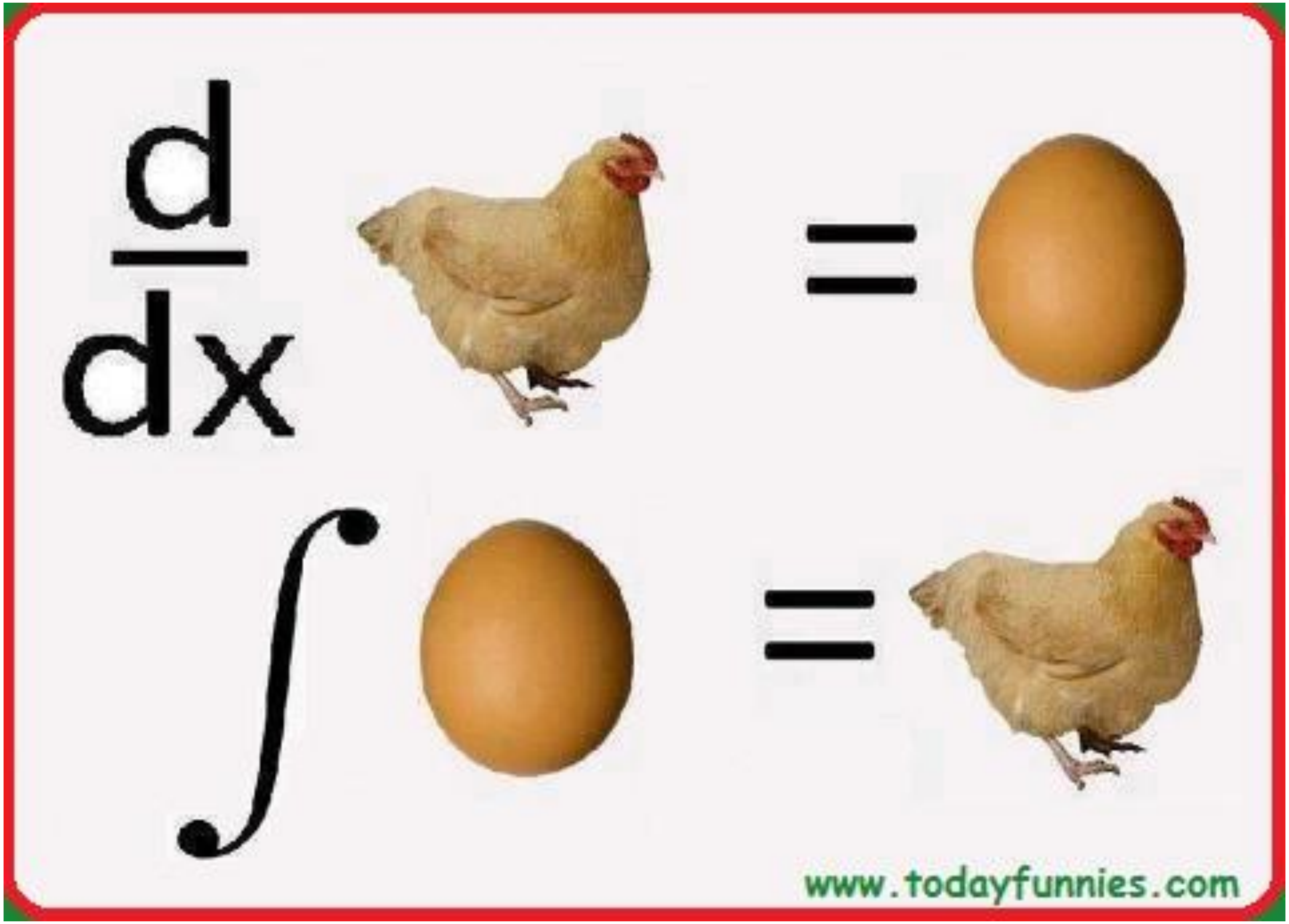
Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

Kapitel 6

Integralrechnung

Inhalt

6.1 Integrale



Anwendungen der Integralrechnung

Wiederaufbau der Frauenkirche in Dresden:

Statische Kräfte der Kuppel?

→ Masse bzw. **Volumen** bestimmen

Airbus A380:

Große Tanks bei kleiner Tragflächenmasse

→ Querschnitts**fläche** bestimmen

Eiffelturm:

Kompliziert geformte Stahlträger

→ **Länge** bestimmen

Integrale

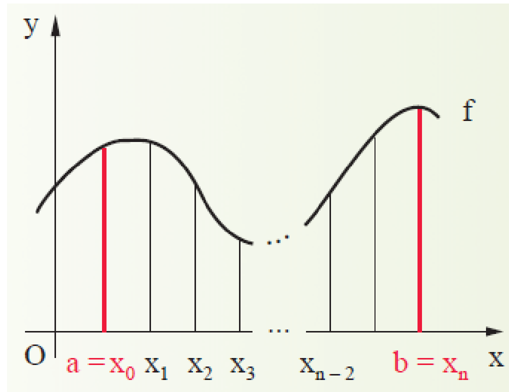
Ziel: Berechnung der Fläche „unter einer Kurve“, d.h. der Fläche zwischen Kurve und x-Achse in einem bestimmten Intervall [a, b].
Diesen Flächeninhalt nennt man aus historischen Gründen „Integral“ (lat.: integrare = wieder herstellen).

Idee: Man nähert gekrümmte Funktionsgraphen durch „Treppenfunktionen“ an, unter denen man die (Rechtecks-) Flächen einfach bestimmen kann.
Die Unterteilung macht man immer feiner.
Die Idee dazu stammt von Bernhard Riemann,1826 – 1866.

Praxis: Um ein Integral auszurechnen benutzt man „Stammfunktionen“.

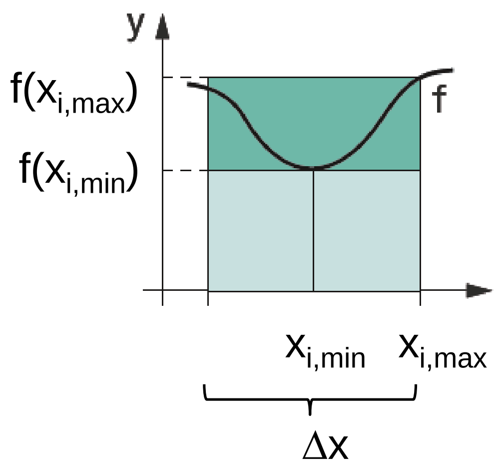
Unterteilung des Intervalls

Das Intervall [a, b] wird in n gleichgroße Teilintervalle der Länge $\Delta x = (b - a)/n$ zerlegt.



Im i-ten Teilintervall sei jeweils $f(x_{i,min})$ der kleinste und $f(x_{i,max})$ der größte Funktionswert.

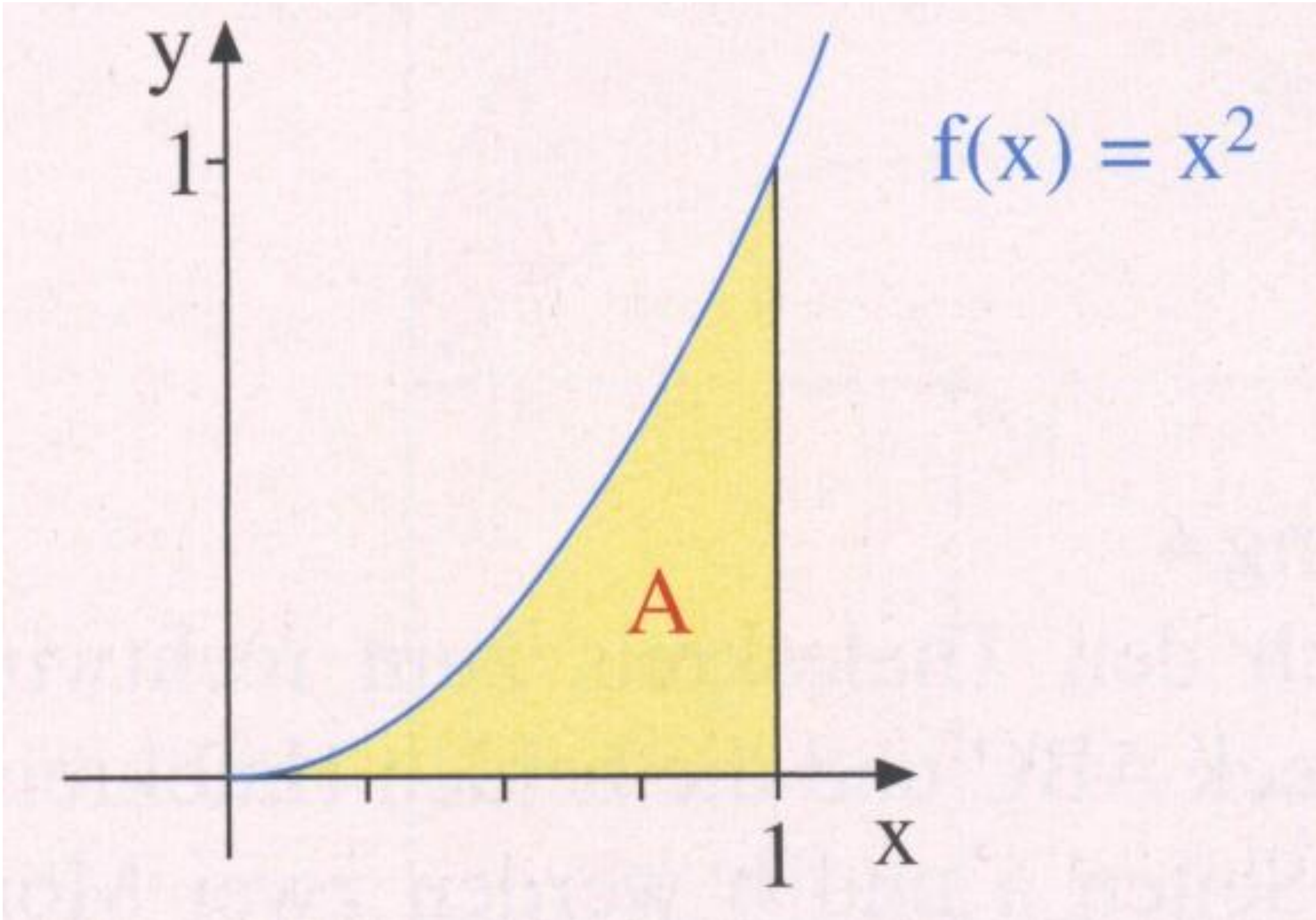
Es werden die Summen der Rechtecks-flächen $f(x_i) \cdot \Delta x$ gebildet:



