Künstliche Intelligenz

Prof. Dr. Dirk Krechel
Hochschule RheinMain

Hochschule **RheinMain**
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim Geisenheim

Inhalte

- Einführung
- **Symbolische Verfahren, Logik**
  - Aussagenlogik, **Prädikatenlogik**
  - Horn Logik, Prolog
- Suchen und Bewerten
  - Problemlösen durch Suche
    - Uninformierte Suche
    - Heuristische Suche
    - Spielbäume
  - Information Retrieval
- Lernen
  - Entscheidungstheorie
  - Naive Bayes
  - Entscheidungsbäume
  - Neuronale Netze
  - unüberwachtes Lernen

Prädikatenlogik – Überblick

- *Terme* repräsentieren spezifische Objekte in der realen Welt
  - *Konstanten*: Direkter Bezug auf festes Objekt
  - *Funktionen*: Indirekter Bezug auf Objekt (über eine Beziehung)
  - *Variablen*: Platzhalter für ein Objekt
- *Prädikatssymbole* repräsentieren eine Relation zwischen Objekten
- *Quantoren* (und Variablen)
  - Nehmen auf eine Menge von Objekten Bezug
  - Müssen nicht jedes Objekt explizit per Name ansprechen
- *Formeln* stellen Wissen dar
  - In Form von Termen, logischen Verknüpfungen, Quantoren und Prädikatssymbolen
  - In “geeigneter Weise” kombiniert/formuliert

- Prädikatenlogik (erster Stufe), PL1
  - [Prädikatenlogik 2. Stufe mit Quantoren über Prädikaten, nicht behandelt]

Prädikatenlogik – Beispiele/1

- Prädikate: Bruder, Schwester, Mutter, Vater
- Objekte: tom, susan, mary, roger
- Fakten
  Drücken atomare Formeln aus, (wie Aussagen in der Aussagenlogik)
  - Vater(tom,mary), Mutter(susan,mary), Bruder(tom,roger)
  - $\neg$ Vater(roger,mary)

- Universelle Quantoren, „für alle“
  Aussagen über eine Menge von Objekten
  - $\forall$x: Katze(x) $\Rightarrow$ Säugetier(x)
    Alle Katzen sind Säugetiere
  - $\forall$x: Vater(tom, x) $\Rightarrow$ Mutter(susan, x)
    Alle Kinder von Tom sind Kinder von Susan
  - $\forall$x $\forall$y: Verheiratet(x,y) $\Leftrightarrow$ Verheiratet(y,x)
    Die Relation Verheiratet ist symmetrisch

Prädikatenlogik – Beispiele/2

- Existenz-Quantoren, „es existiert“
  Aussage, dass ein Objekt mit gegebenen Bedingungen existiert
  - $\exists x$: Katze(x) $\wedge$ Schwarz(x)
    Es existiert eine schwarze Katze
  - $\exists x$: Vater(tom, x) $\wedge$ Mutter(susan, x)
    Es gibt ein gemeinsames Kind von Tom und Susan

- Funktionen, *Terme*
  Bezug auf ein Objekt, ohne Namen
  - vater_von(x), alter(x), times(x,y), succ(x)
  - $\forall x$: Equals(x,x)
  - Equals(factorial(0), succ(0))
  - $\forall x$: Equals(factorial(succ(x)), times(succ(x), factorial(x))

Prädikatenlogik – Syntax

- Prädikatensymbole
  - p, q, r, s, P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, Vater, Katze …
  - Jedes Prädikatensymbole hat Stelligkeit (Anzahl Argumente)
  - Stelligkeit 0 sind Konstanten true and false
  - Stelligkeit 1 sind die Propositionen der Aussagenlogik
- Funktionssymbole
  - f, g, h, f_1, g_1, h_1, add, succ, 0, 1, 2, 3, …
  - Jedes Funktionssymbol hat Stelligkeit
  - Funktionssymbole mit Stelligkeit 0 heißen Konstanten
- Variablen
  - x, y, z, x_1, y_1, z_1, …
- Quantoren
  - $\exists$ (Existenzquantor), $\forall$ (Allquantor)
- Logische Verknüpfungen
  - $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, ()

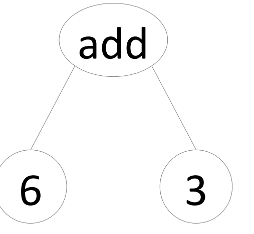
Definition: Terme

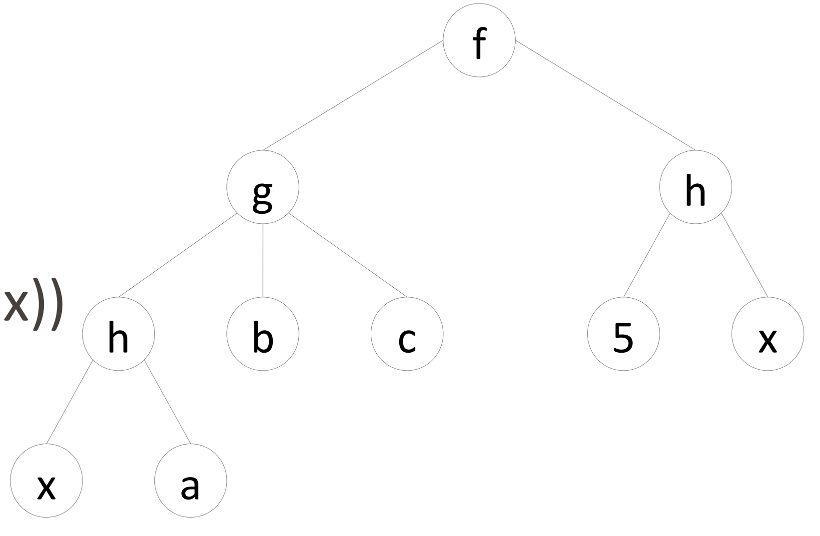
- Definition: *Term*
  1. Variablen und nullstellige Funktionssymbole sind Terme
  2. Wenn $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme sind und wenn f ein n-stelliges Funktionssymbol ist (n>0), dann ist $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ein Term
- Terme werden nur durch die Regeln 1. und 2. gebildet
- Terme ohne Variablen heißen auch *Grundterme*
- Beispiele für Terme

