Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

Kapitel 3

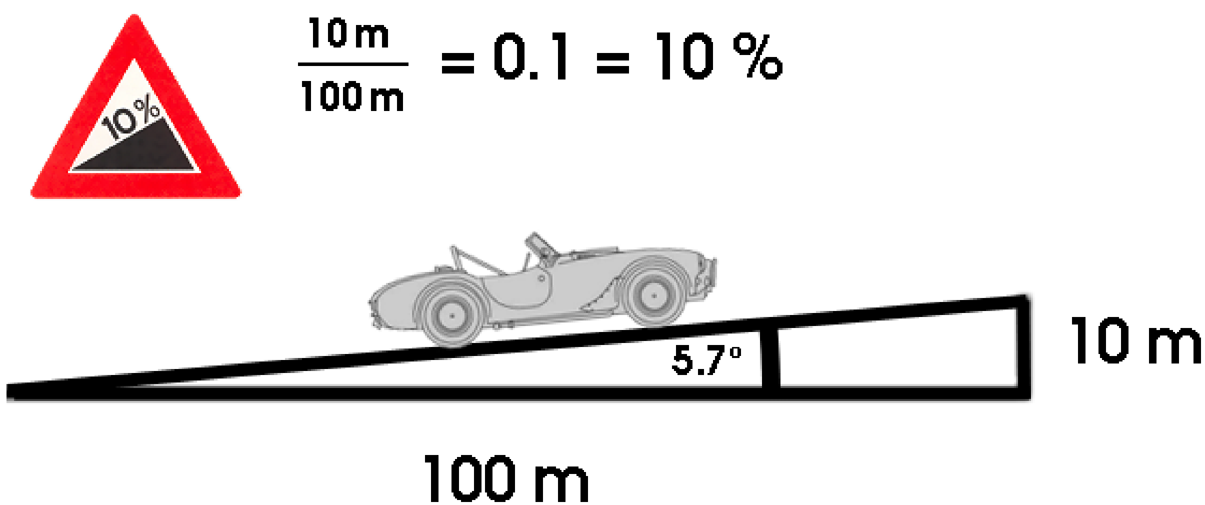
Differenzialrechnung

Inhalt

3.1 Die Ableitung

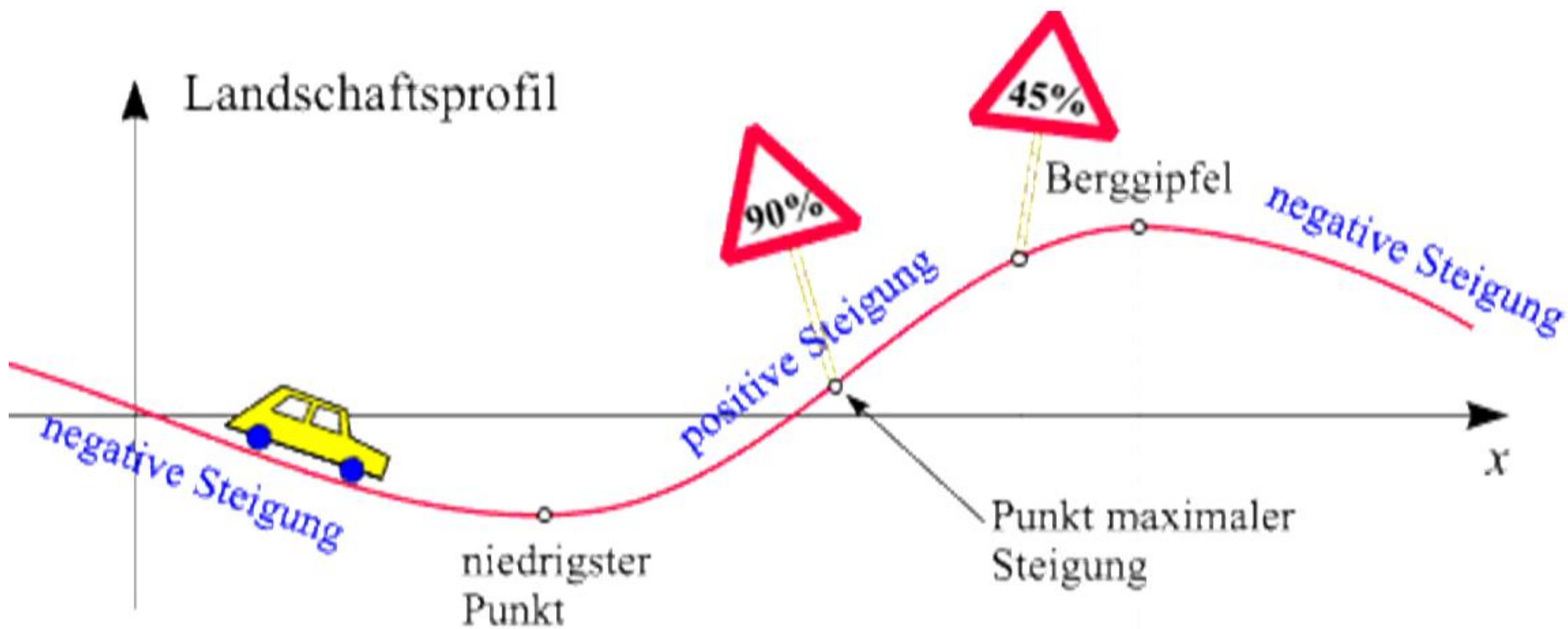
Steigung von Geraden

Bei einer Gerade ist die Steigung konstant. Wir können sie mit einem Steigungsdreieck berechnen: m = „y-Differenz durch x-Differenz“.

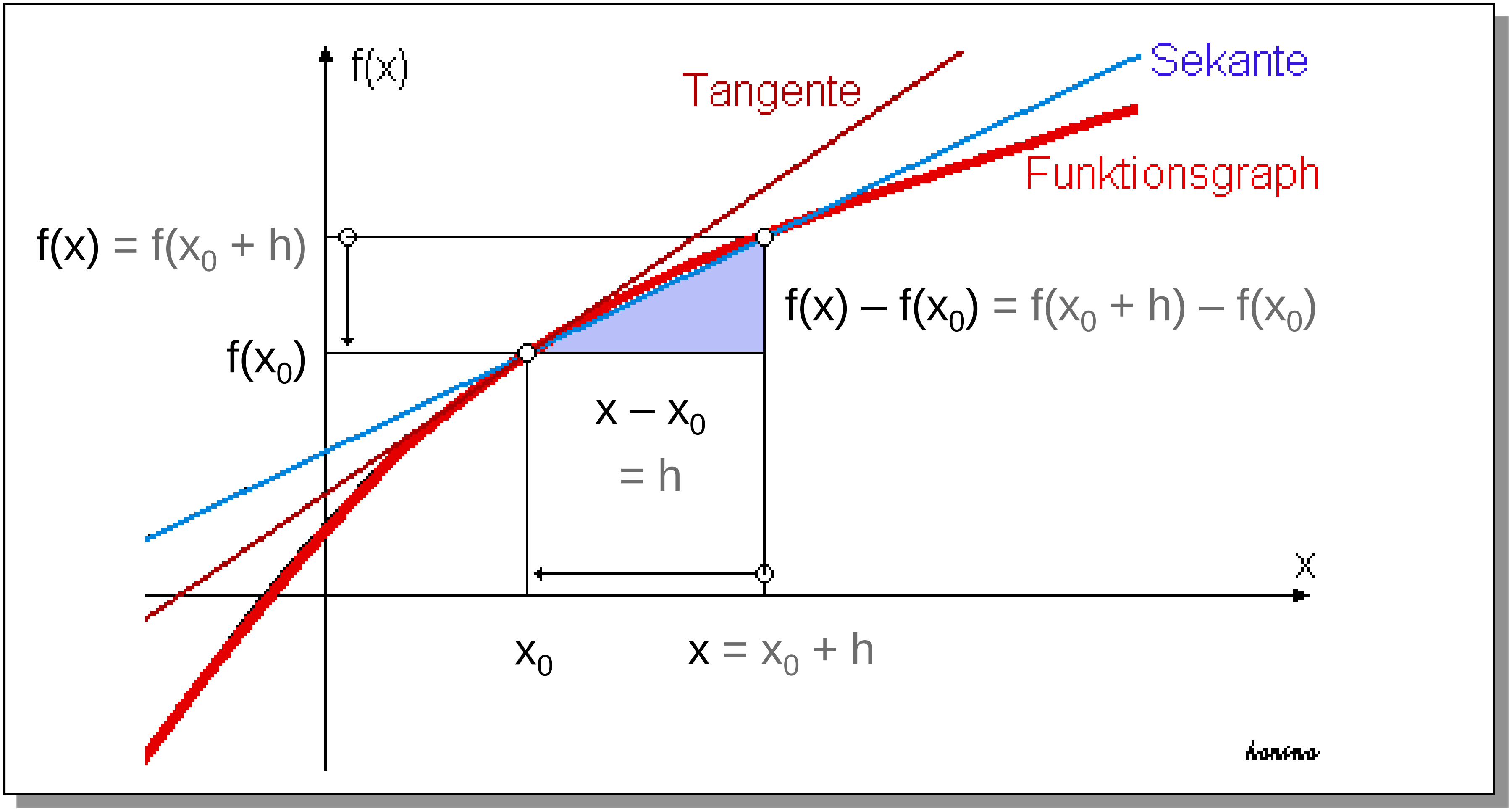


Steigung einer Kurve in einem Punkt

Bei einer Kurve hängt die Steigung vom Punkt ab.



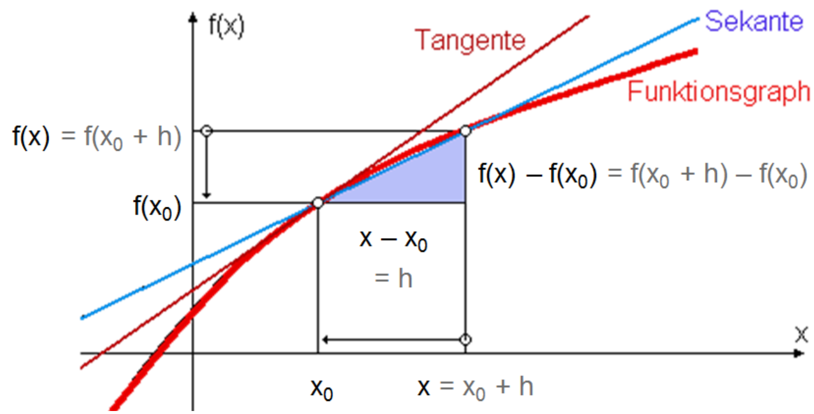
Sekantensteigung



Sekantensteigung

Eine **Sekante** ist eine Gerade durch 2 Punkte eines gekrümmten Funktionsgraphen. Die Sekante durch (x_0, y_0) und (x, y) hat die Steigung

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Dieser Quotient heißt **Differenzenquotient**.

Mit $h = x - x_0$ bzw. $x = x_0 + h$ ist die Sekantensteigung gleich

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tangentensteigung

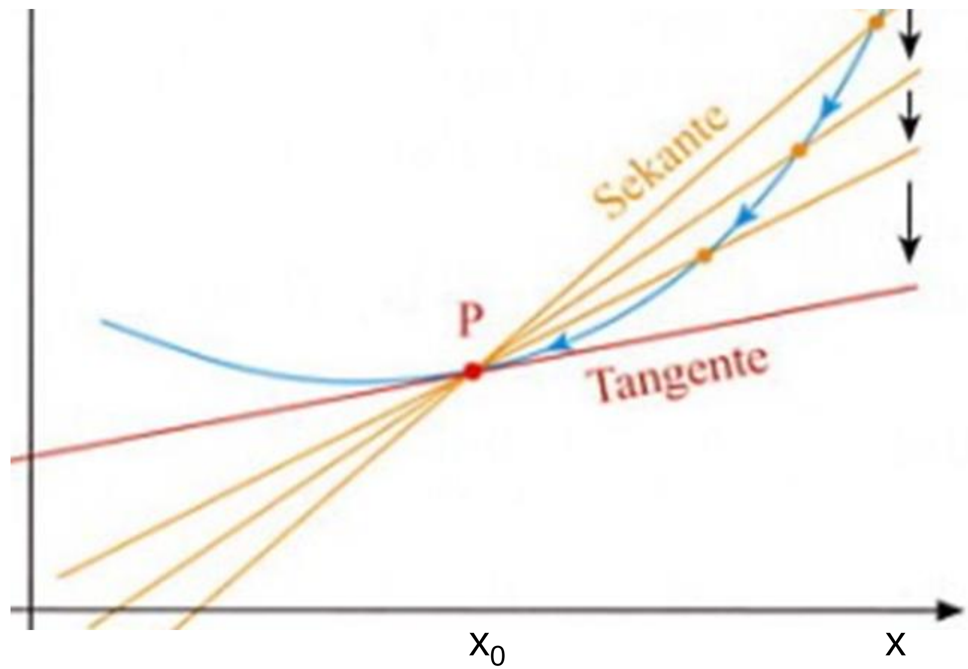
Die **Tangente** durch (x_0, y_0) ergibt sich als Grenzgerade der Sekante, wenn x gegen x_0 geht. Ihre Steigung ergibt sich daher als Grenzwert der Sekantensteigungen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dieser Quotient heißt **Differentialquotient**.

Mit $x = x_0 + h$ ist dies gleich

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Die Ableitung

Definition: Eine Funktion f heißt **differenzierbar** an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird mit $\mathbf{f'(x_0)}$ bezeichnet und **Ableitung** von f an der Stelle x_0 genannt.

Beispiel: Die Ableitung von $f(x) = x^3$ ist an der Stelle $x_0 = 1$ ist gleich

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h+3h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2)=3$$

Übung

Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = x^2 + 1$ an der Stelle $x_0 = 2$.

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \ldots$$

Zusammenhang von Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Satz. Wenn eine Funktion f an einer Stelle differenzierbar ist, dann ist sie dort auch stetig.

Beweis. Wenn f differenzierbar ist, dann existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten.
Daraus ergibt sich wie folgt, dass der Grenzwert von f mit dem Funktionswert von f übereinstimmt, also f stetig ist.

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) + f(x_0)\right)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0)\right)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) + \lim_{x \to x_0} f(x_0)$$

$$= \quad f'(x_0) \quad \cdot \quad 0 \quad + \quad f(x_0)$$

$$= f(x_0)$$

Betragsfunktion: stetig, aber nicht differenzierbar

Die Umkehrung dieses Satzes gilt im Allgemeinen nicht. Nicht jede in x_0 stetige Funktion ist dort auch differenzierbar.

Beispiel: Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ zwar stetig aber nicht differenzierbar: Der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert nicht, denn der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 = 1$$

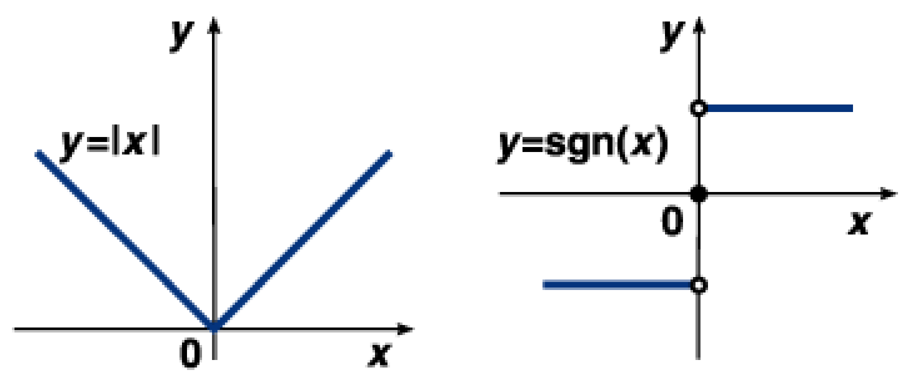
ist ungleich dem linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{(-x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (-1) = -1$$

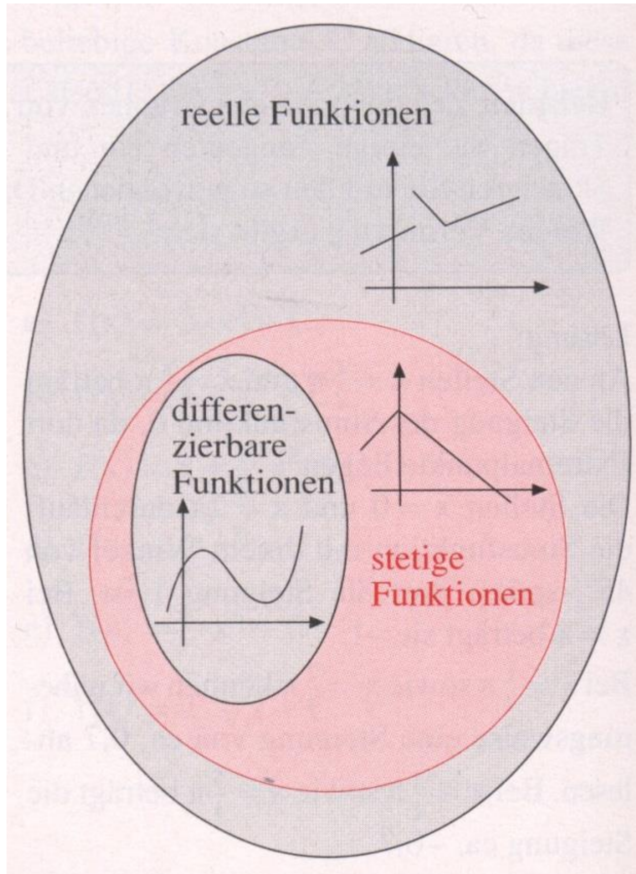
„Knick“: nicht differenzierbar!

Funktionen, deren Graphen Knicke oder Sprungstellen haben, sind an diesen Stellen nicht differenzierbar. An Sprung- oder Knickstellen hat der Graph keine eindeutige Tangente, der Differentialquotient (Grenzwert!) existiert dort nicht.

