Übungen - Serie 2

Teil: Lineare Algebra

Aufgabe 1

Beachte: Wir befassen uns hier nur deshalb mit Permutationen, weil A_{CNOT} eine Permutationsmatrix ist.

Die Permutationen der Zahlen 1, 2, 3 sind

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Gruppenoperation ist die Komposition („Verkettung") von Funktionen, etwa

$$\pi_2 \circ \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \pi_6$$

Analog lässt sich die Gruppentafel aufstellen:

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
π_1	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
π_2	π_2	π_3	π_1	π_5	π_6	π_4
π_3	π_3	π_1	π_2	π_6	π_4	π_5
π_4	π_4	π_6	π_5	π_1	π_3	π_2
π_5	π_5	π_4	π_6	π_2	π_1	π_3
π_6	π_6	π_5	π_4	π_3	π_2	π_1

Aufgabe 2

$$A_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir wissen: Ist $\pi \in S_n$ eine Permutation, dann ist die Permutationsmatrix $P_\pi = (p_{ij})$ durch

$$p_{ij} = \delta_{\pi(i),j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \pi(i) = j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

Aus den Einträgen der Matrix A_{CNOT} lesen wir ab:

$$p_{11} = 1 \rightarrow \pi_{CNOT}(1) = 1$$
$$p_{22} = 1 \rightarrow \pi_{CNOT}(2) = 2$$
$$p_{34} = 1 \Rightarrow \pi_{CNOT}(3) = 4$$
$$p_{43} = 1 \Rightarrow \pi_{CNOT}(4) = 3$$

Es folgt $\quad \pi_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Teil Quantencomputing

Aufgabe 2

Für
$$z_0 = \frac{\alpha_{00} + \alpha_{11}}{2}, \quad z_2 = i\,\frac{\alpha_{01} - \alpha_{10}}{2}$$
$$z_1 = \frac{\alpha_{01} + \alpha_{10}}{2}, \quad z_3 = \frac{\alpha_{00} - \alpha_{11}}{2}$$

folgt für bel. $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{00}+\alpha_{11}}{2} + \frac{\alpha_{00}-\alpha_{11}}{2} & \frac{\alpha_{01}+\alpha_{10}}{2} - i^2\,\frac{\alpha_{01}-\alpha_{10}}{2} \\ \frac{\alpha_{01}+\alpha_{10}}{2} + i^2\,\frac{\alpha_{01}-\alpha_{10}}{2} & \frac{\alpha_{00}+\alpha_{11}}{2} - \frac{\alpha_{00}-\alpha_{11}}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} z_0 + z_3 & z_1 - iz_2 \\ z_1 + iz_2 & z_0 - z_3 \end{pmatrix}$$
$$= z_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + z_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= z_0 I_2 + z_1 X + z_2 Y + z_3 Z$$

Aufgabe 3

Zeige: $U \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ist unitär $\Leftrightarrow$ $U = e^{i\varphi}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}$

mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ (*)

Damit sind dann unitäre (2×2)-Matrizen klassifiziert und es muss nicht mehr jeder Spezialfall einzeln geprüft werden (vgl. Serie 1, Aufgabe 2).

U ist per Definition unitär, wenn $U^{-1} = U^{+} = (\bar U)^T$ gilt.

„$\Leftarrow$" Zeige: Für obiges U gilt $U^+U = I_2$

Mit $\boxed{\exp(i\varphi)\exp(-i\varphi) = \exp(i\varphi - i\varphi) = 1}$ folgt