– 0	Grundterm, Konstante
– add(3, 6)	Grundterm, keine Konstante
– add(x, 8)	kein Grundterm, keine Konstante
– f(g(h(x, a), b, c), h(5, x))	kein Grundterm [Term wenn f 2-stellig, g 3-stellig, h 2-stellig]
– f(g(h(a, a), b, c), h(5, a))	Grundterm

Baumdarstellung von Termen

- Terme sind Bäume
  - Jeder innere Knoten ist mit einem Funktionssymbol f markiert
  - Wenn f die Stelligkeit n hat, dann hat der entsprechende Knoten
    n geordnete Nachfolgerknoten. Jeder ist die Wurzel eines Teilbaums, der den entsprechenden Teilterm darstellt
  - Jeder Blattknoten ist eine Konstante oder eine Variable
- Beispiele
  - add(6,3)
  - f(g(h(x, a), b, c), h(5, x))





Definition: Formel

- Definition: *Formel*
  - Wenn P n-stelliges Prädikatssymbol und $t_1, t_2, ..., t_n$ Terme sind, dann ist $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ eine *atomare Formel*. Eine atomare Formel ist eine Formel
  - Wenn α und β Formeln sind, dann sind $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$, $(\neg \alpha)$ ebenfalls Formeln
  - Wenn x eine Variable ist und α eine Formel ist, dann sind $\forall x: \alpha$ und $\exists x: \alpha$ ebenfalls Formeln
- Formeln werden nur durch die Regeln 1. und 2. gebildet
- Formeln ohne Variablen heißen auch *Grundformeln*
- Atomare oder negierte atomare Formeln heißen auch *Literale*
  - Atomare Formeln sind positive Literale
  - Negierte atomare Formeln sind negative Literale
- Einführung von Bindungsregeln, Vermeidung von Klammern
  - Bindungsstärke (aufsteigend): $\forall, \exists, \Leftrightarrow, \Rightarrow, \wedge, \vee, \neg$
  - Gleicher Operator: Annahme Bindung von links nach rechts

Formel – Beispiele

- Vater(tom,mary)
  - atomare Formel, Grundformel, positives Literal
- Equal(factorial(0),1)
  - atomare Formel, Grundformel, positives Literal
- Bruder(tom,y)
  - atomare Formel, keine Grundformel, positives Literal
- $\neg$ Vater(roger,mary)
  - negatives Literal, Grundformel
- $\forall$x Katze(x) $\Rightarrow$ Säugetier(x)
  - Formel, keine atomare Formel, keine Grundformel
- $\forall$x verheiratet(x, y) $\Rightarrow$ verheiratet(y, x)
  - Formel, keine atomare Formel, keine Grundformel
- Vater(tom, mary) $\wedge$ Mutter(susan, mary)
  - Formel, keine atomare Formel, Grundformel

Gebundene und freie Variablen

- Definition: *Gebundene* und *freie* Variablen
  - Eine Variable ist gebunden in einer Formel, wenn Sie im Gültigkeitsbereich eines Quantors liegt
  - Eine Variable ist frei in einer Formel, wenn Sie in keinem Gültigkeitsbereich eines Quantors liegt
  - Achtung: Eine Variable, die mehrfach vorkommt, kann sowohl frei als auch gebunden sein
    - Das vermeidet man meist durch Umbenennung
- Beispiele
  - $\forall x\ \text{Katze}(x) \Rightarrow \text{Säugetier}(x)$ beide Vorkommen von x sind gebunden
  - $\text{Bruder}(tom, y)$ y ist frei
  - $(\forall x\ P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)) \wedge (\exists y\ P(x, y))$

    gebunden gebunden

    frei gebunden frei frei

  - $(\forall x_1\ P(x_1, y_1) \Rightarrow Q(x_1, y_1)) \wedge (\exists y_2\ P(x_2, y_2))$

Definition: Substitutionen

- Definition: Substitution
  - Eine *Substitution* ist eine Ersetzung der freien Variablen in Termen und Formeln durch einen anderen Term
  - Eine Substitution ist eine Funktion σ, die eine Formel in eine neue Formel oder einen Term in einen neuen Term transformiert
  - Die neue Formel/Term wird durch Ersetzung aus der vorhandenen Formel/Term erzeugt
- Notation: Substitution
  - α [x/t]: Ersetze in einer Formel/einem Term α alle freien Vorkommen der Variablen x durch den Term t
  - α $[x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_n/t_n]$: Ersetze in einer Formel/einem Term α
    - alle freien Vorkommen der Variable x_1 durch t_1, dann
    - alle freien Vorkommen der Variable x_2 durch t_2, dann
    - …
    - alle freien Vorkommen der Variable x_n durch t_n
  - Wir schreiben Anwendungen einer Substitution auch als $\sigma(\alpha)$