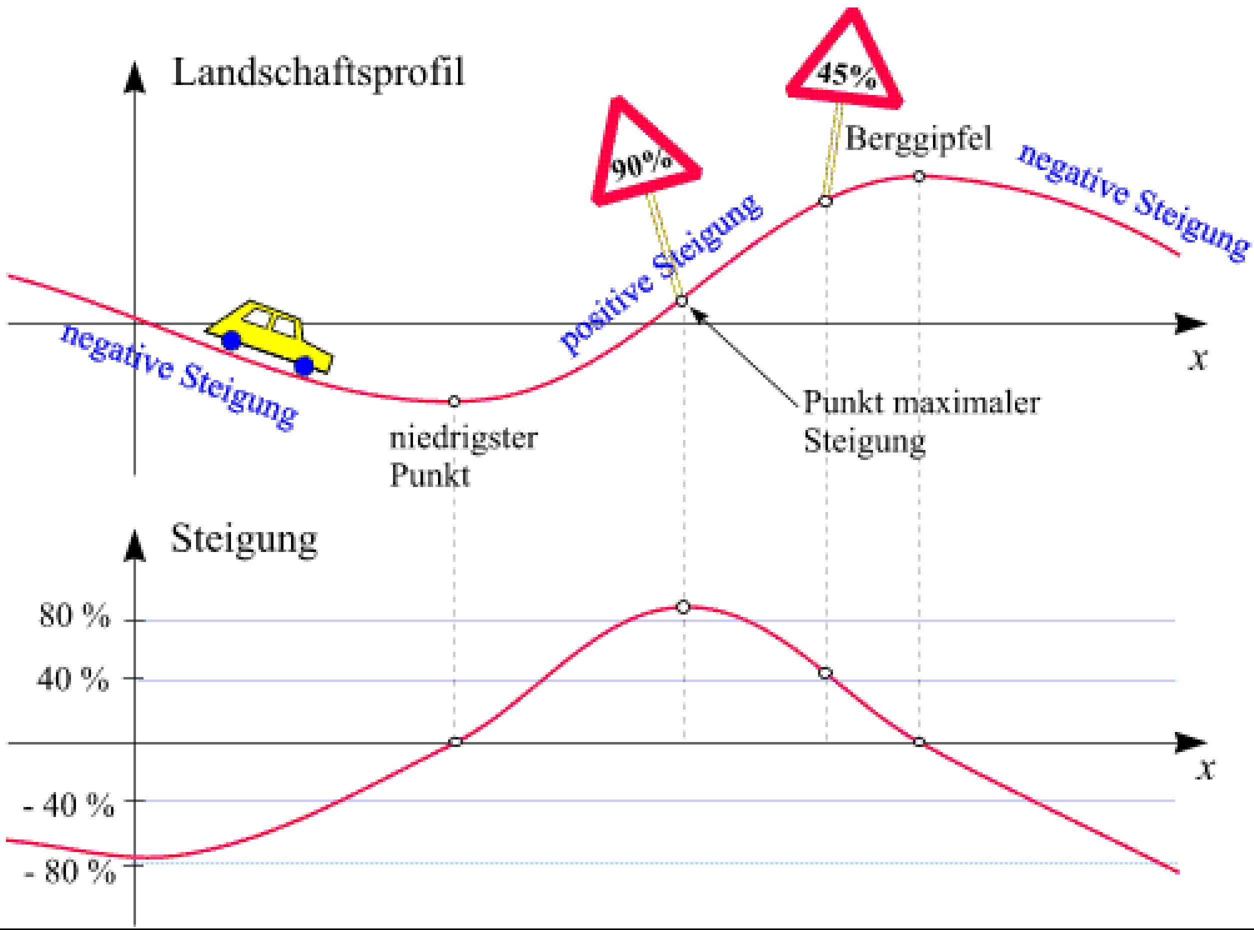
Beispiele: Folgende Funktionen sind an $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.



Einteilung reeller Funktionen



Ableitungsfunktion



→Geogebra:

Skateboard

Ableitungsfunktion

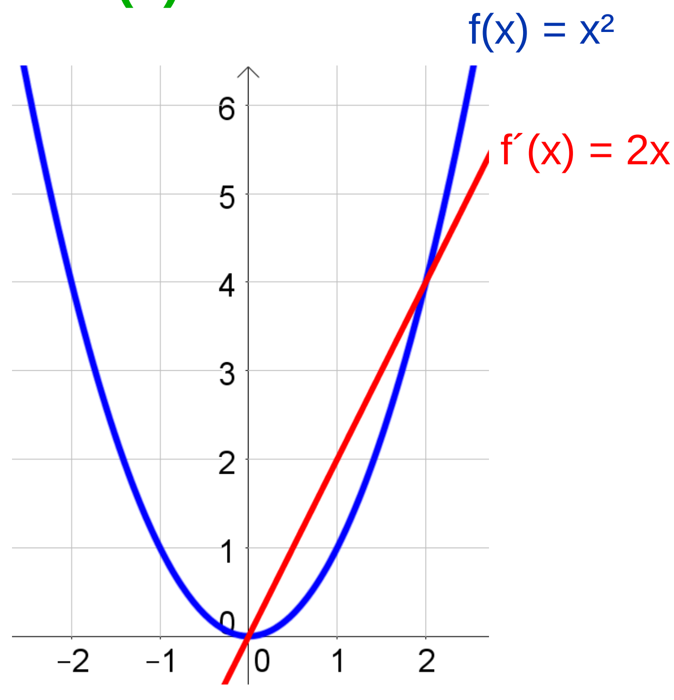
Wenn man jeder Stelle x die dortige Steigung f′(x) zuordnet, erhält man eine weitere Funktion, die **Ableitungsfunktion f′(x)** von f.

Beispiel: Die Ableitungsfunktion von $f(x) = x^2$ ist gleich

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

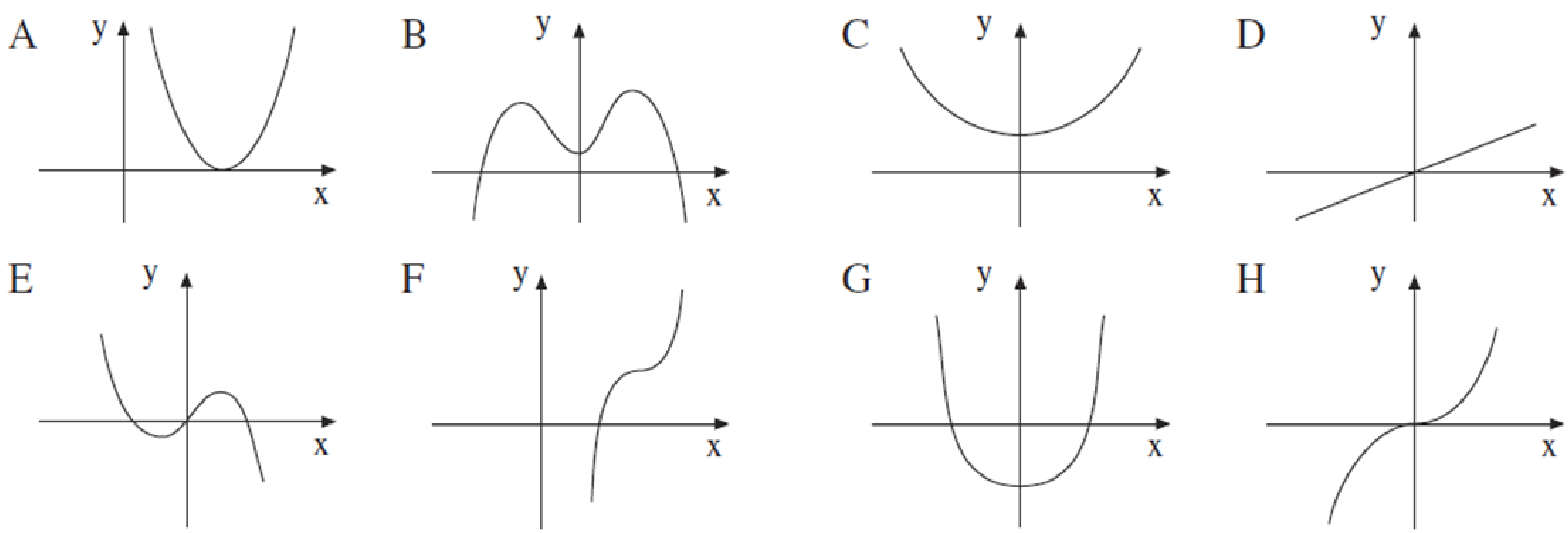
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

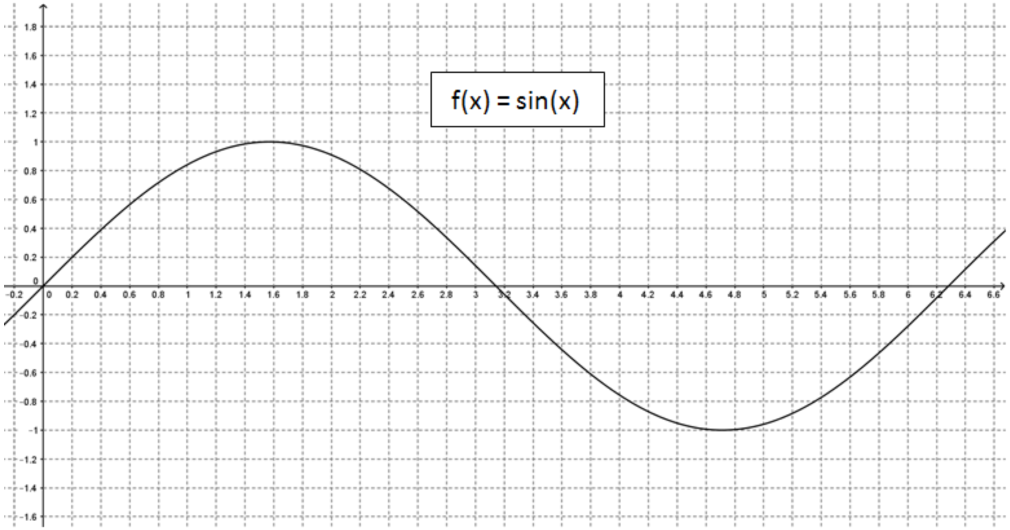


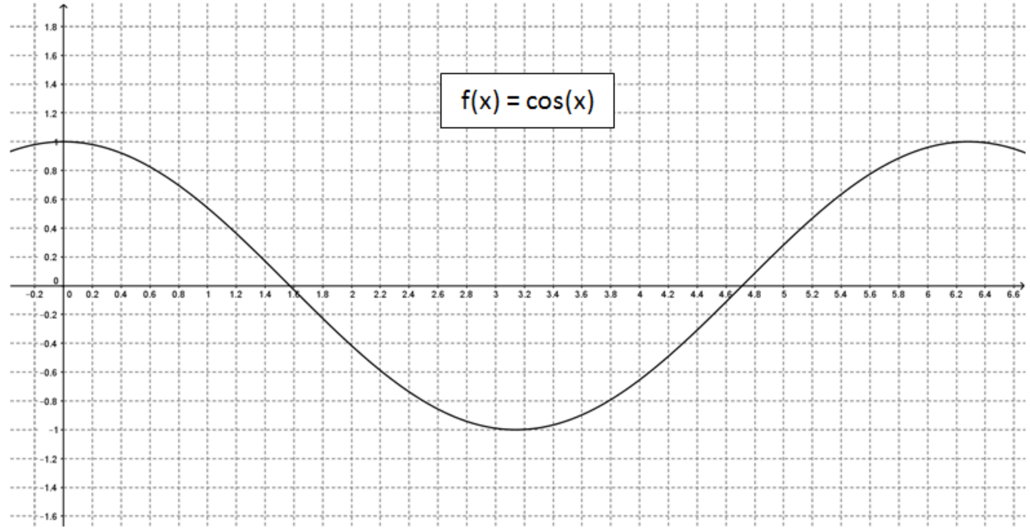
Übung

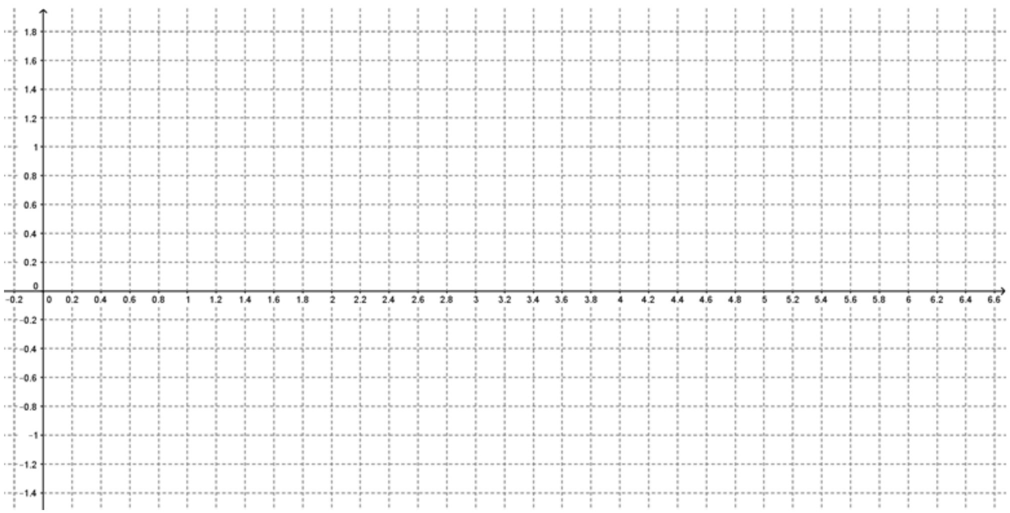
Hier sind vier Funktionen und ihre Ableitungsfunktionen zu sehen.
Welche Paare gehören zusammen?

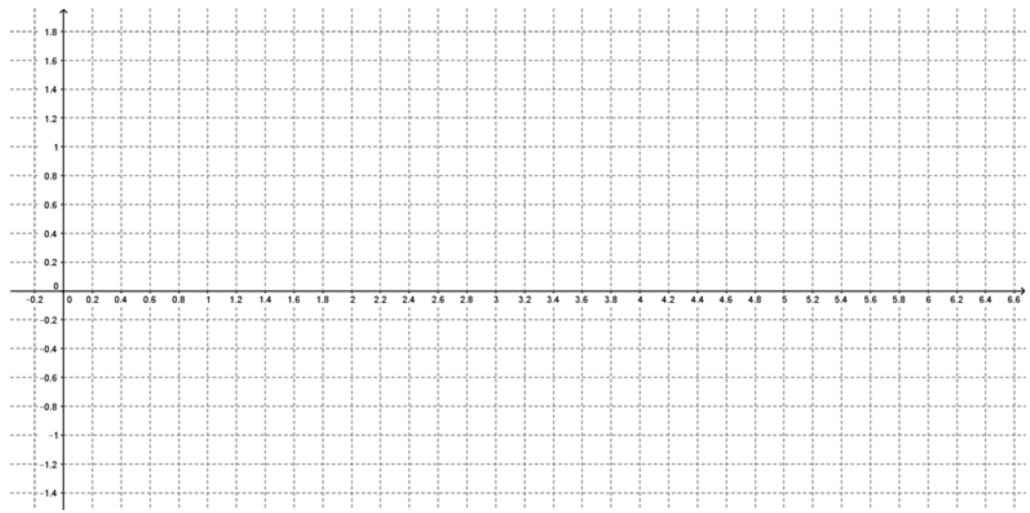


Ableitungen von sin(x) und cos(x)









Ableitungen von sin(x) und cos(x)

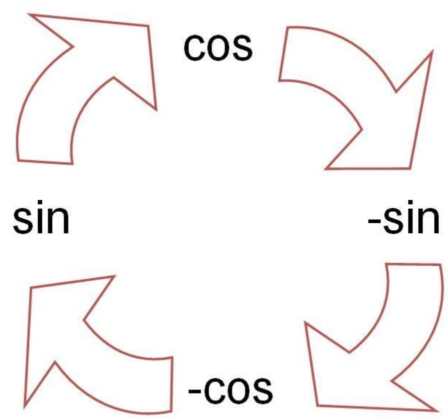
Satz. Die Ableitungsfunktion der Sinusfunktion ist die Kosinusfunktion:

$$(\sin(x))' = \cos(x).$$

Die Ableitung der Kosinusfunktion ist die *negative* Sinusfunktion:

$$(\cos(x))' = -\sin(x).$$

Merkschema:



Höhere Ableitungen

Die Ableitung der Ableitung von f heißt **zweite Ableitung f´´**. Usw.

Beispiel: $f(x) = 1/3\ x^3$

$$1.\ \text{Ableitung:}\quad d(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{3}\cdot(x_0+h)^3 - \frac{1}{3}\cdot x_0^3}{h} = \frac{\frac{1}{3}\cdot(x_0^3+3x_0^2\cdot h+3x_0\cdot h^2+h^3)-\frac{1}{3}\cdot x_0^3}{h}$$

$$= x_0^2 + x_0\cdot h + \frac{1}{3}h^2$$

$$\Rightarrow\quad y' = f'(x_0) = \lim_{h\to 0}(x_0^2 + x_0\cdot h + \frac{1}{3}h^2) = x_0^2$$

$$2.\ \text{Ableitung:}\quad d(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{(x_0^2+2x_0\cdot h+h^2)-x_0^2}{h} = 2x_0 + h$$

$$\Rightarrow\quad y'' = f''(x) = \lim_{h\to 0}(2x_0 + h) = 2x_0$$

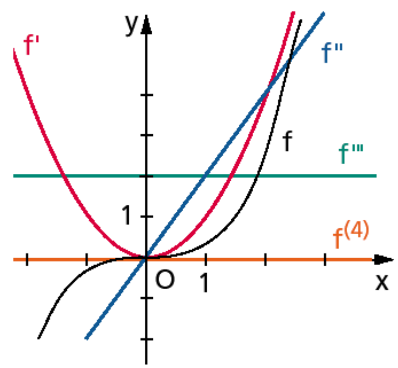
$$3.\ \text{Ableitung:}\quad d(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{2(x_0+h)-2x_0}{h}$$

$$= \frac{2x_0+2h-2x_0}{h} = 2$$

$$\Rightarrow\quad y''' = f'''(x) = \lim_{h\to 0}(2) = 2$$

$$4.\ \text{Ableitung:}\quad d(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{2-2}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$\Rightarrow\quad y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \lim_{h\to 0}(0) = 0$$



Ableitung von Potenzen

Potenzregel: Für die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbf{N}$ gilt:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Beispiel: $f(x) = x^{2019}$ hat die Ableitung $f'(x) = 2019 \cdot x^{2020}$.

