Hochschule **RheinMain**
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

# Kapitel 2

# Mengen

# Inhalt

# 2.1 Operationen auf Mengen

# Was ist eine Menge?

Schwierige Frage!

Wir begnügen uns mit einer „naiven“ Mengendefinition.

Der „Vater der Mengenlehre“, Georg Cantor (1845 - 1918), sagte:

*„Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“*

Anstatt genau zu sagen, was eine Menge ist, stellen wir dar, wie man Mengen beschreiben kann. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten.

1. Durch Aufzählung
2. Durch Eigenschaften

# Beschreibung durch Aufzählung

Die Objekte einer Menge heißen **Elemente**. Wir können eine Menge beschreiben, indem wir ihre Elemente aufzählen.

**Beispiel:** {rot, grün, blau} ist die Menge der Farben rot, grün und blau.

**Beispiel:** Die Menge {Susanne, Yvonne, Ute, Nicole} besteht aus den Elementen Susanne, Yvonne, Ute, Nicole.

**Beispiel:** Wir betrachten oft Mengen von Zahlen:
$M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ist die Menge der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4.

# Notationen

Die Elemente der Menge werden in geschweifte Klammern geschrieben:

a, b, c sind die Elemente der Menge {a, b, c}.

Bei einer Menge spielt die Reihenfolge der Elemente keine Rolle:

{c, a, b} = {b, a, c} = {a, b, c}.

In einer Menge werden Elemente, die mehrfach auftauchen, nur einmal betrachtet:

{a, a, a, a, b, b, b, c, c, c, c, c, c, c, c} = {a, b, c}.

# Elemente, leere Menge

Wenn ein Objekt a ein Element der Menge M ist, dann schreiben wir

$$a \in M.$$

Wenn a kein Element der Menge M ist, so schreiben wir

$$a \notin M.$$

**Beispiele:** $3 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $5 \notin \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

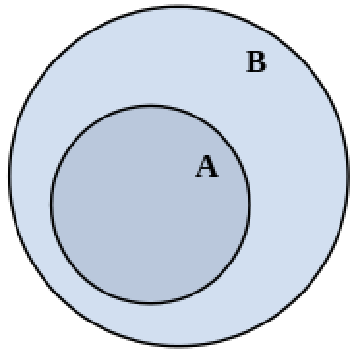
Eine Menge spielt eine besondere Rolle:

Die **leere Menge** enthält kein Element. Sie wird mit $\{\,\}$ oder $\emptyset$ bezeichnet.

# Teilmengen und Gleichheit

Eine Menge A ist eine **Teilmenge** einer Menge B, wenn jedes Element von A auch in B enthalten ist. Wir schreiben dann

$$A \subseteq B.$$




**Beispiel:**

A = {rot, blau} ist Teilmenge von B = {rot, blau, grün}.

Eine Menge A heißt **echte Teilmenge** einer Menge B, wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ gilt. Wir schreiben dann

$$A \subset B.$$

Mengen kann man durch **Venn-Diagramme** darstellen (s. Abb.).

# Zahlenmengen

- **N**: Menge der **natürlichen Zahlen**:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

- **Z**: Menge der **ganzen Zahlen**:

$$\mathbf{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

- **Q**: Menge der **rationalen Zahlen**:

„Brüche" bzw. endliche oder periodische Dezimalzahlen.

