Security - LV 4121 und 4241 -

Asymmetrische Kryptosysteme

Kapitel 6

Lernziele

- El-Gamal Kryptosystem
- Asymmetrische kryptographische Verfahren sowie RSA-Algorithmus
- Das Rabin-Verschlüsselungsverfahren
- El-Gamal-Signaturverfahren
- Das Drei-Wege-protokoll nach X.509

Überblick Kapitel 6

Kap. 6: Asymmetrische Kryptosysteme

Teil 1: Asymmetrische Verschlüsselung

- Das ElGamal-Kryptosystem
- Wahl der Systemparameter
- Ver- und Entschlüsselungsalgorithmus
- Sicherheit des Verfahrens

- Das ElGamal-Verschlüsselungsverfahren wurde 1985 von dem Kryptologen **Taher Elgamal** entwickelt.
- Es zählt zu den Public-Key-Verschlüsselungsverfahren und verwendet für jeden **Teilnehmer** T einen öffentlichen Schlüssel **PK**_T sowie einen **geheimen** Schlüssel **SK**_T.
- Der öffentliche Schlüssel kann veröffentlicht werden und dient der Verschlüsselung, während der geheime Schlüssel (nur dem Empfänger der Nachricht bekannt) bei der Entschlüsselung angewandt wird.
- Im folgenden wird davon ausgegangen, dass ein Sender A eine Nachricht m an einen Empfänger B senden möchte.
- Sender A und Empfänger B verfügen jeweils über ein **Schlüsselpaar**, welches einmalig erzeugt werden muss.

Systemparameter:

- 1.eine Primzahl p.
- 2. eine multiplikative Einheitengruppe (Körper) G über Zp* mit:

$$\mathbf{Z}_{n}^{*} := \left\{ a \in \mathbf{Z}_{n} \setminus \{0\} \mid ggT(a, n) = 1 \right\}$$

3. einen Erzeuger g.

Anmerkung:

Die Parameter (**G**, g) werden öffentlich gemacht und die Sicherheit des Kryptosystems verlangt eine **möglichst große Ordnung** der Gruppe **G**. Daher wird p so gewählt, dass

$$p-1=2 q,$$

wobei q wiederum eine Primzahl ist (vgl. Sophie-Germain-Primzahlen).

Schlüsselerzeugung:

Das Schlüsselpaar (PK_B, SK_B) des **Empfängers B** wird folgendermaßen erzeugt:

- 1.**B** wählt zufällig eine Zahl $b \in \{1, ..., p-1\}$ mit ggT(b, p) = 1.
- 2. **B** berechnet das Gruppenelement:

$$B = g^b \in \mathbf{G}(\mathbf{Z}p^*)$$

3. B setzt den Entschlüsselungsschlüssel (geheim) SKB:

$$SK_B := b$$

4. B setzt den Verschlüsselungsschlüssel (öffentlich) PKB:

$$PK_B := B$$

Verschlüsselungsvorschrift:

Um die Nachricht $m \in G(\mathbf{Z}p^*)$ zu versenden, verfährt der SenderA folgendermaßen:

- 1. A wählt zufällig eine Zahl $r \in \{1, ..., p-1\}$ mit ggT(r, p) = 1.
- 2. A berechnet das Gruppenelement:

$$R = g^r \in \mathbf{G}(\mathbf{Z}p^*)$$

3. A berechnet das Chiffrat (mit dem öffentlichen Schlüssel des Empfängers B):

$$c := PK_B^r \cdot m \in G(\mathbf{Z}p^*)$$

4. A versendet:

als verschlüsselte Nachricht m an den Empfänger B.