Beweis der Potenzregel:

Schreibt man den Differenzenquotienten in der Form $d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, so ergibt sich für $f(x) = x^n$: $d(x) = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$, $x \neq x_0$

Wegen $x \neq x_0$ ist die Polynomdivision ausführbar und ergibt:

$(x^n - x_0^n) : (x - x_0) = x^{n-1} + x_0 \cdot x^{n-2} + x_0^2 \cdot x^{n-3} + \ldots + x_0^{n-2} \cdot x + x_0^{n-1}$

Man erhält die Ableitung, indem der Grenzwert für $x \to x_0$ gebildet wird:

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{x \to x_0} d(x) &= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x_0 \cdot x^{n-2} + x_0^2 \cdot x^{n-3} + \ldots + x_0^{n-2} \cdot x + x_0^{n-1}) \\ &= x_0^{n-1} + x_0 \cdot x_0^{n-2} + x_0^2 \cdot x_0^{n-3} + \ldots + x_0^{n-2} \cdot x_0 + x_0^{n-1} \\ &= x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \ldots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1} = n \cdot x_0^{n-1} \qquad \text{w.z.b.w.} \end{aligned}$$

Verallgemeinerung der Potenzregel

Die Potenzregel ist auch für rationale Exponenten gültig.

Beispiel für negative Exponenten:

$f(x) = 1/x^3 = x^{-3}$ hat die Ableitung $f'(x) = -3 \cdot x^{-4} = -3/x^4$

Da man Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten schreiben kann, können wir mit der Potenzregel auch Wurzelfunktionen ableiten.

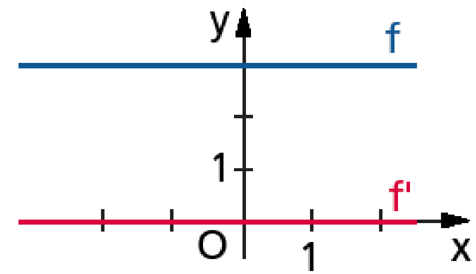
Beispiele für gebrochene Exponenten:

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ hat die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$ hat die Ableitung $f'(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5 \cdot \sqrt[5]{x^2}}$

Konstanten-, Faktor- und Summenregel

Konstantenregel: Für eine konstante Funktion $f(x) = c$ mit $c \in \mathbf{R}$ gilt: $f'(x) = 0$.



Beispiel: $f(x) = 3$ hat die Ableitung $f'(x) = 0$ (Abb.).

Faktorregel: Für die Funktion $f(x) = c \cdot g(x)$ mit $c \in \mathbf{R}$ gilt:

$$f'(x) = c \cdot g'(x).$$

Summenregel: Für die Funktion $f(x) = g(x) + h(x)$ gilt:

$$f'(x) = g'(x) + h'(x).$$

Beispiel: $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 9x + 7$ hat die Ableitung

$$f'(x) = 12x^2 + 10x - 9.$$

Produktregel

Ist eine Funktion f das Produkt zweier Funktionen u und v, so darf man *nicht faktorweise* ableiten! Es gilt die

Produktregel: Für die Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ gilt:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Kurz: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Beispiel: $f(x) = \underbrace{x^3}_{u} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v}$ hat die Ableitung

$$f'(x) = \underbrace{3x^2}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v} + \underbrace{x^3}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'}$$

Beweis der Produktregel

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x+h) + u(x)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x)}{h}$$

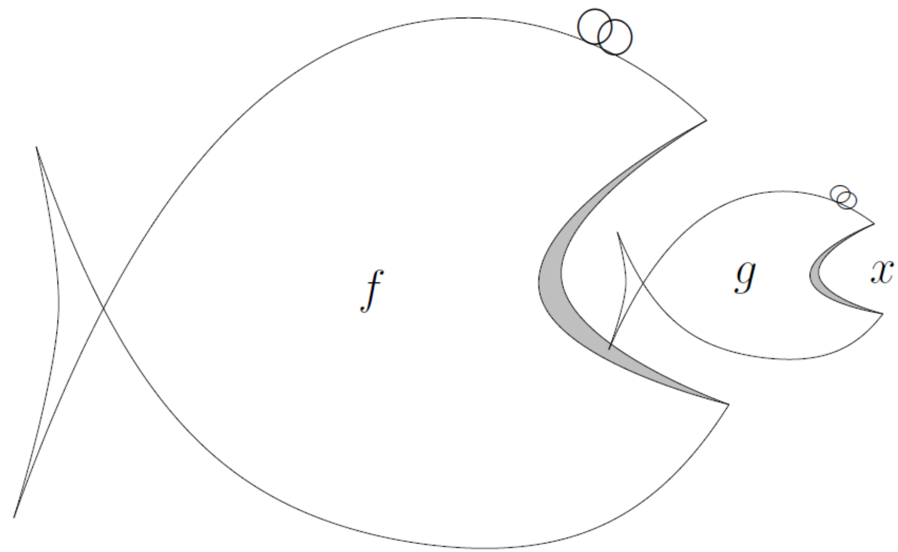
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)]\cdot v(x+h) + u(x)\cdot [v(x+h) - v(x)]}{h}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} v(x+h)}_{v(x)} + \underbrace{\lim_{h\to 0} u(x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}}_{v'(x)}$$

$$= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Verkettung von Funktionen

Setzt man eine (innere) Funktion in eine andere (äußere) ein, so erhält man eine **verkettete Funktion**.



Beispiel:

innere Funktion:

$$g(x) = 2x + 1$$

äußere Funktion:

$$f(x) = \sin(x)$$

Verkettung:

$$k(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = \sin(2x + 1)$$

Kettenregel

Die Ableitung einer verketteten Funktion $k(x) = f(g(x))$ können wir auf die Ableitungen der äußeren Funktion f und der inneren Funktion g zurückführen.

Kettenregel: Für die verkettete Funktion $k(x) = f(g(x))$ gilt:

$$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Kurz: „Äußere Ableitung mal innere Ableitung“.

Beispiel: $k(x) = \sin(2x + 1)$ hat die Ableitung

$$k'(x) = \underbrace{\cos(2x + 1)}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{2}_{\text{innere Abl.}}$$

Übung

Bestimmen Sie mit der Kettenregel die Ableitungsfunktionen von

(a) $k(x) = (3x + 7)^{100}$

(b) $k(x) = \cos(2x^{10})$

(c) $k(x) = \sqrt{2x + 1}$

Quotientenregel

Quotientenregel: Für die Funktion f(x) = u(x) / v(x) gilt:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Kurz: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Beispiel: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$ hat die Ableitung

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x^2 - \sin(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x) \cdot 2}{x^3}$$

Beweis der Quotientenregel

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \left[u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}\right]'$$

Produktregel

$$= u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \left(-\frac{v'(x)}{(v(x))^2}\right)$$

Kettenregel

$$= \frac{u'(x) \cdot v(x)}{(v(x))^2} - \frac{u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Erweitern mit v(x)

$$= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

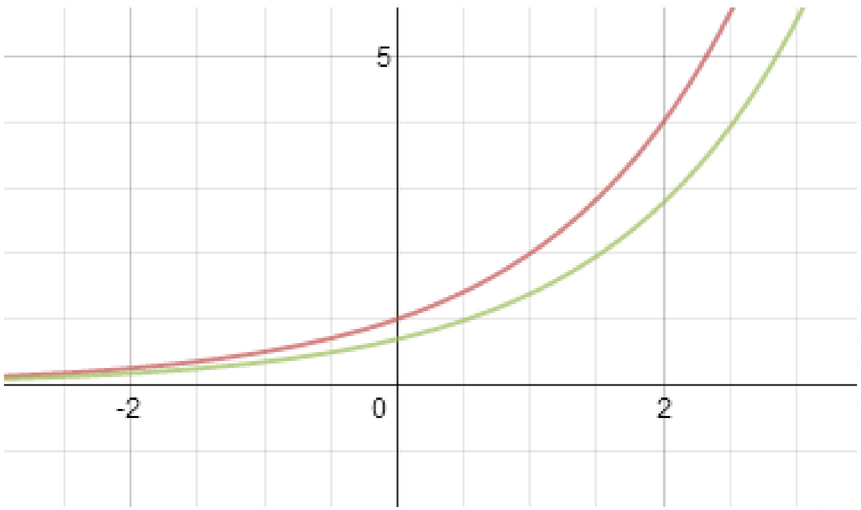
Beispiele

(a)
$$\left[\frac{x^3-2x^2+5}{x^4+9}\right]' = \frac{\left(3x^2-4x\right)\left(x^4+9\right)-\left(x^3-2x^2+5\right)4x^3}{\left(x^4+9\right)^2}$$
$$= \frac{3x^6-4x^5+27x^2-36x-4x^6+8x^5-20x^3}{\left(x^4+9\right)^2}$$
$$= \frac{-x^6+4x^5-20x^3+27x^2-36x}{\left(x^4+9\right)^2}$$

(b)
$$\tan'(x) = \left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right]'$$
$$= \frac{\sin'(x)\cos(x)-\sin(x)\cos'(x)}{(\cos(x))^2}$$
$$= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$
$$= \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Ableitung von Exponentialfunktionen

Beispiel: Ableitung von f(x) = 2^x:



$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{2^h - 1}{h} \cdot 2^x \right) \\
&= \left(\lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \right) \cdot 2^x \\
&\approx 0{,}693 \cdot 2^x
\end{aligned}
$$

Ableitung der e-Funktion

Wir haben gesehen: $(2^x)' = \left(\lim\limits_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}\right) \cdot 2^x \quad \approx 0{,}693 \cdot 2^x$

Analog ergibt sich: $(3^x)' = \left(\lim\limits_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h}\right) \cdot 3^x \quad \approx 1{,}099 \cdot 3^x$

Für eine gewisse Zahl e zwischen 2 und 3 müsste dann gelten:

$$(e^x)' = \left(\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}\right) \cdot e^x \quad = 1 \cdot e^x$$

Für diese Zahl e muss also gelten:

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) = 1.$$

Wir zeigen jetzt, dass diese Zahl **e** die **Eulersche Zahl** (s. Kapitel 1) ist.

Satz. Für die Eulersche Zahl e gilt: $(e^x)' = e^x$.

Beweis

Für $(e^x)' = e^x$ muss gelten: $$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Für kleine h gilt: $$\frac{e^h - 1}{h} \approx 1$$

Sei h = 1/n: $$e^h \approx 1 + h$$

Für große n gilt: $$e^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n}$$

Potenzieren mit n: $$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Dies ist die Def. der **Eulerschen Zahl:** $$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

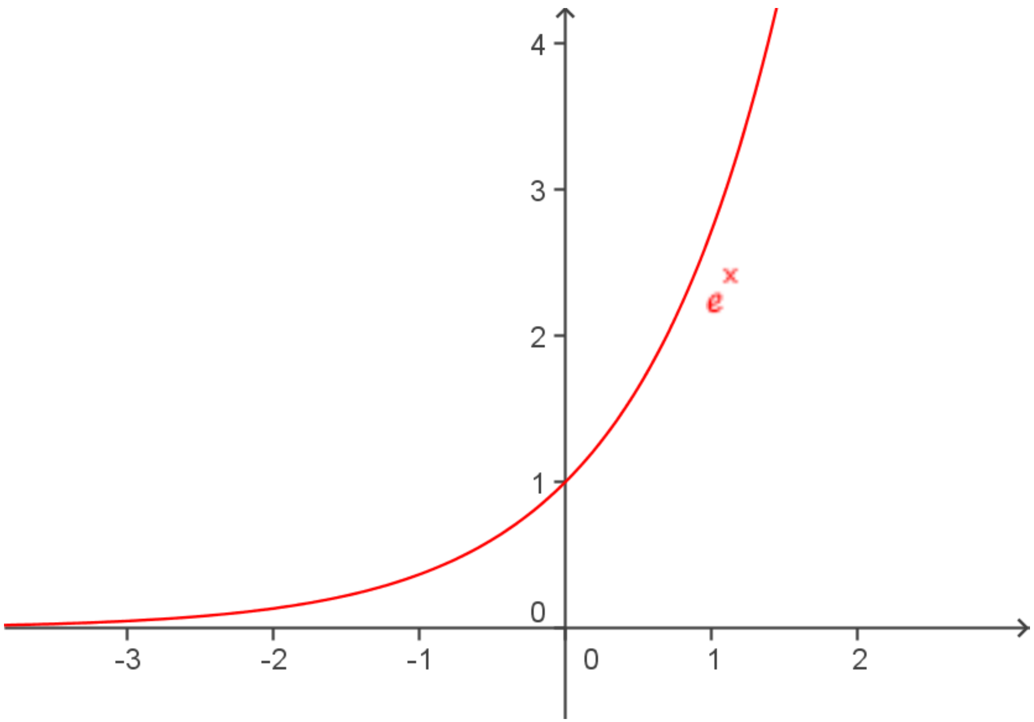
Graph von $f(x) = e^x$

Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion $f(x) = e^x$:

Es gilt

$$f'(x) = e^x = f(x).$$

Ableitung und Funktion stimmen überein!



Ableitungen beliebiger Exponentialfunktionen

Satz: Für die allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ gilt:

$$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x.$$

Dabei ist **ln(a)** der **natürliche Logarithmus** zur Basis e.

Beweis: Mit Hilfe der Logarithmengesetze folgt:

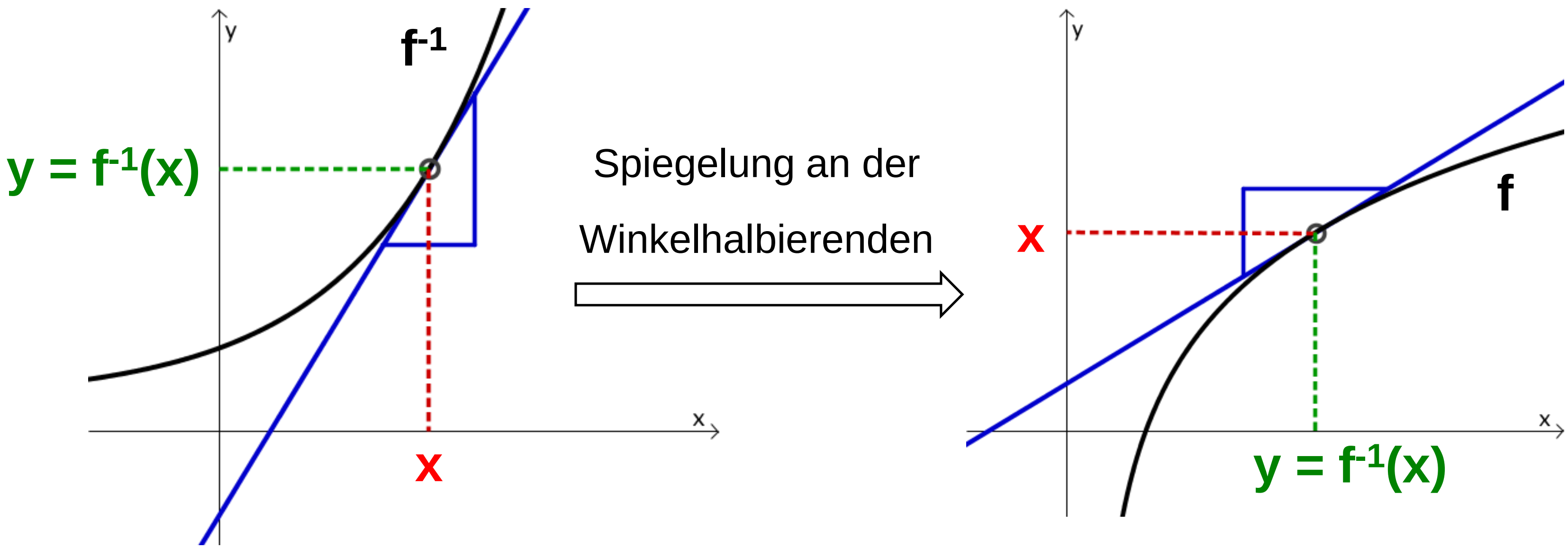
$$f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln a}$$

Daraus ergibt sich mit der Kettenregel:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

Beispiel: Für $f(x) = 2^x$ gilt: $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x \approx 0{,}693 \cdot 2^x$.

Ableitung von Umkehrfunktionen



Satz. Für die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} von f gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Beweis und Beispiel

Beweis: Für die Umkehrfunktion f^{-1} von f gilt

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Trick: Wir leiten beide Seiten dieser Gleichung ab (links: Kettenregel!):

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1.$$

Wenn wir beide Seiten durch $f'(f^{-1}(x))$ teilen, ergibt sich der Satz.

Beispiel: Die Umkehrfunktion von $f(x) = a^x$ ist $f^{-1}(x) = \log_a(x)$. Also gilt

$$(\log_a(x))' = (f^{-1})'(x) = 1 / f'(f^{-1}(x)) = 1 / (\ln(a) \cdot a^{\log_a(x)}) = 1 / (\ln(a) \cdot x)$$

Ableitung von Logarithmen

Satz: Für die Logarithmusfunktion $f(x) = \log_a(x)$ gilt:

$f'(x) = 1 / (x \cdot \ln(a))$.

Aus $\ln(e) = 1$ ergibt sich die

Folgerung: Für die natürliche Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ gilt:

$f'(x) = 1/x$.

Daraus folgt, dass die **Potenzregel** für beliebige *reelle* Exponenten gilt:

$$f(x) = x^r = (e^{\ln(x)})^r = e^{r \cdot \ln(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{r \cdot \ln(x)} \cdot r \cdot \frac{1}{x} = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r \cdot x^{r-1}$$

Ableitungsregeln

FUNKTION	ABLEITUNG	FUNKTION	ABLEITUNG
konstante Faktoren		Sinus	
$c\, f(x)$	$c\, f'(x)$	$\sin x$	$\cos x$
Summen		Kosinus	
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$	$\cos x$	$-\sin x$
Produktregel		Tangens	
$f(x)\, g(x)$	$f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x)$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
Quotientenregel		Exponentialfunktion	
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$	e^x	e^x
		a^x	$\ln a \cdot a^x$
Kettenregel		Logarithmus	
$f(g(x))$	$f'(g(x))\, g'(x)$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
Potenzfunktionen			
x^n	$n x^{n-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Übung

Berechnen Sie die Ableitung:

(a) $f(x) = 3^x$

(b) $f(x) = \sin(x) \cdot e^{-5x}$

(c) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$

Trigonometrische Umkehrfunktionen

Wenn man den Definitionsbereich ausreichend einschränkt, besitzen die trigonometrischen Funktionen sin(x), cos(x), tan(x) folgende Umkehrfunktionen:

$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$ („**Arcus-Sinus**“)

$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \cos^{-1}(x) = \arccos(x)$ („**Arcus-Kosinus**“)

$f(x) = \tan(x) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x) = \arctan(x)$ („**Arcus-Tangens**“)

Die Ableitungen dieser Arcus-Funktionen ergeben sich aus dem Satz über die Ableitung von Umkehrfunktionen.

