Kap. 2: Grundbegriffe

2.1 Begriffe der Mathematik

- **Bemerkung: Die in diesem Abschnitt besprochenen Begriffe sind entweder bereits aus der Schule bekannt oder werden in den Mathematik-Vorlesungen besprochen. Sie werden im weiteren als bekannt vorausgesetzt.**

- **Symbole in Aussagen**

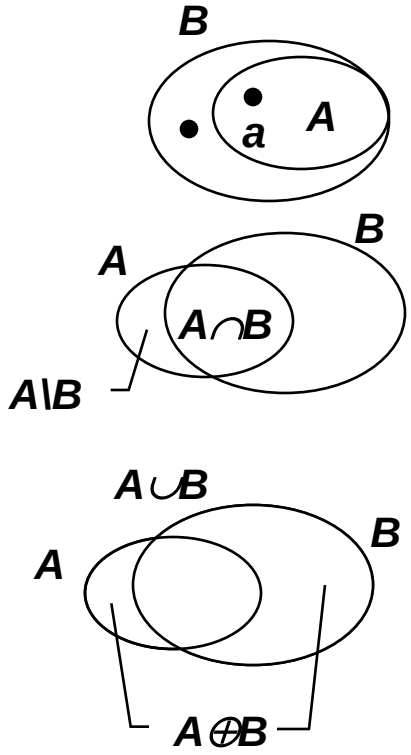
Def

$\exists x$	es existiert ein x, es gibt ein x
$\forall x$	für alle x
$p \wedge q$	Aussage p und Aussage q
$p \vee q$	Aussage p oder Aussage q
$\neg p$	nicht p, Verneinung der Aussage p
$p \Rightarrow q$	wenn p, dann q
$p \Leftrightarrow q$	p genau dann, wenn q
$p :\Leftrightarrow q$	definitionsgemäß genau dann, wenn

Mengen

Def

$a \in A$	*a* ist Element der Menge *A*
$A \subseteq B$	Teilmengenbeziehung
$A \subset B$	echte Teilmengenbeziehung
$\varnothing$	die leere Menge
$\{x \mid p(x)\}$	Menge aller *x*, für die die Aussage *p(x)* gilt
$A \cap B$	Durchschnitt
$A \cup B$	Vereinigung
$A \setminus B$	Differenz
$A \oplus B$	Disjunkte Vereinigung $A \cup B \setminus (A \cap B)$
$\lvert A \rvert$	Kardinalität oder Mächtigkeit der Menge A, bei endlichen Mengen Anzahl der Elemente



Potenzmenge, Produkt

Def

- Die *Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$* einer Menge *A* ist die Menge aller Teilmengen von *A*, d.h. $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$
- Beispiel: $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{ \{\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \}$
- Falls $|A| < \infty$, dann gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

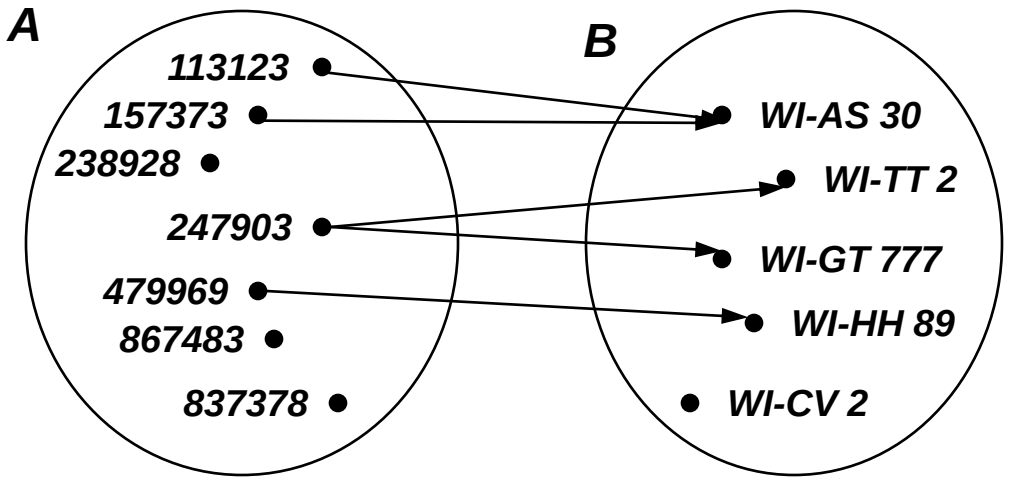
- Das (*kartesische) Produkt* $A \times B$ der Mengen *A* und *B* besteht aus allen geordneten Paaren (a,b) mit $a \in A$ *und* $b \in B$.
- Beispiel:
  $A=\{m,n\}, B=\{r,s,t\} \Rightarrow A \times B = \{ (m,r), (m,s), (m,t), (n,r), (n,s), (n,t) \}$
- Notation: Man schreibt statt $A \times A$ *auch* A^2.
- Für endliche Mengen *A* und *B* gilt $|A \times B| = |A| * |B|$.

Relation

Def

- **Eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ des Produkts zweier Mengen *A* und *B* heißt (zweistellige oder binäre) *Relation R zwischen A* und *B* .**
- **Notation: statt *(a,b)*$\in$*R auch R(a,b)* oder *Infix*-Notation: *a R b***

- **Beispiel:**
  ***A*: Menge der Personalausweisnummern aller Wiesbadener**
  ***B:* Menge der vergebenen Autokennzeichen beginnend mit WI**
  ***fährt*$\subseteq$ *A*$\times$*B* ist eine binäre Relation zwischen *A* und *B*.**



fährt = {
(113123, WI-AS 30),
(157373, WI-AS 30),
(247903, WI-TT 2),
(247903, WI-GT 777),
(479969, WI-HH 89) }

fährt (113123, WI-AS 30)
oder *113123 fährt WI-AS 30*

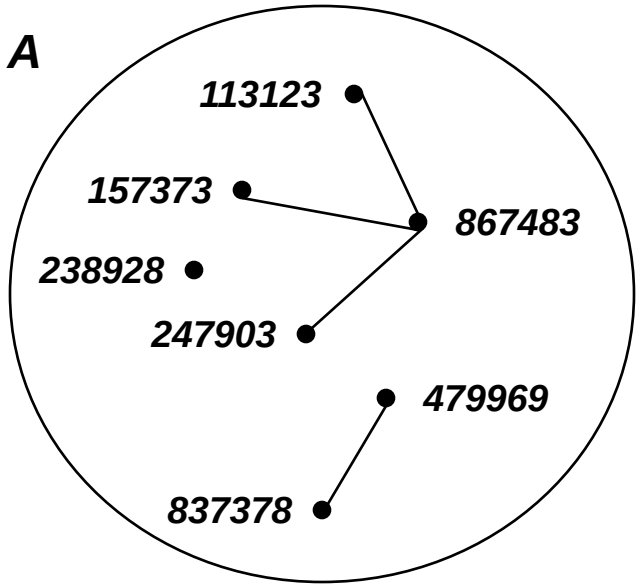
Relation (2)

Def

- **Eine Teilmenge $R \subseteq A \times A$ heißt *Relation R auf* der Menge *A*.**
- **Beispiel:**

  ***A*: Menge der Personalausweisnummern (IDs) aller Wiesbadener**

  ***R* = { (*x*,*y*) $\in A \times A$ | Person mit ID *x* ist verwandt mit Person mit ID *y* }.**



Eigenschaften von Relationen

Def

- Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation. Dann heißt R
  - ***reflexiv*** $:\Leftrightarrow \forall a \in A$ gilt: $a\ R\ a$
    Beispiele: Relationen = und $\leq$ auf natürl. Zahlen, $\subseteq$ auf Mengen
  - ***irreflexiv*** $:\Leftrightarrow$ für kein $a \in A$ gilt: $a\ R\ a$
    Beispiele: Relationen $\neq$ und $<$ auf natürlichen Zahlen
  - ***symmetrisch*** $:\Leftrightarrow \forall a,b \in A$ gilt: aus $a\ R\ b$ folgt $b\ R\ a$.
    Beispiele: Relationen = und $\neq$ auf natürlichen Zahlen
  - ***antisymmetrisch*** $:\Leftrightarrow \forall a,b \in A$ gilt:
    aus $a\ R\ b$ und $b\ R\ a$ *folgt* $a = b$.
    Beispiel: Relation $\leq$ auf natürlichen Zahlen, $\subseteq$ auf Mengen.
  - ***transitiv*** $:\Leftrightarrow \forall\ a,b,c \in A$ gilt:
    aus $a\ R\ b$ und $b\ R\ c$ *folgt* $a\ R\ c$.
    Beispiele: Relationen = $<$ $>$ $\leq$ auf natürl. Zahlen, $\subseteq$ auf Mengen
  - ***total*** $:\Leftrightarrow \forall\ a,b \in A$ gilt: $a\ R\ b$ oder $b\ R\ a$.
    Bemerkung: mathematisches *"oder"* d.h.: es kann gleichzeitig $a\ R\ b$ und $b\ R\ a$ gelten.
    Beispiel: Relation $\leq$ auf natürlichen Zahlen

Äquivalenzrelation

Def

- Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation. Dann heißt *R Äquivalenzrelation*, wenn *R* reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.
- Ist *R* eine Äquivalenzrelation und ist $(a,b) \in R$, so heißen a und b *äquivalent*.
- Beispiel: Sei *A* die Menge der natürlichen Zahlen, n natürliche Zahl.

  $R = \{ (x,y) \mid x$ und y haben bei Division durch n denselben Rest $\}$

  ist eine Äquivalenzrelation.

n = 4

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
...	...	...	...

Äquivalenzklassen, d.h.
Mengen bzgl. R äquivalenter Elemente

(Restklassen)

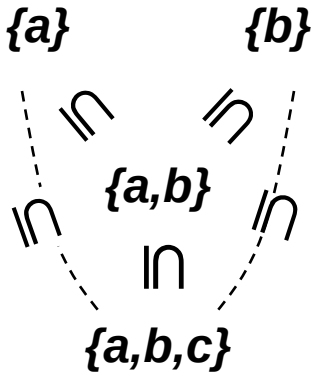
Partielle und totale Ordnung

Def

- **Eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation *R* auf einer Menge *A* heißt *partielle Ordnung R* auf der Menge *A*.**

- **Beispiel:**
  ***A* = { *{a}, {b}, {a,b}, {a,b,c}* },**
  $\subseteq$ Teilmengenrelation.
  $\subseteq$ definiert partielle Ordnung *R* auf *A*:

  R* = { *({a},{a,b}), ({a},{a,b,c}), ({b},{a,b}),
  ({b},{a,b,c}), ({a,b},{a,b,c}),
  ({a},{a}), ({b},{b}), ({a,b},{a,b}),
  ***({a,b,c},{a,b,c})* }**

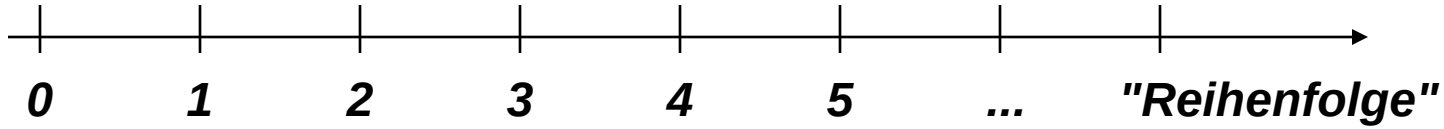


- **Bemerkung:**
  R ist keine totale Relation,
  z.B. gilt weder *{a}*$\subseteq$*{b}* noch *{b}*$\subseteq$*{a}*.