Entschlüsselungsvorschrift:

Um die verschlüsselte Nachricht (R, c) zu entschlüsseln, verfährt der **Empfänger B** folgendermaßen:

1. **B** berechnet das Gruppenelement (mit seinem **geheimen** Schlüssel SK_B):

$$\mathbf{R}^{-\mathrm{SK_B}} \cdot \mathbf{c} \equiv \mathbf{R}^{\mathrm{p}-1-\mathrm{SK_B}} \cdot \mathbf{c} \in \mathbf{G}(\mathbf{Z}p^*)$$

bzw. unter Verwendung des Satzes von Fermat 1):

$$\mathbf{R}^{p-1-SK_B} \cdot \mathbf{c} \in \mathbf{G}(\mathbf{Z}p^*)$$

1)

$$a^{p-1} \mod p = 1$$
; $(a \neq 0)$

Entschlüsselungsvorschrift (Fortsetzung):

2. **B** verwendet das zuvor berechnete Gruppenelement als Nachricht m, denn es gilt:

$$\mathbf{R}^{-\operatorname{SKB}} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{g}^{r})^{-\operatorname{SKB}} \cdot \operatorname{PKB}^{r} \cdot \mathbf{m} = (\mathbf{g})^{-r} \cdot \operatorname{SKB} \cdot (\mathbf{g}^{b})^{r} \cdot \mathbf{m}$$

$$= (\mathbf{g})^{-r} \cdot \mathbf{b} \cdot (\mathbf{g}^{b})^{r} \cdot \mathbf{m}$$

$$= 1$$

$$= \mathbf{m}$$

Anmerkung:

$$R := g^r ; c := PK_B^r \cdot m ; PK_B := B ; B = g^b ; SK_B := b$$

Aufgabenstellung:

Wir betrachten das ElGamal-Verschlüsselungsverfahren über der Gruppe $\mathbf{G}(\mathbf{Z}29^*)$ mit dem Erzeuger g=2 und verschlüsseln die Nachricht m=10 mit dem öffentlichen Schlüssel $PK_B=5$ des Empfängers B sowie der Zufallszahl r=8.

1. Verschlüsselung:

$$\Rightarrow$$
 p = 29 (\forall mod p!)

- Gruppenelement $R = g^r = 2^8 \mod 29 = 24$
- Chiffrat $c := PK_B^r \cdot m = (5^8 \cdot 10) \mod 29 = 8$
- Sender A versendet (R, c) = (24, 8) als verschlüsselte Nachricht m an den Empfänger B.

2. Entschlüsselung:

$$\Rightarrow$$
 p = 29 (\forall mod p!)

Der Zusammenhang zwischen dem öffentlichen und dem geheimen Schlüssel ergibt sich beim ElGamal-Verfahren aus:

$$PK_B := B ; B = g^b ; SK_B := b \Rightarrow PK_B := g^b = g^{SK_B} \Rightarrow PK_B \equiv g^{SK_B} \mod p$$

- Geheimer Schlüssel aus $5 \equiv 2^{SK_B} \mod 29 \implies SK_B = 22$ (DL-Problem!)
- Gruppenelement $R^{p-1-SK_B} \cdot c = (24^{29-1-22} \cdot 8) \mod 29$ = $(24^6 \cdot 8) \mod 29 = 10$
- D. h. die gesendete Nachricht ist m = 10.

Sicherheit des Verfahrens:

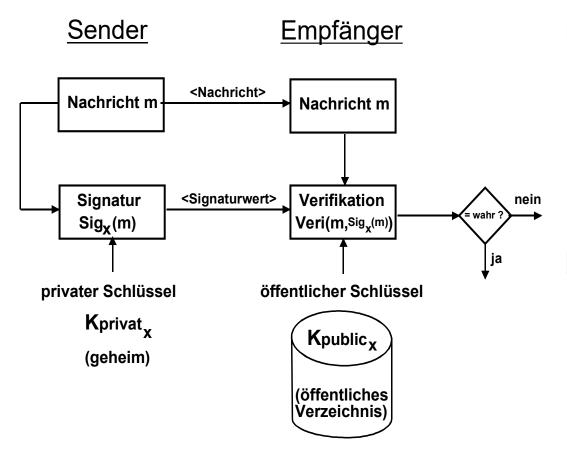
- Das ElGamal-Verschlüsselungsverfahren baut auf der Idee des Diffie-Hellman-Verfahrens auf.
- Es ist beweisbar sicher unter der Annahme, dass das sogenannte Diskret-Log-Problem in der zugrundeliegenden Gruppe schwierig ist.
- Durch schlechte Parameterwahl oder Implementierungsfehler können jedoch Spezialfälle konstruiert werden, die unsicher sind.
- In jedem Fall ist bei der Wahl der Gruppenstruktur G deren Zerfall in kleine Untergruppen zu vermeiden.
- Durch Mehrfachnutzung der gleichen Zufallszahl r sind Known-Plaintext-Angriffe möglich.