Beispiel: Arcus-Sinus

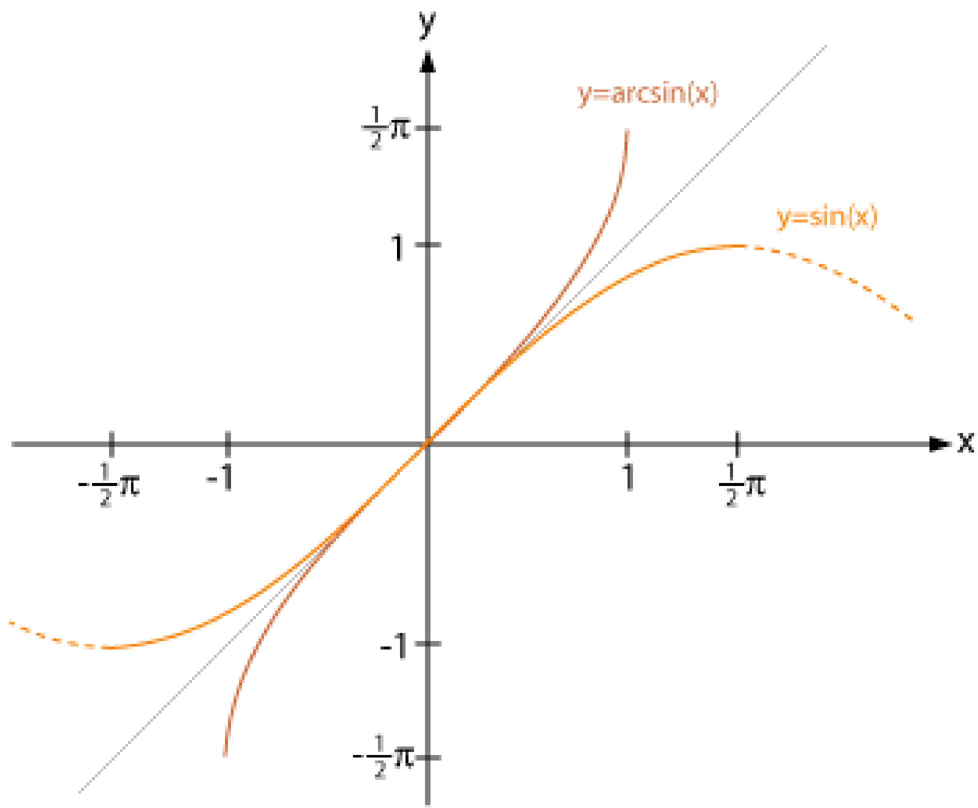
Die Funktion

$$f(x) = \sin(x)$$

ist auf dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$
streng monoton steigend,
dort also umkehrbar.

Ihre Umkehrfunktion ist

$$f^{-1}(x) = \arcsin(x).$$



Beispiel: Arcus-Sinus

Für die Ableitung der Arcus-Sinus-Funktion gilt nach dem Satz über die Ableitung von Umkehrfunktionen

$(f^{-1})'(x) = 1 / f'(f^{-1}(x))$

$\sin^2(\ldots) + \cos^2(\ldots) = 1$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\sin'(\ldots) = \cos(\ldots)$

$\sin(\arcsin(x)) = x$

Regel von de l´Hospital

Grenzwerte von Funktionen können manchmal nicht mit den Grenzwertsätzen berechnet werden. Probleme machen insbesondere **unbestimmte Ausdrücke** wie „**0 / 0**“ und „**∞ / ∞**“.

Beispiel: Für „0 / 0“ können sich beliebige Grenzwerte ergeben:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}1=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

Regel von de l´Hospital

Den Grenzwert der unbestimmten Ausdrücke „0 / 0" und „∞ / ∞" kann man auf den Grenzwert der Ableitungen zurückführen.

Regel von de l´Hospital: Für den Grenzwert eines Quotienten f / g zweier Funktionen f und g mit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \text{oder}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

(also „0 / 0" oder „∞ / ∞") gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Übung

Berechnen Sie die Grenzwerte mit der Regel von de l´Hospital:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{42x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot (e^x - 1)$

Exponentielles vs. polynomiales Wachstum

Nun können wir beweisen, dass die Exponentialfunktion e^x für $x \to \infty$ schneller als jede Potenzfunktion x^n wächst.

Satz. Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$

Das bedeutet, dass der Nenner e^x ein stärkeres Wachstum als der Zähler x^n aufweist.

Beweis: Wir wenden die Regel von Hospital n mal hintereinander an:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

3.2 Funktionsuntersuchungen

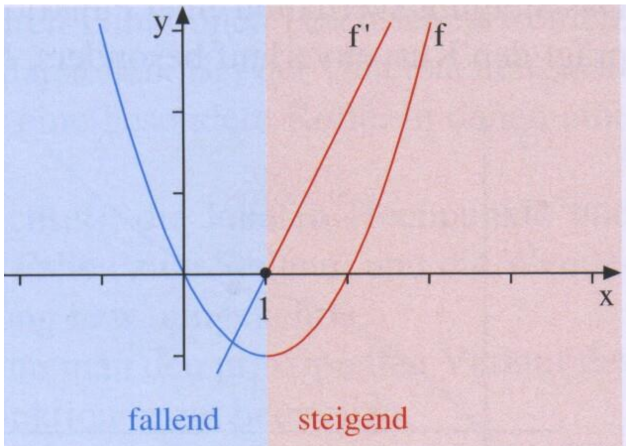
Monotonie und erste Ableitung f´

Ist $\mathbf{f'(x) > 0}$	für alle $x \in I$, so ist	**f(x) streng monoton steigend** auf I.
Ist $\mathbf{f'(x) < 0}$	für alle $x \in I$, so ist	**f(x) streng monoton fallend** auf I.
Ist $\mathbf{f'(x) \geq 0}$	für alle $x \in I$, so ist	**f(x) monoton steigend** auf I.
Ist $\mathbf{f'(x) \leq 0}$	für alle $x \in I$, so ist	**f(x) monoton fallend** auf I.

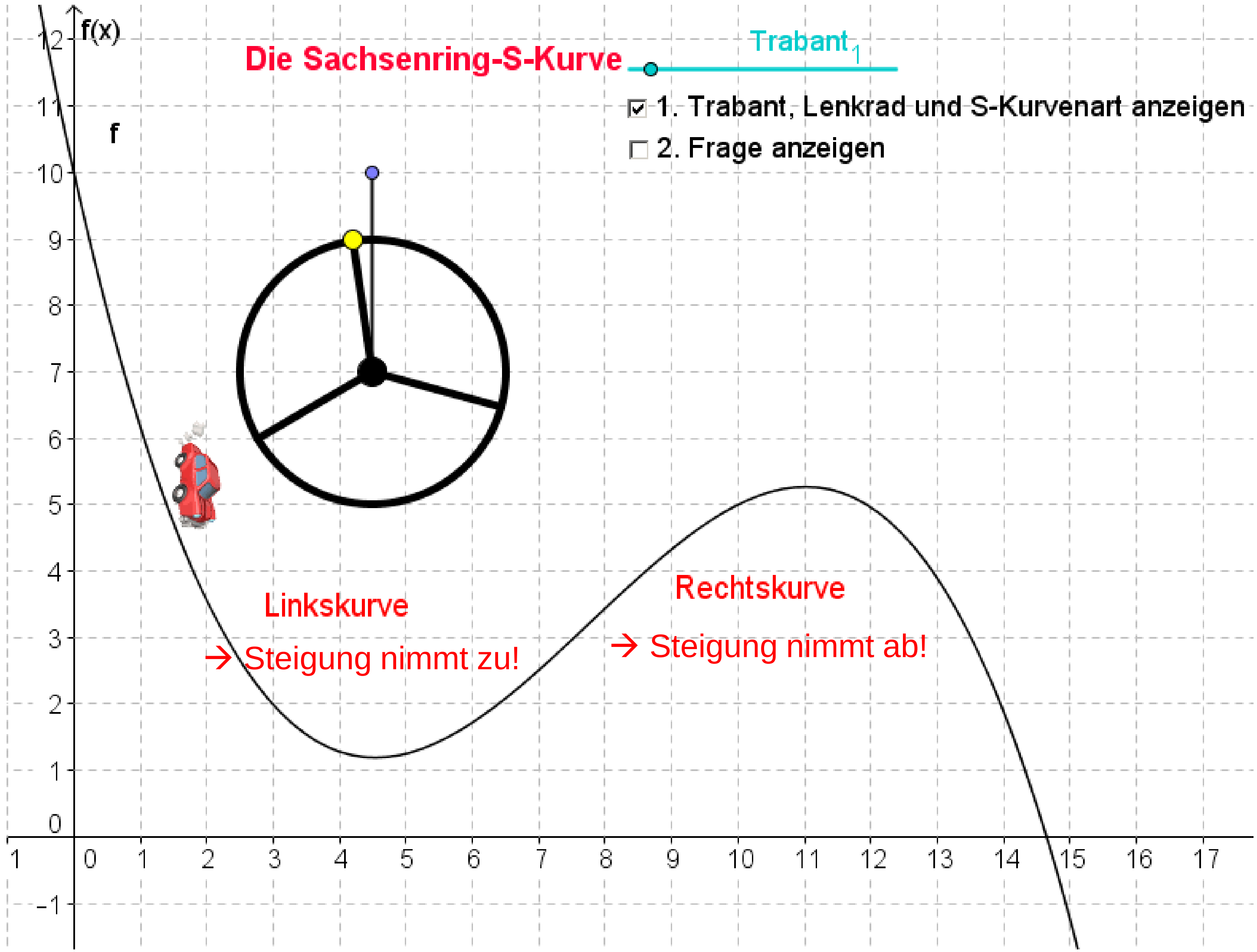
Beispiel:

$f(x) = x^2 - 2x$

$f'(x) = 2x - 2$



Krümmung



f(x)
f
Die Sachsenring-S-Kurve
Trabant 1
1. Trabant, Lenkrad und S-Kurvenart anzeigen
2. Frage anzeigen
Linkskurve
→ Steigung nimmt zu!
Rechtskurve
→ Steigung nimmt ab!

Krümmung und 2. Ableitung f´´

Rechtskrümmung:

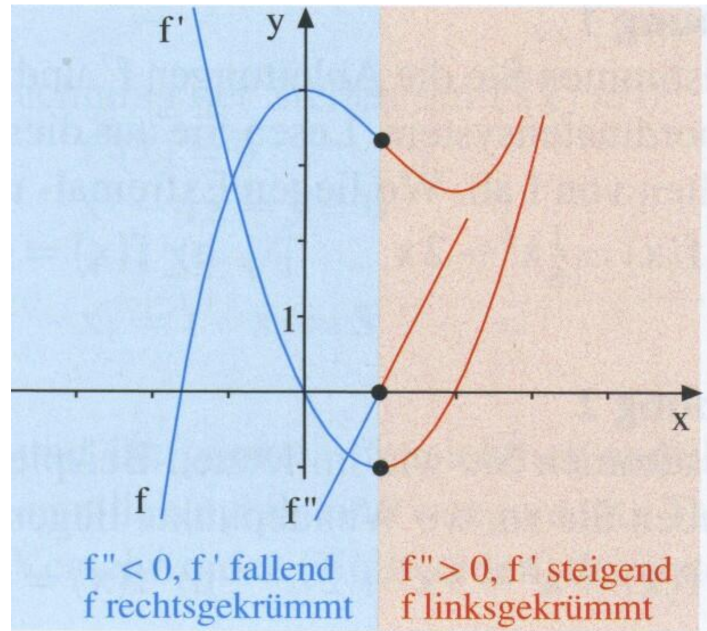
f´ fällt streng monoton

Linkskrümmung:

f´ steigt streng monoton

Beispiel:

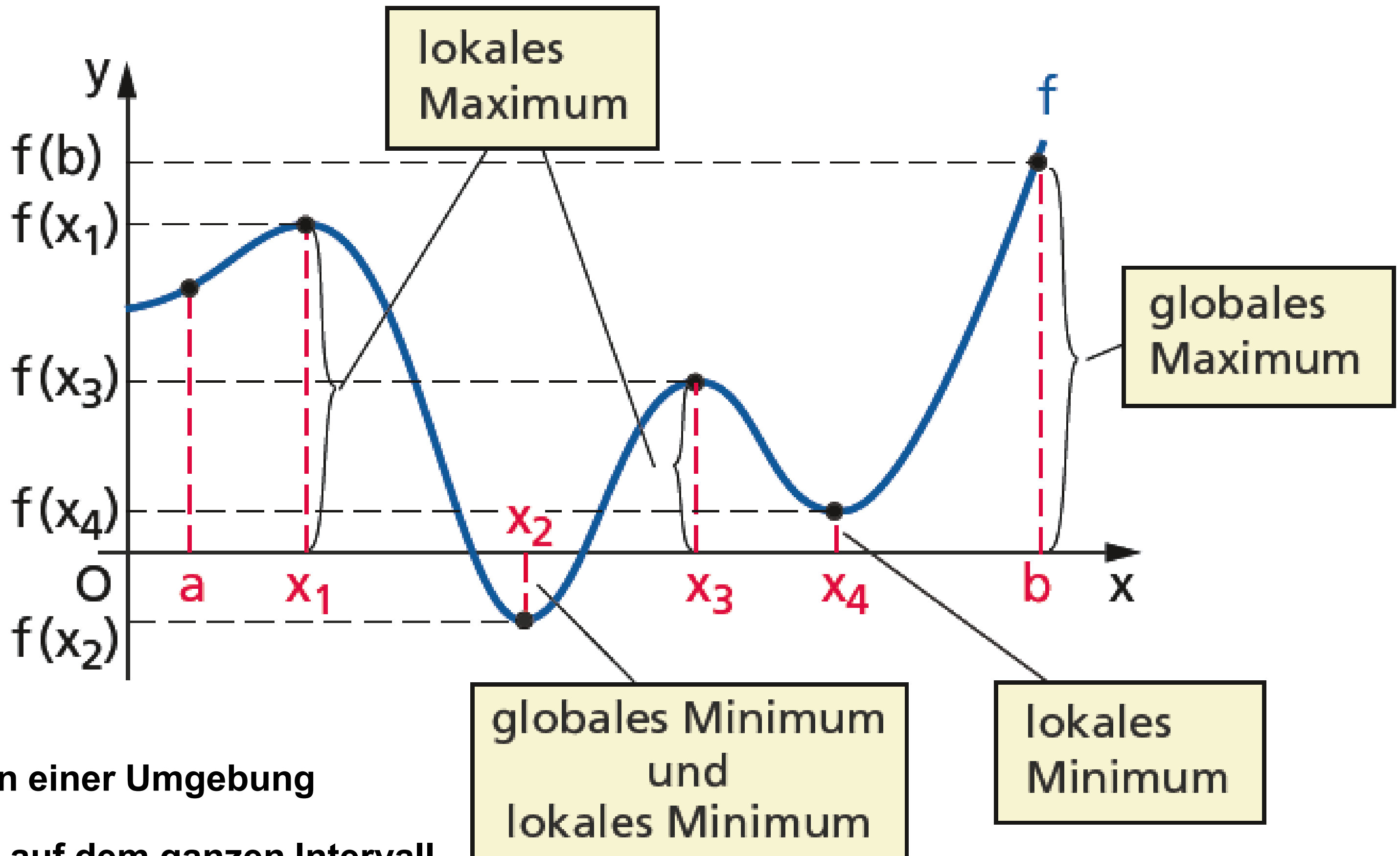
f(x) = 1/3 x³ – x² + 4 (siehe Abb.)



Gilt $\mathbf{f''(x) < 0}$ für alle $x \in I$, so ist f auf I **rechtsgekrümmt**.

Gilt $\mathbf{f''(x) > 0}$ für alle $x \in I$, so ist f auf I **linksgekrümmt**.

Extrema



„**lokal**" = in einer Umgebung

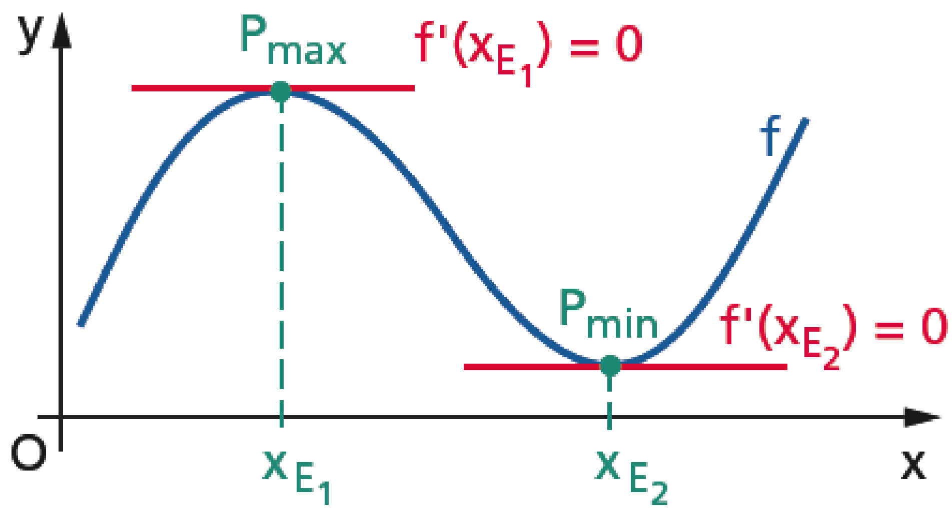
„**global**" = auf dem ganzen Intervall

Notwendiges Kriterium für Extrema

Satz: Wenn an der Stelle x_E ein lokales Extremum vorliegt, dann gilt

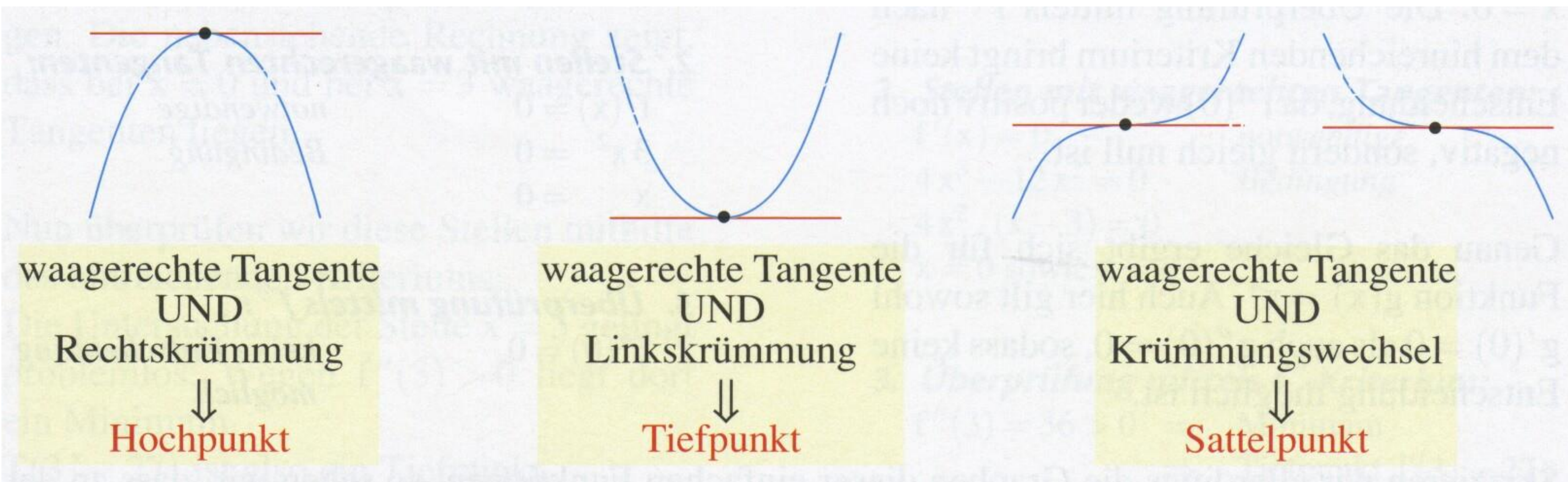
$$f'(x_E) = 0.$$

D. h.: An Extremstellen hat der Graph eine waagerechte Tangente.



Hoch- oder Tiefpunkt?