Substitution – Beispiele

- $P(x,f(x))\ [x/a] \quad = P(a,f(a))$
  - $\sigma = [x/a]$
  - $\sigma(P(x, f(x))) = P(a, f(a))$
- $P(x,f(x))\ [x/y] \quad = P(y,f(y))$
- $P(x,f(x))\ [x/g(h(x))] \quad = P(g(h(x)),f(g(h(x))))$
- $Q(x,y,z)\ [x/a, y/b, z/c] \quad = Q(a,b,c)$
- $R(x,y)\ [x/f(x,y), y/b] \quad = R(f(x, b), b)$
- $R(x,y)\ [y/b, x/f(x,y)] \quad = R(f(x, y), b)$
- $f(x,y)\ [x/f(x,y)] \quad = f(f(x,y),y)$
- $\sigma = [x/a, y/b, z/c]$
  - $\sigma(Q(x,y,z)) \quad = Q(a, b, c)$
  - $\sigma(P(x,g(y,z))) \quad = P(a, g(b, c))$
  - $\sigma(g(y,z)) = g(b, c)$
  - $\sigma(f(x,y,z)) \quad = f(a, b, c)$

Unifikation

- Ziel:
  - Finde Substitution, die zwei Terme gleich macht
- Definition: Unifikator
  - Eine Substitution σ ist ein *Unifikator* von zwei Termen/Formeln α und β, falls $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ gilt
  - Zwei Terme/Formeln α und β sind *unifizierbar*, falls ein Unifikator von α und β existiert
- Definition: Allgemeinster Unifikator
  - Ein Unifikator σ ist ein *allgemeinster Unifikator* von α und β, falls für jeden anderen Unifikator τ von α und β gilt, dass es eine Substitution λ gibt, so dass für alle Terme/Formeln $\tau(x) = \lambda(\sigma(x))$ gilt
  - Wir schreiben mgu() für den allgemeinsten Unifikator von α und β
- Ein allgemeinster Unifikator ist nicht eindeutig
- Zwei allgemeinste Unifikatoren unterscheiden sich nur in der Benennung von Variablen

Beispiele

- P(x,a), P(b,y)
  - Unifizierbar durch [x/b, y/a]
  - P(x,a) [x/b, y/a] = P(b,a), P(b,y) [x/b, y/a] = P(b,a)
- P(x,f(y)), P(g(y),f(y))
  - Unifizierbar durch [x/g(a), y/a]
  - P(x,f(y)) [x/g(a), y/a] = P(g(a),f(a)), P(g(y),f(y)) [x/g(a), y/a] = P(g(a),f(a))
  - Unifizierbar durch [x/g(b), y/b]
  - P(x,f(y)) [x/g(b), y/b] = P(g(b),f(b)), P(g(y),f(y)) [x/g(b), y/b] = P(g(b),f(b))
  - Unifizierbar durch [x/g(c), y/c] ....
- P(x,f(y)), P(g(y),f(y))
  - Allgemeinster Unifikator (mgu) ist [x/g(y)]
  - P(x,f(y)) [x/g(y)] = P(g(y),f(y)), P(g(y),f(y)) [x/g(y)] = P(g(y),f(y))
  - Alle anderen Unifikatoren durch Hinzufügen einer Substitution zum mgu
    - [x/g(a), y/a] = [x/g(y)] [y/a]
    - [x/g(b), y/b] = [x/g(y)] [y/b]
    - …

Unifikationsalgorithmus

- Satz: Es gibt eine Entscheidungsprozedur, die für alle Terme α und β entscheidet ob ein Unifikator existiert. Falls ja, dann liefert diese Prozedur einen mgu σ.
- Unifikationsalgorithmus (Robinson) für atomare Formeln:
  1. Atomare Formeln als Zeichenketten (Strings) α und β repräsentieren
     Annahme: Prädikate, Variablen und Funktion benötigen nur ein Zeichen
     Intial sei σ := []
  2. Durchlaufe beide Formeln α und β synchron von links nach rechts
  3. Falls beide gleich (Ende erreicht), dann STOP: unifiziert, mgu ist σ
  4. Sonst gibt es erste Position, an der die Zeichenketten ungleich sind
     Seien α' und β' die Teilterme/formeln, die an dieser Position beginnen
     - Falls beide ersten Zeichen in α' und β' keine Variable repräsentieren, dann STOP: nicht unifizierbar
     - Ansonsten sei Variable x und Teilformel/-term t an ersten Stellen
       Falls x in t vorkommt, dann STOP: nicht unifizierbar
       Wende [x/t] auf beide Terme/Formeln an ($\alpha := \alpha$ [x/t], $\beta := \beta$ [x/t]).
       Füge [x/t] zu mgu σ hinzu (σ := [x/t] ° σ) und gehe nach 2.

Unifikation – Beispiel

α = P(x,f(x)) β=P(g(y),z) σ = []

P(x, f(x))   P(g(y), z)   [x/g(y)]

P(g(y), f(g(y)))   P(g(y), z)   [x/g(y), z/f(g(y))]

P(g(y), f(g(y)))   P(g(y), f(g(y)))

STOP: unifiziert mit   [x/g(y), z/f(g/y))]

α = P(a) β=P(f(x)) σ = []

P(a)   P(f(x))

STOP: nicht unifizierbar

Occurs Check

- Occurs Check
  - „Ansonsten sei Variable x und Teilformel/-term t an ersten Stellen
    Falls x in t vorkommt, dann STOP: nicht unifizierbar“
  - Abbruch der Unifikation
  - Notwendig um unendliche Ersetzung vorzubeugen (Terminierung)
- Beispiel
  - P(x) P(f(x)) []
  - P(f(x)) P(f(f(x))) [x/f(x)]
  - P(f(f(x))) P(f(f(f(x)))) [x/f(x), x/f(x)]
  - ....
- Bemerkung: *rational trees*
  Statt Termen (Bäume, trees) kann man auch rationale Terme (rational trees) verwenden; dies erlaubt rekursive Strukturen und lässt occurs check weg