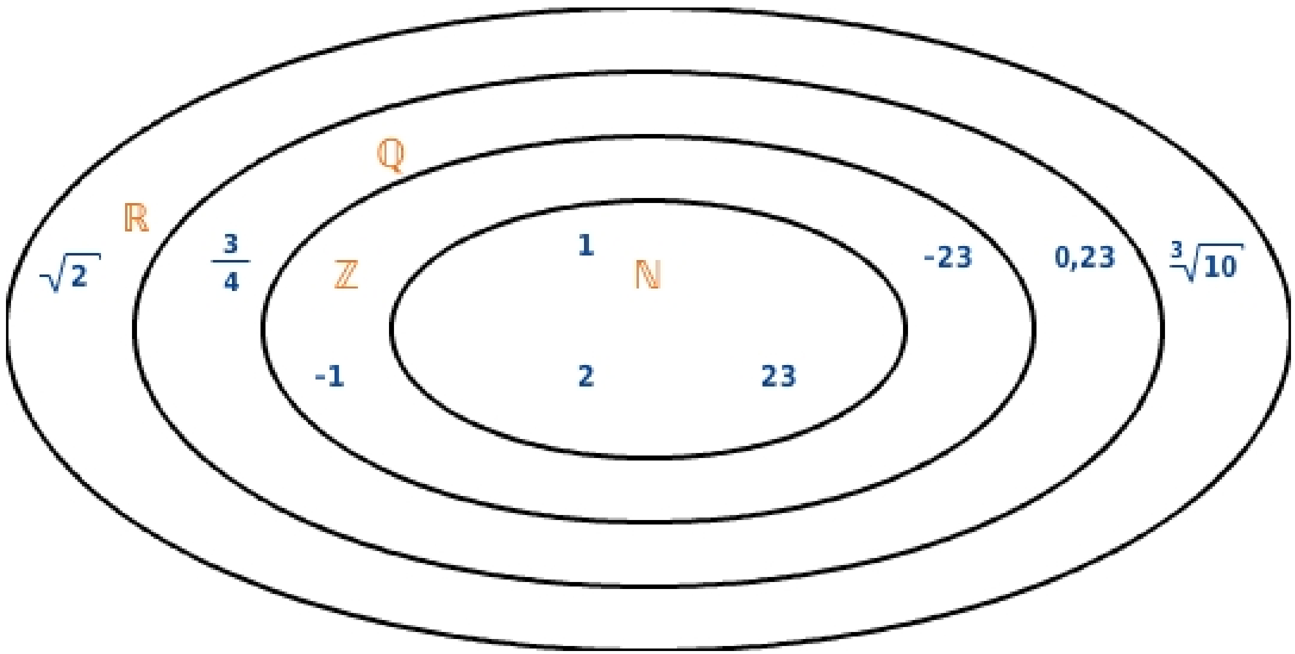
- **R**: Menge der **reellen Zahlen**:

alle Dezimalzahlen: endliche, periodische, nichtperiodische ($\pi$, $\sqrt{2}$, …).

# Zahlenmengen

Die Zahlenmengen bilden wie folgt echte Teilmengen:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$



# Beschreibung einer Menge durch Eigenschaften

Manchmal ist es schwierig oder unmöglich, eine Menge durch Aufzählen zu beschreiben.

**Idee:** Man sondert aus einer schon vorhandenen Menge eine Teilmenge aus, die gewisse Eigenschaften hat.
Die Eigenschaften kann man durch eine Aussageform ausdrücken.

Genauer: Man geht von einer (bereits definierten) Menge $X$ aus und definiert damit eine neue Menge gemäß folgendem Muster:

$$Y = \{x \in X \mid A(x)\},$$

Der Strich „|“ bedeutet:
„mit der Eigenschaft …“
oder „für die gilt …“

wobei $A(x)$ eine Aussageform ist.

# Beispiele

(a) Wir wollen aus der Menge aller ganzen Zahlen **Z** die geraden Zahlen aussondern: Mit der Aussageform A(x) = „x ist gerade“ folgt

$$
\begin{aligned}
G &= \{x \in \mathbf{Z} \mid A(x)\} \\
&= \{x \in \mathbf{Z} \mid x \text{ ist gerade}\} \\
&= \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}.
\end{aligned}
$$

(b) Die Menge P der Primzahlen können wir wie folgt beschreiben:

$$
\begin{aligned}
P &= \{p \in \mathbf{N} \mid p \text{ hat genau zwei Teiler}\} \\
&= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}
\end{aligned}
$$

(c) Die Menge der rationalen Zahlen: $\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z} \text{ und } q \in \mathbf{N}\}$

# Übung

Stellen Sie folgende Mengen in aufzählender Form dar:

(a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ ist Teiler von } 42\}$

(b) $B = \{n \in \mathbf{N} \mid n \text{ ist ungerade und } 3 \leq n \leq 10\}$

# Intervalle

Bei den reellen Zahlen benötigt man oft spezielle Teilmengen.