Untersumme: $U_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i,min}) \cdot \Delta x$

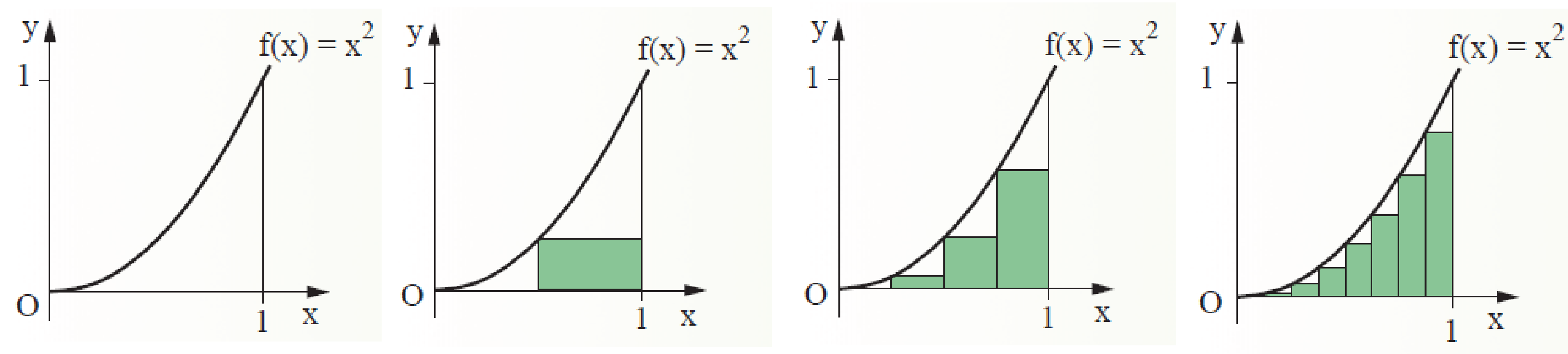
Obersumme: $O_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i,max}) \cdot \Delta x$

Wie groß ist die Fläche?

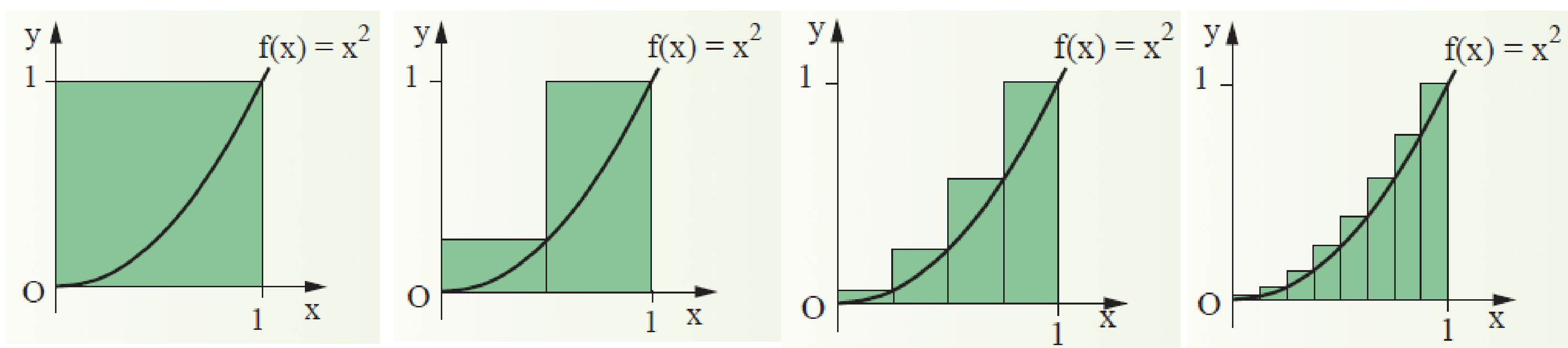


Unter- und Obersumme von f (x) = x²

Untersumme: $U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2$

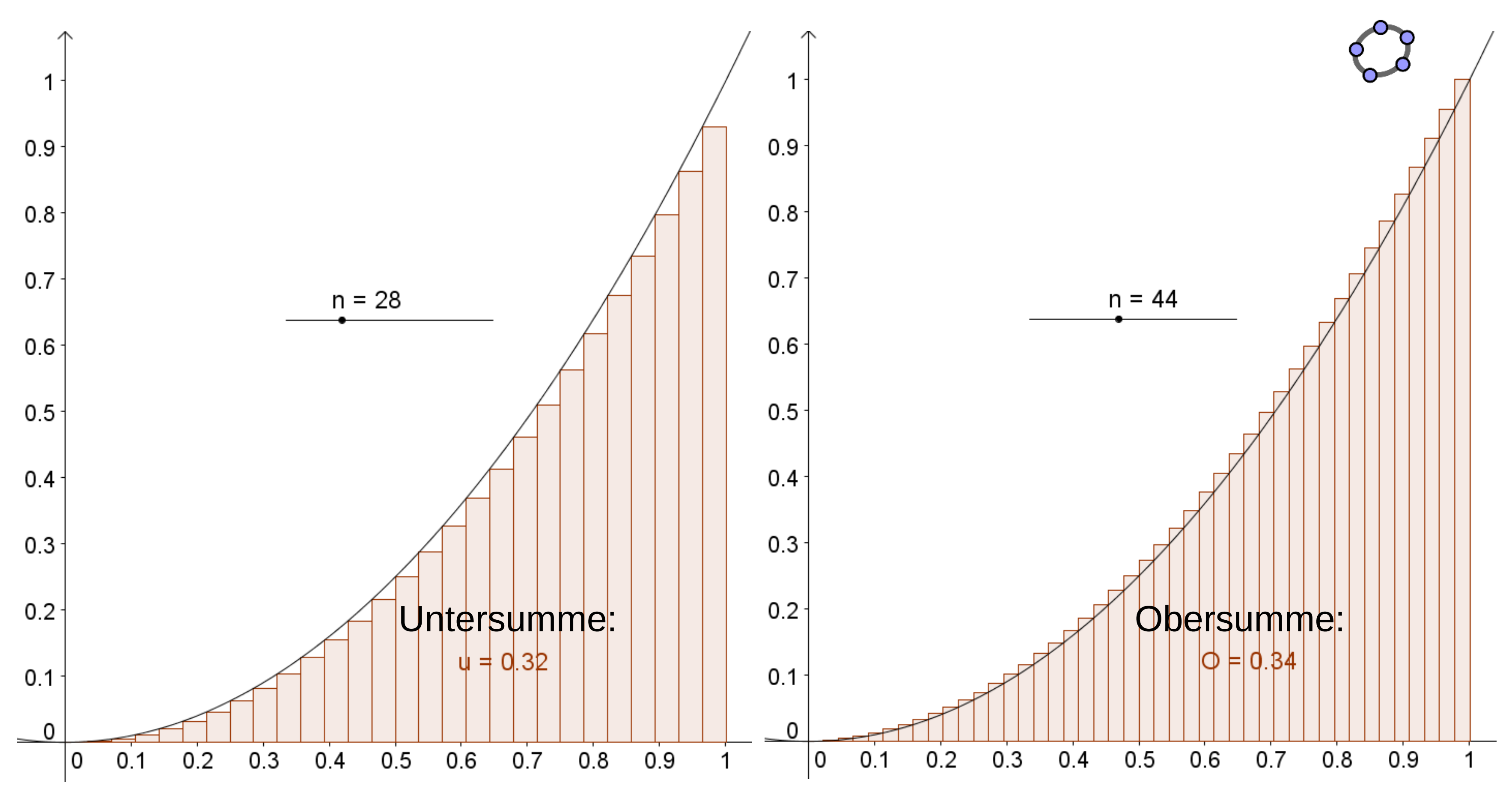


Obersumme: $O_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2$



n = 1 n = 2 n = 4 n = 8

Grenzwert von Unter- und Obersumme für f(x) = x²



Das bestimmte Integral

Wenn die Untersumme U_n und die Obersumme O_n einer Funktion f den gleichen Grenzwert für $n \to \infty$ haben, so ist die Funktion **integrierbar**. Der gemeinsame Grenzwert heißt dann das **bestimmte Integral** von f, geschrieben