Modelle und Interpretationen

- Definition: Modell
  - Ein *Modell* M ist ein Tupel (U, (r_0, r_1, …), (f_0, f_1, …)) mit:
    U (Universum, Welt) ist eine nichtleere Menge
    Jedes r_i ist eine n_i-stellige Relation über U
    Jedes f_i ist eine m_i-stellige Funktion über U
- Definition: Interpretation in einem Modell
  - Eine *Interpretation* I *in einem Modell* M ist eine Funktion I mit:
    Jedes n-stellige Prädikatssymbol wird einer
    n-stelligen Relation $\subseteq$ U x … x U zugeordnet
    jedes m-stellige Funktionssymbol wird einer
    n-stelligen Funktion U x … x U $\rightarrow$ U zugeordnet
    Jedes Variablensymbol wird einer Variablen über U zugeordnet
  - Dabei wird einem 0-stelligen Prädikat wahr/falsch zugeordnet und einer 0-stelligen Funktion eine Konstante aus U
- Definition: Interpretation
  - Eine *Interpretation* ist
    ein Modell zusammen mit einer Interpretation im Modell

Modelle und Interpretationen – Beispiel

- Formeln

$\forall x\ \forall y\ Greater(x,y) \Rightarrow \neg\ Equals(x,y)$
$\exists x\ \forall y\ Equals(y, add(x, y))$
$\forall x\ Equals(x, add(x, 0))$
....

- Modell

$M = (\mathbb{N}, (>_{\mathbb{N}}, =_{\mathbb{N}}), (+_{\mathbb{N}}, *_{\mathbb{N}}))$

- Interpretation im Modell

$I(Greater) = >_{\mathbb{N}}$
$I(Equals) = =_{\mathbb{N}}$
$I(add) = +_{\mathbb{N}}$
$I(0) = 0_{\mathbb{N}}$

Modelle und Interpretation – Variablen

- Interpretation von Variablen
  - Gegeben eine Interpretation I in M
  - Variablen in PL1 werden durch I zu Variablen in U
  - Freien Variablen können Werte zugewiesen werden
- Notation für Variablenzuweisung
  - $I_{[x/u]}$
  - Interpretation I in Modell M weist der Variablen x einen Wert $u \in U$ zu
  - Die anderen Zuweisungen von I werden übernommen
- Beispiel
  - Sei I wie auf der vorherigen Seite
  - $I(x) = x_{\mathbb{N}}$
  - $I\,[x/0]\,(x) = 0_{\mathbb{N}}$

Interpretation – Erweiterung

- Erweiterung der Interpretation auf Formeln und Terme
  - Wie in der Aussagenlogik
  - Sei $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term, dann gilt

    $$I(f(t_1,\ldots,t_n)) = I(f)(I(t_1),\ldots,I(t_n))$$

  - Sei $r(t_1, \ldots, t_n)$ eine Relation – also $(t_1, \ldots, t_n) \in r$ – dann gilt

$$I(P(t_1,\ldots,t_n)) = \begin{cases} 1 \text{ wenn } I(P)(I(t_1),\ldots,I(t_n)) \\ 0 \;\text{ sonst} \end{cases}$$

$$I(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} 1 \;\text{ wenn } I(\alpha) = 1 \;\text{ oder }\; I(\beta) = 1 \\ 0 \;\text{ sonst} \end{cases}$$

$$I(\neg\alpha) = \begin{cases} 0 \;\text{ wenn } I(\alpha) = 1 \\ 1 \;\text{ sonst} \end{cases}$$

$$I(\alpha \Rightarrow \beta) = \begin{cases} 0 \;\text{ wenn } I(\alpha) = 1 \;\text{ und }\; I(\beta) = 0 \\ 1 \;\text{ sonst} \end{cases}$$

$$I(\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} 1 \;\text{ wenn } I(\alpha) = 1 \text{ und }\; I(\beta) = 1 \\ 0 \;\text{ sonst} \end{cases}$$

$$I(\alpha \Leftrightarrow \beta) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } I(\alpha) = I(\beta) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Interpretation Erweiterung – Beispiel

- Seien M und I wieder wie im vorherigen Beispiel

$M = (\mathbb{N}, (>_{\mathbb{N}}, =_{\mathbb{N}}), (+_{\mathbb{N}}, *_{\mathbb{N}}))$

$I(\text{Greater}) = >_{\mathbb{N}}$ $\quad$ $I(\text{Equals}) = =_{\mathbb{N}}$

$I(\text{add}) = +_{\mathbb{N}}$ $\quad$ $I(0) = 0_{\mathbb{N}}$

- $I(\text{add}(0, 1)) = I(\text{add})(I(0), I(1)) = +_{\mathbb{N}} (0_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}}) = 1_{\mathbb{N}}$
- $I(\text{add}(x, 1)) = I(\text{add})(I(x), I(1)) = +_{\mathbb{N}} (x_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}}) = x_{\mathbb{N}} + 1_{\mathbb{N}}$
- $I[x/1](\text{add}(x, 1)) = I[x/1](\text{add})(I(x), I(1)) = +_{\mathbb{N}} (1_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}}) = 2_{\mathbb{N}}$
- $I(\text{Greater}(0,1)) = I(\text{Greater})(I(0), I(1)) = >_{\mathbb{N}}(0_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}}) = 0$
  da die Null in $\mathbb{N}$ nicht größer als die Eins ist
- $I(\text{Equals}(x, \text{add}(x, 0))) \quad = I(\text{Equals})(I(x), I(\text{add})(I(x), I(0))$
  $= =_{\mathbb{N}} (x_{\mathbb{N}}, +(x_{\mathbb{N}}, 0))$
  $= 1$
  da die Null in $\mathbb{N}$ ein neutrales Element ist,
  Gilt unabhängig von der Belegung für $x_{\mathbb{N}}$