Für zwei reelle Zahlen a und b mit $a < b$ schreiben wir:

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ „offenes Intervall",

$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ „linksseitig halboffenes Intervall",

$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ „rechtsseitig halboffenes Intervall",

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ „geschlossenes Intervall".

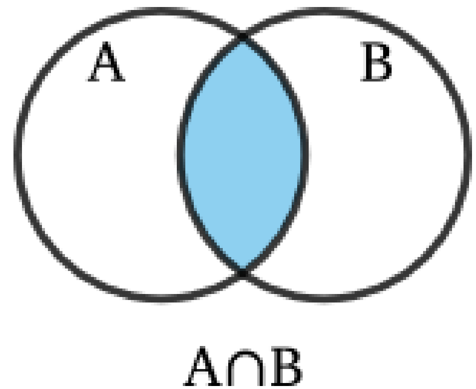
Manchmal wird statt der runden Klammer auch eine „falsche" eckige Klammer verwendet: $(a, b] = ]a, b]$, …

# Schnittmenge

In der **Schnittmenge $A \cap B$** zweier Mengen A und B liegen genau die Elemente, die in A und in B liegen:

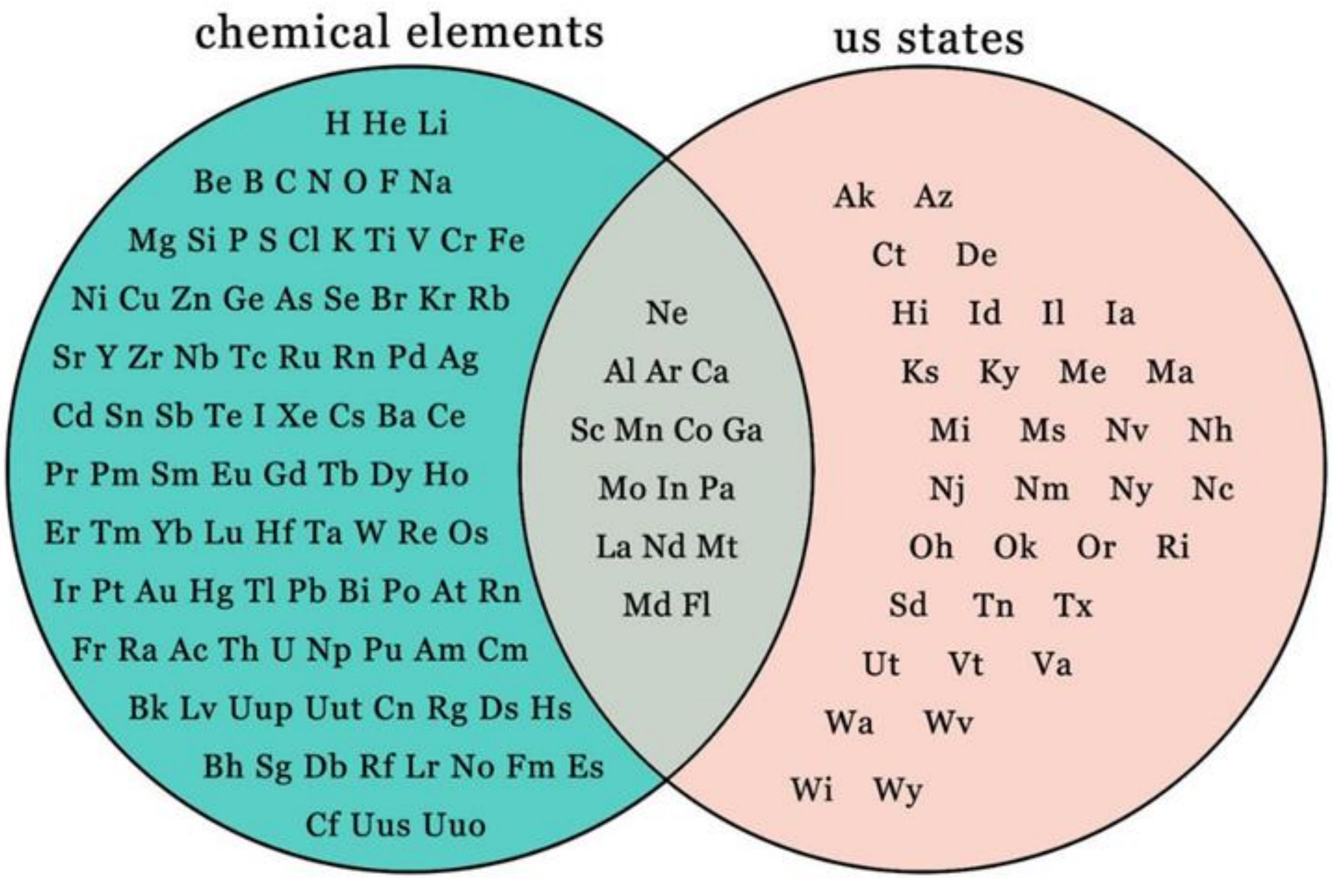
$$A \cap B = \{m \mid m \in A \ \wedge \ m \in B\}.$$