Überblick Kapitel 6

Kap. 6: Asymmetrische Kryptosysteme

Teil 2: Digitale Signaturen

- Ablaufskizze
- RSA-Signaturen
- Angriff auf RSA-Signatursysteme



Basisprinzip:

- Privater (geheimer) und öffentlicher
 Schlüssel
- Signaturwert mit privatem Schlüssel

Eigenschaften:

- Nachweisbarkeit
- Nicht Abstreitbarkeit
- Authentizität
- Echtheit
- Identitätsnachweis

Signiervorschrift:

$$sig(m) := h(m)^{Sk} mod n$$

wobei $n = p \cdot q$; (Modul)

h = Hashfunktion

Sk = geheimer Signaturschlüssel

Schlüsselerzeugung:

Sk · Pk
$$mod \phi(n) = 1$$
 sowie $ggT(Sk, \phi(n)) = 1$

mit

$$\phi(n) = (p - 1) (q - 1)$$

Verifiziervorschrift:

$$h(m) \stackrel{?}{=} \stackrel{?}{sig}(m)^{Pk} mod n$$

wobei Pk = öffentlicher Verifizierschlüssel

Sicherheit:

Sk = Pk⁻¹
$$mod \phi(n)$$
 schwierig zu berechnen! $\Rightarrow n = \{2^{768} \dots 2^{4096}\}$

RSA-Verfahren

Zahlenbeispiel

Vorgang

p = 13

q = 17

Berechne:

 $\phi(n) = (13 - 1)(17 - 1) = 192$

 $n = 13 \cdot 17 = 221$

Erklärung

Primzahl, ist geheim zu halten

Primzahl, ist geheim zu halten

 $n = p \cdot q$ (Modul, öffentlich)

 $\phi(n) = (p - 1) (q - 1);$

Wähle (zufällig):

Wähle:

Pk = 101

(öffentl. Verifizierschlüssel)

Nun ermittle **Sk** aus

 $Sk \cdot 101 \ mod \ 192 = 1$

 $\mathbf{Sk} \cdot \mathbf{Pk} \; mod \; \phi(\mathbf{n}) = 1$

d. h.

 $Sk \cdot 101 = z \cdot 192 + 1$

 \Rightarrow Sk = 173 (für z = 91)

(geheimer Signaturschlüssel)

RSA-Verfahren

Zahlenbeispiel

Vorgang

 \downarrow

Erklärung

Annahme:

$$h(m) := 50$$

zu signierende Nachricht (Text)

$$50 = 110010_2$$

signieren:

$$sig(m) = 50^{173} \mod 221 = \underline{33}$$

 $sig(m) := h(m)^{Sk} \mod n$

Die berechnete Signatur ist

$$33 = 100001_2$$

verifizieren:

$$33^{101} \mod 221 = \underline{50 := h(m)}$$

sig(m)^{Pk} mod n ?=? h(m) Die berechnete Signatur ist

korrekt!

```
Signatur: sig(m) := m^{Sk} \mod n = a \pmod{p} + b \pmod{p} + b \pmod{q} wobei a \mod q(p) = 0(1) \quad sig_1 \qquad sig_2 \quad b \mod q(p) = 1(0) (m^{Sk} \mod n) \mod p = a \mod p \pmod{p} + b \mod p \pmod{p} + b \mod p \pmod{q} m^{Sk} \mod p = 1 \pmod{p} Analog mod q : \Rightarrow m^{Sk} \mod q = 1 \pmod{q} \square Fehlerbetrachtung (Differential Fault Analysis):  \text{Voraussetzung: Fehler bei der Berechnung von } sig_1 \text{ oder } sig_2  Annahme:  \text{Fehler bei der Berechnung } sig_1; \text{ Berechnung } sig_2 \text{ sei o.k.!}   sig_{err} \text{ ist das Ergebnis der fehlerhaften Berechnung von } sig(m)
```