Interpretation – Erweiterung Quantoren

- Erweiterung der Interpretation auf Formeln mit Quantoren
  - Sei α eine Formel, dann gilt

$$I((\forall x \alpha)) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } I_{[x/u]}(\alpha) = 1 \text{ für alle } u \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$I((\exists x \alpha)) = \begin{cases} 1 & \text{wenn es ein } u \in U \text{ gibt, so dass } I_{[x/u]}(\alpha) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Beispiel: M und I wieder wie vorher
  - I($\forall$x: Equals(x, add(x, 0))) = 1 gdw
    Für alle u in U: $I_{[x/u]}$(Equals) ($I_{[x/u]}$(x), $I_{[x/u]}$(add)($I_{[x/u]}$(x), $I_{[x/u]}$(0)) gilt gdw
    Für alle u in U: $=_{\mathbb{N}}$ (u , $+_{\mathbb{N}}$ (u, $0_{\mathbb{N}}$)) gilt gdw
    Für alle u in U: u $=_{\mathbb{N}}$ u $+_{\mathbb{N}}$ $0_{\mathbb{N}}$, was offensichtlich gilt
  - Wir sagen, dass I($\forall$x: Equals(x, add(x, 0)))
    wahr ist für die Interpretation I in M

Interpretation Quantoren – Beispiel

- $I(\exists x\ \forall y\ Equals(y, add(x, y))) = 1$ gdw

  es existiert ein $u \in U$ mit

  $I_{[x/u]}(\forall\ y\ Equals(y, add(x, y))) = 1$ gdw

  es existiert ein $u \in U$ und für alle $v \in U$ mit

  $I_{[x/u,\ y/v]}(Equals(y, add(x, y))) = 1$ gdw

  es existiert ein $u \in U$ und für alle $v \in U$ mit

  $I_{[x/u,\ y/v]}(Equals)\ (I_{[x/u,\ y/v]}(y), I_{[x/u,\ y/v]}(add)\ (I_{[x/u,\ y/v]}(x), I_{[x/u,\ y/v]}(y))) = 1$ gdw

  es existiert ein $u \in U$ und für alle $v \in U$ mit

  $=_{\mathbb{N}}(u, +_{\mathbb{N}}(u, v)) = 1$ gdw

  es existiert ein $u \in U$ und für alle $v \in U$ so dass

  $u =_{\mathbb{N}} u +_{\mathbb{N}} v$ gilt (offensichtlich wahr)

  Wir sagen $\exists x \forall y\ Equals(y, add(x, y))$ ist wahr für I in M

Interpretation – Beispiel ohne Null

- Wahrheitswert einer Formel ist abhängig von der Interpretation
- Gleiches Beispiel, andere Interpretatation I'
  - Sei das Modell das bisherige Modell ohne die Null ($0_{\mathbb{N}}$)
    $M = (\mathbb{N} - \{0\}, (>_{\mathbb{N}}, =_{\mathbb{N}}), (+_{\mathbb{N}}, *_{\mathbb{N}}))$
  - Die anderen Abbildungen der Interpretation bleiben erhalten
- I'($\exists x \forall y$ Equals(x, add(x, y))) = 0
  - Würde stimmen wenn
    es existiert ein $u \in U$ und für alle $v \in U$ so dass $v =_{\mathbb{N}} u +_{\mathbb{N}} v$ gilt
  - Ohne die Null in $\mathbb{N}$ existiert ein solches u nicht
    (Neutrales Element der Addition)
  - Also bildet I' die Formel auf 0 ab

Interpretation – Beispiel add multipliziert

- Wahrheitswert einer Formel ist abhängig von der Interpretation
- Gleiches Beispiel, andere Interpretatation I''
  - Sei das Modell das bisherige Modell ohne die Null ($0_{\mathbb{N}}$)
    $M = (\mathbb{N} - \{0\}, (>_{\mathbb{N}}, =_{\mathbb{N}}), (+_{\mathbb{N}}, *_{\mathbb{N}}))$
  - Sei add die Multiplikation
    $I(add) = *_{\mathbb{N}}$
  - Die anderen Abbildungen der Interpretation bleiben erhalten
- $I'(\exists x \forall y \text{ Equals}(x, add(x, y))) = 1$
  - Stimmt wenn
    es existiert ein $u \in U$ und für alle $v \in U$ so dass $v =_{\mathbb{N}} u *_{\mathbb{N}} v$ gilt
  - Stimmt, die Eins ($1_{\mathbb{N}}$) ist ein solcher Kandidat
    (neutrales Element der Multiplikation)
  - Also bildet I'' die Formel auf 1 ab

Interpretation

- Formeln und Symbole sind Namen
  - Durch die Namensgebung ergibt sich *keine unmittelbare Bedeutung*
- Bedeutung durch die Interpretation
  - Bedeutung ausschließlich durch ein Modell und die Interpretation im Modell
- Fallstricke bei der Formalisierung
  - Achtung: Namen/Symbole können intuitive Bedeutung haben (0, 1, +, add, delete, ...)
  - Namen/Symbole können irreführend sein
- Wahrheitswerte von Formeln
  - Wahrheitswerte von Formeln potenziell unterschiedlich für unterschiedlichen Interpretationen
  - Wie in der Aussagenlogik müssen wir nun *alle* möglichen Interpretationen betrachten
  - ACHTUNG: unendliche viele potentiell unterscheidbare Interpretationen