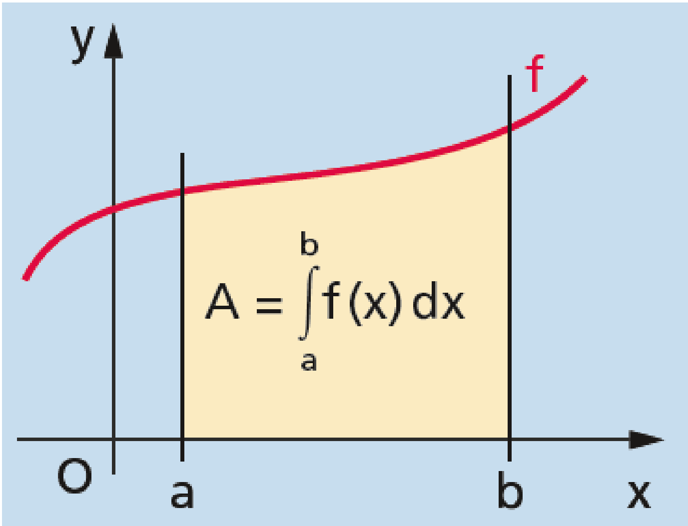
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

gesprochen: „Integral von f(x) in den Grenzen von a bis b“.

Die Funktion f heißt auch **Integrand,** und x heißt **Integrationsvariable**.

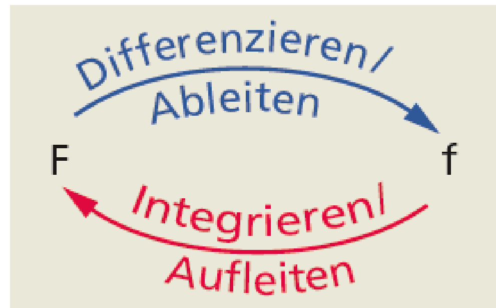
Das Integral als Flächeninhalt

Hat die Funktion f im Intervall [a, b] nur nichtnegative Funktionswerte, dann gibt das Integral den Inhalt der Fläche an, die vom Graphen von f, der x-Achse und den Geraden x = a und x = b begrenzt wird.



Stammfunktionen

Definition. Sei f eine Funktion auf dem Intervall $[a, b]$. Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** von f, falls $F' = f$ ist.



Beispiele:

Eine Stammfunktion von	x^2	ist	$1/3\ x^3$,	
eine Stammfunktion von	x^3	ist	$1/4\ x^4$,	
eine Stammfunktion von	x^n	ist	$x^{n+1}/(n+1)$,	
eine Stammfunktion von	$\sin(x)$	ist	$-\cos(x)$,	
eine Stammfunktion von	e^x	ist	e^x	(e = Eulersche Zahl)
eine Stammfunktion von	$1/x$	ist	$\ln(x)$.	

Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f bezeichnet man auch als **unbestimmtes Integral** und schreibt dafür

$$\int f(x)\,dx\,.$$

Wenn F eine Stammfunktion von f ist, kann man mit einer beliebigen reellen Konstante c schreiben

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Beispiel:

$$\int x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3 + c$$

Beispiele für unbestimmte Integrale

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

$$\int 8x^3\,dx = 2x^4 + c$$

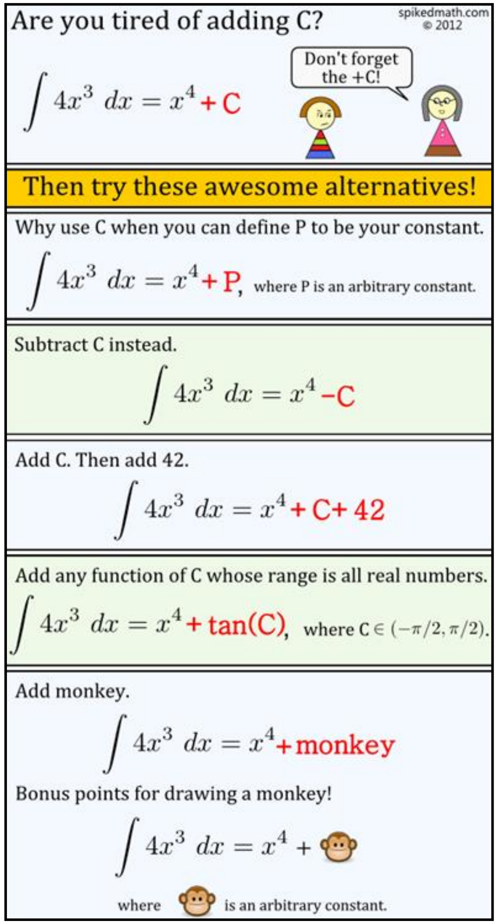
$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$



Integralfunktion

Die folgende Funktion heißt **Integralfunktion** von f:

$$A_0(x) = \int_0^x f(t)dt$$

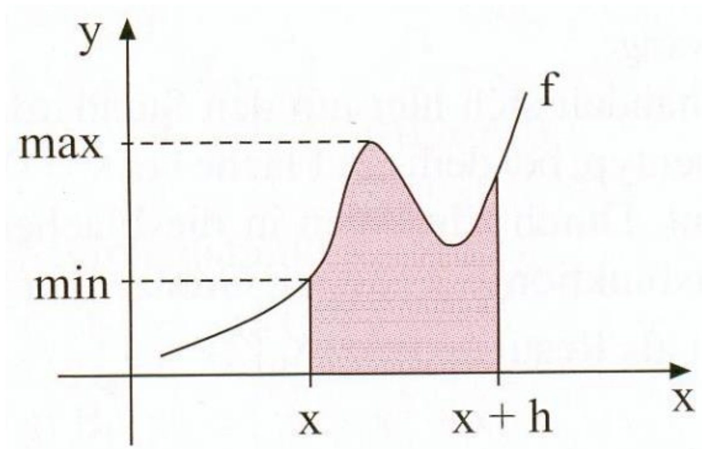
Satz: Die Integralfunktion von f ist eine Stammfunktion von f, d.h.

$$A_0'(x) = f(x).$$

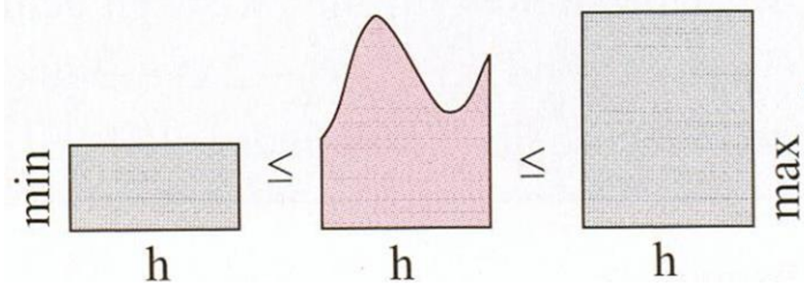
Beweis: Die Differenz

$$A_0(x + h) - A_0(x)$$

gibt die abgebildete Fläche an:



Beweis



h $\to$ 0:

Einschachtelung: $$(1)\ h \cdot min \leq A_0(x+h) - A_0(x) \leq h \cdot max$$

Division durch h > 0: $$(2)\ min \leq \frac{A_0(x+h) - A_0(x)}{h} \leq max$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

Grenzübergang h $\to$ 0: $$(3)\ f(x) \leq A_0'(x) \leq f(x)$$

Es folgt: $A_0'(x) = f(x)$.

Wie berechnet man bestimmte Integrale konkret?

Der folgende Satz zeigt die Bedeutung der Stammfunktion:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Sei f eine Funktion auf dem Intervall [a, b], und sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bemerkung: Mit der Stammfunktion kann man ein Integral ganz einfach ausrechnen: Man bestimmt die Werte an den Stellen a und b und bildet die Differenz!

Für $F(b) – F(a)$ schreibt man auch $[F(x)]_a^b$ oder $F(x)\big|_a^b$.