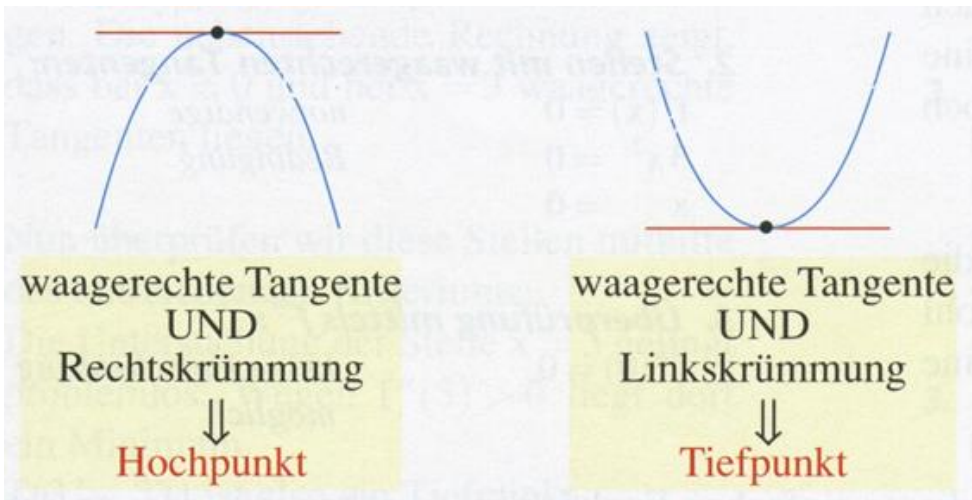
Anhand der Krümmung kann man entscheiden, ob es bei dem Punkt mit waagerechter Tangente um einen **Hochpunkt**, einen **Tiefpunkt** oder einen **Sattelpunkt** handelt.



Hinreichendes Kriterium für Extrema

Satz: Für eine zweimal differenzierbare Funktion f gilt:

- Wenn **$f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) < 0$**, dann ist in x_E ein **lokales Maximum**.
- Wenn **$f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) > 0$**, dann ist in x_E ein **lokales Minimum**.



Beispiel

Beispiel: $f(x) = 1/3\ x^3 + ½\ x^2$

Ableitungen:

$f'(x) = x^2 + x, \quad f''(x) = 2x + 1$

Stellen mit waagerechter Tangente (notwendig):

$f'(x) = 0$: $\quad x^2 + x = x(x + 1) = 0$ für $x = -1$ oder $x = 0$

Überprüfung mit f´´ (hinreichend):

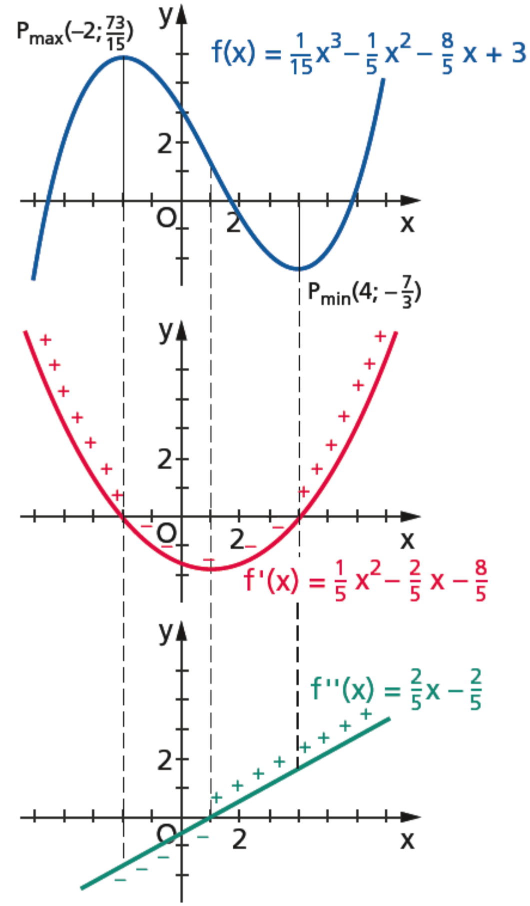
$f''(-1) = -1 \quad < 0 \quad \Rightarrow$ Maximum bei $x = -1$

$f''(0) = 1 \quad > 0 \quad \Rightarrow$ Minimum bei $x = 0$

Ergebnis: Hochpunkt H = (-1, 1/6), Tiefpunkt T = (0, 0).

Weiteres Beispiel: f(x) = 1/15 x³ - 1/5 x² - 8/5 x + 3

Machen Sie sich die Zusammenhänge klar!



Ableitungen: f, f‘, f‘‘

↑↓

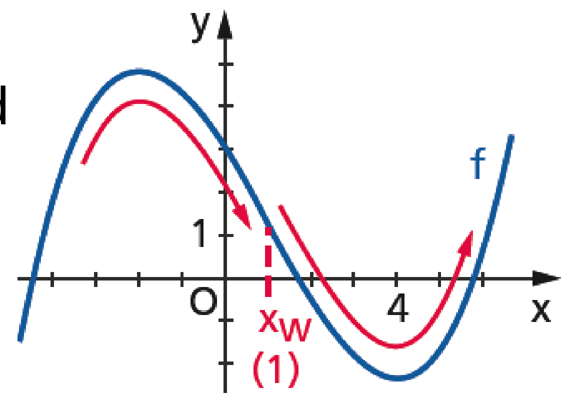
Monotonie

Krümmung

Extrema

Wendepunkte

Punkte, an denen das Krümmungsverhalten sich ändert heißen **Wendepunkte**. Wendepunkte sind die Extrema der 1. Ableitung (siehe Abb. vorige Folie). Daher gelten folgende Kriterien.



Satz (notwendig): Wenn x_W eine **Wendestelle** ist, dann gilt $f''(x_W) = 0$.

Satz (hinreichend):

Wenn $\mathbf{f''(x_W) = 0}$ **und** $\mathbf{f'''(x_E) \neq 0}$, dann ist x_W eine **Wendestelle**.

Wendepunkte, die außerdem eine waagerechte Tangente besitzen, heißen **Sattelpunkte**.

Übung

Einem Unternehmen entstehen bei der Produktion von x Wareneinheiten Produktionskosten (in €) in Höhe von

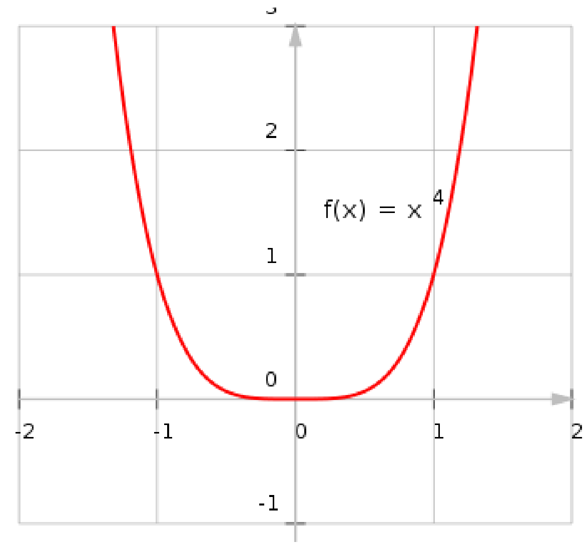
$$K(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

Den Übergang von einem langsameren (degressiven) Wachstum der Kosten zu einem schnelleren (progressiven) nennt man **Kostenkehre**. Berechnen Sie die Kostenkehre von K(x).

Allgemeineres Kriterium für Extrema und Sattelpunkte

Das bisherige hinreichende Kriterium für Extrema versagt bereits bei einfachen Funktionen wie

$$f(x) = x^4.$$



Denn $f(x) = x^4$ hat an der Stelle 0 ein lokales Minimum, obwohl die zweite Ableitung dort Null ist:

$$f'(x) = 4 \cdot x^3 \;\Rightarrow\; f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12 \cdot x^2 \Rightarrow\; f''(0) = 0.$$

Es gilt folgendes allgemeinere hinreichende Kriterium.

Allgemeineres Kriterium für Extrema und Sattelpunkte

Satz. Die Funktion f sei in x_0 n-mal differenzierbar. Die n-te Ableitung sei die erste Ableitung, die in x_0 ungleich Null ist, d.h.

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ und } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

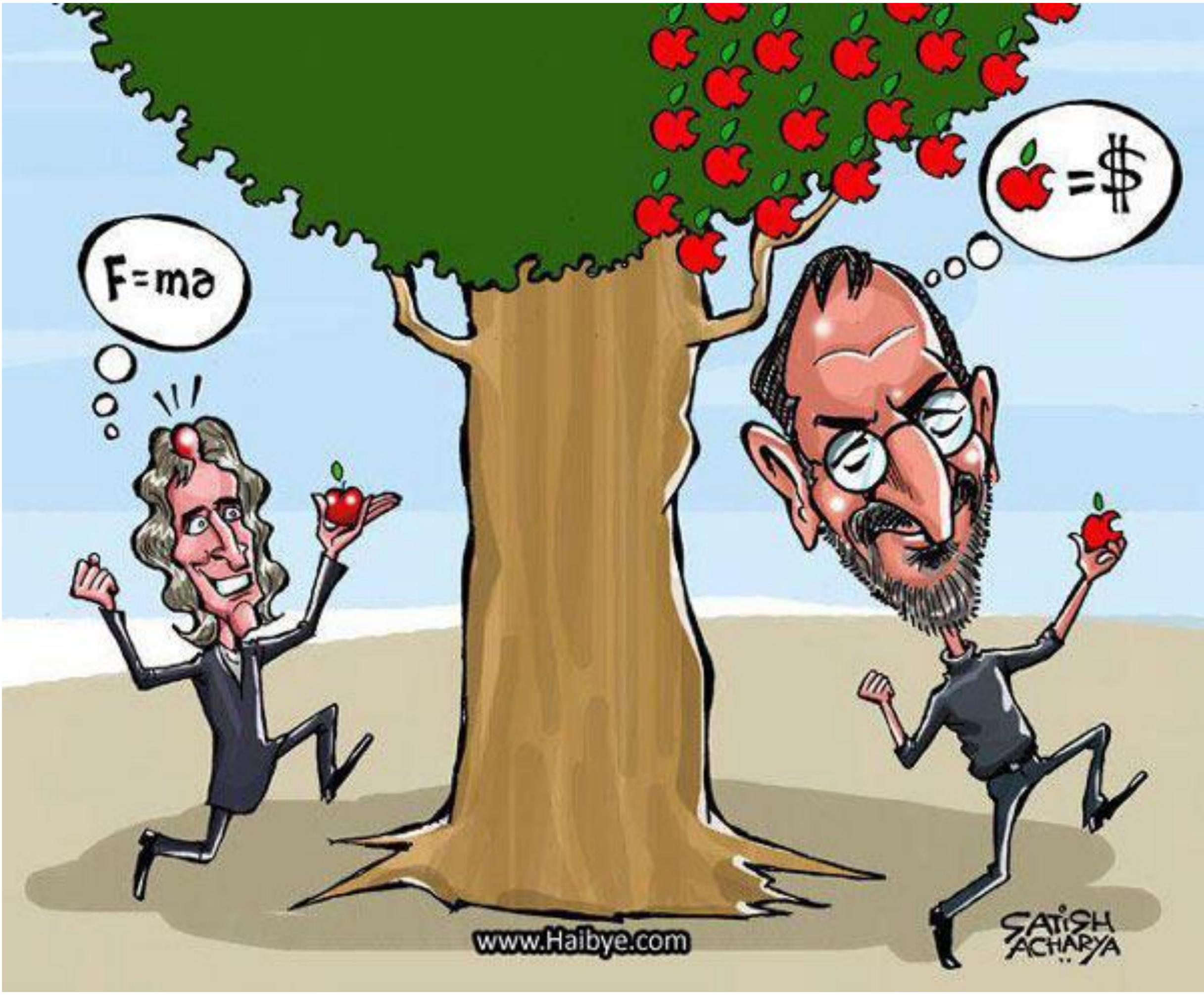
Wenn n **gerade** ist, dann hat f in x_0 ein lokales

- **Maximum**, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist,
- **Minimum**, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ ist.

Wenn n **ungerade** ist, hat f in x_0 einen **Sattelpunkt**.

Beispiel: Für $f(x) = x^4$ gilt: $f'(x) = 4 \cdot x^3$, $f''(x) = 12 \cdot x^2$, $f'''(x) = 24 \cdot x$, $f^{(4)}(x) = 24 > 0$. Da n gerade ist, hat f in $x_0 = 0$ ein Minimum.

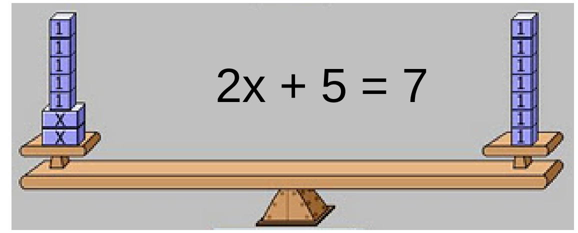
3.3 Das Newton-Verfahren



Gleichungen lösen

Lineare Gleichungen: $ax + b = 0$

→ Äquivalenzumformungen



Quadratische Gleichungen: $x^2 + px + q = 0$

→ z. B. p-q-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

Gleichungen 3. und 4. Grades:

→ Lösungsformeln von Cardano bzw. Tartaglia (16. Jh.) (mit komplexen Zahlen)

Nichtauflösbare Gleichungen

Gleichungen 5. Grades und höher:

Nicht allgemein auflösbar!

Niels Henrik Abel (1824):

Ab Grad 5 kann es keine allgemeinen Lösungsverfahren mehr geben!

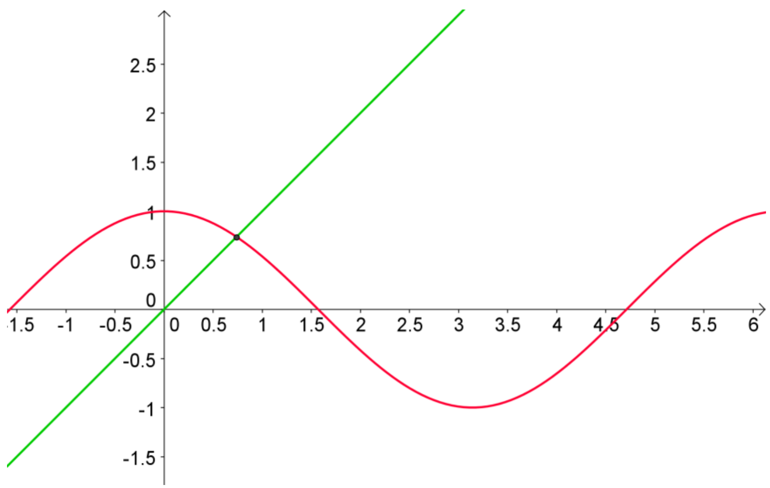
D. h. Polynomgleichungen ab Grad 5 sind nur in Sonderfällen nach x auflösbar.

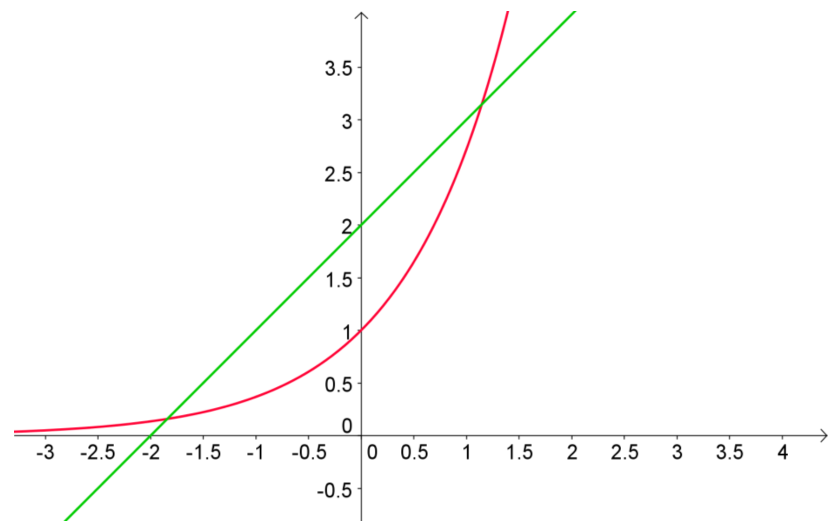
Nichtauflösbare Gleichungen

Transzendente Gleichungen:

Meist nicht auflösbar!