Erfüllbar, Allgemeingültig, Widerspruchsvoll

- Eine prädikatenlofische Formel α ist *erfüllbar* gdw
  es existiert ein Modell M und eine Interpretation I in M mit $I(\alpha)=1$
- Eine prädikatenlogische Formel α ist *allgemeingültig*
  (ist eine *Tautologie*) gdw
  α ist unter allen möglichen Modellen und Interpretationen wahr,
  das heißt gdw für alle M und alle I in M gilt: $I(\alpha)=1$
- Eine prädikatenlogische Formel α ist *widerspruchsvoll*
  (*inkonsistent*) gdw
  α ist unter allen möglichen Modellen und Interpretationen falsch,
  das heißt gdw für alle M und alle I in M gilt: $I(\alpha)=0$
- Es gelten die folgenden Zusammenhänge:
  - α ist widerspruchsvoll gdw
    α ist nicht erfüllbar gdw
    $\neg\alpha$ ist allgemeingültig

Beispiele

- Beispiele aus der Aussagenlogik sind ebenfalls Beispiele für die Prädikatenlogik (Prädikate haben die Stelligkeit 0)
  - P ist erfüllbar aber nicht allgemeingültig
  - $P \wedge \neg P$ ist widerspruchsvoll
  - $P \vee \neg P$ ist allgemeingültig (und natürlich erfüllbar)
  - $P \wedge Q \Rightarrow P$ ist allgemeingültig

- Typisch prädikatenlogische Beispiele
  - $(\forall x\, P(x)) \Rightarrow P(a)$ ist allgemeingültig
  - $(\forall x\, P(x)) \Rightarrow (\exists x\, P(x))$ ist allgemeingültig
  - $(\forall x\, P(x)) \Rightarrow (\exists x\, \neg P(x))$ ist widerspruchsvoll
  - $(\forall x\, P(x)) \Rightarrow (\forall x\, Q(x))$ ist erfüllbar aber nicht allgemeingültig

Beispiel – Zeige Formel ist allgemeingültig

- Zu Zeigen: $(\forall x\ P(x)) \Rightarrow (\exists x\ P(x))$ ist allgemeingültig
- Argumentation über alle möglichen Interpretationen!
- Beweis:
  - Sei M ein beliebiges Modell und I eine beliebige Interpretation in M
    Sei $I(P) = r$ mit $r \subseteq U \neq \emptyset$ (wir gehen immer von nichtleeren Modellen aus)
  - Wir zeigen, dass dann $I(\forall x\ P(x)) \Rightarrow (\exists x\ P(x)) = 1$

    $I(\forall x\ P(x)) \Rightarrow (\exists x\ P(x)) = 1$ gdw
    $I(\forall x\ P(x)) = 0$ oder $I(\exists x\ P(x)) = 1$ gdw
    Nicht für alle $u \in U$ gilt $I_{[x/u]}(P)(u)$ oder es gibt ein $v \in U$ mit $I_{[x/v]}(P)(v)$ gdw
    es gibt ein $u \in U$ mit $I_{[x/u]}(P)(u)$ gilt nicht oder
    es gibt ein $v \in U$ mit $I_{[x/v]}(P)(v)$ gdw
    es gibt ein $u \in U$ mit $u \notin r$ oder es gibt ein $v \in U$ mit $v \in r$ gdw
    $r \neq U$ oder $r \neq \emptyset$ aber das ist wahr, da $r \subseteq U \neq \emptyset$

Definition: Semantische Folgerung

- Eine Formel β *folgt semantisch* aus einer Formel α gdw
  für jedes Modell M und jede Interpretation I gilt, dass wenn
  $I(\alpha)=1$ dann $I(\beta) = 1$.
  Wir schreiben: $\alpha \models \beta$
- Es gilt: $\alpha \models \beta$ gdw $\alpha \Rightarrow \beta$ ist allgemeingültig

- Eine Formel β *folgt semantisch* aus einer Menge von Formeln
  $\Sigma = \{ \alpha_1 ,..., \alpha_n\}$ gdw
  für jedes Modell M und jede Interpretation I gilt, dass wenn
  $I(\alpha_1)=1$ und ... und $I(\alpha_n)=1$ dann ist auch $I(\beta) = 1$.
  Wir schreiben: $\Sigma \models \beta$
- Es gilt: $\Sigma \models \beta$ gdw $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta$ ist allgemeingültig

Semantische Folgerung – Beispiel

- $(\forall x\ P(x)) \models P(a)$
- $(\forall x\ P(x)) \models \exists\ x\ P(x)$
- $(\forall x\ \forall y\ Q(x, y)) \models (\forall y\ \forall x\ Q(x, y))$

- $\{P(0), \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(f(x)))\ \} \models P(f(f(0)))$
- $\{\forall x\ \forall y\ (Married(x, y) \Rightarrow Married(y, x)),$
  $Married\ (peter, mary)\} \models Married(mary, peter)$

Erfüllbar, Allgemeingültig, Widerspruchsvoll

- Eine Menge von prädikatenlogischen Formeln $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$
  ist *erfüllbar* gdw
  es existiert ein Modell und eine Interpretation I unter der alle Formeln α_i wahr sind, das heißt $I(\alpha_i)=1$ für $i=1...n$

- Eine Menge von prädikatenlogischen Formeln $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$
  ist *allgemeingültig* (ist eine *Tautologie*) gdw
  jede Formel α_i allgemeingültig ist
- Wenn $\Sigma = \emptyset$, dann ist Σ allgemeingültig

- Eine Menge von prädikatenlogischen Formeln $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ist
  widerspruchsvoll (*inkonsistent*) gdw
  es gibt kein Modell und keine Interpretation I
  mit $I(\alpha_i)=1$ für $i=1...n$