Partielle und totale Ordnung

Def

- **Eine reflexive, transitive und antisymmetrische und totale Relation *R* auf einer Menge *A* heißt *lineare* oder *totale Ordnung R* auf der Menge *A*.**
- **Beispiel: $\leq$ auf natürlichen Zahlen**



Reflexivität:	$\forall\ a \in N$ **gilt:** $a \leq a$
Transitivität:	$\forall\ a,b,c \in N$ **gilt:** $a \leq b$ **und** $b \leq c \Rightarrow a \leq c$
Antisymmetrie:	$\forall\ a,b \in N$ **gilt:** $a \leq b$ **und** $b \leq a \Rightarrow a = b$
Totalität:	$\forall\ a,b \in N$ **gilt:** $a \leq b$ **oder** $b \leq a$

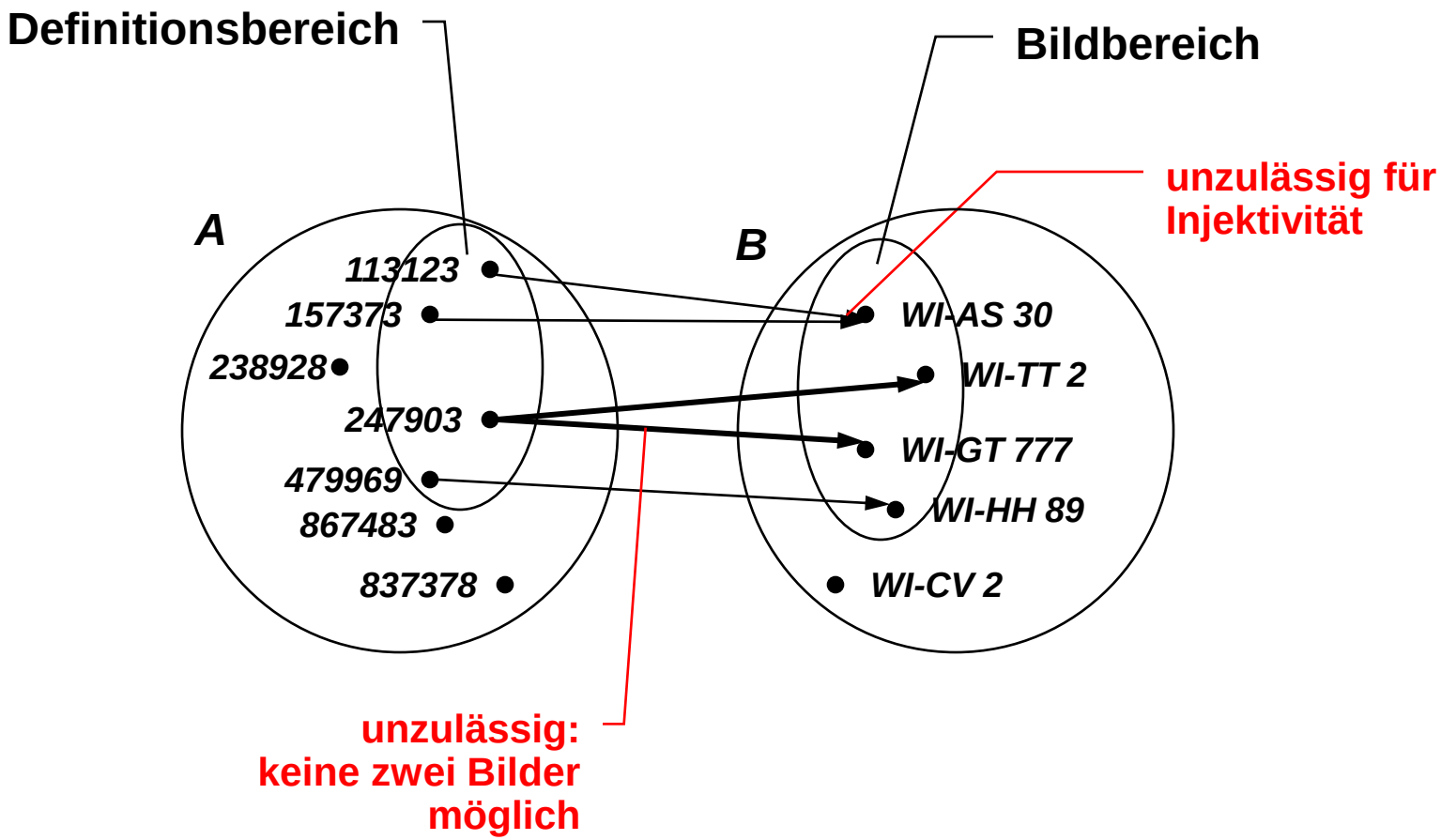
Funktion / Abbildung

Def

- **Eine Relation $f \subseteq A \times B$ zwischen den Mengen *A* und *B* heißt *Funktion* oder *Abbildung aus der Menge A in die Menge B*, falls aus $(x,y) \in f$ und $(x,z) \in f$ folgt: $y = z$.**
  - **Funktionen sind also spezielle Relationen.**
  - **übliche Notation: $f: A \to B$ und $f(a)=b$ statt $(a,b) \in f$, *b* heißt *das Bild von a unter der Funktion f, a* ein *Urbild* von *b.***
  - **$Dom(f) = \{a \in A \mid (a,b) \in f\}$ heißt *Definitionsbereich von f* (engl.: *domain*)**
  - **$Rng(f) = \{b \in B \mid (a,b) \in f\}$ heißt *Bildbereich von f* (engl.: *range*)**
  - **Eine Funktion $f:A \to B$ heißt *total*, wenn $Dom(f) = A$ gilt.**
  - **Eine Funktion $f:A \to B$ heißt *surjektiv*, wenn $Rng(f) = B$ gilt.**
  - **Eine Funktion $f:A \to B$ heißt *injektiv*, falls aus $f(a)=f(b)$ folgt: $a=b$**
  - **Eine Funktion $f:A \to B$ heißt *bijektiv*, falls *f* total, surjektiv und injektiv ist.**