 $sig(m) = a sig_1(m) + b sig_2(m) \implies korrekte Signatur$

$$sig_{err}(m) = a sig_{err}(m) + b sig_{2}(m) \implies fehlerhafte Signatur$$

$$sig(m) - sig_{err}(m) = a (sig_{1}(m) - sig_{err}(m)) \quad Differential Fault Analysis (DFA)$$

```
(sig(m) - sig_{err}(m)) = a (sig_1(m) - sig_{err}(m)) \mid mod q
(sig(m) - sig_{err}(m)) \mod q = 0 \text{, weil a mod } q = 0
```

dann gilt: $sig(m) \equiv sig_{err} \mod q$ aber $sig(m) \neq sig_{err} \mod p$

also ist: \mathbf{q} ein Teiler von $(\mathbf{m} - \mathbf{sig}_{err}^{Pk})$ und \mathbf{p} kein Teiler von $(\mathbf{m} - \mathbf{sig}_{err}^{Pk})$

Ein Faktor von $\mathbf{n} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ kann dann ermittelt werden aus:

$$ggT(sig(m)^{Pk} - sig_{err}^{Pk}, n) = ggT(m - sig_{err}^{Pk}, n) = q$$

Und der zweite Faktor aus:

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} / \mathbf{q}$$

Geheimer Signaturschlüssel aus: Sk · Pk $mod \phi(n) = 1$ mit $\phi(n) = (\mathbf{p} - 1) (\mathbf{q} - 1)$

$$\Rightarrow Sk = Pk^{-1} \bmod ((p-1)(q-1))$$

Öffentlich bekannt: Pk = 101 (öffentlicher Verifizierschlüssel)

n = 221 (Modul)

Korrektes Signaturergebnis:

$$sig(m) = [a sig_1 + b sig_2] \mod n = 33$$

Fehlerhafte Signaturberechnung:

$$sig_{err} = [a sig_{err 1} + b sig_2] \mod n = 84$$

Analyse:

⇒ sig(m) - sig_{err} = -51
⇒ ggT(-51, n = 221) = 17 =: q ⇒ p = 221 / 17 = 13
↓ ↓
-3 mal 17 13 mal 17
⇒
$$\phi(n) = (13 - 1) (17 - 1) = 192$$

Geheimer Signaturschlüssel aus:

$$\Rightarrow$$
 Sk = 101⁻¹ mod 192 = 173 \rightarrow Signatursystem gebrochen!

Überblick Kapitel 6

Kap. 6: Asymmetrische Kryptosysteme

Teil 3: Das Rabin-Verschlüsselungsverfahren

- Rabin-Modul und quadratische Reste
- Ver- und Entschlüsselung
- Sicherheit des Verfahrens

Asymmetrische Kryptographie:

Erfinder:

Michael O. Rabin

- 1979 von Michael O. Rabin (isr. Inform.) veröffentlicht
- Asymmetrisches Kryptosystem
- Öffentlicher und privater Schlüssel
- Verwandt mit RSA-Verfahren



Michael O. Rabin

Ablauf:

Sei T der Klartext, G der verschlüsselte Geheimtext und $n = p \cdot q$ (Rabin-Modul) sowie $p \equiv q \equiv 3 \mod 4 \mod p$, $q \in P$.

- Wähle zwei Primzahlen p und q mit p ≡ q ≡ 3 mod 4. Das Paar (p, q) ergibt den geheimen Schlüssel.
- Als Produkt der beiden Primzahlen ergibt sich der Rabin-Modul n = p·q, welcher den öffentlichen Schlüssel darstellt.
- Der Sender verschlüsselt seine Nachricht mithilfe des öffentlichen Schlüssels n wie folgt: G = T² mod n.
- Der Empfänger entschlüsselt die Nachricht, indem er mithilfe des geheimen Schlüssels (p, q) die vier Zahlen ± r und ± s berechnet durch

$$r = (y_p \cdot p \cdot T_q + y_q \cdot q \cdot T_p) \mod n, \quad s = (y_p \cdot p \cdot T_q - y_q \cdot q \cdot T_p) \mod n$$

 $y_p \cdot p + y_q \cdot q = 1$, sodass gilt: $T \in \{\pm r \mod n, \pm s \mod n\}$.