Beispiele: $\cos(x) = x$ $\qquad\qquad$ $e^x = x + 2$



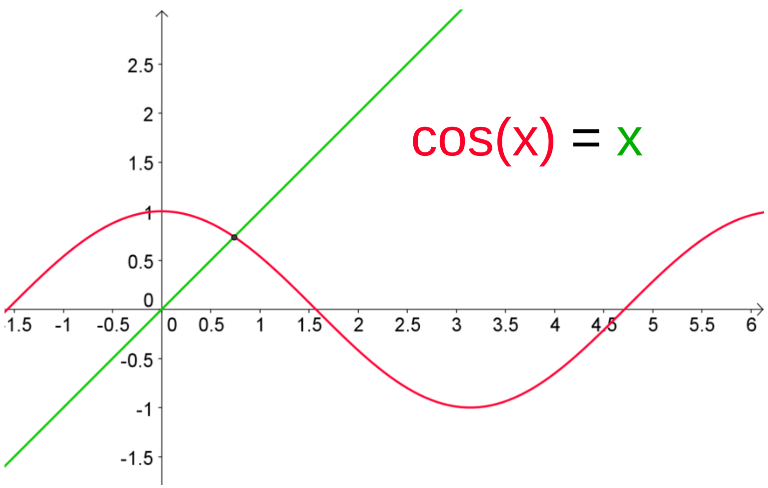


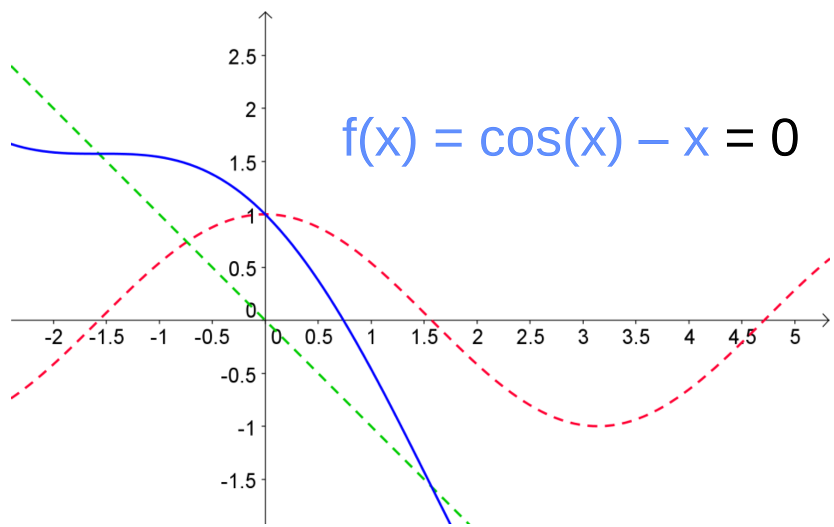
Ausweg?

1. **Näherungsweise** Lösungen bestimmen → numerische Verfahren

2. Grundidee: **Nullstellen** bestimmen statt Gleichungen lösen

Beispiel:





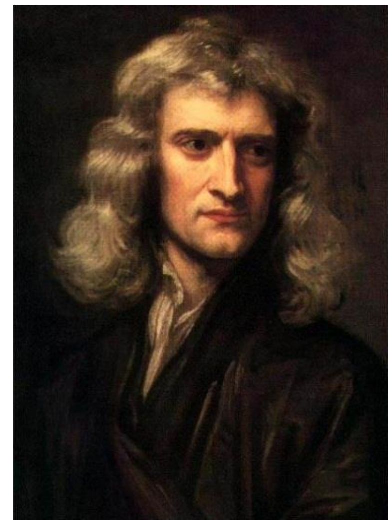
Idee des Newton-Verfahrens

- **Gesucht:** Eine **Nullstelle** einer differenzierbaren Funktion f(x)

- **Idee:** Lineare Approximation von f
  → durch **Tangente** in einem Startpunkt

  Die **Nullstelle der Tangente** wird als verbesserte Näherung der gesuchten Nullstelle verwendet

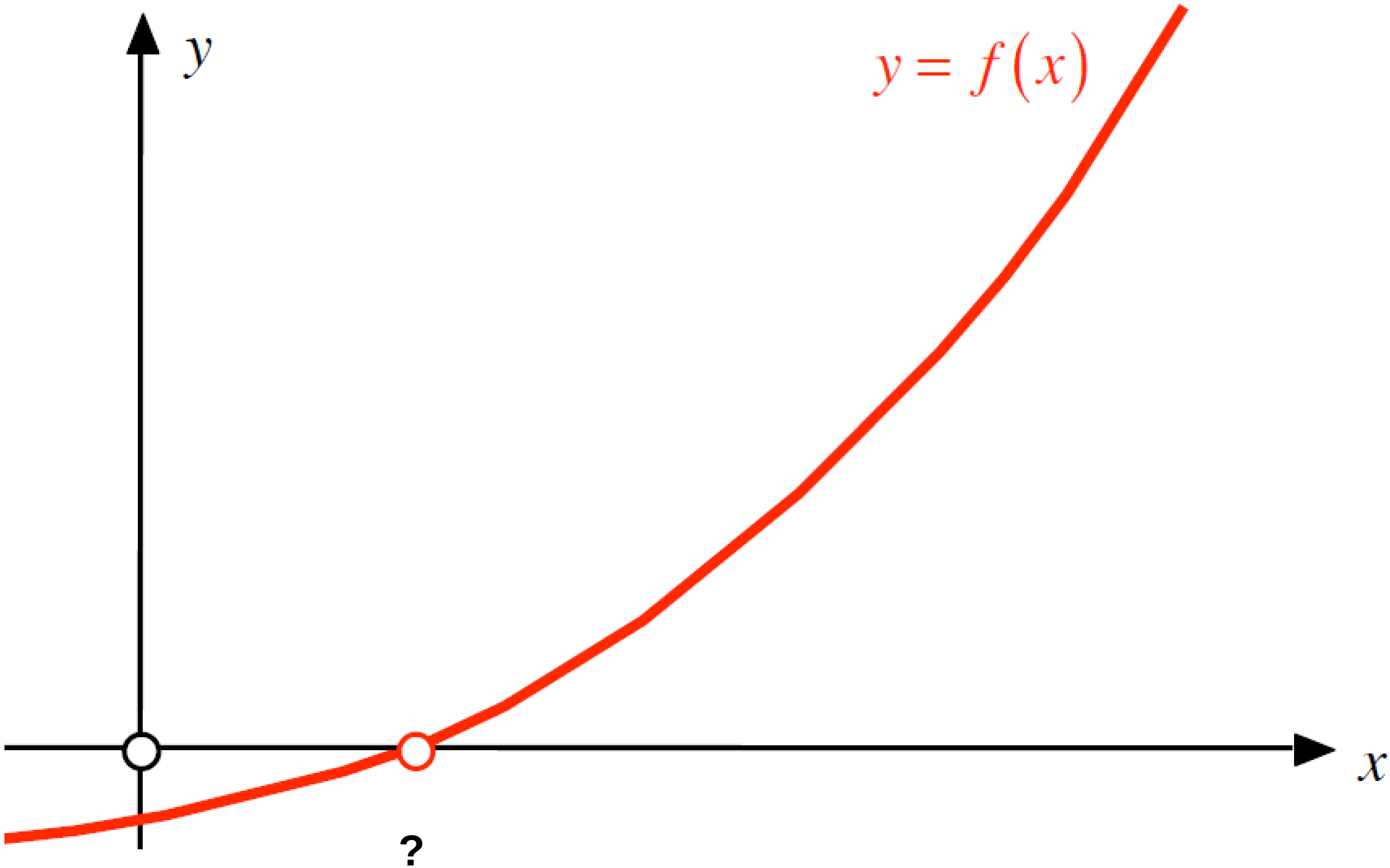
  Iteration: Die Näherung ist Ausgangspunkt für eine weitere Approximation durch eine Tangente



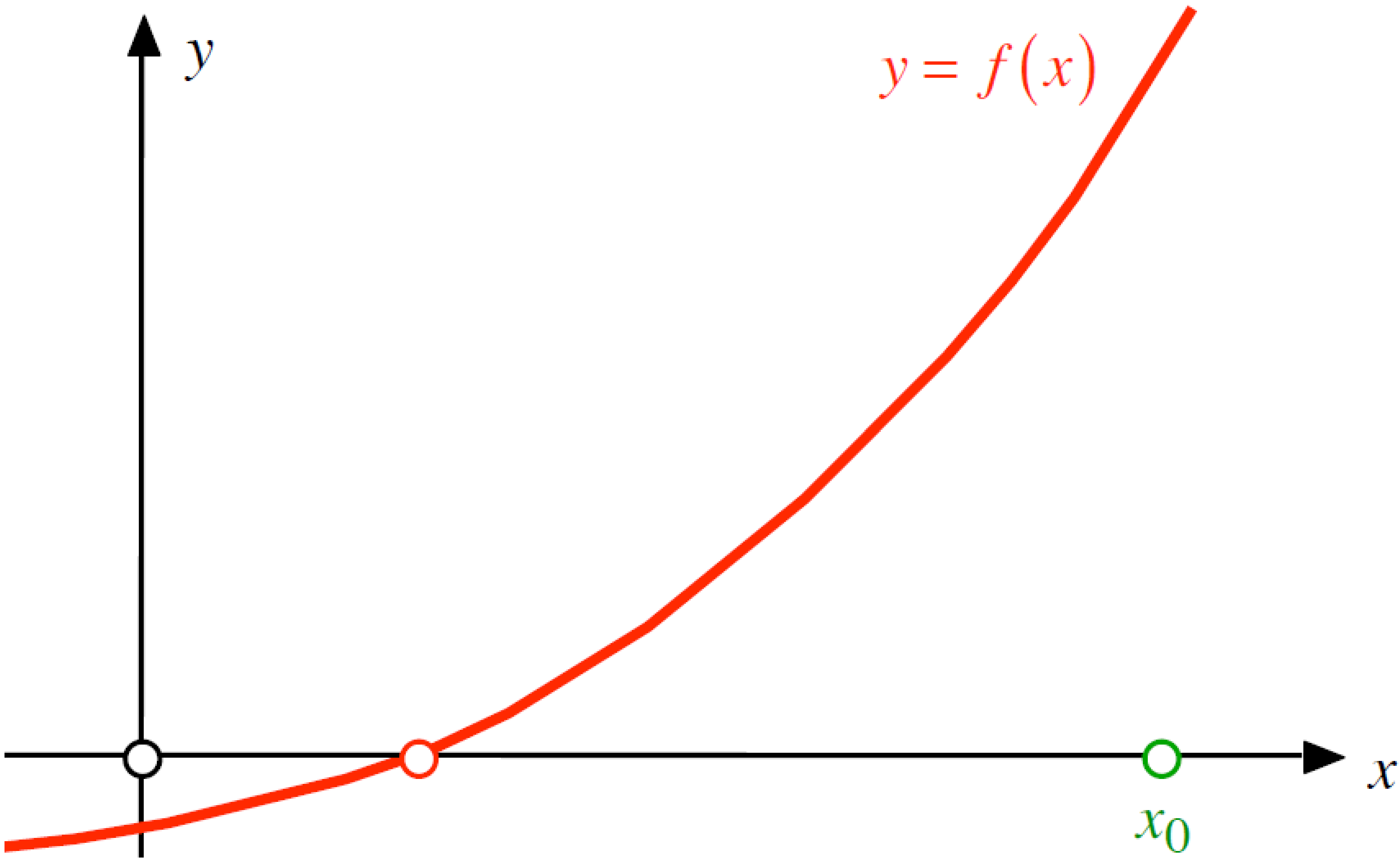
Sir Isaac Newton

(1643 – 1727)

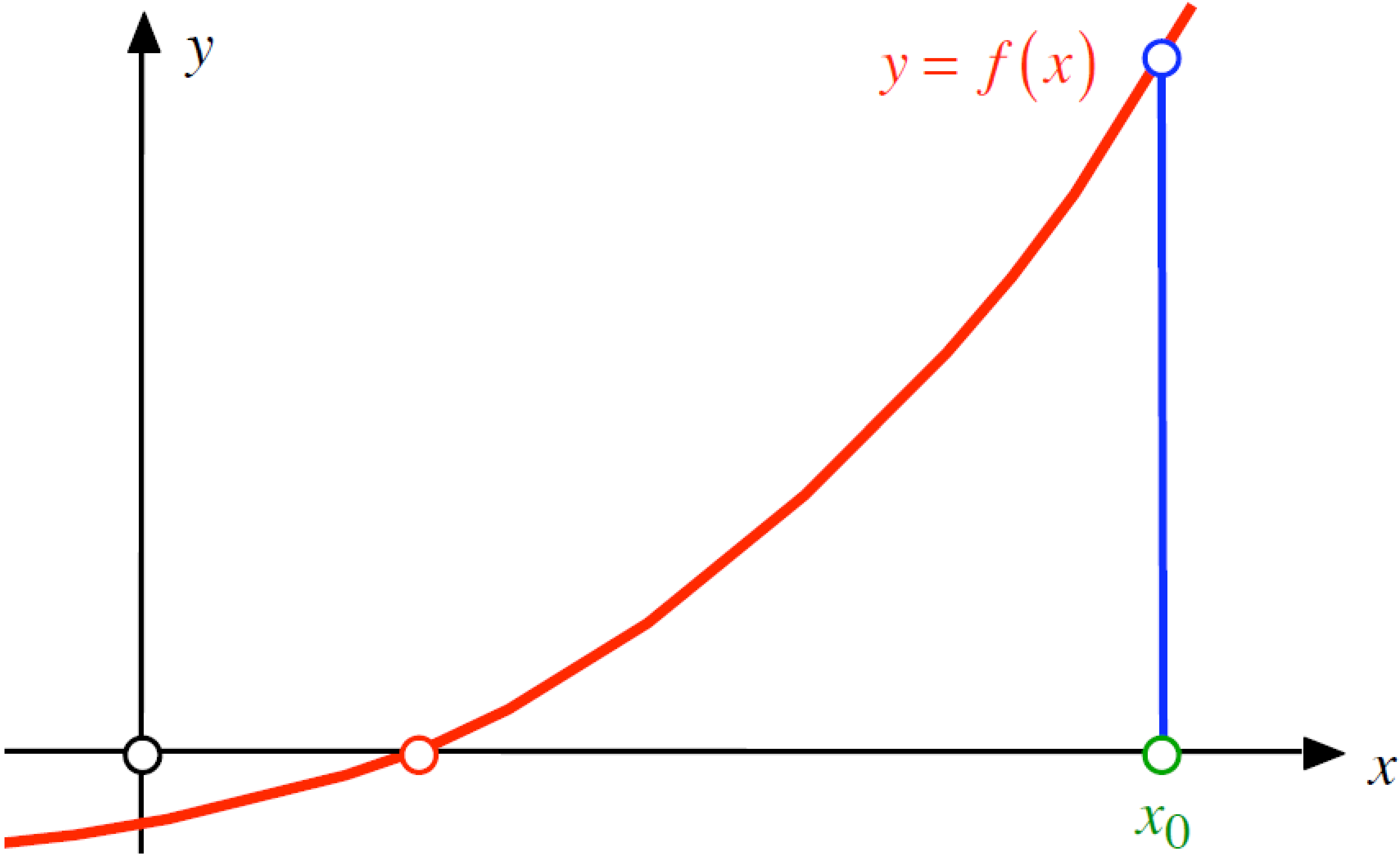
Nullstelle gesucht!



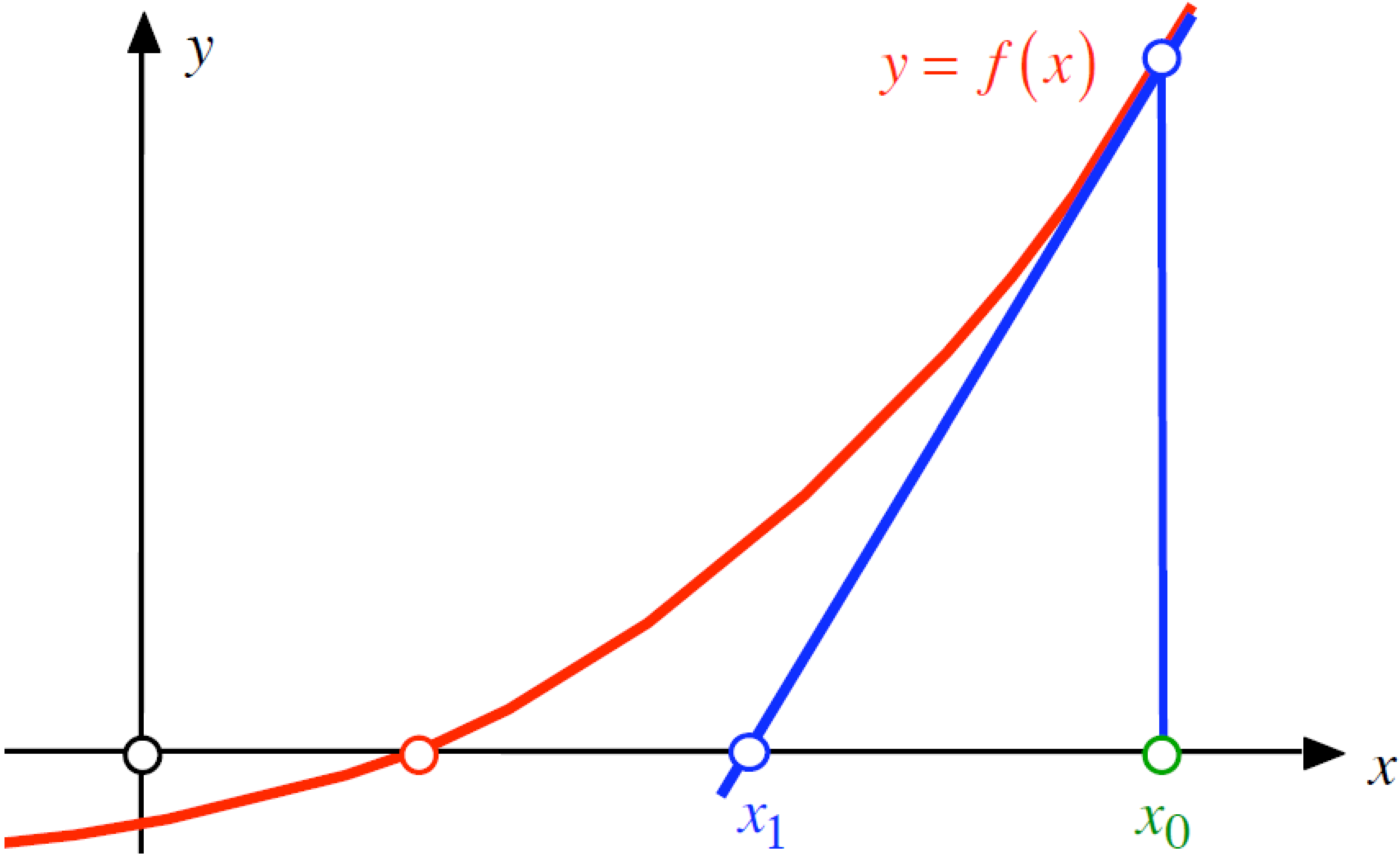
Startwert wählen!