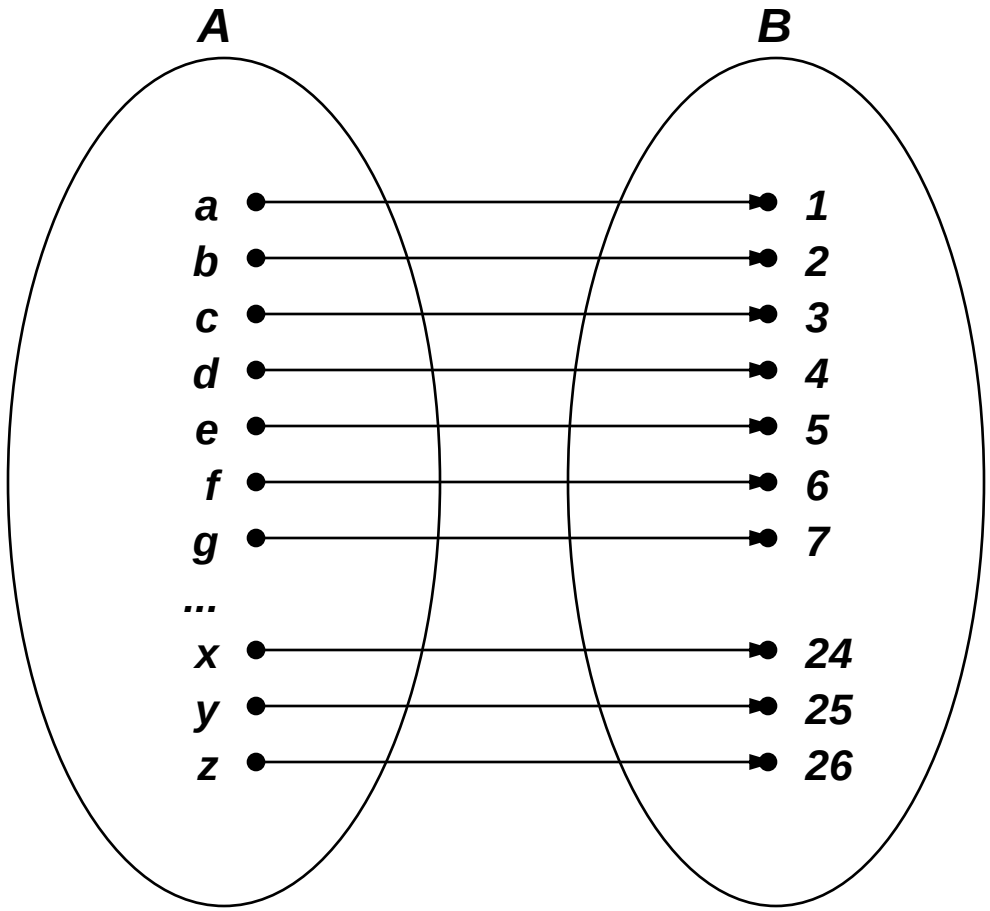
Beispiel

- **Funktion**



Beispiel

- **Bijektion**



2.2 System, Abstraktion und Modelle

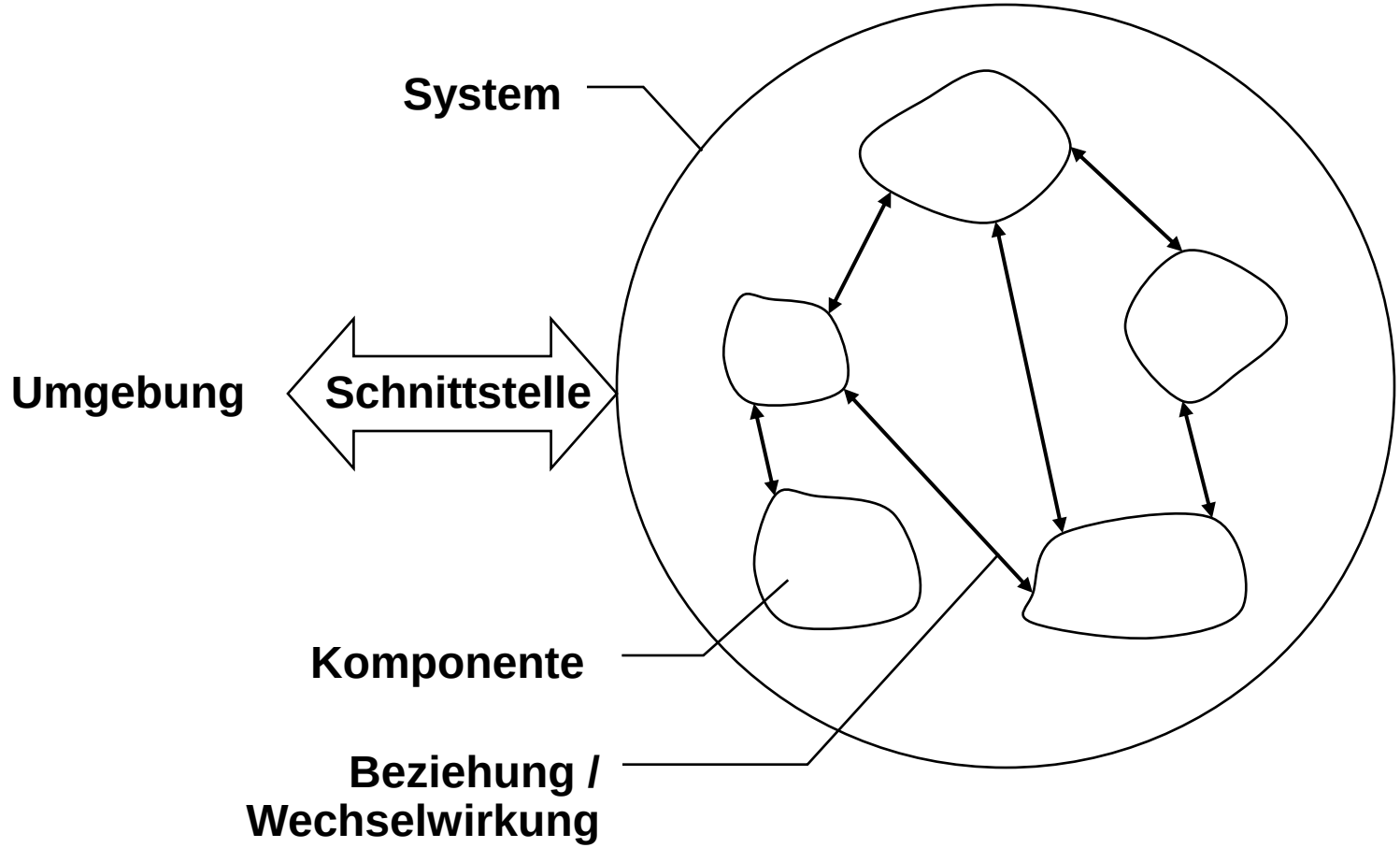
- **Der Systembegriff wird im täglichen Leben verwendet wie auch in allen wissenschaftlichen Disziplinen.**
- **Beispiele:**
  - **Das politische System der Bundesrepublik Deutschland**
  - **Der menschliche Körper als biologisches System**
  - **Das Sternensystem**
- **Charakterisierende Merkmale eines *informationstechnischen Systems*:**

Def

  - ***Schnittstelle des Systems:***
    Grenze zwischen "außerhalb" und "innerhalb"
  - ***Umgebung des Systems:***
    der äußere, für die Betrachtung weniger wichtige Teil
  - ***System:***
    innere Teil ist der eigentliche Betrachtungsgegenstand mit:
    - ***Komponenten* (des Systems)**
    - **deren *Beziehungen* zueinander (Wechselwirkungen)**

Graphische Veranschaulichung

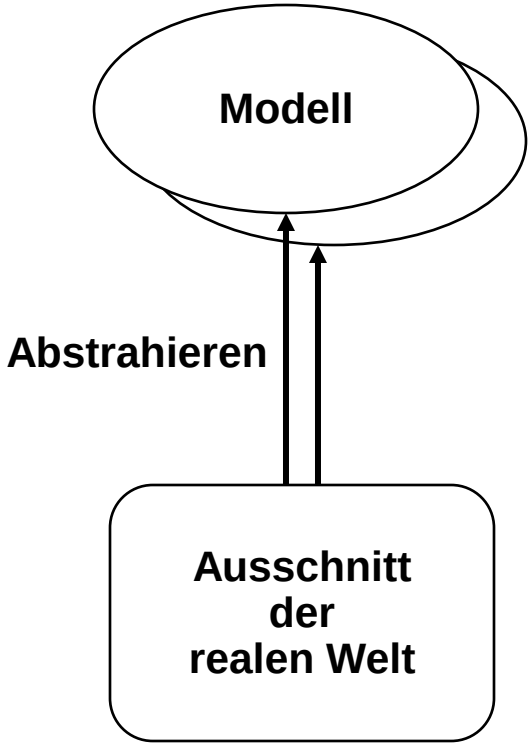
- **zum Systembegriff**



Abstraktion und Modelle

Def

- ***Abstraktion*** **entsteht durch Erkennen von unter einer bestimmten Betrachtungsweise relevanten Gegenständen, Eigenschaften und Beziehungen eines Ausschnitts der realen Welt.**
- **Modell als Ersatz der Realität**
- **zusätzliche wünschenswerte Eigenschaften wie z.B.**
  - **einfacher zu verstehen (z.B. Straßenatlas)**
  - **billiger oder sicherer (z.B. Fahrsimulator)**
  - **mathematische Theorie nutzbar machen (z.B. Physik, Baustatik)**
- **Für denselben Ausschnitt der Realität können verschiedene Modelle existieren.**



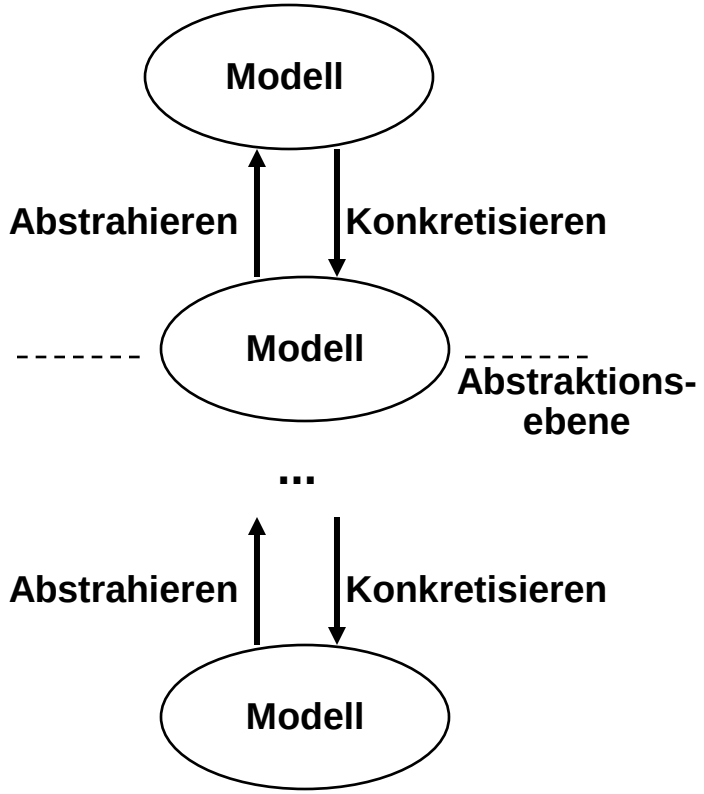
Abstraktion und Modelle (2)

- **Das Studium der Informatik beinhaltet das Kennenlernen einer Vielzahl von Modellen**
  - **aus der Mathematik**
  - **aus Ingenieur-Disziplinen**
  - **durch die Informatik selbst entwickelt (z.B. Graphen, Automaten, ...)**
- **In der Informatik sind *systemorientierte* Betrachtungsweisen verbreitet. Ziel oft: Struktur- und Verhaltensmodelle entwickeln.**
- **Wahl der *Abstraktionsebene* spielt oft entscheidende Rolle:**
  - ⇒ **Art und Umfang der Komponenten und ihrer Wechselwirkungen**
  - ⇒ **Komplexität des Systems.**

Hierarchische Abstraktionsebenen

- **Vorgehensweise häufig *"von oben nach unten"* (engl.: *top-down*)**

  d.h. ein Informatiker beginnt oft mit einem Modell der Realität auf einer sehr hohen Abstraktionsebene und *konkretisiert* dieses Modell schrittweise zu immer detaillierteren Modellen, um sich einer Realisierung zu nähern.



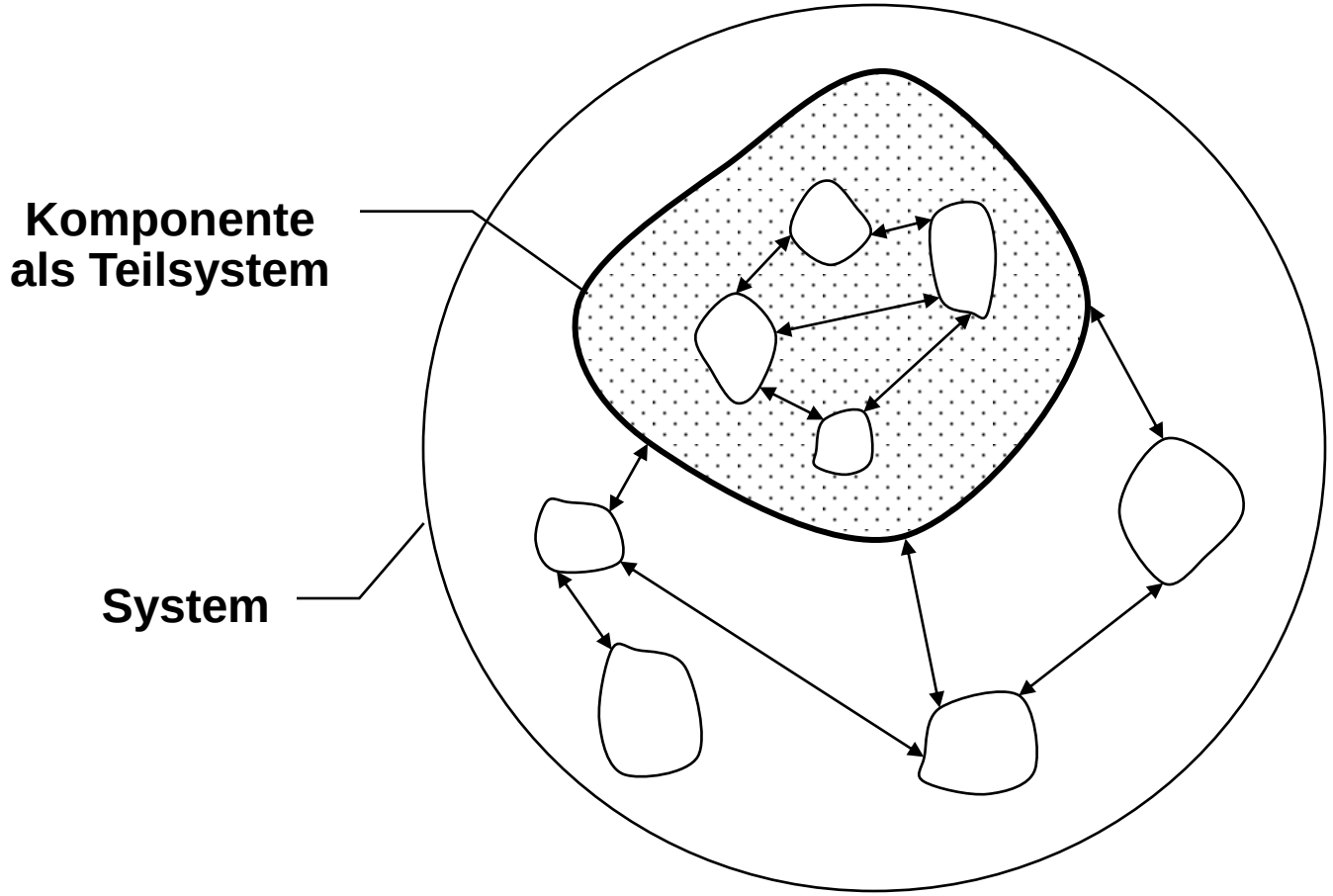
Beispiel

- Ausschnitt aus den üblicherweise betrachteten Abstraktionsebenen eines Rechensystems
- wird im Verlaufe des Studiums konkretisiert