Äquivalenzen

- Definition: Zwei prädikatenlogische Formeln α und β sind äquivalent gdw $\alpha \Leftrightarrow \beta$ ist allgemeingültig
  Wir schreiben $\alpha \approx \beta$
- Alle Äquivalenzen der Aussagenlogik sind gültig
- Weitere wichtige Äquivalenzen:
  - Quantorenaustausch: $\neg (\forall x\ \alpha) \approx (\exists x\ \neg\alpha)$ $\quad \neg (\exists x\ \alpha) \approx (\forall x\ \neg\alpha)$
  - Quantorenvertauschung: $\forall x\ \forall y\ \alpha \approx \forall y\ \forall x\ \alpha$ $\quad \exists x\ \exists y\ \alpha \approx \exists y\ \exists x\ \alpha$
  - Quantorenelimination: Wenn x nicht frei in α vorkommt
    $\forall x\ \alpha \approx \alpha$ $\quad \exists x\ \alpha \approx \alpha$
  - Quantoreneinführung: Wenn x nicht frei in β vorkommt
    $(\forall x\ \alpha) \wedge \beta \approx (\forall x\ \alpha \wedge \beta)$ $\quad (\exists x\ \alpha) \wedge \beta \approx (\exists x\ \alpha \wedge \beta)$
    $(\forall x\ \alpha) \vee \beta \approx (\forall x\ \alpha \vee \beta)$ $\quad (\exists x\ \alpha) \vee \beta \approx (\exists x\ \alpha \vee \beta)$
  - Variablenumbenennung: Wenn x nicht in α vorkommt
    $\exists x\ \alpha \approx \exists y\ \alpha[x/y]$

Pränexe Normalform

- Eine quantorenfreie prädikatenlogische Formel ist in
  - *konjunktiver Normalform,* wenn sie als eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen geschrieben ist
  - *disjunktiver Normalform*, wenn sie als eine Disjunktionen von Konjunktionen von Literalen geschrieben ist
- Eine prädikatenlogische Formel ist in *pränexer Normalform* (PNF)
  - wenn sie von der Form $Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\ \alpha$ ist und
  - die Q_i Quantoren sind ($Q_i \in \{\forall, \exists\}$) und die x_i Variablen sind ($Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_n$ nennt man Präfix) und
  - α (die Matrix) eine quantorfreie prädikatenlogische Formel ist
- Satz: Jede Formel ist logisch äquivalent zu einer Formel in pränexer Normalform mit einer Matrix in konjunktiver (beziehungsweise disjunktiver) Normalform

Beispiel

- $\forall x\ \forall y\ P(x, y)$ ist in PNF
- $(\forall x\ P(x)) \Rightarrow (\exists x\ P(x))$ ist nicht in PNF
- $\exists x\ \exists y\ (\neg\ P(x) \vee P(y))$ ist in PNF
  ist äquivalent zu zweiter Formel
- true ist in PNF
  ist äquivalent zu zweiter Formel

Transformation in PNF

- Transformation jeder prädikatenlogischen Formel in eine äquivalente Formel in PNF

1. Umbenennung der Variablen
   - Alle gebundenen Variablen haben voneinander verschiedene Namen
   - Keine gebundene Variable kommt auch frei vor
2. Bringe alle Quantoren auf die linke Seite
   Wende folgenden Äquivalenzen solange möglich
   von links nach rechts an
   - $(\forall x\ \alpha) \wedge \beta \quad \approx \forall x\ (\alpha \wedge \beta)$ $(\exists x\ \alpha) \wedge \beta \quad \approx \exists x\ (\alpha \wedge \beta)$
   - $(\forall x\ \alpha) \vee \beta \quad \approx \forall x\ (\alpha \vee \beta)$ $(\exists x\ \alpha) \vee \beta \quad \approx \exists x\ (\alpha \vee \beta)$
   - $\neg\ (\forall x\ \alpha) \approx \exists x\ (\neg\alpha)$ $\qquad \neg\ (\exists x\ \alpha) \quad \approx \forall x\ (\neg\alpha)$

     Wegen Kommutativität für $\wedge$ und $\vee$ kann man Formel mit Quantor nach vorne bringen und Regel anwenden
   - Formel liegt in PNF vor
3. Transformiere Matrix der PNF-Formel gegebenenfalls in CNF (oder DNF), wie in der Aussagenlogik

Transformation in PNF – Beispiel

- Formel: $(\forall x\ P(x, y)) \vee P(a,z) \vee (\neg\ \forall x\ Q(x, z))$
- Variablenumbenennung
  $(\forall x\ P(x, y)) \vee P(a,z) \vee (\neg\ \forall y\ Q(y, z))$
- Quantoren nach links schieben
  $\forall x\ (P(x, y) \vee P(a,z)) \vee (\neg\ \forall u\ Q(u, z))$
  $\forall x\ (P(x, y) \vee P(a,z)) \vee (\exists u\ \neg Q(u, z))$
  $\forall x\ (P(x, y) \vee P(a,z)\ \vee (\exists u\ \neg Q(u, z)))$
  $\forall x\ \exists u\ (P(x, y) \vee P(a,z) \vee \neg Q(u, z))$
  $\forall x\ \exists u\ P(x, y) \vee P(a,z) \vee \neg Q(u, z)$

- Wir haben PNF mit Matrix in DNF und CNF

Skolem Normalform

- Eine prädikatenlogische Formel ist in *Skolem Normalform*, wenn
  - sie in Pränex Normalform ist, also in der Form $Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\ \alpha$ und
  - die Q_i alle Allquantoren sind ($Q_i = \forall$)
- *Skolemisierung*: Wir können für jede Formel in PNF die Skolem Normalform erzeugen
  - Entferne den am weitesten links stehenden Existenzquantor $\exists x$
  - Ersetze in der Matrix die Variable x durch den Term $f(y_1, \ldots, y_n)$ wobei
    f ein neues Funktionssymbol ist und
    $y_1, \ldots, y_n$ alle Variablen der Allquantoren links des entfernten Existenzquantors sind
- Das Ergebnis ist in Skolem Normalform
  Die neuen Funktionen heißen *Skolemfunktionen*
  - Idee: Der Zeuge der Existenz des Objekts in einem Universum kann nur davon abhängen welche Objekte den Variablen in den Allquantoren links des entsprechenden Existenzquantors vorher zugewiesen wurde. Die Soklemfunktion „berechnet" eines dieser Objekte