$$U^+U = \begin{pmatrix} \alpha\exp(i\varphi) & \beta\exp(i\varphi) \\ -\bar\beta\exp(i\varphi) & \bar\alpha\exp(i\varphi) \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \alpha\exp(i\varphi) & \beta\exp(i\varphi) \\ -\bar\beta\exp(i\varphi) & \bar\alpha\exp(i\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar\alpha\exp(-i\varphi) & -\beta\exp(-i\varphi) \\ \bar\beta\exp(-i\varphi) & \alpha\exp(-i\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\exp(i\varphi) & \beta\exp(i\varphi) \\ -\bar\beta\exp(i\varphi) & \bar\alpha\exp(i\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\overset{\square}{=} \begin{pmatrix} \alpha\bar\alpha + \beta\bar\beta & \bar\alpha\beta - \bar\alpha\beta \\ \alpha\bar\beta - \alpha\bar\beta & \alpha\bar\alpha + \beta\bar\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & 0 \\ 0 & |\alpha|^2 + |\beta|^2 \end{pmatrix}$$ denn für $z \in \mathbb{C}$ ist $|z| = \sqrt{z\bar z}$

$$\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Also ist $U = \exp(i\varphi)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}$ unitär.

„$\Rightarrow$" Zeige: U unitär $\rightarrow$ $U = \exp(i\varphi)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$

mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Die $\underline{\text{Idee}}$ wie hier vorzugehen ist, kennen wir schon aus der Präsenzübung zur Vorlesung (Konstruktion der speziellen Transformation $A: |0\rangle \longmapsto \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$).

Sei $U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ unitär, d.h. $U^+ = U^{-1}$, dann folgt

$$U^+U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{\alpha}\alpha + \overline{\gamma}\gamma & \overline{\alpha}\beta + \overline{\gamma}\delta \\ \overline{\beta}\alpha + \overline{\delta}\gamma & \overline{\beta}\beta + \overline{\delta}\delta \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Der Ansatz liefert drei Gleichungen:

$\underline{\text{I}}$. $\alpha\overline{\alpha} + \gamma\overline{\gamma} = 1$ bzw. $|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1$

$\underline{\text{II}}$ $\beta\overline{\beta} + \delta\overline{\delta} = 1$ bzw. $|\beta|^2 + |\delta|^2 = 1$

$\underline{\text{III}}$ $\alpha\overline{\beta} + \gamma\overline{\delta} = 0$

Beachte: Die Gleichungen $\alpha\overline{\beta} + \gamma\overline{\delta} = 0$ und $\overline{\beta}\alpha + \overline{\delta}\gamma = 0$ sind äquivalent (mittels Konjugation).

Gleichung I und II liefern komplexe Zahlen auf dem Einheitskreis (d.h. dem Kreis mit Radius 1 um den Ursprung).

Wir wählen die Darstellung mit Polarkoordinaten:

$\alpha = \exp(i\varphi_1)$, $\beta = \exp(i\varphi_2)$, $\gamma = \exp(i\varphi_3)$, $\delta = \exp(i\varphi_4)$

mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in [0, 2\pi)$. Gleichung $\underline{\text{III}}$ ist äquivalent zu $\alpha\overline{\beta} = -\gamma\overline{\delta}$ und liefert $\alpha = \overline{\delta}$, $\overline{\beta} = -\gamma$.

Damit folgt

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

etwa aus Gleichung I, denn

$$1 = |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = |\alpha|^2 + |-\bar{\beta}|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

Für den Faktor $\exp(i\varphi)$ können wir entweder die spezielle Form von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus Gl. I verwenden (und einen gemeinsamen Faktor „ausklammern"), oder wir schreiben

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \exp(i\varphi) \begin{pmatrix} \alpha \exp(-i\varphi) & \beta \exp(-i\varphi) \\ -\overline{\beta \exp(+i\varphi)} & \overline{\alpha \exp(+i\varphi)} \end{pmatrix}$$

$$= \exp(i\varphi) \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\bar{\beta}' & \bar{\alpha}' \end{pmatrix}$$

für $\alpha' = \alpha \exp(-i\varphi)$, $\beta' = \beta \exp(-i\varphi)$ mit

$$|\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = |\alpha \exp(-i\varphi)|^2 + |\beta \exp(-i\varphi)|^2$$

$$= \underbrace{|\exp(-i\varphi)|^2}_{=1} \underbrace{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}_{=1} = 1$$