		typische Modelle	*in Vorlesung*
6	Geschäftsprozess	Prozessketten	evtl. BWL
5	Anwendungsprogramm	Datenflussdiagramm	Softwaretechnik
4	Betriebssystem	Prozesssysteme	Betriebssysteme
3	Prozessor	Maschinensprache	Rechnerarchitektur
2	Funktionsblöcke	Register-Transfer-Sprache	Rechnerarchitektur
1	digitale Signale	Gatter	Digitaltechnik
0	elektrische Signale	phys. Modell	Elektrotechnik

Beispiel: Verfeinerung eines Systems

- **Eine Komponente eines Systems kann auf der nächsttieferen Abstraktionsebene selbst wieder als System betrachtet werden.**



2.3 Information und ihre Repräsentation

- **Information ist einer der zentralen Begriffe der Informatik:**

  "*Informatik* ist die Wissenschaft von der systematischen Verarbeitung von Information. Sie befaßt sich mit Struktur, Eigenschaften und Beschreibungsmitteln von Informationen und informationsverarbeitenden Systemen und deren Betrieb und Anwendung" (vgl. Kap.1).

- **Bedeutung des Begriffs "Information" im täglichen Leben: zutreffende Aussagen über bestimmte Gegenstände, Zustände, Ereignisse oder Zusammenhänge in der realen Welt.**

- **Zur Bedeutung des Begriffs "Information" in der Informatik:**
  - **Unterschied: abstrakt, ohne Bezug zur realen Welt**
  - **d.h. abstrakter Bedeutungsgehalt von textuellen Ausdrücken, Graphiken, usw.**

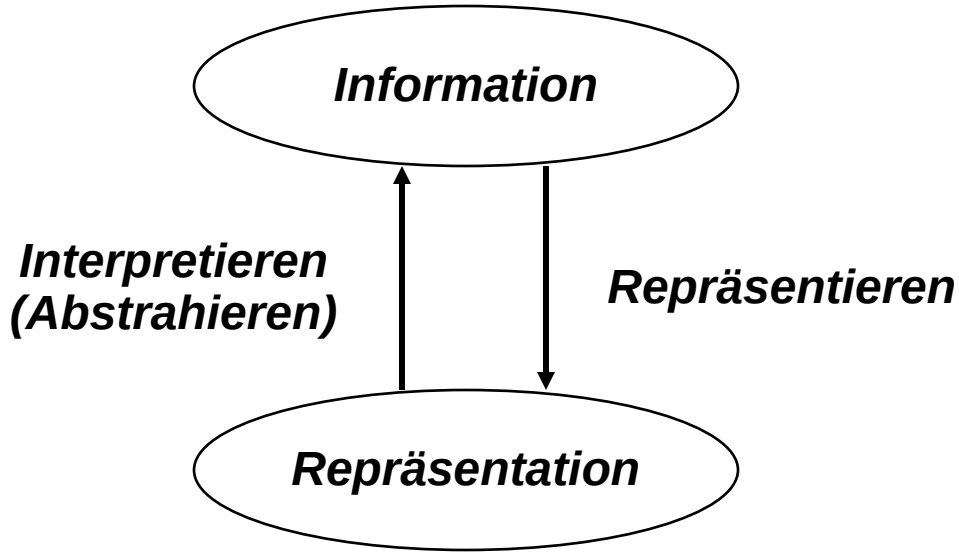
- **Information wird aber erst durch äußere Darstellungen verarbeitbar / kommunizierbar.**

⇒ **Die Informatik trennt strikt zwischen der abstrakten Information und ihren äußeren Darstellungen.**

Information und Repräsentation - Definition

Def

- ***Information*** **nennt man den abstrakten Bedeutungsgehalt (Semantik) einer Beschreibung, Aussage, Nachricht, usw.**
- **Äußere Form der Darstellung heißt *Repräsentation*.**
- **Übergang von der Repräsentation zur abstrakten Information heißt *Interpretation*, in umgekehrter Richtung spricht man von *Repräsentierung*.**



Anmerkungen

- **Typische Repräsentationen:**
  - **Körperbewegungen (Handzeichen)**
  - **das gesprochene Wort (akustische Repräsentation)**
  - **Zeichenfolgen (das geschriebene Wort)**
  - **graphische Darstellungen (Zeichnungen, Ikonen, ...)**
- **Festlegung für die Deutung von Repräsentationen notwendig. Durch Bedeutung wird die Repräsentation zu Information.**
- **Repräsentationen können mehrere Bedeutungen besitzen.**

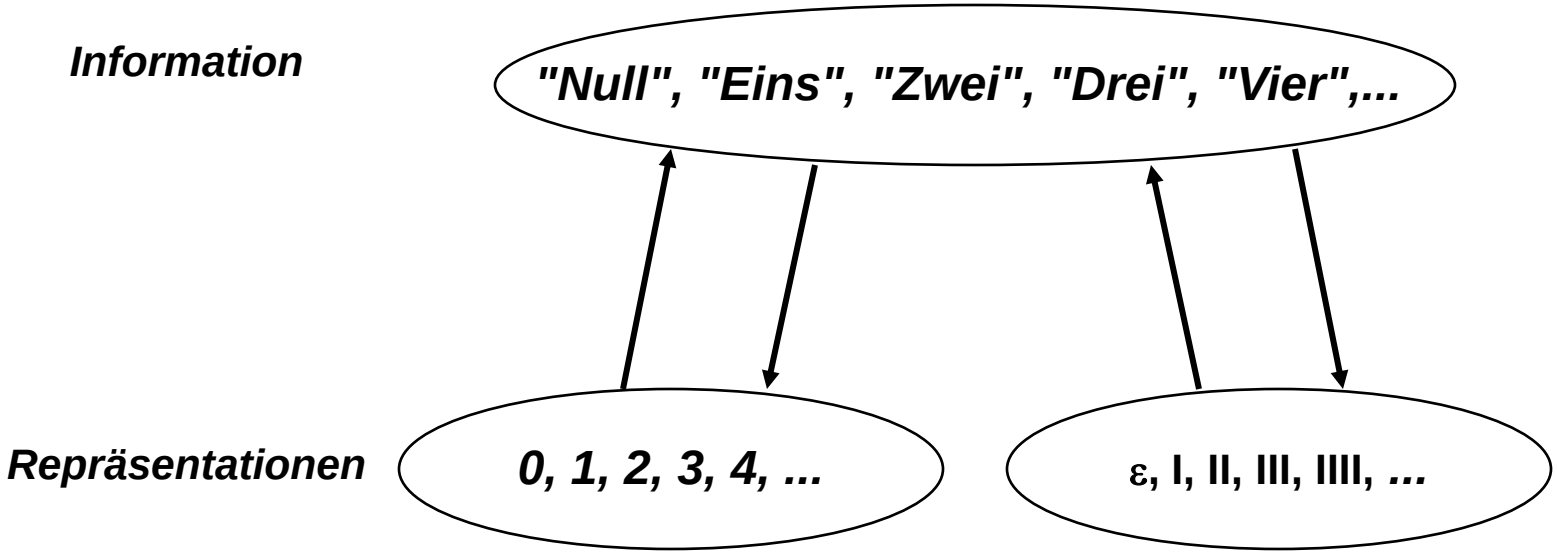
  Beispiel: Zeichenfolge "G", "R" "Ü" "N":
- **Repräsentationssysteme sind i.d.R.**
  - **unterschiedlich leistungsfähig (mächtig) und**
  - **abhängig von der darzustellenden Information unterschiedlich zweckmäßig in Hinblick auf die beabsichtigte Verarbeitung.**

Anmerkungen (2)

- **Dieselbe Information kann mehrere unterschiedliche (aber semantisch gleichwertige) Repräsentierungen besitzen.**

  Beispiel: Die natürlichen Zahlen

  - **Repräsentationssystem 1:**
    Notation üblicher Dezimalzahlen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...
  - **Repräsentationssystem 2:**
    Strichfolgen: leere Folge ε, I, II, III, IIII, IIIII, ...



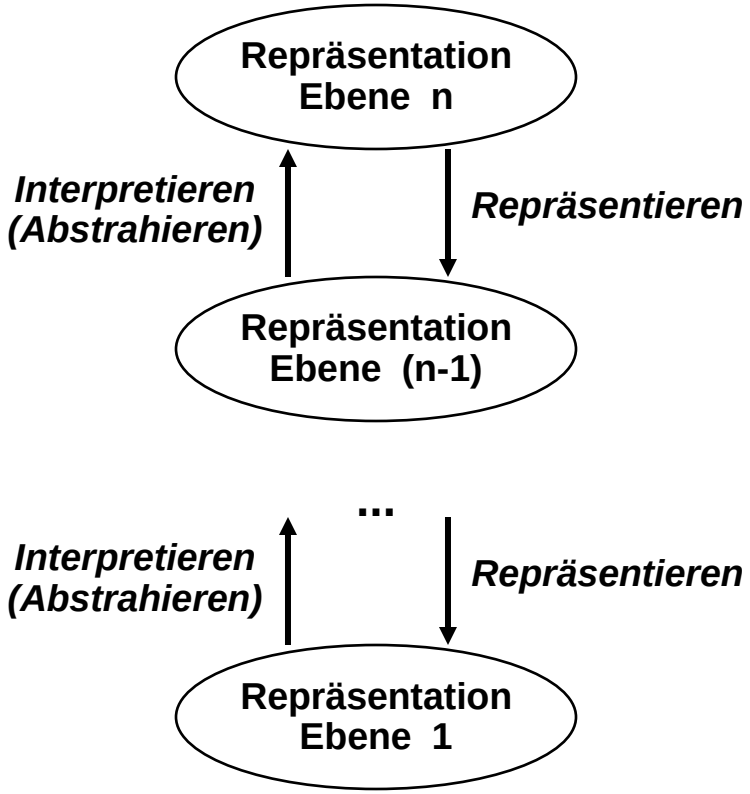
Hierarchische Repräsentierungsebenen

- **Vorgang der Repräsentierung / Interpretation kann wiederholt über mehrere Abstraktionsebenen erfolgen.**

  ⇒

  hierarchisch angelegte Repräsentierungssysteme für Information auf verschiedenen Abstraktionsstufen.

