Formelsammlung Analysis und Numerik

Kapitel 1: Folgen und Grenzwerte

Arithmetische Folge: $a_{n+1} - a_n = d$, $a_n = a_0 + n \cdot d$, Geometrische Folge: $a_{n+1} / a_n = q$, $a_n = a_0 \cdot q^n$

Heron-Verfahren: $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + a/x_{n-1})$

Geometrische Summe: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ Grenzwert (für $|q| < 1$): $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Kapitel 2: Funktionen und Stetigkeit

p-q-Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ Stetigkeit: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Kapitel 3: Differenzialrechnung

Differenzialquotient: $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Kettenregel: $k(x) = f(g(x)) \Rightarrow k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Ableitung der Umkehrfunktion: $(f^{-1})'(x) = 1 / f'(f^{-1}(x))$

Wichtige Ableitungen: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$, $(\ln x)' = 1/x$

Regel von de l'Hospital: „0/0" oder „∞/∞" $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Extrema: $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) < 0$ [> 0] $\Rightarrow$ x_E ist lokales Maximum [Minimum]

Wendepunkte: $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_E) \neq 0 \Rightarrow$ x_W ist Wendestelle

Newton-Verfahren: $x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n)$

Kapitel 4: Approximation und Interpolation

Taylorpolynom: $g(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f(x_0)}{0!}$

Newton-Interpolationspolynom durch (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n):
$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})$.

Kapitel 5: Mehrdimensionale Funktionen

Tangentialebene: $g(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

Gradient: $\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$

Richtungsableitung: $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = f_x \cdot \cos(\alpha) + f_y \cdot \sin(\alpha) = \text{grad}(f) \cdot \vec{r}$

Extrema und Sattelpunkte: Wenn $\text{grad}(f) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und für $\Delta = \det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$ gilt

$\Delta > 0$ und $f_{xx} > 0$	$\Rightarrow$ isoliertes Minimum
$\Delta > 0$ und $f_{xx} < 0$	$\Rightarrow$ isoliertes Maximum
$\Delta < 0$	$\Rightarrow$ Sattelpunkt
$\Delta = 0$	$\Rightarrow$ keine Aussage möglich

Gradientenabstiegsverfahren: $x_{n+1} = x_n - s \cdot f'(x_n)$ bzw. $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - s \cdot \text{grad} f(\vec{x}_n)$

Kapitel 6: Integralrechnung

Hauptsatz: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ Stammfunktion F von f: F´ = f

Volumen von Rotationskörpern: $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$ Bogenlänge: $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

Trapezverfahren: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{n} \cdot (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$ mit $y_i = f(a + i\cdot(b - a)/n)$ für i = 0, …, n

Keplersche Fassregel: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6} \cdot (f(a) + 4 \cdot f(m) + f(b))$ mit m = (a+b)/2

Simpson-Verfahren: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$ mit $y_i = f(a+i\cdot(b-a)/(2n))$, i = 0, …, 2n