Beweis des Hauptsatzes

Beweis: Das Integral ergibt sich als Differenz der Integralfunktionen:

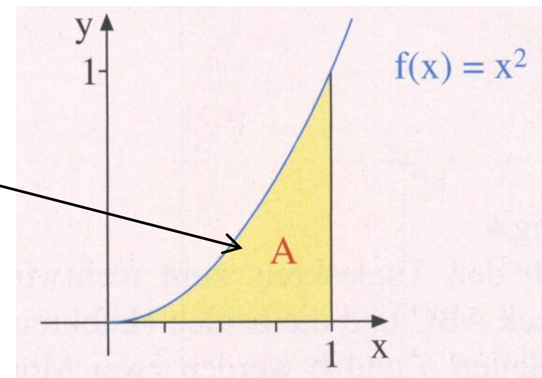
$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = A_0(b) - A_0(a)$$

Da die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, unterscheidet sie sich von F nur um eine Konstante c. Es folgt:

$$\ldots = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

Beispiele

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}\cdot 1 - \tfrac{1}{3}\cdot 0 = \tfrac{1}{3}$$



$$\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

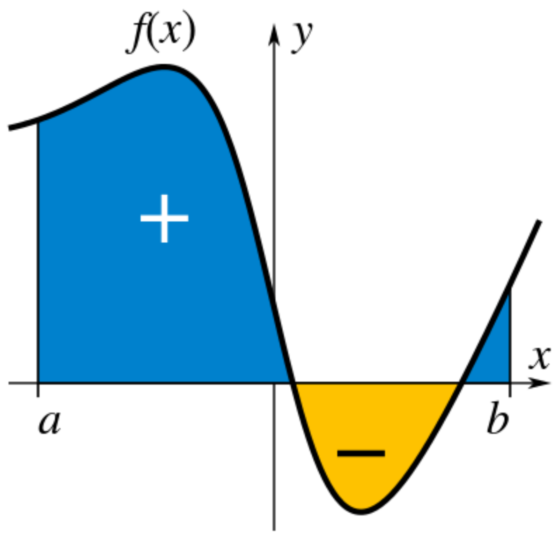
$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^\pi = (-\cos(\pi)) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$$

$$\int_1^2 \tfrac{1}{x}\,dx = \left[\ln(x)\right]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

Integral als Flächenbilanz

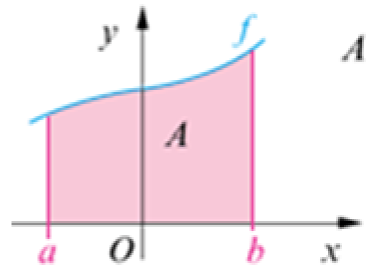
Das Integral stellt eine **Flächenbilanz** dar:

Positive Funktionswerte gehen mit positivem Vorzeichen ein,
negative Funktionswerte mit negativem Vorzeichen.



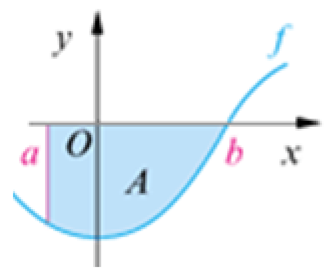
Flächen zwischen Graph und x-Achse

Fläche oberhalb der x-Achse:



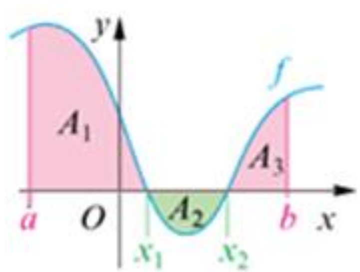
$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Fläche unterhalb der x-Achse:



$$A = \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right|$$

Graph schneidet x-Achse:



Achtung: zuerst Nullstellen bestimmen.

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = \int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \int_{x_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel: f(x) = x² - 2x

Gesamtes Integral: $\int_1^3 (x^2 - 2x)\,dx = \frac{2}{3}$

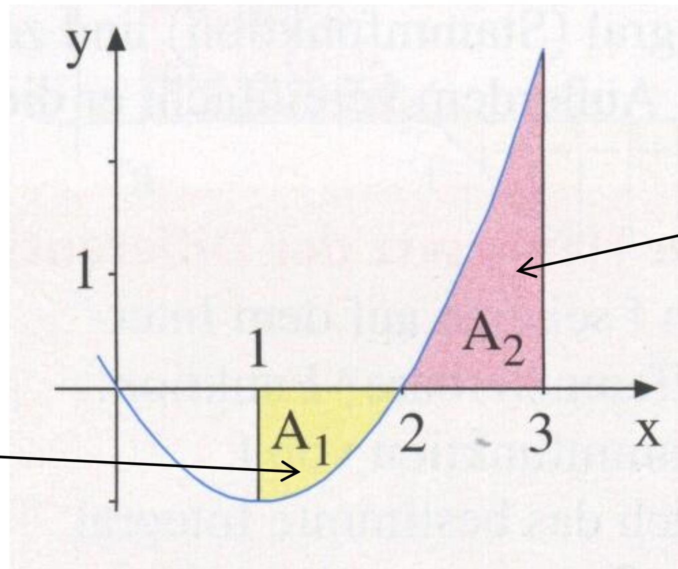
$$\int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \frac{4}{3}$$

Teilintegrale:

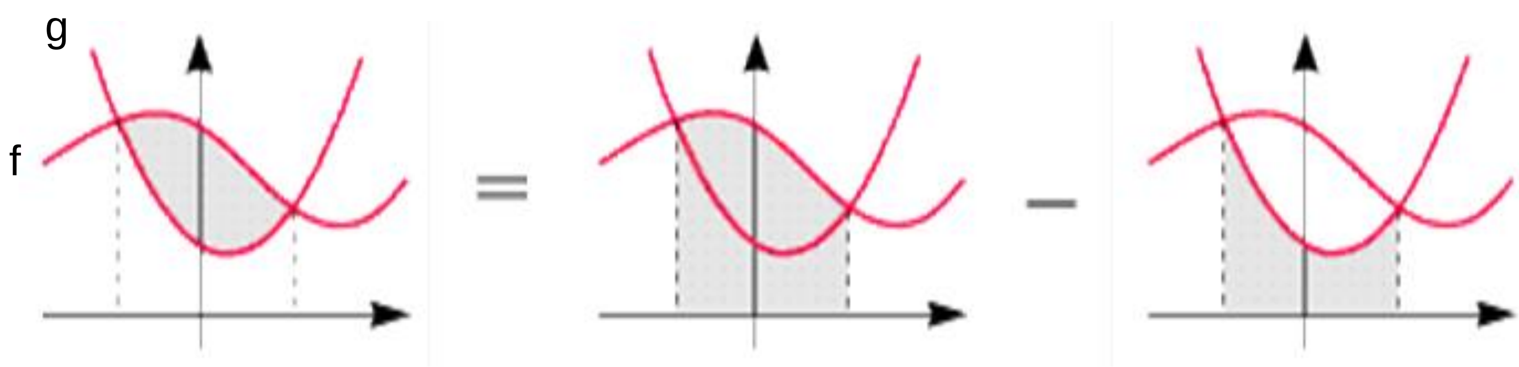
$$\int_1^2 (x^2 - 2x)\,dx = -\frac{2}{3}$$

$$A_1 = \frac{2}{3}$$



Gesamte Fläche: $A = A_1 + A_2 = 2/3 + 4/3 = 2.$

Fläche zwischen zwei Graphen



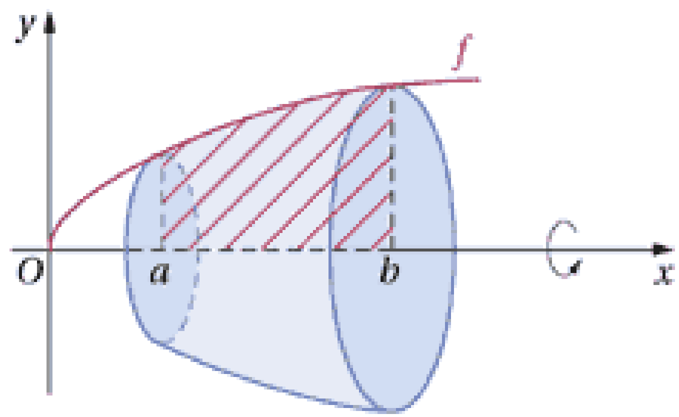
Für die Fläche zwischen den Graphen von f und g mit $f(x) \geq g(x)$ gilt:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Volumen von Rotationskörpern

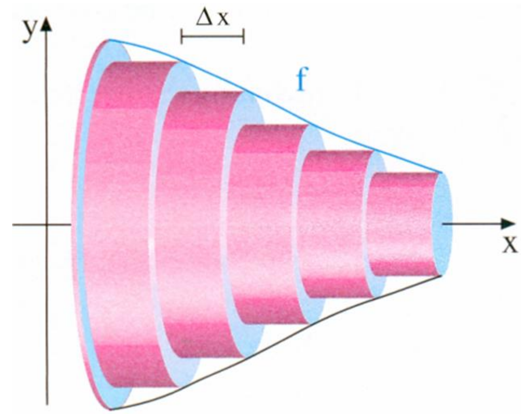
Rotiert der Graph einer nicht negativen Funktion f über dem Intervall [a, b] um die x-Achse, so entsteht ein **Rotationskörper** mit dem Volumen