- **Dieser Ansatz wird z.B. im Rahmen der Betrachtung von Datenstrukturen und der Programmierung eine große Rolle spielen.**



Verstehen

Def

- **Herstellen von Beziehungen zwischen der in Repräsentationen enthaltenen abstrakten Information und der realen Welt wird *Verstehen* genannt.**
- **Verstehen einer Nachricht beinhaltet damit**
  - **Erkennen der Bedeutung der Nachricht (abstrakte Information) und**
  - **Herstellen des Bezugs zur realen Welt.**
- **Verstehen ist ein subjektiver Prozess und nicht formalisierbar.**

Im folgenden:

- In den folgenden beiden Abschnitten werden zwei in der Informatik häufig eingesetzte Repräsentationssysteme vorgestellt:
  - (textuelle) formale Sprachen
  - Graphen
- Diese werden detailliert im weiteren Informatikstudium behandelt.

2.4 Formale Sprachen

- **Für die automatisierte Informationsverarbeitung mit Rechensystemen sind textuelle Darstellungen immer noch am weitesten verbreitet:**
  - **für menschliche Benutzer lesbare Ein- /Ausgabe**
  - **Kommandosprachen (z.B. UNIX shell)**
  - **Programmiersprachen für Informatiker: C/C++, Java, ...**
- **In diesem Abschnitt:**
  Einführung des Begriffs der formalen Sprache

Zeichen, Zeichenvorrat

Def

- **Ein *Zeichen* (engl. *character*) ist ein Element einer vereinbarten endlichen, nicht-leeren Menge, die als *Zeichenvorrat* bezeichnet wird.**
- **Zeichenvorrat aus genau zwei verschiedenen Zeichen heißt *binärer Zeichenvorrat*.**
- ***Bit* (Abk. b für *binary digit*) bezeichnet jedes Zeichen aus einem binären Zeichenvorrat.**
- ***Symbol:* (streng genommen) ein Zeichen zusammen mit einer vereinbarten Bedeutung. Häufig werden aber Zeichen und Symbol gleichwertig benutzt.**

Beispiele:

{+,-,*,/}

{Mo, Di, Mi, Do, Fr, Sa, So}

{0,1}, {dunkel, hell}, {0V, +5V}, {falsch, wahr}, {ja, nein}

i.d.R. *{0,1}*.

Alphabet

Def

- **Ein *Alphabet* $\sum$ ist ein Zeichenvorrat, auf dem eine lineare Ordnung (Reihenfolge) für die Zeichen definiert ist.**

  Beispiele:

  - ***{0,1}, 0<1***
  - ***{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, 0<1<2<3<4<5<6<7<8<9***
  - ***{A,B,C, ...,Z,a,b,c, ...,z}, A<B<C< ...<Z<a<b<c< ...<z.***

Zeichenketten

Def

- **Eine endliche Folge $w=a_1...a_n$ von Zeichen eines Alphabets Σ heißt *Wort* oder *Zeichenkette* (engl.: *string*) über Σ.**
- **Sei $w=a_1...a_n$ Zeichenkette über Σ,**
  $|w|=n$ bezeichnet die *Länge* der Zeichenkette.
- **Das *leere Wort* wird durch ε bezeichnet *(auch als "" geschrieben)*, besitzt Länge 0.**
- **Σ^* :$\Leftrightarrow$ Menge aller Zeichenketten über Σ**
  Σ^+ :$\Leftrightarrow$ Menge aller nicht-leeren Zeichenketten über Σ
  Σ^n :$\Leftrightarrow$ Menge aller Zeichenketten der Länge n über Σ.
- **Beispiel: $\Sigma = \{0,1\}$, $\Sigma^* = \{0,1\}^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, ...\}$**
- **$\Sigma^* = \{0,1\}^*$ heißt die Menge der *Binärwörter*,**
  Elemente von Σ^n heißen auch *n-Bit-Wörter* oder *Binärwörter der Länge n*.

Konkatenation von Zeichenketten

Def

- Seien Σ ein Alphabet, u = $a_1...a_m$ und v=$b_1...b_n$ Wörter über Σ.
  Das Wort

$$w = uv = u||v = a_1...a_m b_1...b_n ,$$

  das durch Anfügen des Worts *v* an *u* entsteht, heißt *Konkatenation* oder *Verkettung von u und v*.
  Es gilt |*uv*| = |*u*| + |*v*|.

- Ist $w \in \Sigma^*$ und *n* eine natürliche Zahl, dann bezeichnet w^n mit

$$w^0 = \varepsilon$$

$$w^{n+1} = w^n w$$

  das Wort, das aus *n* aneinandergefügten Kopien von *w* besteht,
  w^* bezeichnet ein beliebiges solches Wort
  (*n*-fache Wiederholung von *w* für irgendein *n*),
  w^+ ein nicht-leeres solches Wort.

Präfix / Suffix

Def

- **Sind $x, y, z \in \Sigma^*$ (leere Wörter eingeschlossen) und ist**

$$w = xyz = x||y||z,$$

dann heißt

x* ein *Präfix (Anfangsstück)* von *w

***y* ein *Teilwort* von *w* und**

***z* ein *Suffix (Endstück)* von *w*.**

lexikographische Ordnung

Def

- Sei Σ ein Alphabet und $\leq$ die lineare Ordnung auf Σ.
  Für Wörter $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ wird nun ebenfalls eine Ordnung $\leq_{lex}$, die *lexikographische Ordnung*, induktiv durch folgende Festlegungen definiert:

  $\varepsilon \leq_{lex} w$ für alle $w \in \Sigma^*$

  $a_1 \| w_1 \leq_{lex} a_2 \| w_2 :\Leftrightarrow a_1 < a_2$ oder ($a_1 = a_2$ und $w_1 \leq_{lex} w_2$)
- Die lexikographische Ordnung definert eine lineare Ordnung auf Σ^*.
- Beispiele: $\Sigma = \{0,1\}$, $0<1$

  $\varepsilon \leq_{lex} 0$, $01 \leq_{lex} 1$, $01 \leq_{lex} 10$, $01 \leq_{lex} 011$, $011 = 011$

Formale Sprache

Def

- **Sei Σ ein Alphabet.**
  Eine Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *(formale) Sprache,*
  $x \in L$* heißt *Wort der Sprache L.
- **Beispiel:**
  $\Sigma = \{0,1\}$, $L = \{1, 01, 001, 0001, 00001, ...\} \subseteq \Sigma^*$.
  (Man kann L auch durch den Ausdruck *0^*1* charakterisieren).

Operationen auf formalen Sprachen

Def

- Sei Σ ein Alphabet und seien $L, M \subseteq \Sigma^*$ formale Sprachen.
  - $L \cup M$ bzw. $L \cap M$ bezeichnen (wie allg. für Mengen) die *Vereinigung* bzw. den *Durchschnitt* der beiden Sprachen L und M.
  - $LM = \{ uv \mid u \in L \text{ und } v \in M \}$ bezeichnet die *Konkatenation* der *Sprachen L und M.*
  - L^* definiert durch

    $$L^0 = \varepsilon, \quad L^{n+1} = L^n L, \quad L^* = \cup L^n$$

    beinhaltet die Menge aller Wörter, die durch Verkettung einer beliebigen Anzahl von Wörtern aus L entstehen (sog. *abgeschlossene* oder *Kleene'sche Hülle*).
  - $L^+ = L^* \setminus \{\varepsilon\}$
- Beispiel: $\Sigma = \{0,1\}$, $L = \{01, 0001\} \subseteq \Sigma^*$

  $$L^* = \{\varepsilon, 01, 0101, 0001, 010101, 010001, 000101, \ldots\}$$

Codes

Def

- **Seien A und B Zeichenvorräte. Ein *Code* oder eine *Codierung* ist eine Abbildung**

  $$c: A \rightarrow B \quad \text{oder} \quad c: A^* \rightarrow B^*.$$

  (d.h. zwischen Zeichenvorräten A und B und auch zwischen Wörtern über Zeichenvorräten).
- **Die Bildmenge $\{b \in B \mid b=c(a), a \in A\}$ unter *c*, d.h. die Menge der Codewörter von *c*, wird ebenfalls *Code* genannt.**
- **Die Elemente von A werden auch *Klarzeichen* genannt, die Elemente von B auch *Codezeichen*.**
- **Die Abbildung eines Codes kann partiell sein, d.h. nicht für jedes Wort aus *A** muß eine Darstellung existieren.**

Decodierung

Def

- **In der Regel ist die Abbildung eines Codes injektiv, d.h. verschiedene Zeichen oder Wörter werden auf verschiedene Codewörter abgebildet.**
- **Dann ist auf der Bildmenge eine umkehrbare Codierung beschrieben durch eine Abbildung**

$$d: \{b \in B \mid b=c(a),\ a \in A\} \rightarrow A\ ,$$

die *Decodierung* genannt wird.

Binär-Codierung

Def

- **Für die Informationsdarstellung in Rechensystemen werden fast ausschließlich *Binär-Codierungen (Binär-Codes) von Alphabeten* betrachtet.**

  Dies sind Codierungen der Form

  $$c: A \rightarrow \{0,1\}^*,$$

  wobei *A* ein vorgegebenes Alphabet ist.