Darstellung im **Venn-Diagramm**:




**Beispiel:** A = Menge der Biologiestudenten, B = Menge der Mathematikstudenten. Dann ist $A \cap B$ die Menge der Studenten, die sowohl Bio als auch Mathe studieren.

# Beispiel: Schnittmenge

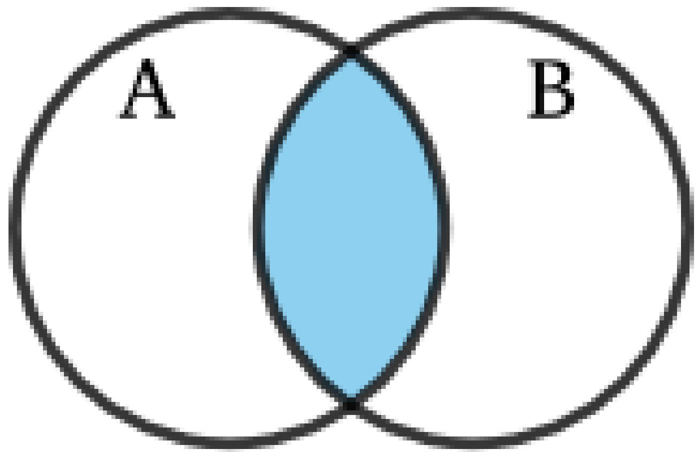


# Beispiel: Schnittmenge

A = Menge der durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen bis 20,

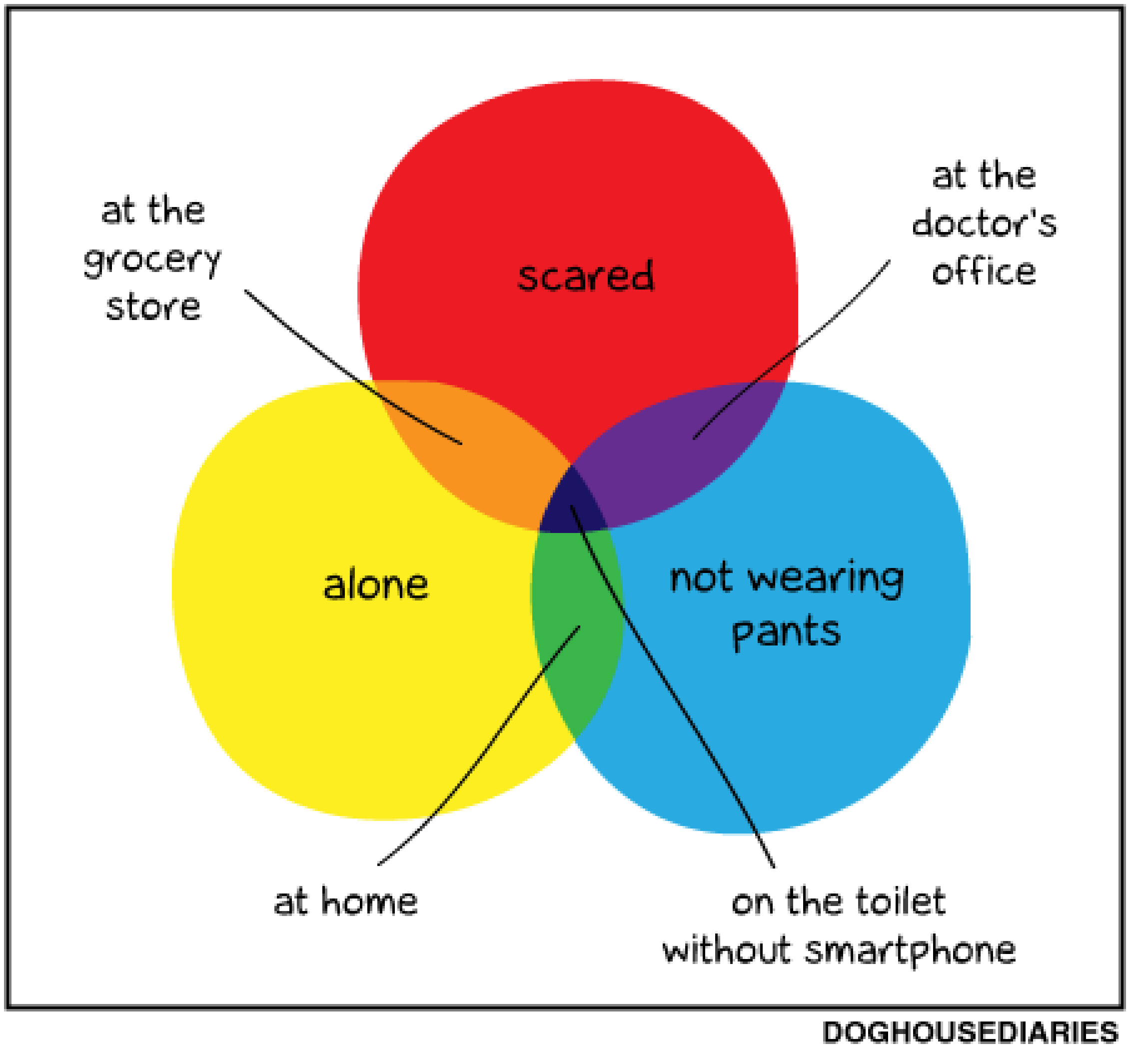
B = Menge der durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen bis 20.

Dann ist $A \cap B$ die Menge der durch 15 teilbaren natürlichen Zahlen.




$A \cap B$

# Beispiel: Schnitt dreier Mengen

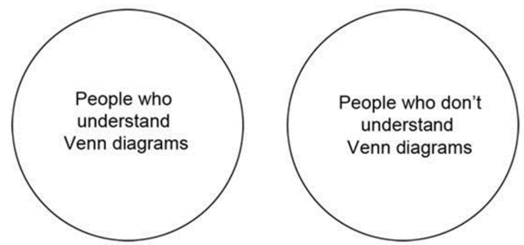


# Disjunkte Mengen

Zwei Mengen heißen **disjunkt** (oder auch **elementfremd**), wenn sie kein Element gemeinsam haben, d. h. falls $A \cap B = \{\ \}$ gilt.

**Beispiele:**

(a) Siehe Venn-Diagramm:




(a) Sei $C$ die Menge der Mitglieder der CDU, $S$ die Menge der Mitglieder der SPD. Dann sind $C$ und $S$ disjunkte Mengen.