Die Sicherheit des Verfahrens bemisst sich aus kryptologischer Sicht an:

G =
$$T^2 \mod n$$
 schwierig nach T aufzulösen!
 $\Rightarrow n = \{2^{400} \dots 2^{1024}\}$

Anmerkung:

Man nennt y in der Gleichung des Typs $y \equiv x^2 \mod n$ auch als **quadratischen Rest** bezüglich des Moduls n, falls Lösungen für x bzw. Quadratwurzeln von y mod n existieren. Sonst quadratischer Nichtrest.

mit

Faktorisierungsalgorithmus:

Bestimme Zufallszahl $r \in Z_n^*$

```
Berechne x = RABINDECRYPT(r^2 \mod n), d. h. x = r^2 \mod n
```

```
if (x \equiv +r \pmod{n} \mid x \equiv -r \pmod{n}) // ODER-Beziehung
```

dann Fehlschlag (wg. trivialer Quadratwurzel)

→ neues r bestimmen

sonst faktorisieren: p = ggT(x + r, n) sowie q = n / p.

Der Algorithmus faktorisiert n mit einer Erfolgswahrscheinlichkeit von 1/2.

$$(Anm.: -r = n - r)$$

Überblick Kapitel 6

Kap. 6: Asymmetrische Kryptosysteme

Teil 4: Signaturen und Authentifizierung

- ElGamal-Signaturen über Zp*
- Das Drei-Wege-Protokoll nach X.509

Der ElGamal-Algorithmus ist eine Verallgemeinerung des Diffie-Hellman-Verfahrens und beruht auch auf der Basis des diskreten Logarithmusproblems. Mit den gleichen Bezeichnungen wie auf Folie 4 ergibt sich die gleiche Prozedur bis zum Austausch der beiden öffentlichen Schlüssel.

- A und B einigen sich auf eine große Primzahl p und eine geeignete
 Primitivwurzel g. Die beiden Zahlen dürfen öffentlich bekannt sein.
- A wählt eine Zufallszahl SKA und sendet PKA = g^{SKA} mod p an B.
 (PKA, g, p) ist der öffentliche, (SKA, g, p) der geheime Schlüssel von A.
- B wählt eine Zufallszahl SKB und sendet PKB = g^{SKB} mod p an A.
 (PKB, g, p) ist der öffentliche, (SKB, g, p) der geheime Schlüssel von B.

Signaturerstellung:

Wir gehen davon aus, dass der Teilnehmer **A** dem Teilnehmer **B** eine signierte Nachricht h(m) übermitteln will. Die zu h(m) gehörige **digitale** Signatur werde durch ein Paar sig(h(m)) = (r, s) repräsentiert.

- A wählt eine zu p 1 teilerfremde Zahl k. // Wegen Voraus. ∃ k⁻¹
- A berechnet $r = g^k \mod p$.
- A löst die Kongruenz $h(m) = (SK_A \cdot r + k \cdot s) \mod (p 1)$. Der unbekannte Wert s ergibt sich durch $s = k^{-1} \cdot (h(m) SK_A \cdot r) \mod (p 1)$.
- A schickt h(m) sowie sig(h(m)) d. h. h(m) und (r, s) an B.