2.5 Graphen und Bäume

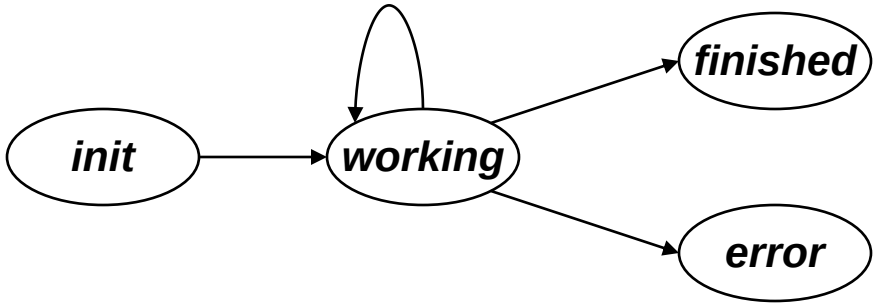
- **Graphen: *strukturelle Modelle***

  d.h. mit ihnen können identifizierte Objekte und ihre Beziehungen zueinander beschrieben werden.
- **Graphen werden in der Informatik oft verwendet.**
- **Hier:**
  - **als formales Modell des intuitiven Systembegriffs**
  - **als weiteres konkretes Repräsentierungssystem für Information**
- **Ein detaillierte Betrachtung von Graphen erfolgt in der Vorlesung Graphentheorie im 3. Semester.**
- **Bäume: spezielle Arten von Graphen.**

Graph

Def

- **Ein *gerichteter Graph* (engl. *graph*) *G = (V,E)* ist ein Paar, bestehend aus einer endlichen, nichtleeren Menge V zusammen mit einer Relation $E \subseteq V \times V$.**
  - **V heißt die Menge der *Knoten* (engl.: *vertices*) des Graphen *G.***
  - **E heißt die Menge der *Kanten* (engl.: *edges*) des Graphen *G.***
  - **Notation: Eine Kante $(a,b) \in E$ wird graphisch durch einen Pfeil von Knoten *a* zu Knoten *b* dargestellt.**
- **Beispiel:**
  ***G = (V,E)* mit *V = { init, working, finished, error }* und**
  E = { (init, working), (working, working), (working, finished), (working, error) }



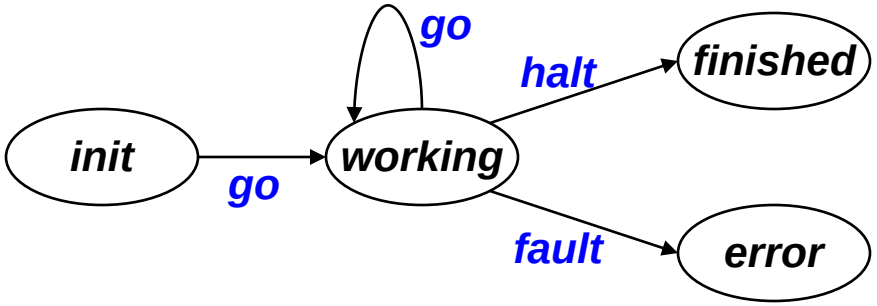
Graph (2)

- **Ungerichtete Graphen:**
  Bei Kanten werden Richtungen nicht angenommen,
  d.h. die Reihenfolge der Knoten zur Bezeichnung einer Kante ist unerheblich.
- **Ein Graph *G = (V,E)* heißt *markiert (bewertet, attributiert),***
  wenn jedem Knoten *(knotenmarkiert)* oder jeder Kante *(kantenmarkiert)* (oder beiden) durch eine Abbildung weitere Größen (Werte des Bildbereichs der Abbildung) zugeordnet sind.

Def

Beispiel

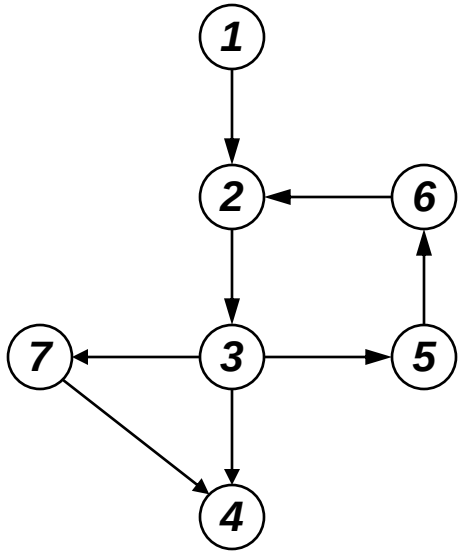
- ***G = (V,E)*** **mit**
- ***V = { init, working, finished, error }*** **und**
- ***E = { (init, working), (working, working), (working, finished), (working, error) }***
- **Kantenbewertung** ***action: E →{go, halt, fault}***



Gerichteter Kantenzug, gerichteter Weg

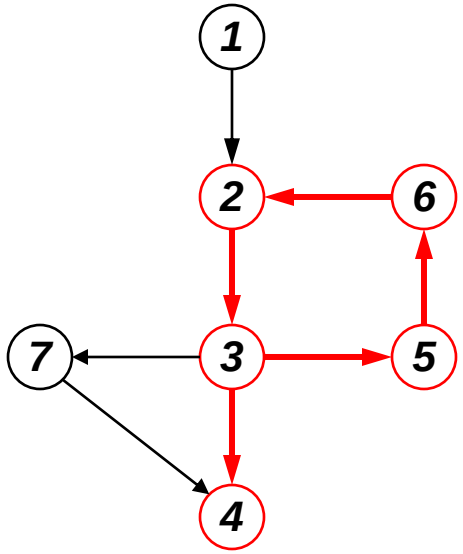
Def

- **Sei $G = (V,E)$ ein gerichteter Graph. Sei $z=(v_0, ..., v_n)$ eine Folge von n+1 Knoten des Graphen mit $(v_0,v_1), ..., (v_{n-1},v_n) \in E$; dann heißt z *gerichteter Kantenzug in G der Länge n*.**
  (Die Folge der Knoten ist durch Kanten verbunden, mehrfaches Durchlaufen von Knoten ist erlaubt).
- **Sei $G = (V,E)$ ein gerichteter Graph. Ein gerichteter Kantenzug in G $w=(v_0, ..., v_n)$ in G heißt *gerichteter Weg in G*, wenn alle Knoten verschieden sind.**



Gerichteter Kantenzug, gerichteter Weg

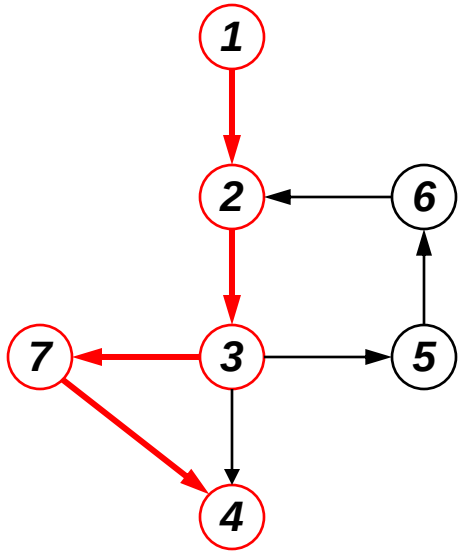
- **Sei *G = (V,E)* ein gerichteter Graph. Sei *z=(v_0, ..., v_n)* eine Folge von n+1 Knoten des Graphen mit *(v_0,v_1), ..., (v_{n-1},v_n)* $\in$*E;* dann heißt *z gerichteter Kantenzug in G der Länge n*.**
  (Die Folge der Knoten ist durch Kanten verbunden, mehrfaches Durchlaufen von Knoten ist erlaubt).
- **Sei *G = (V,E)* ein gerichteter Graph. Ein gerichteter Kantenzug in G *w=(v_0, ..., v_n)* in G heißt *gerichteter Weg in G*, wenn alle Knoten verschieden sind.**



- ***(3, 5, 6, 2, 3, 4)* ist ein gerichteter Kantenzug**

Gerichteter Kantenzug, gerichteter Weg

- Sei $G = (V,E)$ ein gerichteter Graph. Sei $z=(v_0, ..., v_n)$ eine Folge von n+1 Knoten des Graphen mit $(v_0,v_1), ..., (v_{n-1},v_n) \in E$; dann heißt *z gerichteter Kantenzug in G der Länge n*.
  (Die Folge der Knoten ist durch Kanten verbunden, mehrfaches Durchlaufen von Knoten ist erlaubt).
- Sei $G = (V,E)$ ein gerichteter Graph. Ein gerichteter Kantenzug in G $w=(v_0, ..., v_n)$ in G heißt *gerichteter Weg in G*, wenn alle Knoten verschieden sind.

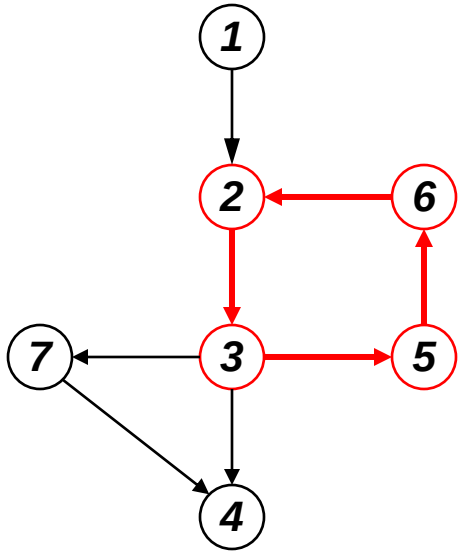


- *(3, 5, 6, 2, 3, 4)* ist ein gerichteter Kantenzug
- **Wege** sind z.B. *(1, 2, 3, 7, 4)* und *(2, 3, 5, 6)*

Zyklus

Def

- Sei $G = (V,E)$ ein gerichteter Graph und $w=(v_0, ..., v_n)$ ein gerichteter Weg in G. Dann heißt $c=(v_0, ..., v_n, v_{n+1})$ *Zyklus*, wenn $(v_n,v_{n+1}) \in E$ und $v_{n+1}=v_0$ (d.h. Anfangs- und Endknoten stimmen überein).
- Ein entarteter Zyklus $(v_i, v_i) \in E$ heißt *Schlinge* (von einem Knoten unmittelbar in ihn zurück).
- Ein Graph heißt *zyklenfrei*, wenn er keinen Zyklus enthält.
- Beispiel: $G = (V,E)$, $V=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,
  $E = \{ (1,2), (2,3), (3,4), (3,5), (5,6), (6,2), (3,7), (7,4) \}$

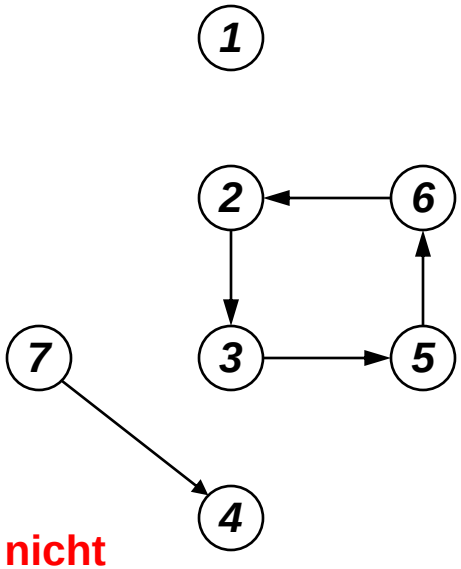


- $(2, 3, 5, 6, 2)$ ist ein Zyklus.