Skolem Normalform – Beispiele

- Formel $\forall x\, \exists u\, P(x, y) \vee P(a, z) \vee \neg\, Q(u, z)$
  Skolemisierung mit $u = f(x)$
  $\forall x\, P(x, y) \vee P(a, z) \vee \neg\, Q(f(x), z)$

- Formel $\forall x\, \forall y\, \exists z\, P(x, f(y)) \vee P(a, z)$
  Skolemisierung mit $z = g(x, y)$
  $\forall x\, \forall y\, \exists z\, P(x, f(y)) \vee P(a, g(x, y))$

- Formel $\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u\, \exists v\, P(x, z) \wedge P(y, v)$
  Skolemisierung mit $z = f(x, y)$, $v = g(x, y, u)$
  $\forall x\, \forall y\, \forall u\, P(x, f(x,y)) \wedge P(y, g(x, y, u))$

Skolemisierung für Entscheidungsverfahren

- Satz:
  - Eine Formel ist inkonsistent gdw die Skolem Normalform ist inkonsistent
  - Eine Formel ist erfüllbar gdw ihre Skolem Normalform ist erfüllbar
- Praktische Aufgabenstellung:
  Zeige, dass
  $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta$
- Umsetzung (wie in der Aussagenlogik):
  Zeige, dass
  $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \cup \{\neg\beta\}$ inkonsistent
  was äquivalent ist
- Es gilt, dass $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \cup \{\neg\beta\}$ inkonsistent gdw
  $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta$ inkonsistent gdw
  Soklem Normalform von $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta$ inkonsistent

Klauselnormalform

- Eine Klausel ist eine endliche Menge von Literalen $\{L_1, \ldots, L_n\}$, die als Disjunktion dieser Literale interpretiert wird
  - Mehrfachvorkommen desselben Literals in der Disjunktion sind ausgeschlossen
- Die leere Klausel wird immer auf false abgebildet und mit $\square$ bezeichnet
  - Die leere Klausel ist der Widerspruch
- Eine Menge von Klauseln wird interpretiert als Konjunktion dieser Klauseln
  - Mehrfachvorkommen derselben Klausel in der Konjunktion sind ausgeschlossen
- Jede Formel in Skolem Normalform mit einer Matrix in CNF kann direkt auf eine endliche Menge von Klauseln abgebildet werden
  - Wir nehmen dabei immer an, dass keine freien Variablen vorkommen, bzw. alle (freien) Variablen sind allquantifiziert
  - Die endliche Menge von Klauseln ist die *Klauselnormalform*

Klauselnormalform – Beispiele

- Formel $\forall x\, \exists u\, P(x, y) \vee P(a, z) \vee \neg Q(u, z)$
  Skolemisierung mit $u = f(x)$
  $\forall x\, P(x, y) \vee P(a, z) \vee \neg Q(f(x), z)$
  Klauselnormalform
  $\{ \{P(x, y), P(a, z), \neg Q(f(x), z)\} \}$
- Formel $\forall x\, \forall y\, \exists z\, P(x, f(y)) \vee P(a, z)$
  Skolemisierung mit $z = g(x, y)$
  $\forall x\, \forall y\, \exists z\, P(x, f(y)) \vee P(a, g(x, y))$
  Klauselnormalform
  $\{ \{P(x, f(y)), P(a, g(x, y))\} \}$
- Formel $\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u\, \exists v\, P(x, z) \wedge P(y, v)$
  Skolemisierung mit $z = f(x, y)$, $v = g(x, y, u)$
  $\forall x\, \forall y\, \forall u\, P(x, f(x,y)) \wedge P(y, g(x, y, u))$
  Klauselnormalform
  $\{ \{P(x, f(x,y))\}, \{P(y, g(x, y, u))\} \}$

Entscheidung in Klauselnormalform – Beispiel

- Sei $\Sigma = \{ \forall x\, (\neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)), P(a) \}$
  Gilt $\Sigma \models \exists x \neg Q(x)$?
- Gilt gdw
  $\forall x\, (\neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)) \wedge P(a) \wedge \neg \exists x \neg Q(x)$ inkonsistent
- Transformation in PNF
  $\forall x\, (\neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)) \wedge P(a) \wedge \forall x\, Q(x)$
  $\forall x\, (\neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)) \wedge P(a) \wedge \forall z\, Q(z)$
  $\forall x \exists y\, (\neg P(x) \vee \neg Q(y)) \wedge P(a) \wedge \forall z\, Q(z)$
  $\forall x \exists y \forall z\, ((\neg P(x) \vee \neg Q(y)) \wedge P(a) \wedge Q(z))$
- Skolemisierung
  $\forall x \forall z\, ((\neg P(x) \vee \neg Q(f(x))) \wedge P(a) \wedge Q(z))$
- Klauselnormalform: $\{ \{\neg P(x), \neg Q(f(x))\}, \{P(a)\}, \{Q(z)\} \}$
- Klauselnormalform ist inkonsistent, also gilt $\Sigma \models \exists x \neg Q(x)$
  - Q(z) gilt immer, also darf P(x) für kein x gelten, aber P(a) gilt