Signaturprüfung:

Es ergibt sich mit

$$h(m) = (SK_A \cdot r + k \cdot s) \mod (p - 1)$$

die Beziehung:

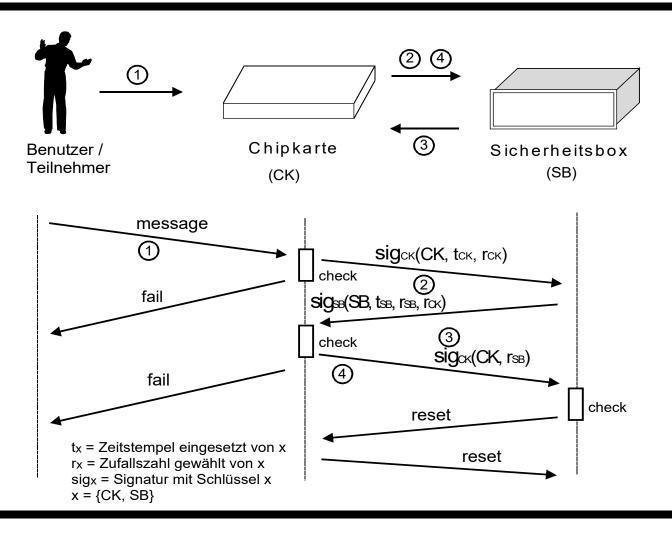
$$g^{h(m)} = g^{SK_A \cdot r + k \cdot s} = g^{SK_A \cdot r} \cdot g^{k \cdot s} = PK_A^r \cdot r^s \mod p.$$

Damit ist jeder Teilnehmer, insbesondere der Empfänger B, in der Lage zu verifizieren, ob h(m) tatsächlich von A signiert wurde.

Verify(h(m), (r, s), PK_A) = true \Leftrightarrow $g^{h(m)}$ mod $p = PK_A^r \cdot r^s$ mod p. Im Gegensatz zu RSA ist hier eine Signatur (r, s) etwa doppelt so lang.

Sicherheit des Verfahrens:

- In der Praxis wählt man auch hier die (sichere) Primzahlen p ∈ P (sogenannte Sophie-Germain-Primzahl) gemäß p = 2 q + 1, wobei q ∈ P ebenfalls eine Primzahl ist.
- Dann besitzen alle Untergruppen die Ordnung q.
- Die Größe von q bestimmt die Sicherheit des Verfahrens.
- Die Parameterwahl p, q und g kann für alle Teilnehmer gemeinsam getroffen werden.
- Ferner wird eine kollisionsresistente Hashfunktion h benötigt.
- Alle SK_T der Teilnehmer T müssen selbstverständlich geheim gehalten werden.



```
Initiator A
                                                                                 Responder B
                            A, {B}, R<sub>a</sub>, SecNeg<sub>a</sub>, {Cert<sub>a</sub>}
Flow1-3WE
            A, B, SecNeg<sub>b</sub>, {Cert<sub>b</sub>}, {R_a, R_b, {Enc_{Ka}(ConfPar_b)},
        Sig<sub>Kb</sub>(hash(A, B, R<sub>a</sub>, R<sub>b</sub>, SecNeg<sub>a</sub>, SecNeg<sub>b</sub>, {ConfPar<sub>b</sub>}))}
                                                                                 - Flow2-3WE
   \{A, B, R_b, \{Enc_{Kb}(ConfPar_a)\}, Sig_{Ka}(hash(A, B, R_b, \{ConfPar_a\}))\}
Flow3-3WE
       SecNeg = Security Negotiation
                                                    ConfPara = Confidential Parameters
       Cert = Zertifikat / CRL
                                                    Sig_
                                                                 = Signatur
       Enc_ = Verschlüsselung
                                                                 = Hashfunktion
                                                    hash
```

Überblick Kapitel 6

Kap. 6: Asymmetrische Kryptosysteme

Zusammenfassung:

- In diesem Kapitel wurden asymmetrische Kryptoverfahren, die auf dem Faktorisierungsproblem, dem modularen Wurzelziehen und dem diskreten Logarithmusproblem beruhen, vorgestellt.
- Dabei wurden zunächst das auf dem Faktorisierungsproblem basierende Signaturverfahren von Rivest, Shamir und Adleman (RSA-Verfahren) und anschließend das auf quadratischen Resten beruhende Verschlüsselungsverfahren von Rabin präsentiert.
- Dann folgte das auf dem DLP basierende Schlüsselaustauschprotokoll von von ElGamal (EG-Verfahren).