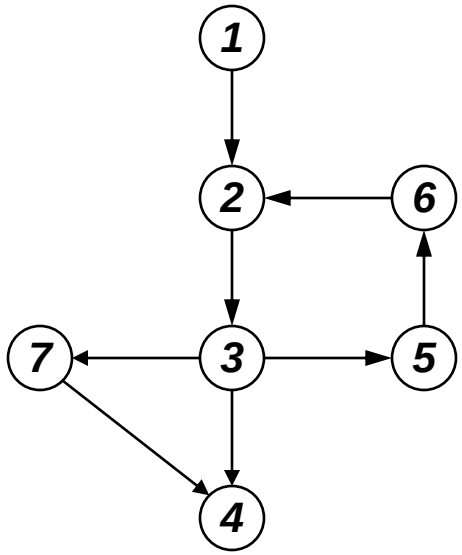
Zusammenhängender Graph

Def

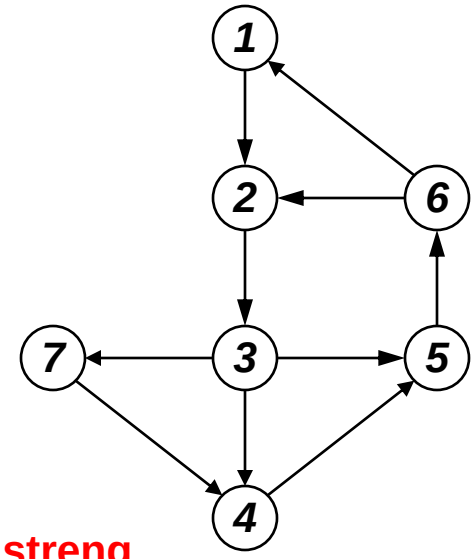
- **Ein gerichteter Graph *G = (V,E)* heißt *zusammenhängend,* wenn es für je zwei Knoten $v_1, v_2 \in V$ mindestens einen gerichteten Weg zwischen ihnen in G gibt.**
- **Der Graph heißt *streng zusammenhängend*, wenn es für je zwei Knoten $v_1, v_2 \in V$ einen Weg von v_1 nach v_2 und umgekehrt gibt (d.h. jeder Knoten kann von jedem anderen aus erreicht werden).**
- **Beispiel:**



nicht zusammenhängend



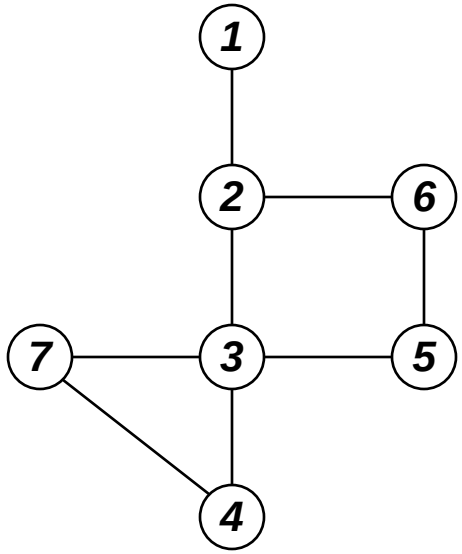
zusammenhängend nicht streng zusammenhängend



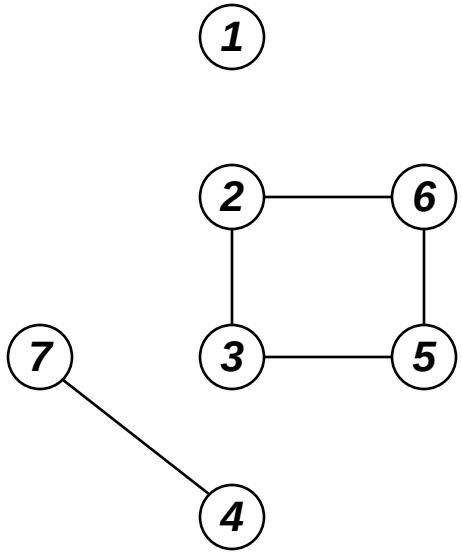
streng zusammenhängend

Zusammenhängender Graph (2)

- **Ergänzung: Ein ungerichteter Graph heißt zusammenhängend, wenn es für je zwei Knoten $v_1, v_2 \in V$ mindestens einen ungerichteten Weg zwischen ihnen gibt.**
- **Beispiel:**



zusammenhängend



nicht zusammenhängend

Gerichteter Baum

Def

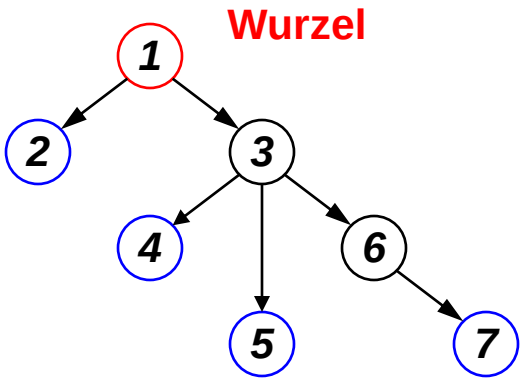
- Sei $B = (V,E)$ ein gerichteter Graph. B heißt *baumartig* oder kurz *Baum* (engl.: *tree*), wenn gilt:
  - B ist zusammenhängend und zyklenfrei.
  - Es gibt genau einen Knoten $v_w \in V$, in den keine Kante mündet. Dieser Knoten heißt *Wurzel* des Baumes.
  - Von der Wurzel v_w des Baumes gibt es zu jedem anderen Knoten $v \in V$, $v \neq v_w$ genau einen gerichteten Weg.
  - Ein Knoten heißt *Blatt* oder *Endknoten*, wenn er keine ausgehende Kante besitzt, d.h. wenn kein v' existiert mit $(v,v') \in E$.

Beispiel:

$B = (V,E)$

$V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$E = \{ (1,2), (1,3), (3,4), (3,5), (3,6), (6,7) \}$

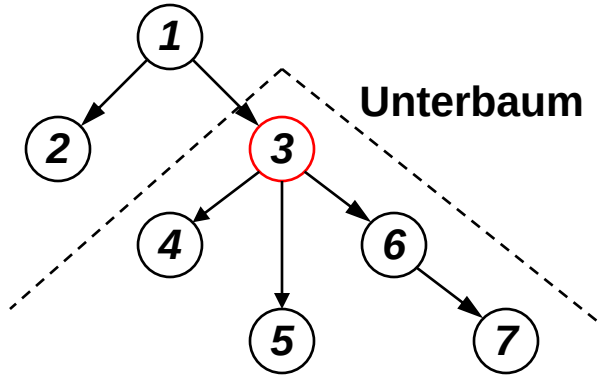


Die Knoten 2, 4, 5 und 7 sind die Blätter von B.

Gerichteter Baum (2)

Def

- Die Knoten $v' \in V$, die von einem Knoten *v* durch eine einzige Kante $(v,v') \in E$ erreicht werden, heißen *Söhne* oder *Kinder* von *v* (umgekehrt *Vater*).
- Die Gesamtheit aller von v (auch über Zwischenknoten) erreichbaren Knoten heißen die *Nachfahren* von *v*. Diese bilden wiederum einen Baum, für den *v* die Wurzel ist. Dieser Baum heißt auch der von *v aufgespannte Unterbaum.*
- Die Knoten auf dem Weg von der Wurzel bis vor *v* heißen die *Vorfahren* von *v*.

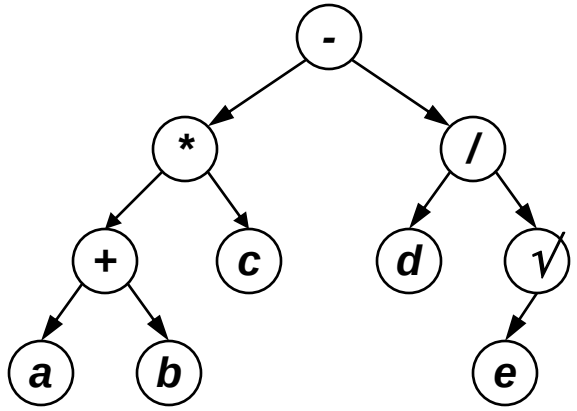


- Die Knoten 2 und 3 sind die Söhne von 1.
- 4, 5, 6, 7 sind die Nachfahren von 3.
- 1 und 3 sind die Vorfahren von 5.

Binärer Baum

Def

- **Sei *B = (V,E)* ein gerichteter Baum. *B* heißt *binärer Baum* oder *Binärbaum*, wenn jeder Knoten höchstens zwei Söhne hat und zwischen dem *linken Unterbaum* und dem *rechten Unterbaum* unterschieden wird.**
- **Beispiel: Arithmetischer Ausdruck *(a+b)*c-d/√e***



Operanden sind Blätter

- **Es werden im Baum keine Klammern benötigt**
- **vgl. Eingabe bei Taschenrechnern**

2.6 Algorithmen

- **In diesem Abschnitt soll ein weiterer Aspekt von Informatik angerissen werden:**

  "Informatik ist die Wissenschaft von der systematischen Verarbeitung von Information" (vgl. Kap.1).
- **Die automatisierte Verarbeitung verlangt, dass die Verarbeitungsvorschrift**
  - **in ihrer Bedeutung exakt festgelegt ist,**
  - **eine geeignete Repräsentation in einer formalen Sprache oder einer graphischen Darstellungsform besitzt**
  - **und letztlich durch einen Prozessor eines Rechensystems ausführbar ist.**
- **Der in der Informatik verwendete Begriff für derartige Verarbeitungsvorschriften ist der des *Algorithmus*.**

Einordnung

- **In der theoretischen Informatik**
  - **Algorithmus-Begriff wird exakt über math. Konzepte eingeführt**
  - **z.B. Markov-Algorithmen, Turing-Maschinen.**
- **Hier: *intuitiver* Algorithmus-Begriff**
- **Konkrete Algorithmen (z.B. für Sortierprobleme unter Nutzung bestimmter Datenstrukturen) werden in der Vorlesung Informatik I behandelt.**

Einordnung (2)

- **Herkunft des Begriffs Algorithmus (vgl. Kap.1):**
  - **Rechenbuch von Muhammed ibn Musa Al-Chwarizmi**
  - **ca. 1750 in Zusammenhang mit den vier Grundrechenarten benutzt**
  - **Ab Mitte des letzten Jahrhunderts zur Bezeichnung einer allgemeinen Handlungs- und Bearbeitungsvorschrift**

- **Nicht-präzise Verarbeitungsvorschriften aus dem täglichen Leben:**
  - **Kochrezept**
  - **Strick- und Häkelmuster**
  - **Bedienungsanleitung / Gebrauchsanweisung**

Intuitiver Algorithmus-Begriff

Def

- **Ein *Algorithmus* ist ein Verfahren mit einer *präzisen* (d.h. in einer genau festgelegten Sprache abgefaßten) *endlichen* Beschreibung unter Verwendung *effektiver* (d.h. tatsächlich ausführbarer) elementarer Verarbeitungsschritte zur Lösung einer Klasse gleichartiger Probleme.**
- **Anmerkungen:**
  - **Unterscheidung zwischen dem Algorithmus und seiner Beschreibung (d.h. Repräsentation).**
  - **Das aus einer Klasse speziell zu bearbeitende Problem wird durch Eingabe-Parameter bestimmt.**
  - **Algorithmen liefern für Eingaben i.d.R. Resultate als Ausgaben. Algorithmus entspricht in diesem Sinne einer partiellen Abbildung.**
  - **Zur Lösung einer Problemklasse gibt es i.d.R. verschiedene Algorithmen.**
  - **Abhängig von den zur Verfügung stehenden elementaren Aktionen können Algorithmen zur Lösung derselben Problemklasse sehr unterschiedlich ausfallen.**