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$$



Herleitung der Volumenformel

Wir zerlegen den Körper in Zylinderscheiben der Dicke Δx (Abb.). Da der Radius jeweils gleich dem Funktionswert ist, haben diese Zylinder das Volumen



$$V_i = \pi\, r_i^2 \cdot \Delta x = \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$

Durch Aufsummieren entsteht die Untersumme

$$V = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$

Lassen wir die Anzahl der Scheiben gegen unendlich gehen, so gilt

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$$

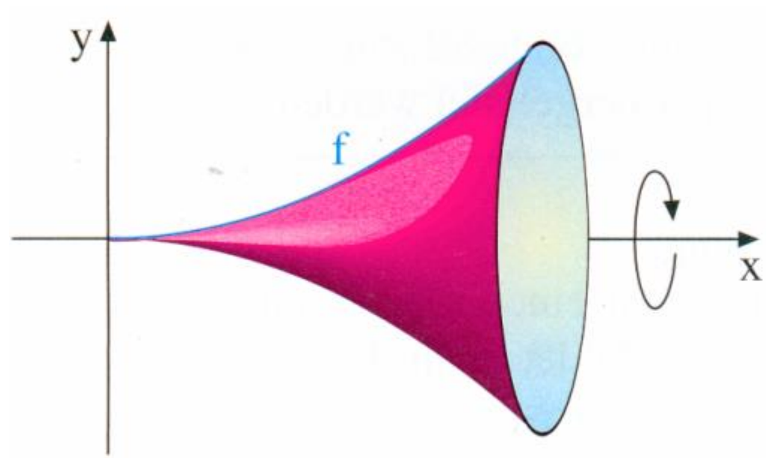
Beispiel

Beispiel: Der Graph von $f(x) = \frac{1}{2} x^2$ rotiert über dem Intervall [0, 1] um die x-Achse. Der entstehende Rotationskörper hat das Volumen

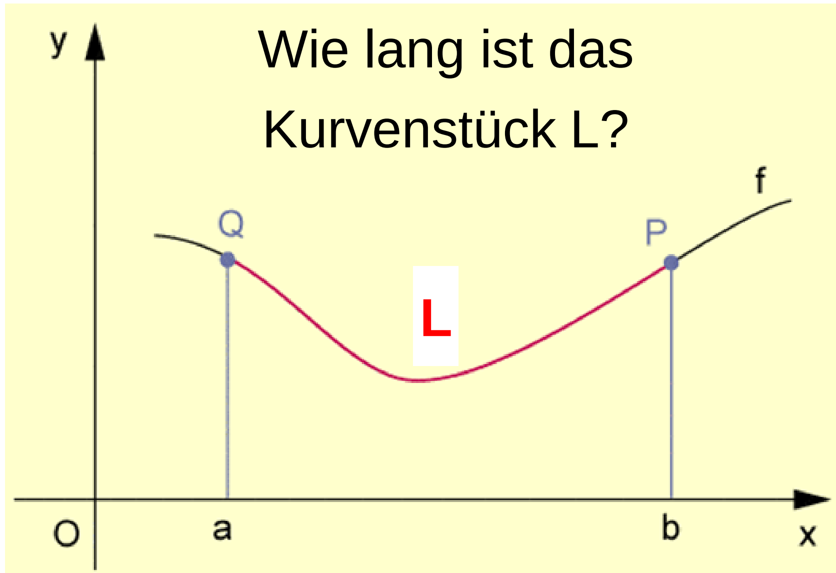
$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^1 \tfrac{1}{4}x^4 \, dx = \pi \cdot \left[\tfrac{1}{20}x^5\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{20} \approx 0{,}16 \text{ VE}$$



Bogenlänge einer Kurve



Satz: Für die **Bogenlänge** L des Graphen der Funktion f über dem Intervall [a, b] gilt:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Beweis

Beweis: Nach Pythagoras gilt

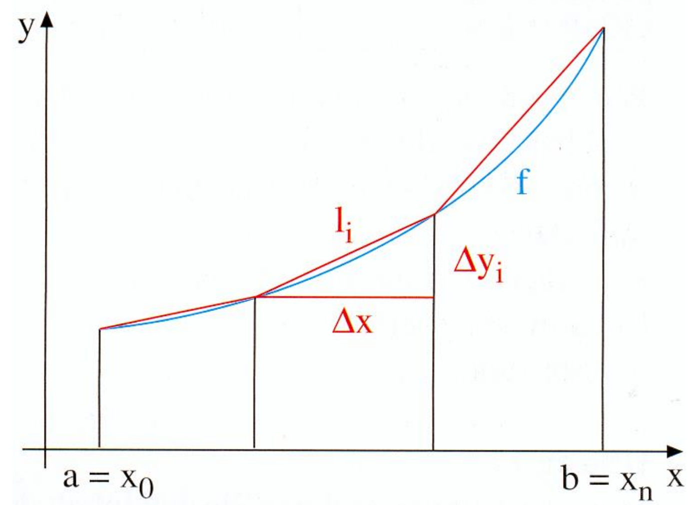
$$l_i = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{(1 + \Delta y_i^2 / \Delta x^2)} \cdot \Delta x$$

Die Gesamtlänge beträgt dann:

$$L \approx \sum_{i=0}^{n} l_i = \sum_{i=0}^{n} \sqrt{(1 + \Delta y_i^2 / \Delta x^2)} \cdot \Delta x$$

Im Grenzübergang $\Delta x \to 0$ bzw. $n \to \infty$ gilt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$



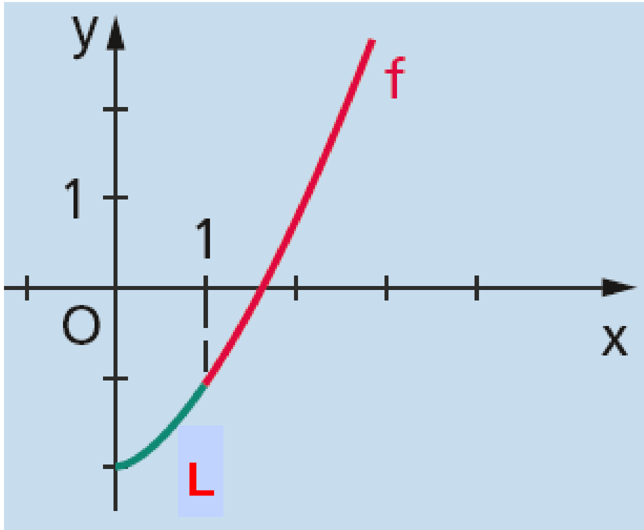
und aus der Summe wird das folgende Integral: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

Beispiel

Beispiel: Wie lang ist der Bogen der Funktion

$$f(x)=\sqrt{x^3}-2=x^{\frac{3}{2}}-2$$

über dem Intervall [0, 1]?



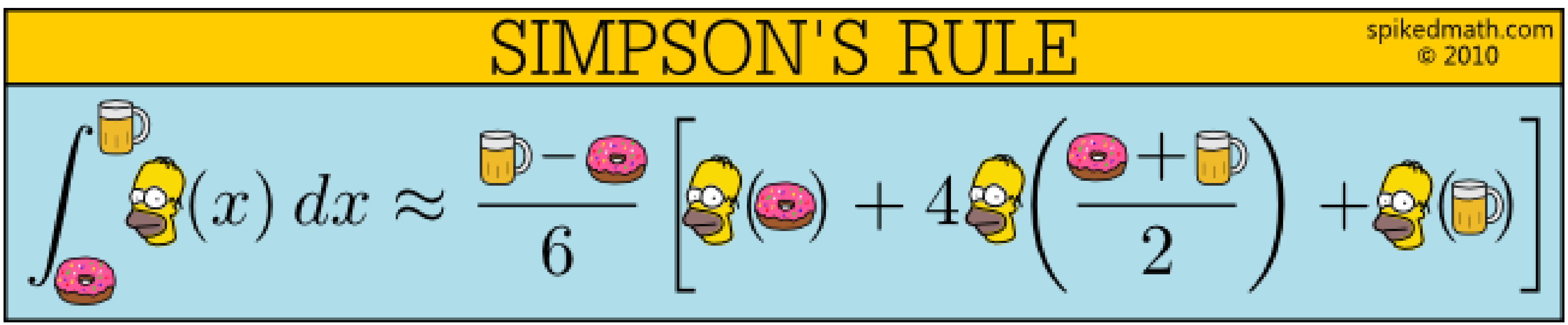
$$L=\int_0^1\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+(\tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+\tfrac{9}{4}x}\,dx$$

$$=\tfrac{2}{3}(1+\tfrac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\cdot\tfrac{4}{9}\Big|_0^1=\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{9}\cdot(1+\tfrac{9}{4})^{\frac{3}{2}}-\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{9}$$