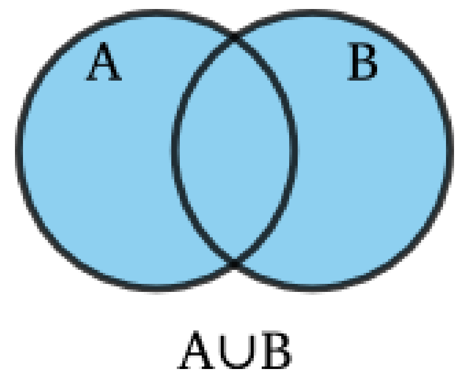
(b) Die Menge der durch $4$ teilbaren Zahlen und die Menge der Primzahlen sind disjunkt.

# Vereinigungsmenge

In der **Vereinigungsmenge $A \cup B$** zweier Mengen A und B liegen genau die Elemente, die in A oder in B liegen:

$$A \cup B = \{m \mid m \in A \vee m \in B\}.$$

Darstellung im Venn-Diagramm:



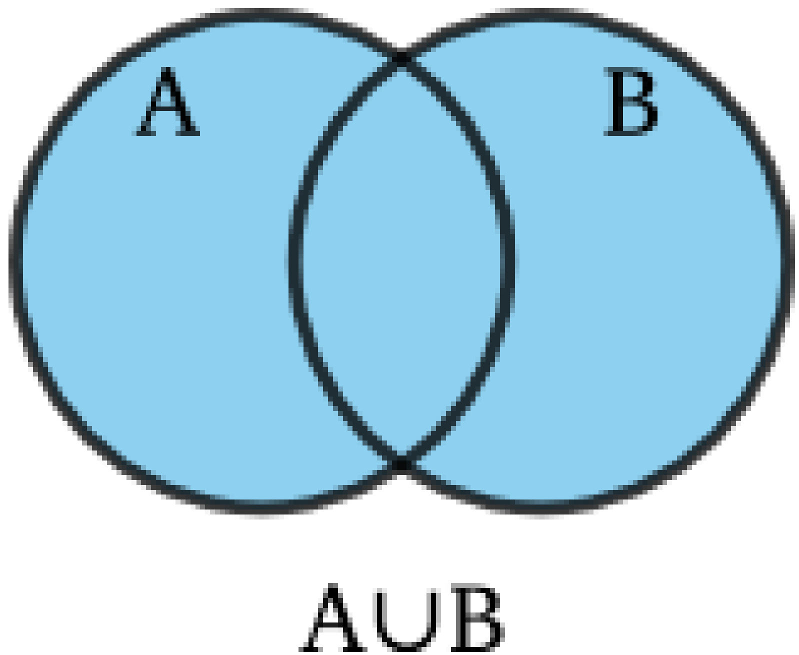

**Beispiel:** A = Menge der Biologiestudenten, B = Menge der Mathematikstudenten. Dann ist $A \cup B$ die Menge der Studenten, die Bio oder Mathe (oder beides!) studieren.

# Beispiel

A = Menge der geraden natürlichen Zahlen,

B = Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

Dann ist $A \cup B = \mathbf{N}$.



# Übung

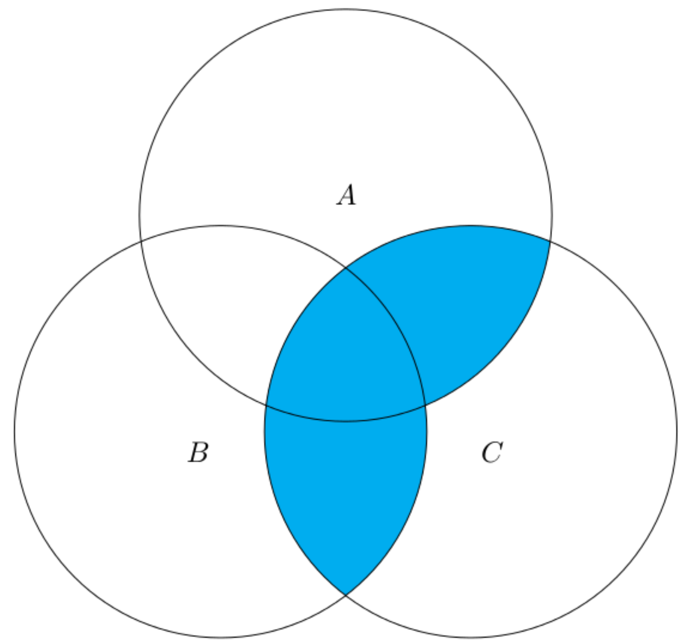
Sei $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ und $B = \{0, 3, 6, 9\}$. Bestimmen Sie