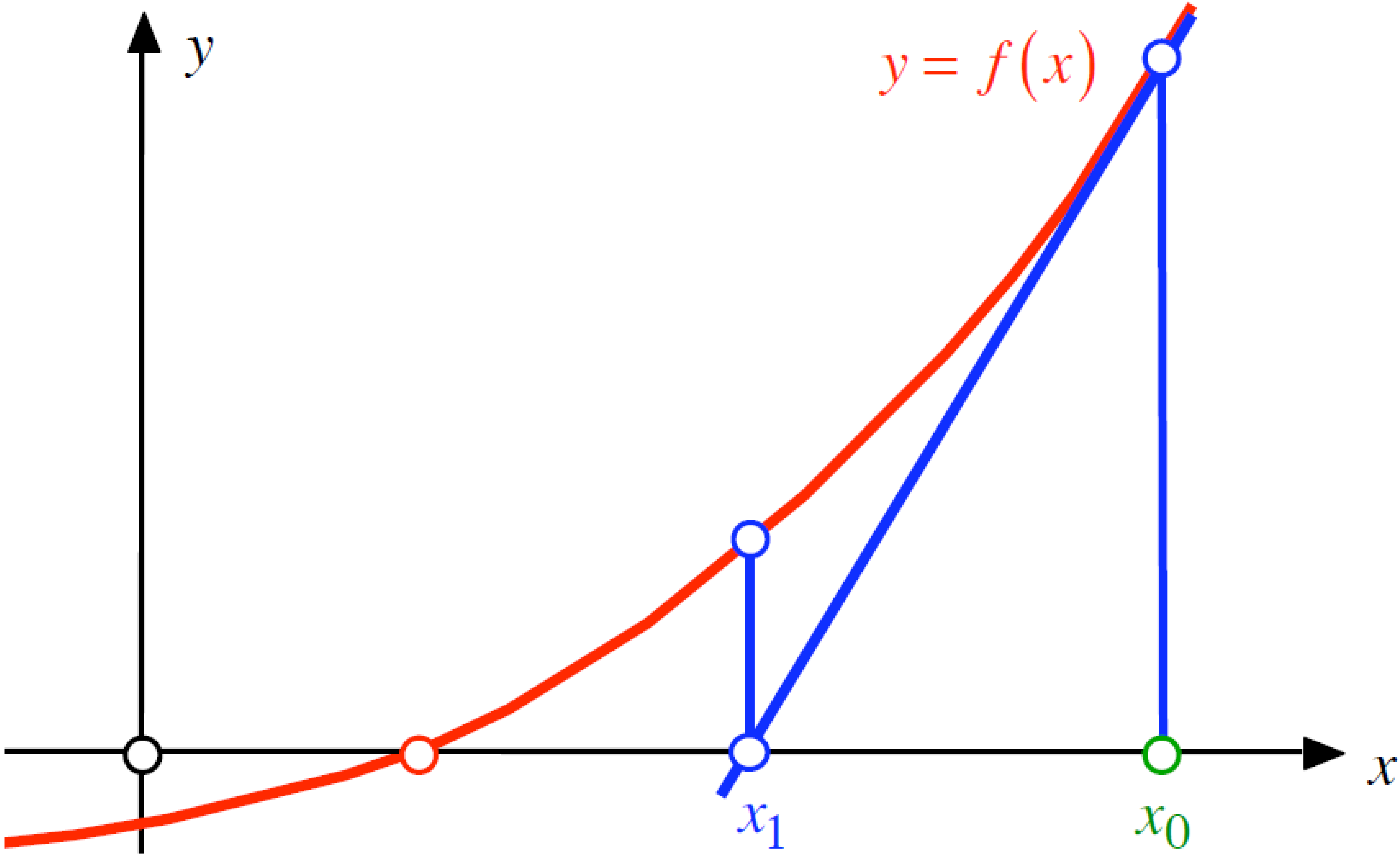
Funktionswert berechnen!



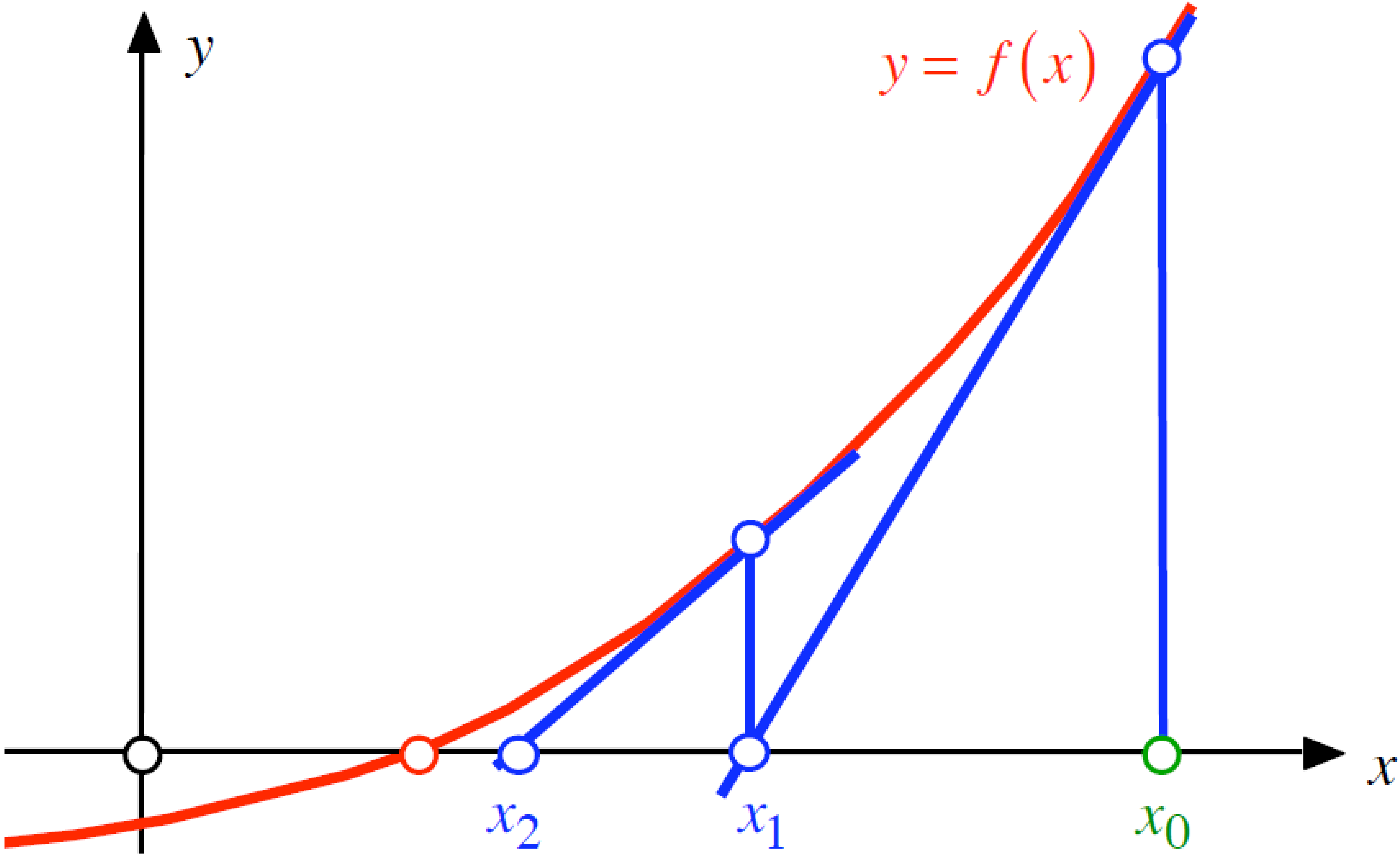
Nullstelle der Tangente!



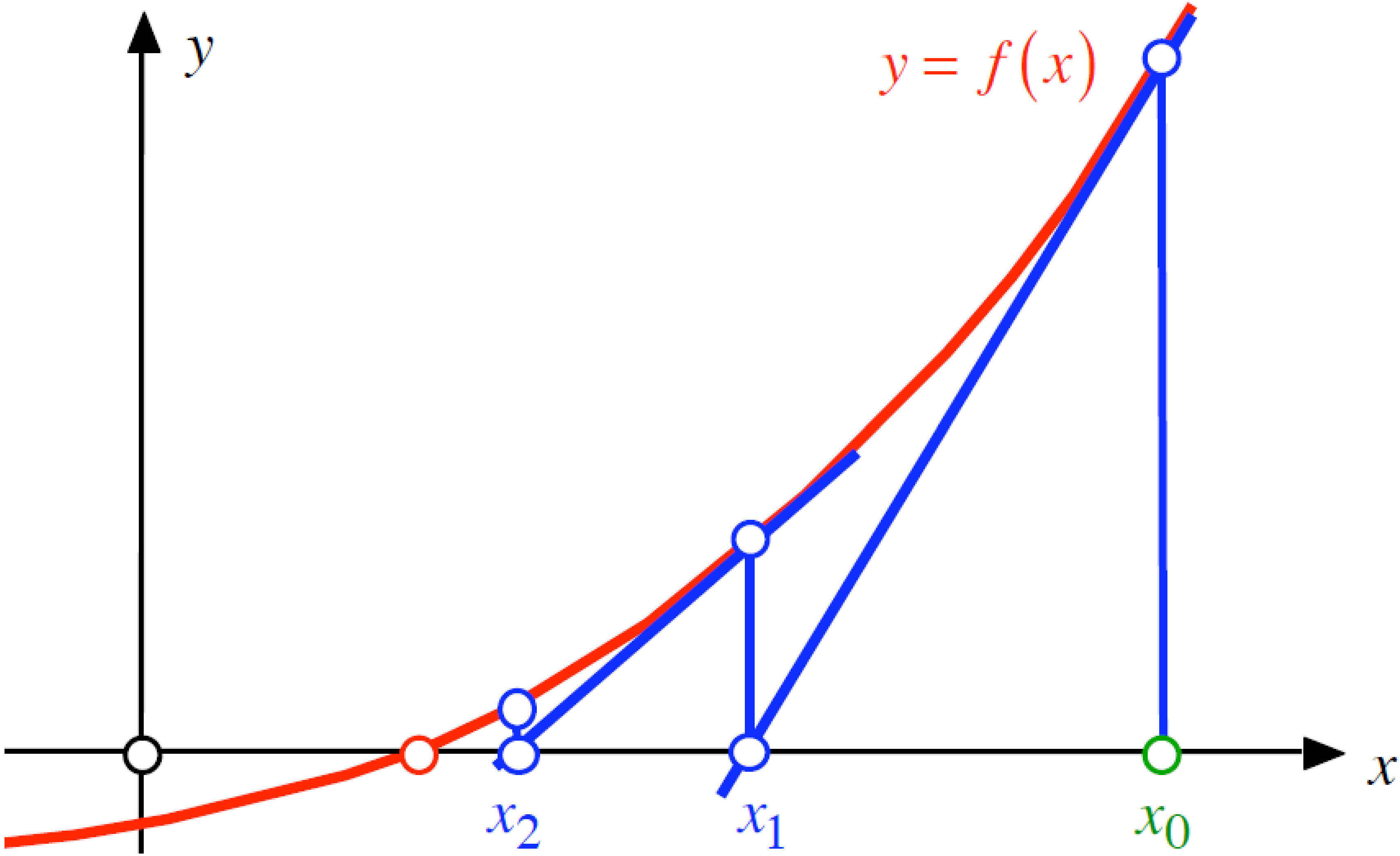
Und wieder von vorn …



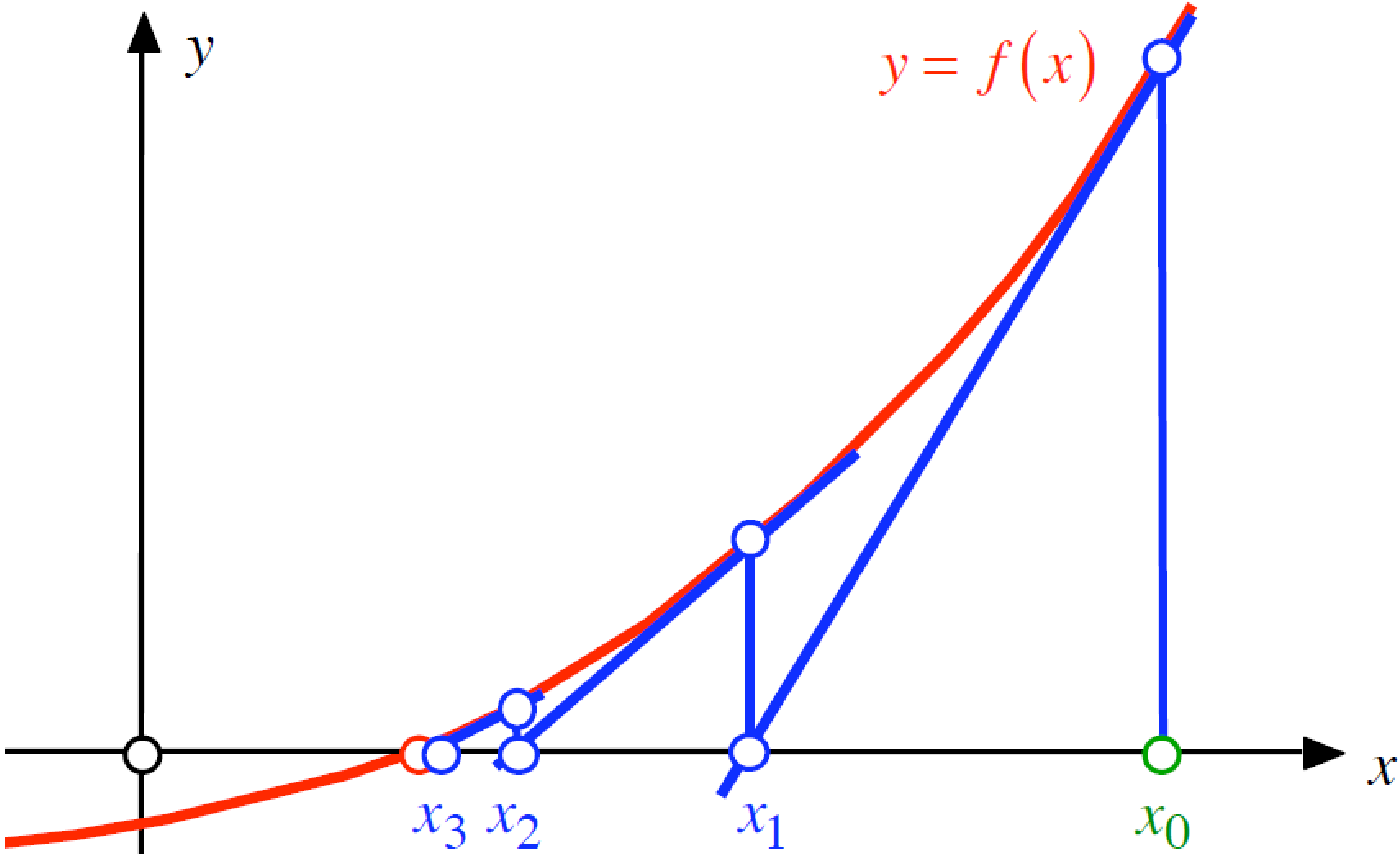
Neue Tangente



Usw.

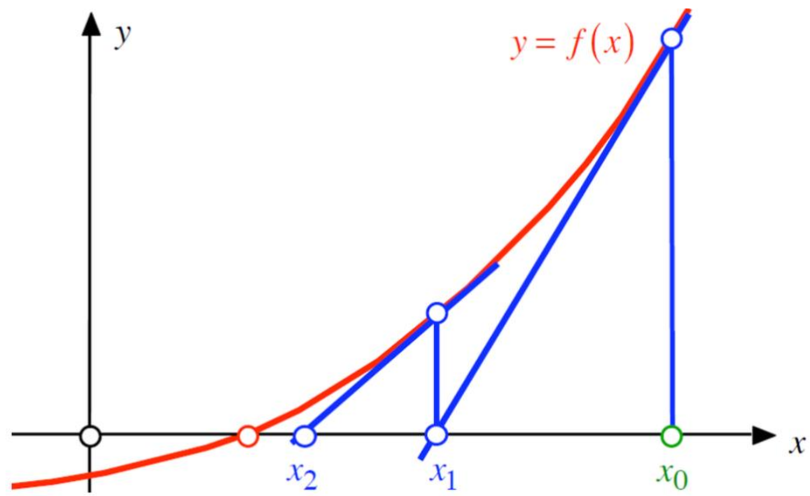


Näherungen werden immer besser!