Wichtig

- **Unabhängig von der Beschreibungsform ist es bei Algorithmen wichtig, die folgenden Aspekte zu unterscheiden:**
  - **die Aufgabenstellung, d.h. die zu lösende Problemklasse.**
  - **Die Art und Weise, wie die Aufgabe bewältigt wird, unterschieden nach**
    - **den elementaren Verarbeitungsschritten, die zur Verfügung stehen,**
    - **der Beschreibung der Auswahl der einzelnen auszuführenden Schritte.**

Eigenschaften von Algorithmen

- **Merkmale eines Algorithmus zu seiner Beurteilung**
- **Ein Algorithmus heißt *für eine Eingabe***

Def

  - ***terminierend*: endet stets nach endlich vielen Schritten**
  - ***deterministisch*: keine Freiheit in der Auswahl der Verarbeitungsschritte**
  - ***determiniert*: Resultat/Endzustand des Algorithmus eindeutig bestimmt**
  - ***korrekt*: im Endzustand liegt eine Lösung des Problems vor**
  - ***sequentiell*: Folge von Verarbeitungsschritten**
  - ***parallel*: gewisse Verarbeitungsschritte nebeneinander ausgeführt**

- **Ein Algorithmus heißt insgesamt *terminierend (deterministisch, determiniert, korrekt, sequentiell)*, wenn der Algorithmus diese Eigenschaft für jede zulässige Eingabe besitzt.**

Beispiel

- **Euklids Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers (ggT).**
- **<u>Aufgabenstellung</u>: Gegeben seien zwei ganze Zahlen *a* und *b* mit *a>0* und *b>0*. Gesucht wird der größte gemeinsame Teiler *ggT(a,b)* von *a* und *b*.**
- **<u>Algorithmus</u> für *ggT(a,b)* nach Euklid:**
  - **(1) falls *a=b*, dann ist *ggT(a,b)* = *a*;**
  - **(2) falls *a<b*, dann wende den Algorithmus *ggT* an auf *(a,b-a)*.**
  - **(3) falls *b<a*, dann wende den Algorithmus *ggT* an auf *(a-b,b)*.**
- **Anmerkungen:**
  - **arithm. Operation "-" und Vergleichsoperationen "<" und "=" werden als die elementaren Verarbeitungsschritte angenommen.**
  - **Läßt man die Einschränkungen *a>0* und *b>0* weg, so erhält man einen Algorithmus, der für ungleiche negative Zahlen nicht terminiert.**
  - **Der Algorithus ist**
    - **sequentiell**
    - **deterministisch (damit auch determiniert, Umkehrung gilt nicht!)**
    - **korrekt.**

Beobachtung

- **Klassische Elemente in der Beschreibung von Algorithmen sind:**
  - **Ausführung elementarer Schritte**
  - **Fallunterscheidung über Bedingungen**
  - **Wiederholung und Rekursion**
- **Diese Elemente treten in ähnlicher Form in allen Systemen zur Repräsentierung von Algorithmen auf.**
- **Sie bilden auch die Grundlage jeder Programmierausbildung (vgl. Vorlesung Programmieren 1).**

Güte von Algorithmen

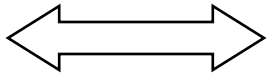
- **Beim Vergleich von Algorithmen interessieren nicht nur die o.a. Eigenschaften, vielmehr sind auch Maße (Vergleichsmaßstäbe) für ihre Effizienz gefragt.**
- **Unter der *Komplexität* eines Algorithmus versteht man den Aufwand in Abhängigkeit vom Anfangszustand, der durch die Ausführung des Algorithmus entsteht, gemessen in**
  - ***Speicherbedarf* zur Speicherung von internen Zuständen usw.**
  - ***Zeitbedarf*, gemessen in der Anzahl der benötigten Schritte**

Def

Güte von Algorithmen (2)

- **I.d.R. besteht Abhängigkeit zw. Speicherbedarf und Zeitbedarf:**

kleiner Zeitbedarf
großer Speicherbedarf
(zeitoptimiert)



kleiner Speicherbedarf
großer Zeitbedarf
(speicheroptimiert)

Trade-off

- **Eine ausführlichere Behandlung der Komplexität von Algorithmen erfolgt in den Vorlesungen Informatik 1 und 2**

Repräsentierung von Algorithmen

- **Die Beschreibung eines Algorithmus erfolgt in einer Sprache. Beispiele sind etwa:**
  - **natürliche Sprache (Kochrezept: "Man nehme ...")**
  - **halbformale Sprache (Strickmuster: * 2 re, 2 li; ab * wdh. bis Ende)**
  - **mathematische Formeln ($f(x)=3x^2+7x+5$)**
  - **Graphen**
    - **z.B. Straßenkarte für eine Zielanfahrt,**
    - **elektrischer Schaltplan,**
    - **Unified Modeling Language UML (vgl. Vorlesung Softwaretechnik).**
  - **Programmiersprachen verschiedener Abstraktionsebenen und Anwendungsbereiche (vgl. Vorlesung Programmieren 1)**
    - **progr. Taschenrechner,**
    - **Maschinensprache**
    - **Assembler,**
    - **C/C++, Java, ... (Universelle Programmiersprachen)**
    - **APL (Mathematik),**
    - **Structured Query Language (SQL) (Datenbanken).**
  - **Hardware-Beschreibungssprachen (vgl. Vorl. Rechnerarchitektur)**
    - **z.B. VHDL (Beschreibung von Verfahren, die in Hardware ablaufen)**

Programmiersprachen, Programme

- **Für die Informatik sind nur Sprachen interessant, die eine exakte Festlegung der Algorithmen erlauben, da nur so eine maschinelle Verarbeitung erfolgen kann.**

Def

- ***Syntax* einer Sprache: definiert die zulässigen Anordnungen der Sprachelemente auf der Ebene der Repräsentation.**
- ***Semantik* einer Sprache: definiert eine Interpretation und legt fest, wie die Sprachelemente in Hinblick auf das Problemlösungsverfahren zu interpretieren sind.**
- ***Programmiersprache*: formale Sprache zur Repräsentation von Algorithmen, ein in einer solchen Programmiersprache beschriebener Algorithmus heißt *Programm*.**

Ausführung eines Programms

Def

- *Prozessor*: eine ein Programm ausführende Instanz
- *Prozess*: Ausführung eines Programms für ein konkretes Problem
- Vorgehensweise: Prozessor liest die Repräsentation des Programms, interpretiert diese in Hinblick auf die Problemlösung. Er führt die darin vorgesehenen elementaren Aktionen aus.
- Die Ausführung paralleler Algorithmen führt zu nebenläufigen Prozessen.

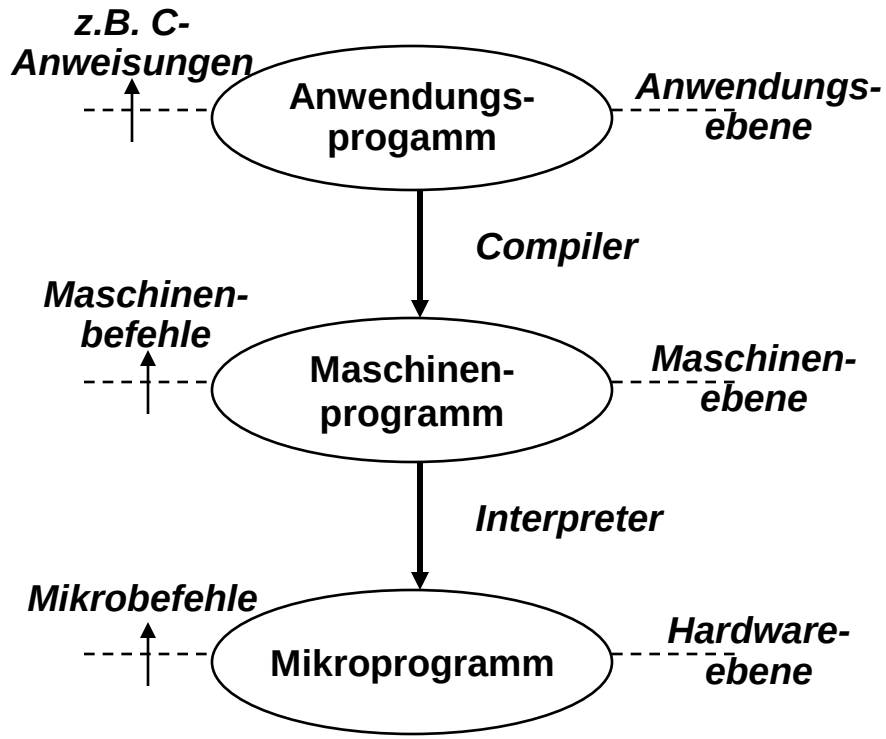
Anmerkungen

- **Nur wenige Programmiersprachen bieten ein Konzept für Parallelität.**
- **Nebenläufigkeit ("Quasiparallelität") wird detailliert in der Vorlesung Betriebssysteme (4. Semester) besprochen.**
- **Betriebssysteme unterstützen mit ihrem Prozesskonzept die nebenläufige Ausführung von Programmen (bei Vorhandensein mehrerer Prozessoren in einem Rechensystem findet die Ausführung tatsächlich parallel statt).**

Programme verschiedener Abstraktionsebenen

- Algorithmen sind auf verschiedenen Abstraktionsebenen definierbar. Diese gehen einher mit dem angenommenen Vorrat an elementaren Aktionen.
- Unterschieden mindestens: *Maschinenebene* und *Anwendungsprogrammebene*.
- Übersetzung von Programmen zwischen verschiedenen Abstraktionsebenen:
  - Compiler
  - Interpreter

Beispiel:



Abstraktionsebenen in Anwendungsprogrammen 2.6

- **Moderne Programmiersprachen (wie C++, Java, Smalltalk) unterstützen die Definition problemangepaßter (benutzerdefinierter) Abstraktionsebenen.**
- **Damit ist es dem Anwendungsprogrammierer möglich, sich im Sinne von abstrakten Maschinen eigene, auf der betrachteten Ebene als elementar angesehene Objekte und Aktionen zu definieren.**
- **Vorteil:**
  Übergang zwischen den verschiedenen Arbeitsphasen bei der Realisierung informationstechnischer Systeme wird erleichtert (von Systemanalyse über Systementwurf zur Implementierung; vgl. Vorlesungen Programmieren 2 und Softwaretechnik).
- **Diese Abstraktionsebenen innerhalb eines Anwendungsprogramms sind auf der Maschinenebene heutiger Prozessoren nicht sichtbar.**

Quellen

- M. Broy: "Informatik - Eine grundlegende Einführung", Teil 1, Springer-Verlag, 1992 (Kap. 1, 2)
- U. Rembold, P. Levi: "Einführung in die Informatik für Naturwissenschaftler und Ingenieure", 3. Auflage, Hanser-Verlag, 1999 (Kap. 2.2.1, 2.7)
- D. Werner u.a.: "Taschenbuch der Informatik", Fachbuchverlag Leipzig, 1995 (Kap. 2.3.1)
- U. Schöning: "Theoretische Informatik - kurz gefaßt", Spektrum-Verlag, 1997