Daher verwendet man in der Praxis oft stückweise Polynome mit kleinerem Grad (sog. **Splines**), die möglichst „glatt“ verbunden werden. Meist benutzt man Polynome von Grad 3 (**kubische Splines**), die an den Nahtstellen bis zur 2. Ableitung übereinstimmen.



Ergänzung 2: Trigonometrische Interpolation

Periodische Funktionen kann man (statt durch Polynome) durch Summen trigonometrischer Funktionen approximieren.

Diese Entwicklung nennt man eine **Fourier-Reihe**:

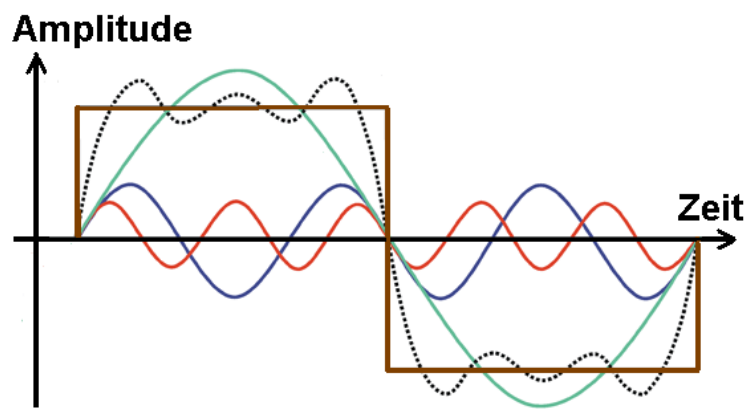
$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)) + (a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t))$$
$$+ (a_3 \cos(3\omega t) + b_3 \sin(3\omega t)) + (a_4 \cos(4\omega t) + b_4 \sin(4\omega t)) + \ldots$$

Beispiel:

grüne + blaue + rote Sinuswelle

= gestrichelte Kurve

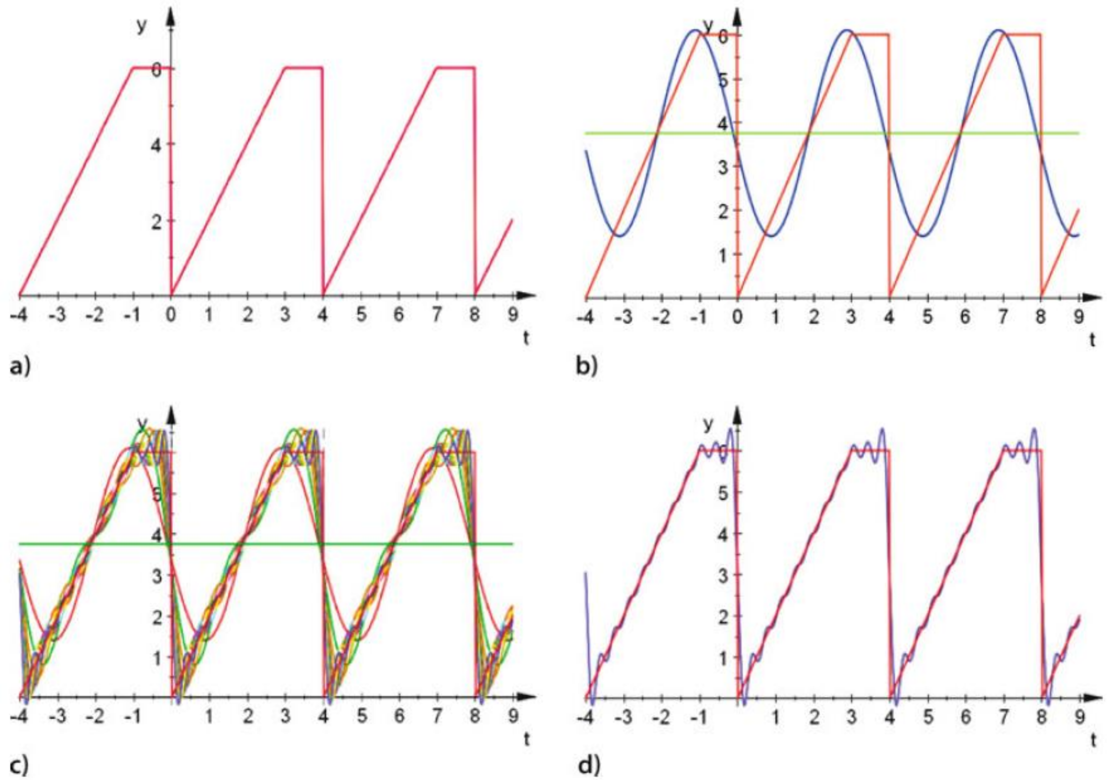
≈ Rechteckwelle

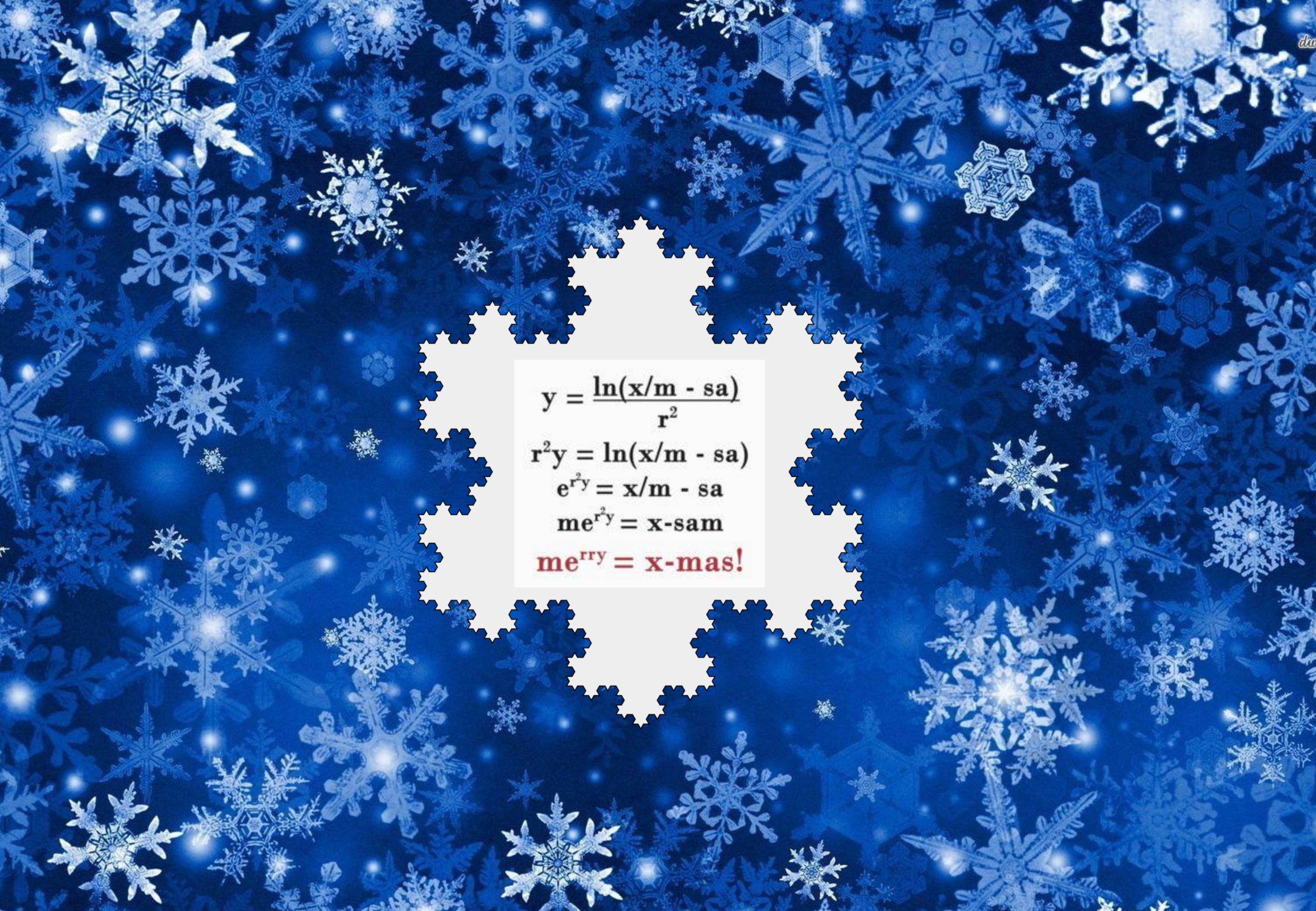


Anwendung: Signal-, Bildverarbeitung

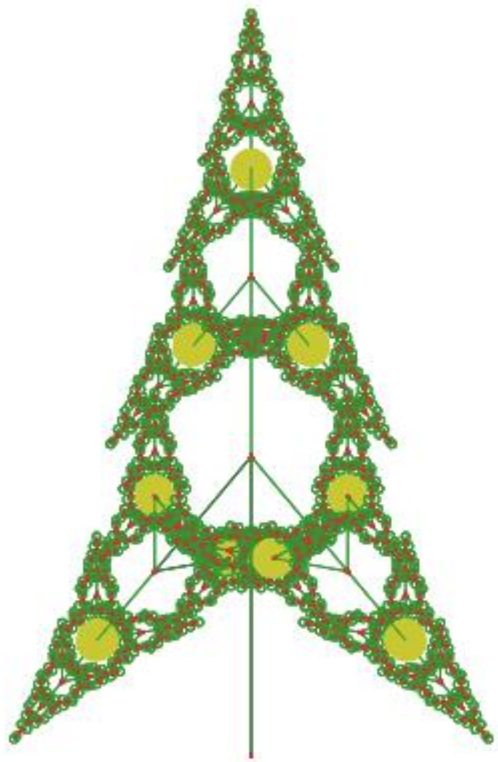
Beispiel

Periodische Funktion mit ihrer Fourier-Entwicklung bis zur Ordnung 10:




$y = \frac{\ln(x/m - sa)}{r^2}$
$r^2 y = \ln(x/m - sa)$
$e^{r^2 y} = x/m - sa$
$me^{r^2 y} = x\text{-}sam$
$me^{rry} = x\text{-}mas!$

Fr☺he Weihnachten und
einen guten Rutsch ins Jahr 2☺2☺!



http://logo.twentygototen.org/J1f5Ixg2?older=2018-12-14T12:51:51