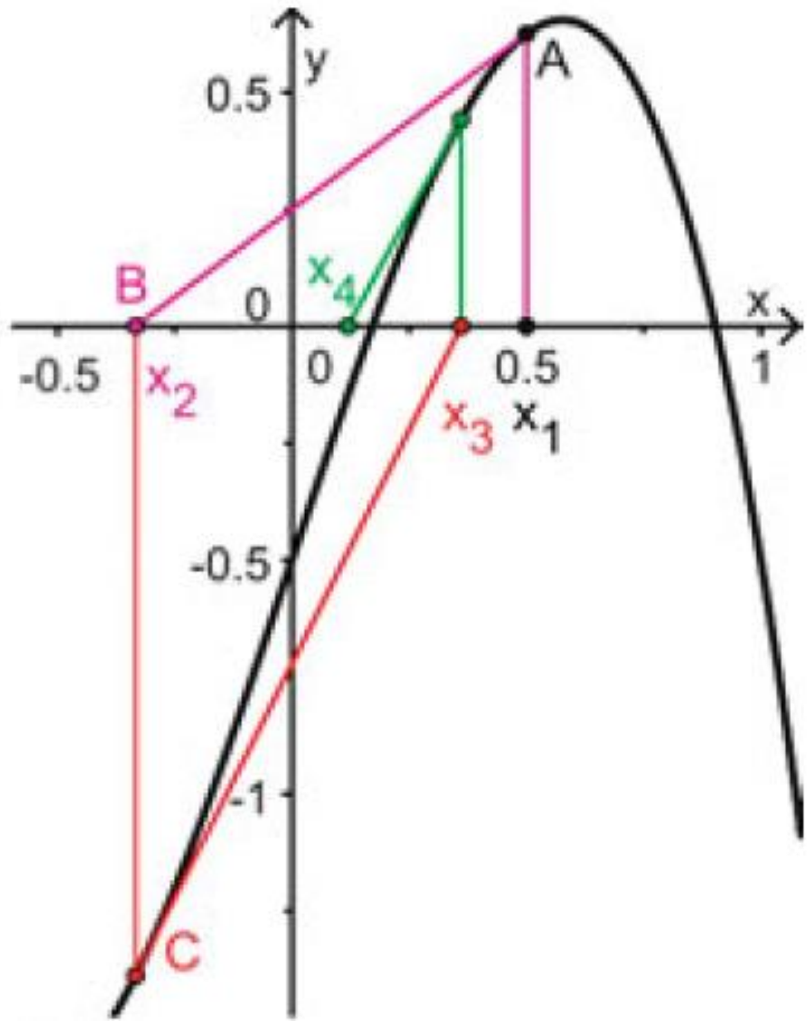
Prinzip des Newton-Verfahrens

- **Gesucht:** Eine Nullstelle von f(x)
- **Start:** Stelle $\mathbf{x_0}$
  (in der Nähe der Nullstelle)
- Tangente durch zugehörigen Punkt
  $(x_1 \mid f(x_1))$



- Schnittstelle x_1 dieser Tangente mit x-Achse berechnen
- x_1 ist (hoffentlich) bessere Näherung für gesuchte Nullstelle
- **Wiederholung:** Tangente durch $(x_1 \mid f(x_1))$, usw.

Beispiel



Die Näherungsformel

Tangentensteigung:

$$f'(x_n) = m = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

Auflösen nach x_{n+1}:

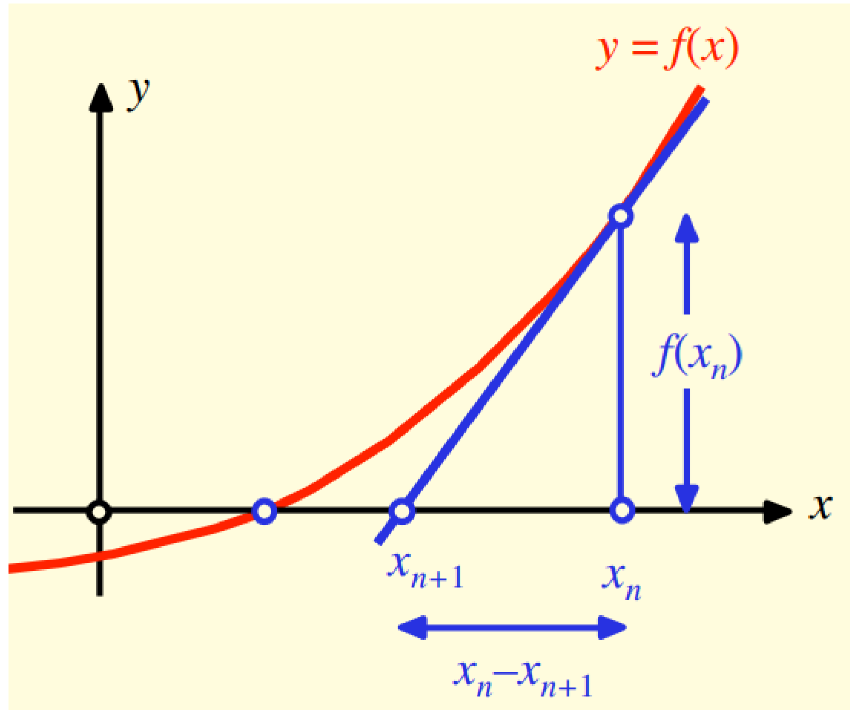
$$f'(x_n)\cdot(x_n - x_{n+1}) = f(x_n)$$

$$x_n - x_{n+1} = f(x_n) \,/\, f'(x_n)$$

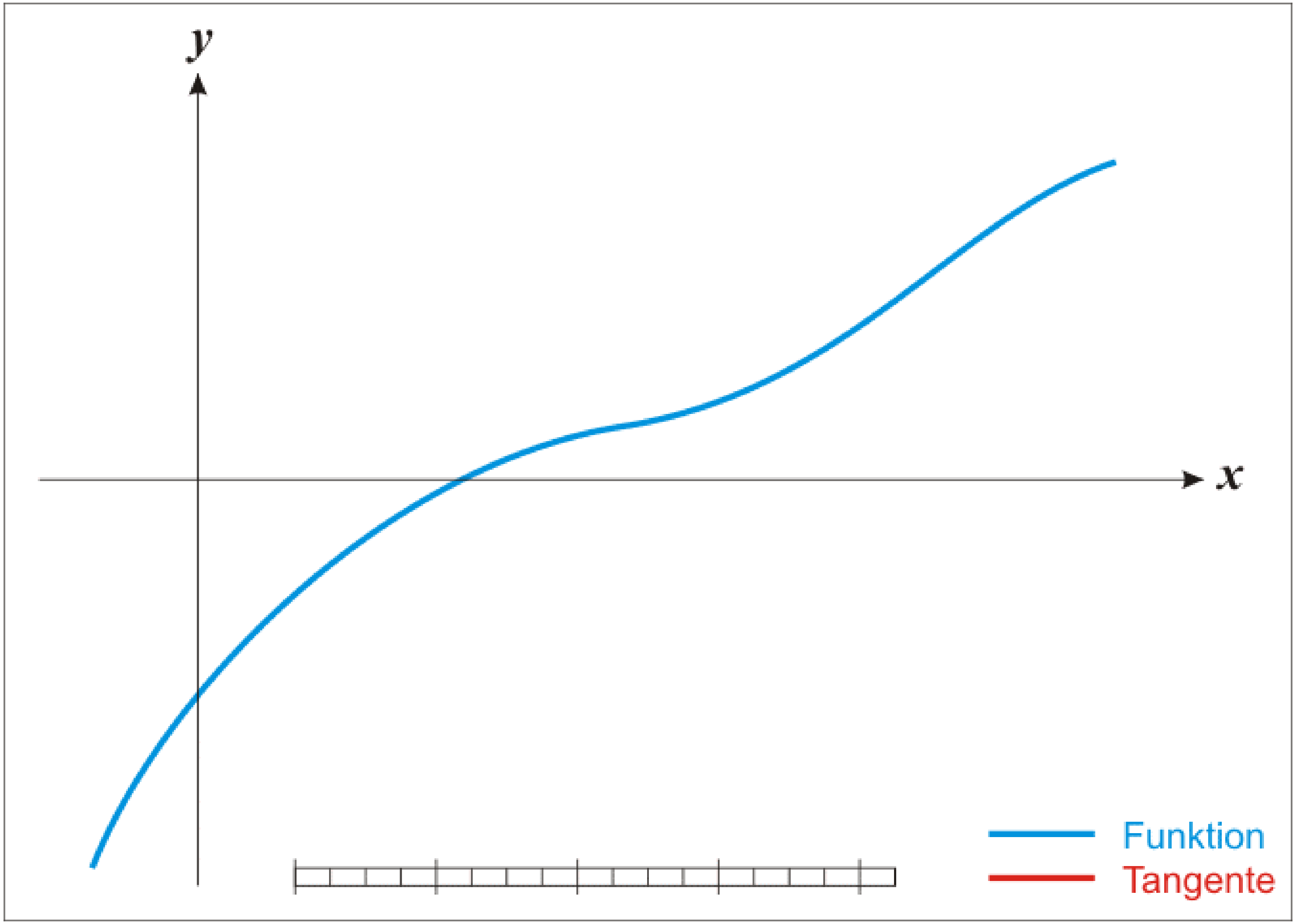
$$-\,x_{n+1} = -\,x_n + f(x_n) \,/\, f'(x_n)$$

Newton'sche Näherungsformel:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$



Das Newton-Verfahren



Beispiel: Newton-Verfahren

Beispiel: Funktion: $f(x) = x^3 - 4$,

Ableitung: $f'(x) = 3x^2$,

Startwert: $x_0 = 2$ (denn $f(1) = -3$ und $f(2) = 4$, also VZW).

allg. Newton-Formel: $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

auf *f(x)* angewendet: $$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\ 3} - 4}{3 \cdot x_n^{\ 2}}$$

Ergebnis der ersten Iterationen:

$x_0 = 2$

$x_1 = 2 - (2^3 - 4)/(3 \cdot 2^2) = 5/3 \approx 1{,}666666667$

$x_2 = 5/3 - ((5/3)^3 - 4)/(3 \cdot (5/3)^2) = 358/225 \approx 1{,}591111111$

… in Excel

	A	B
1	n	x_n
2	1	2
3	2	=B2-(B2^3-4)/(3*B2^2)
4	3	=B3-(B3^3-4)/(3*B3^2)
5	4	=B4-(B4^3-4)/(3*B4^2)
6	5	=B5-(B5^3-4)/(3*B5^2)
7	6	=B6-(B6^3-4)/(3*B6^2)

	A	B
1	n	x_n
2	1	2
3	2	1,666666667
4	3	1,591111111
5	4	1,587409696
6	5	1,587401052
7	6	1,587401052

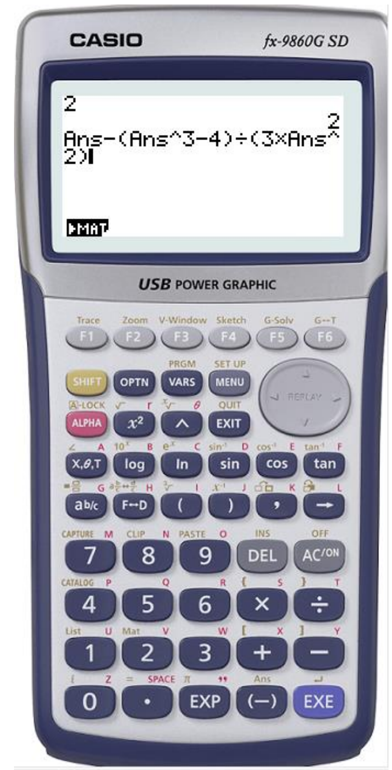
… mit dem Taschenrechner

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\,3} - 4}{3 \cdot x_n^{\,2}}$$

$$x_{n+1} = [ANS] - \frac{[\mathrm{ANS}]^3 - 4}{3 \cdot [\mathrm{ANS}]^2}$$

$\boxed{2}\ \boxed{=}$

$[\mathrm{ANS}]\boxed{-}\boxed{(}[\mathrm{ANS}]\boxed{\wedge}\boxed{3}\boxed{-}\boxed{4}\boxed{)}\boxed{\div}\boxed{(}\boxed{3}\boxed{\times}[\mathrm{ANS}]\boxed{\wedge}\boxed{2}\boxed{)}\boxed{=}$



Übungen

Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren die Lösungen folgender Gleichungen:

(a) $\mathbf{\cos(x) - x = 0}$ (Achtung: TR auf Bogenmaß „RAD“ umstellen!)

(b) $\mathbf{e^x = x + 2}$

(c) $\mathbf{x^3 - 5x = 0}$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Übungen

Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren die Lösungen folgender Gleichungen:

(a) **$\cos(x) - x = 0$** (Achtung: TR auf Bogenmaß „RAD“ umstellen!)

$$x_{n+1} = x_n - (\cos(x_n) - x_n) / (-\sin(x_n) - 1)$$

(b) **$e^x = x + 2$**

$$x_{n+1} = x_n - (e\hat{}x_n - x_n - 2) / (e\hat{}x_n - 1)$$

(c) **$x^3 - 5x = 0$**

$$x_{n+1} = x_n - (x_n\hat{}3 - 5x_n) / (3\, x_n\hat{}2 - 5)$$

Konvergenz

Das Newton-Verfahren ist ein spezieller Fall einer **Fixpunktiteration**.

Falls die Folge x_n gegen x^* konvergiert, so gilt

$$
\begin{array}{ccc}
x_{n+1} & = & x_n - f(x_n) \,/\, f'(x_n) \\
\downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow \\
x^* & = & x^* - f(x^*) \,/\, f'(x^*)
\end{array}
$$

Daraus folgt: $f(x^*) = 0$, d. h. x_n konvergiert gegen eine Nullstelle.

Quadratische Konvergenz

Bei einfachen Nullstellen konvergiert das Newton-Verfahren „superschnell“. Man spricht auch von **quadratischer Konvergenz**:

Bei der Bestimmung von Nullstellen mit dem Newton-Verfahren **verdoppelt** man i. d. R. bei jedem Schritt die Zahl der gültigen Stellen.

Beispiel: cos(x) – x = 0

[0.5],
[0.755222417105636421671703988341584503497458582536398692712853344271722084009181],
[0.739141666149879244945680926125086735204442644558454487161673923531026381315221],
[0.739085133920806803277698159936952107944671288190427064628376136572637644781601],
[0.739085133215160641765259154779549738961447836292689607060175903402209364852221],
[0.739085133215160641655312087673873404016080933478136771527813665451860104611011],
[0.739085133215160641655312087673873404013411758900757464965680635773284654883551],
[0.739085133215160641655312087673873404013411758900757464965680635773284654883551]

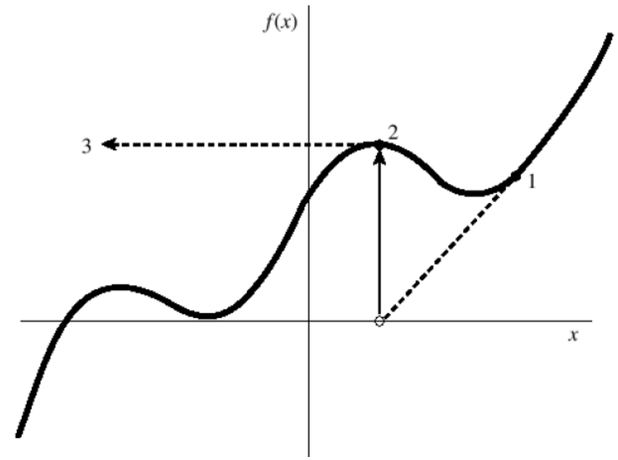
Divergenz

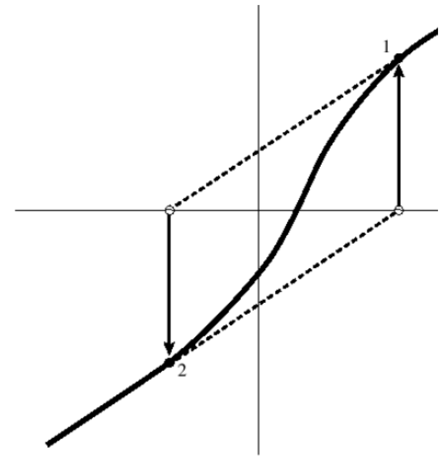
Bei einem „schlechten“ Startwert können Probleme auftreten:

1. **Tangentsteigung wird Null**: Abbruch (Division durch 0); bzw. Abwenden von der Nullstelle (falls Tangentensteigung sehr klein)

2. **Pendeln** zwischen zwei Werten

Das Verfahren **divergiert** dann.





Hinreichende Konvergenzbedingung

Die Folge der Näherungswerte x_1, x_2, … des Newton-Verfahrens konvergiert mit Sicherheit gegen die gesuchte Lösung, wenn folgende **Konvergenzbedingung** für jeden dieser Werte erfüllt ist:

$$\left| \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$$

Wie erhält man einen guten Startwert?

Die Kunst besteht darin, einen guten Startwert zu finden.

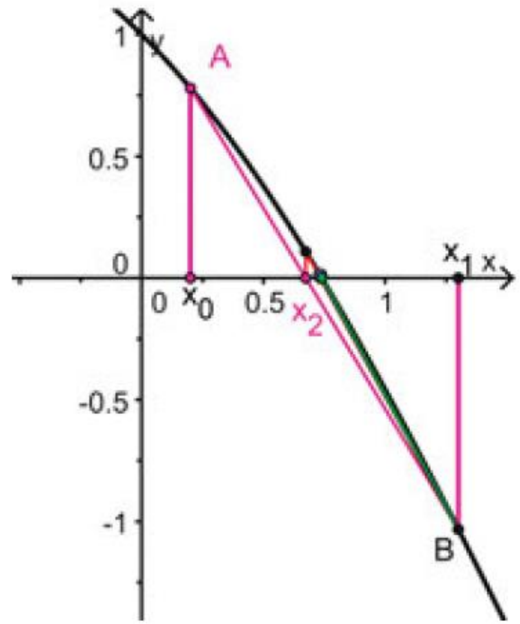
- Grafisch: f(x) skizzieren, ungefähres Ablesen der Nullstelle

- Umformungen: $f(x) = 0$ in $f_1(x) = f_2(x)$ umformen, skizzieren, Ablesen des Schnittstelle

- Startstelle z. B. mit ein paar Schritten des Bisektionsverfahrens finden

Falls die Gleichung mehrere Lösungen hat, muss zu jeder Lösung ein geeigneter Startwerte bestimmt werden.

- **Regula falsi:**
  Sekantenverfahren (s. Abb.)
  bereits Adam Ries, 16. Jh.
  kommt ohne Ableitung aus



- **Heron-Verfahren (60 n. Chr.) /**
  Babylonisches Wurzelziehen (1600 v. Chr.)
  Bestimmung von Quadratwurzeln (s. Kapitel 1)
  Newton-Verfahren für $f(x) = x^2 - a$:
  $x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - a) / (2\, x_n) = \frac{1}{2} (x_n + a/x_n)$

Ausblick

- Das Newton-Verfahren lässt sich auf **Funktionen**

  $f_1(x, y, \ldots)$

  $f_2(x, y, \ldots)$

  …

  mehrerer Veränderlicher erweitern.

- Anstelle von f' wird dann die **Jacobi-Matrix** verwendet, die alle partiellen Ableitungen der Funktionen f_i enthält.

- So kann man **nichtlineare Gleichungssysteme lösen**, z. B.

  $\sin^2(x) - y = 0$

  $x + y^2 - 1 = 0$

Das Newton-Verfahren für $z^3 - 1 = 0$ im Komplexen