$$\approx 1{,}44$$

6.2 Numerische Integration

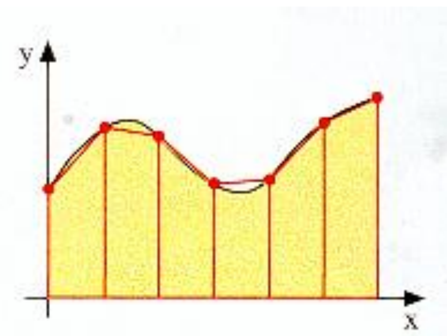


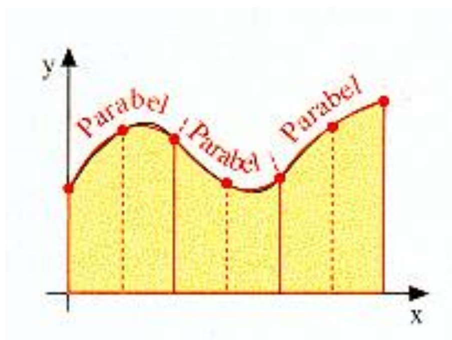
Numerische Integration

Manche Integrale können **nicht exakt berechnet** werden. **Beispiele:**

- Es existiert keine geschlossen darstellbare Stammfunktion (z. B. Gauß´sche Glockenkurve).
- Die Stammfunktion ist zu schwierig zu bestimmen.
- Die Kurve ist nicht durch eine Funktionsgleichung gegeben.

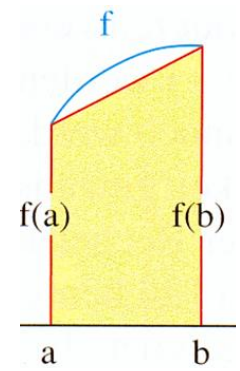
Dann kann man das Integral **näherungsweise** bestimmen. **Beispiele:**





Trapezverfahren

Idee: Wir nähern das Integral durch Trapezstreifen an.
Der Flächeninhalt eines solchen Trapezes ist

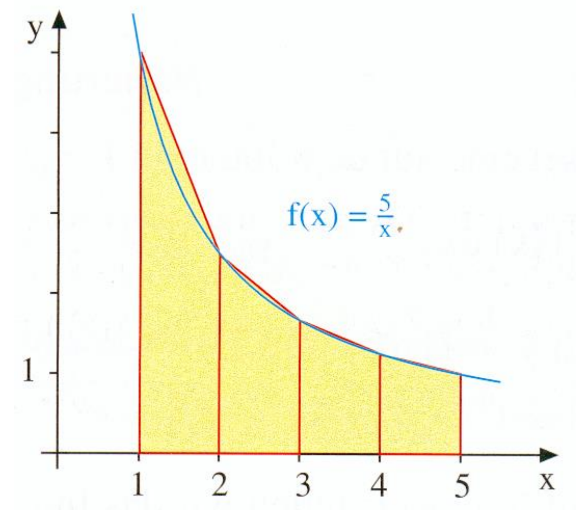


$$A = \tfrac{1}{2}\,(b - a)\,(f(a) + f(b))$$

Beispiel: $\int_1^5 \frac{5}{x}\,dx$ wird mit 4 Trapezstreifen angenähert.

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(2-1)\cdot\left(\tfrac{5}{1}+\tfrac{5}{2}\right)$$
$$A_2 = \tfrac{1}{2}(3-2)\cdot\left(\tfrac{5}{2}+\tfrac{5}{3}\right)$$
$$A_3 = \tfrac{1}{2}(4-3)\cdot\left(\tfrac{5}{3}+\tfrac{5}{4}\right)$$
$$A_4 = \tfrac{1}{2}(5-4)\cdot\left(\tfrac{5}{4}+\tfrac{5}{5}\right)$$

$$\int_1^5 \frac{5}{x}\,dx \approx \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\tfrac{5}{1}+2\cdot\tfrac{5}{2}+2\cdot\tfrac{5}{3}+2\cdot\tfrac{5}{4}+\tfrac{5}{5}\right) \approx 8{,}42$$

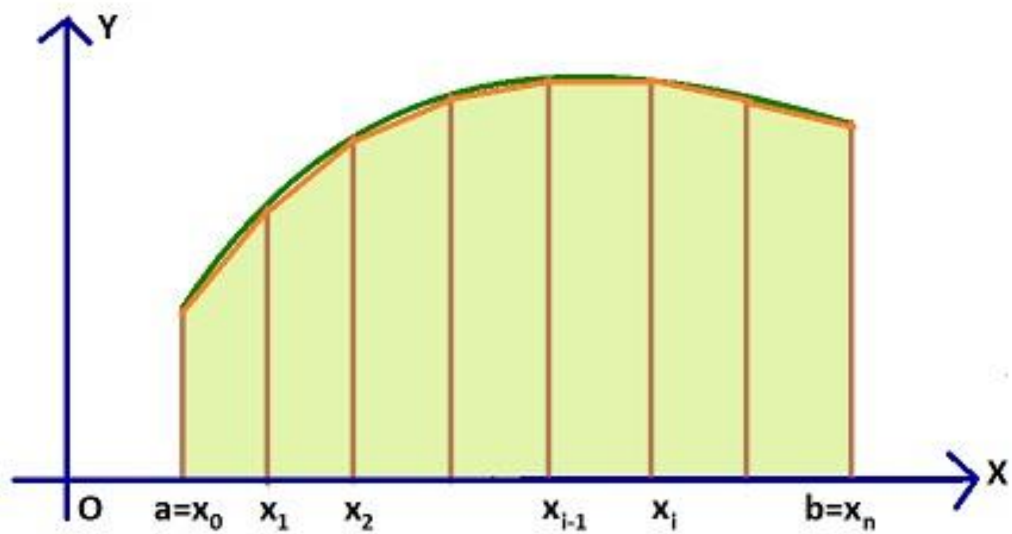


Trapezverfahren

Sei f eine auf [a, b] stetige Funktion. Dann gilt die Näherungsformel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\cdot(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

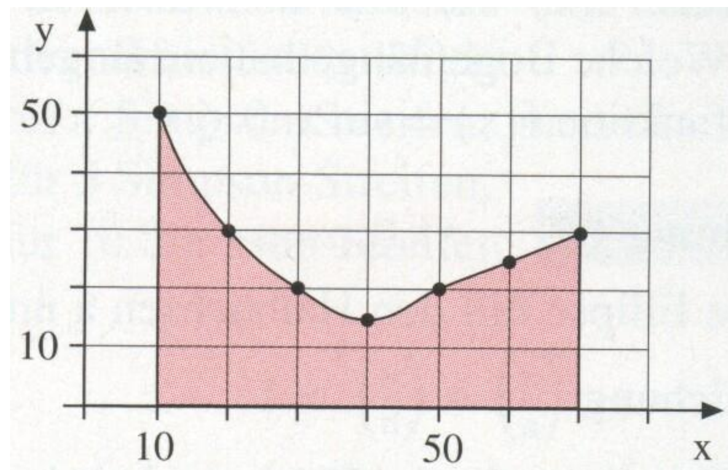
mit $y_i = f(x_i) = f(a + i\cdot(b-a)/n)$ für $i = 0, \ldots, n$.



Übung

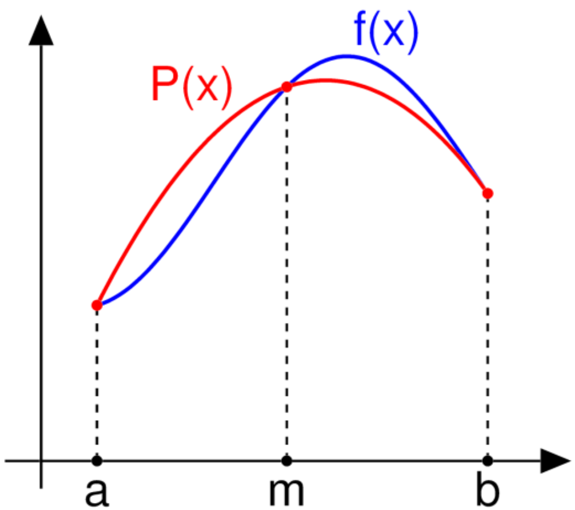
Wenn nur einzelne Messpunkte einer Kurve (und nicht die Funktionsgleichung) bekannt sind, so kann man den Flächeninhalt unter der Kurve numerisch errechnen.

Übung: Bestimmen Sie mit dem Trapezverfahren den Flächeninhalt unter der Kurve durch folgende Messwerte:



Kepler´sche Fassregel

Weil Johannes Kepler sich bei Weinkauf für seine Hochzeit betrogen fühlte, entwickelte er ein einfaches numerisches Integrationsverfahren.



Idee: Die Funktion f wird durch eine Parabel P durch die drei Stellen

a, m und b

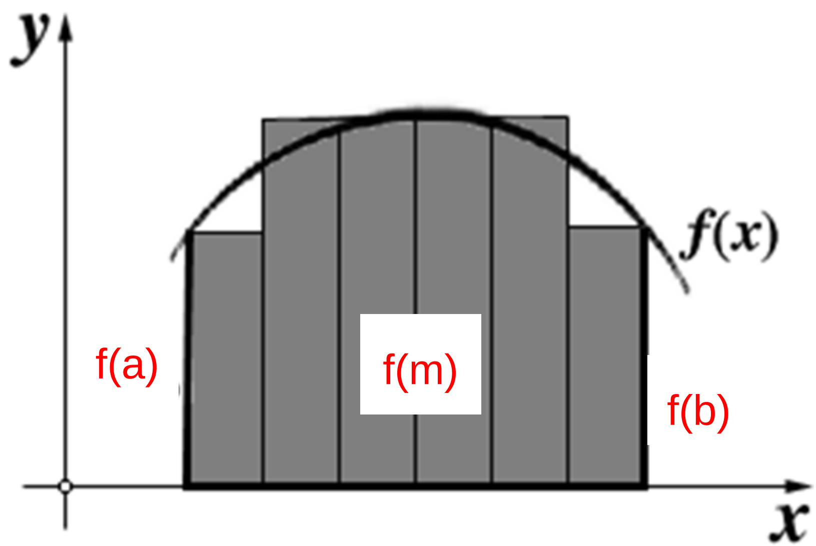
approximiert (mit m = (a+b)/2). Dann wird das Integral dieser Parabel bestimmt.

Kepler´sche Fassregel

Es ergibt sich die **Kepler'sche Fassregel** (Parabelverfahren):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6} \cdot (f(a) + 4 \cdot f(m) + f(b))$$

mit m = (a+b)/2.

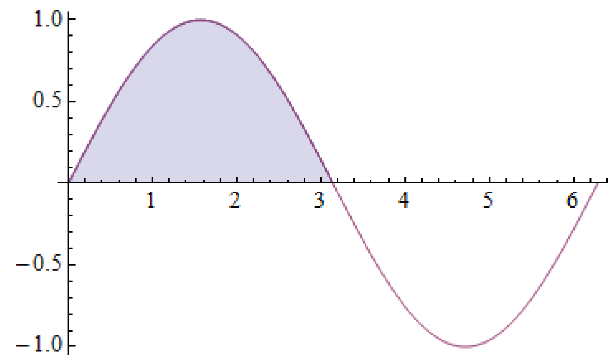


Beispiel

Beispiel: $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$ wird mit der Kepler'schen Fassregel approximiert:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx \approx \tfrac{\pi-0}{6} \cdot (\sin(0) + 4 \cdot \sin(\tfrac{\pi}{2}) + \sin(\pi)) = \tfrac{\pi}{6} \cdot 4 \approx 2{,}09$$

Der exakte Wert ist



$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi}$$

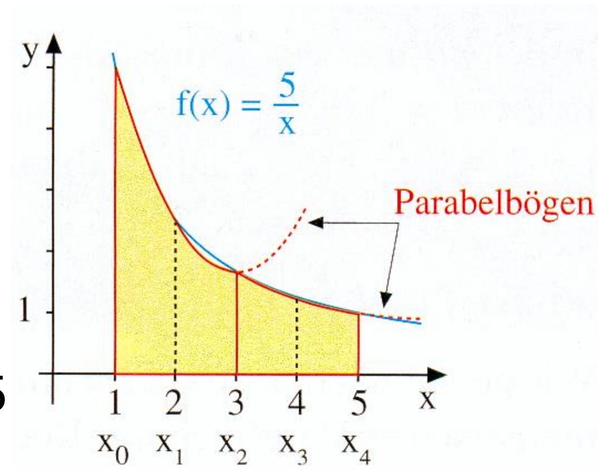
$$= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$$

Der relative Fehler beträgt also nur ca. 5%.

Simpson-Verfahren

Idee: Wir unterteilen die Fläche in mehrere Streifen (**Simpson-Streifen**) und wenden auf jeden die Kepler'sche Fassregel an.

Beispiel: $\int_1^5 \frac{5}{x}\,dx$ mit 2 Simpson-Streifen:



1. Streifen: $\int_1^3 \frac{5}{x}\,dx \approx \frac{3-1}{6}\cdot(f(1)+4\cdot f(2)+f(3)) \approx 5{,}55$

2. Streifen: $\int_3^5 \frac{5}{x}\,dx \approx \frac{5-3}{6}\cdot(f(3)+4\cdot f(4)+f(5)) \approx 2{,}55$

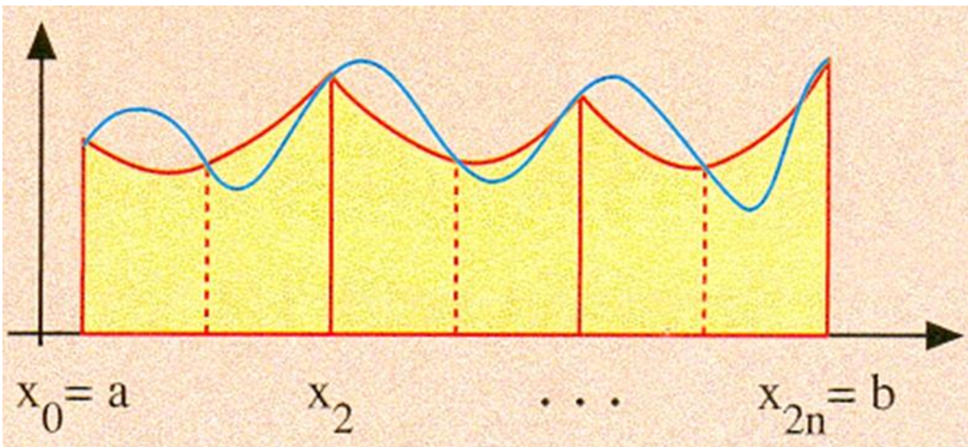
Insgesamt: $\int_1^5 \frac{5}{x}\,dx \approx \frac{2}{6}\cdot(f(1)+4\cdot f(2)+2\cdot f(3)+4\cdot f(4)+f(5)) \approx 8{,}11$

Simpson-Verfahren

Sei f eine auf [a, b] stetige Funktion. Dann gilt die Näherungsformel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\cdot(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

mit $y_i = f(x_i) = f(a + i\cdot(b - a)/(2n))$ für $i = 0, \ldots, 2n$.



Übung

Bestimmen Sie mit dem Simpson-Verfahren die Fläche unter der Kurve durch folgende Messwerte. Verwenden Sie 3 Simpson-Streifen.

x	0	2	4	6	8	10	12
y	5	8	10	11	10	9	7

Vergleich

Vergleich der numerischen Integrationsverfahren:

Bei einer Verzehnfachung der Streifenzahl steigt die Genauigkeit bei

- **Ober- und Untersummen:** um ca. 1 Dezimalstelle
- **Trapezverfahren:** um ca. 2 Dezimalstellen
- **Simpson-Verfahren:** um ca. 4 Dezimalstellen

Bemerkung: Die **Kepler‘sche Fassregel** liefert für Polynome bis dritten Grades sogar exakte Ergebnisse.

Mathe ist

$$\iint e^x y \, dx \, dy$$

Mehrfachintegrale

Wir betrachten nun Integrale der Form

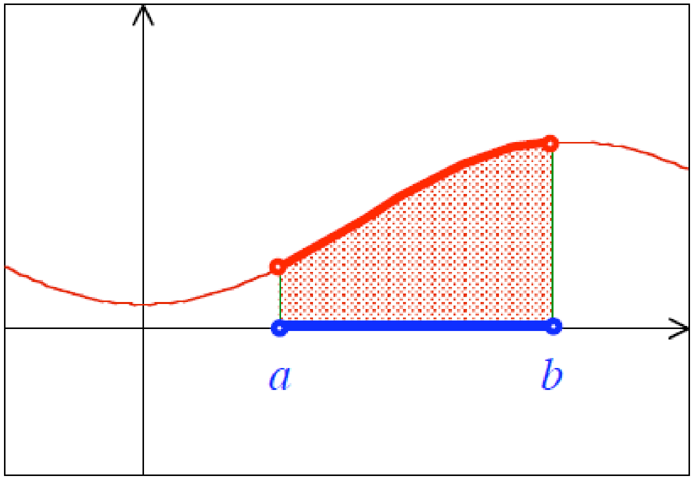
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{oder} \quad \iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Dabei ist A ein zweidimensionaler bzw. dreidimensionaler Integrationsbereich.

Erinnerung:

Bei eindimensionalen Funktionen f(x):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{„}\textbf{Fläche} \text{ unter der Kurve"}$$

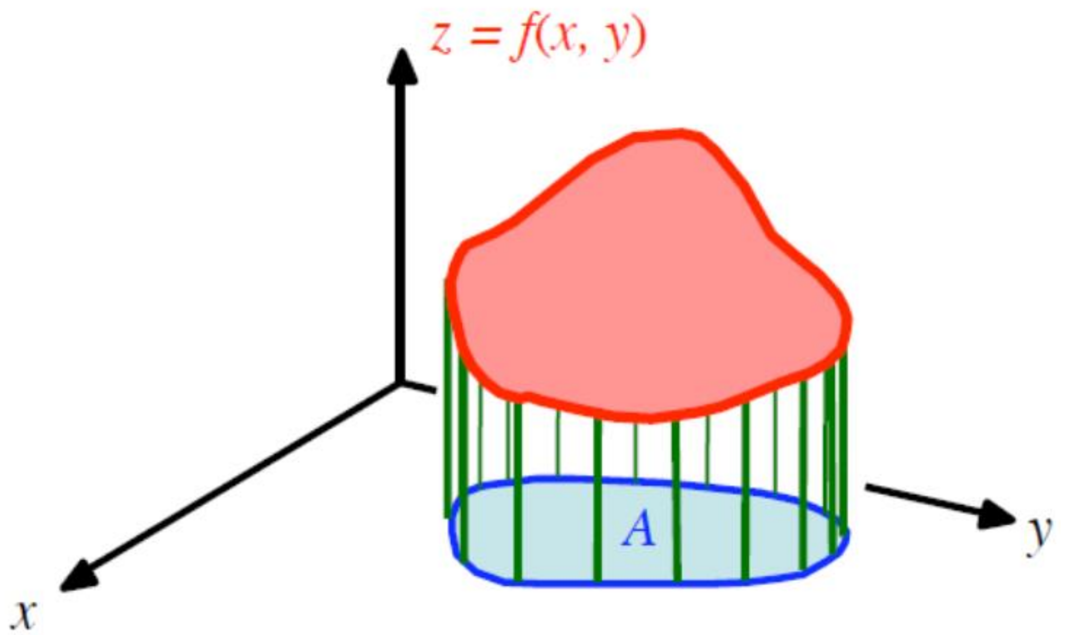


Integrationsbereich [a, b] eindimensional

Integral zweier Variablen

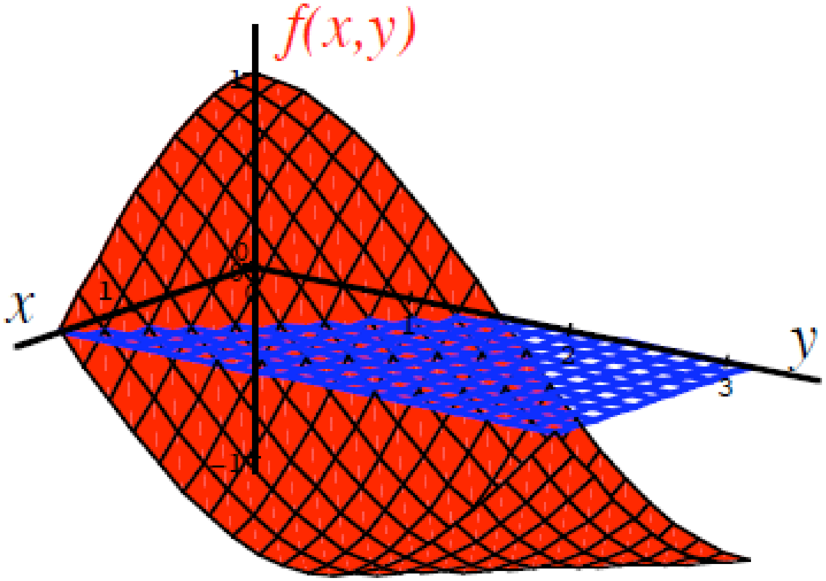
Bei zweidimensionalen Funktionen f(x, y):

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$ = „**Volumen** unter der Fläche f(x, y)“ mit Grundfläche A



Beispiel

Beispiel: $f(x, y) = \cos(x + y)$ mit $A = \{(x, y) \mid x \in [0, \pi/2], y \in [0, \pi]\}$



Der größte Teil der Fläche ist unterhalb der x-y-Ebene. Daher ist ein negatives Integral zu erwarten.

Beispiel

Wir integrieren zuerst über x
und dann über y
(von innen nach außen):

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\,\mathrm{d}x = \sin(x+y)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin\left(\tfrac{\pi}{2}+y\right) - \sin(y) = \cos(y) - \sin(y)$$

$$I = \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \left[\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\,\mathrm{d}x}_{I_1} \right] \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\cos(y) - \sin(y)\right)\mathrm{d}y = \left(\sin(y) + \cos(y)\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= (0-1) - (0+1) = -2$$

Reihenfolge der Integrationen

Die Reihenfolge der Integrationen spielt keine Rolle. Natürlich müssen die Integrationsgrenzen entsprechend berücksichtigt werden.

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x+y)\, dx\, dy = -2$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\pi} \cos(x+y)\, dy\, dx = -2$$

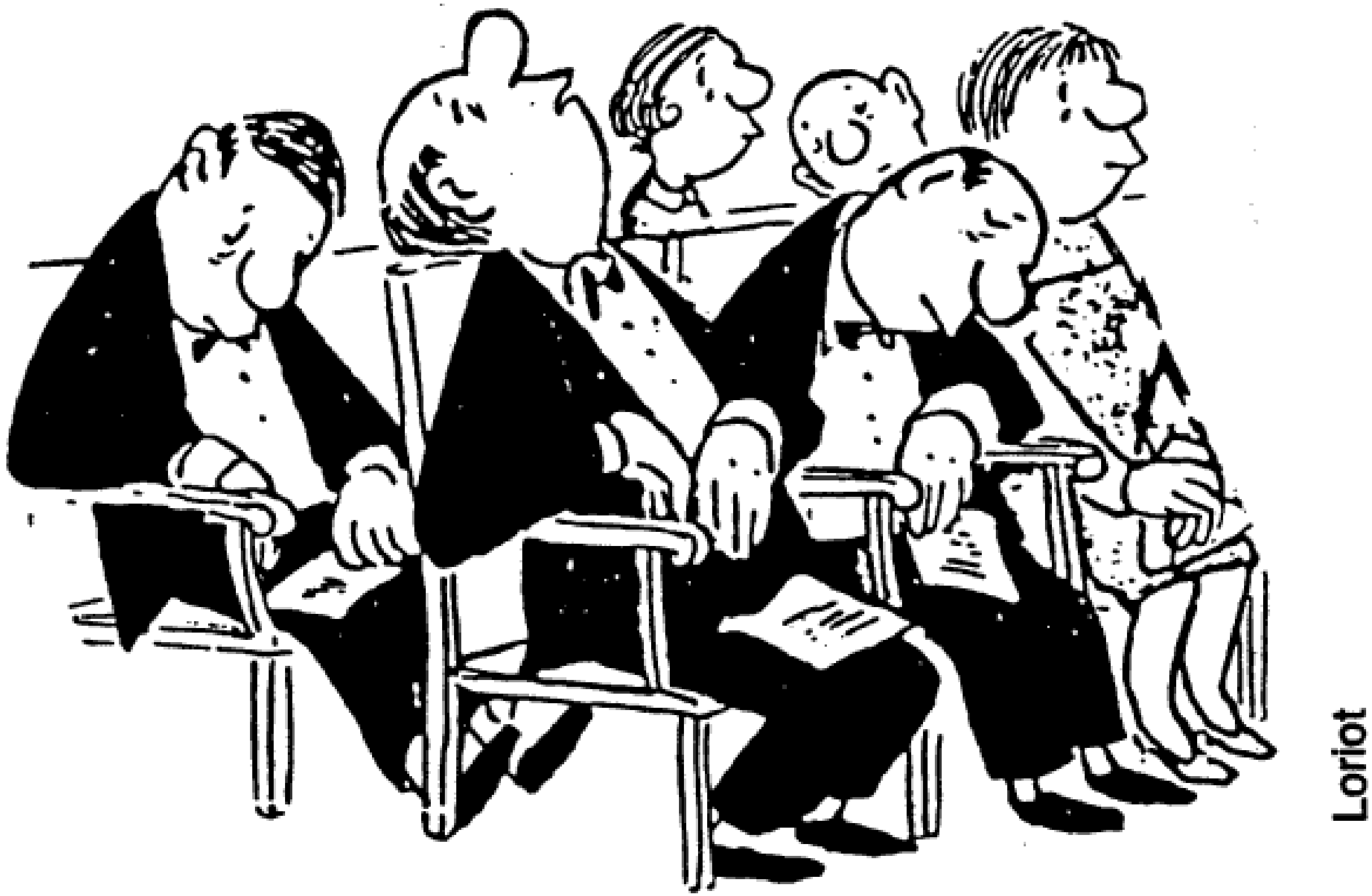
Übungen

Berechnen Sie die folgenden Mehrfachintegrale:

(a) $\int_1^5 \int_0^2 xy \, dx \, dy$

(b) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!!!



Viel Erfolg beim Lernen und bei den Klausuren!!!