(a) $A \cap B$

(b) $A \cup B$

# Übung

Finden Sie einen Ausdruck, der den markierten Bereich beschreibt.

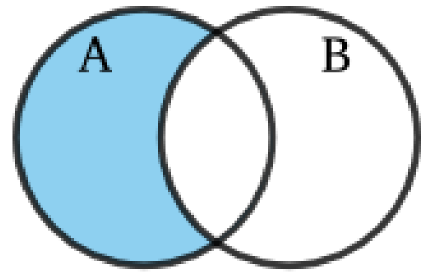


# Differenzmenge

In der **Differenzmenge A \ B** („A ohne B“) zweier Mengen A und B liegen genau die Elemente, die in A, aber nicht in B liegen:

$$A \setminus B = \{m \mid m \in A \wedge m \notin B\}.$$

Darstellung im Venn-Diagramm:



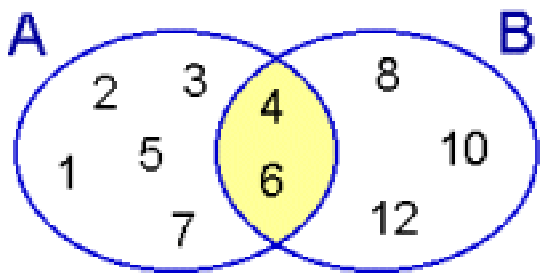

$A \setminus B$

**Beispiele:** (a) {rot, blau, gelb} \ {grün, weiß, rot} = {blau, gelb}

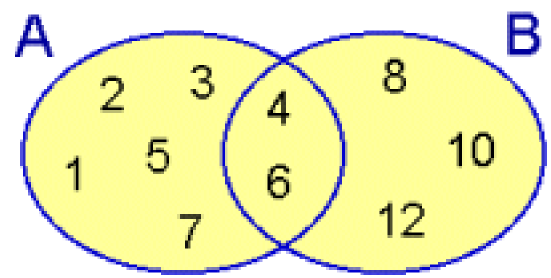
(b) **Z** \ Menge der geraden Zahlen = Menge der ungeraden Zahlen

**Bemerkung:** Man darf A \ B auch dann bilden, wenn B keine Teilmenge von A ist.

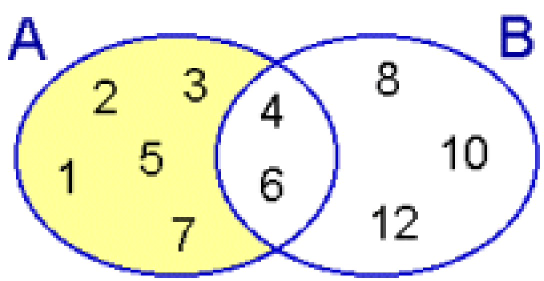
# Beispiele



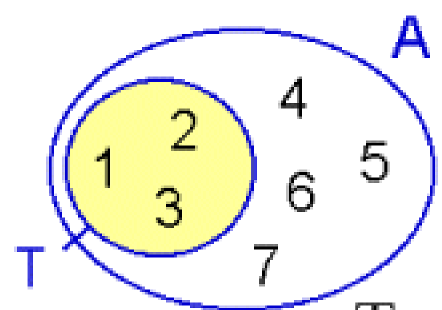

$A \cap B$




$A \cup B$




$A \setminus B$




$T \subseteq A$

# Übung

Sei $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ und $B = \{0, 3, 6, 9\}$. Bestimmen Sie

(a) $A \setminus B$

(b) $B \setminus A$

(c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

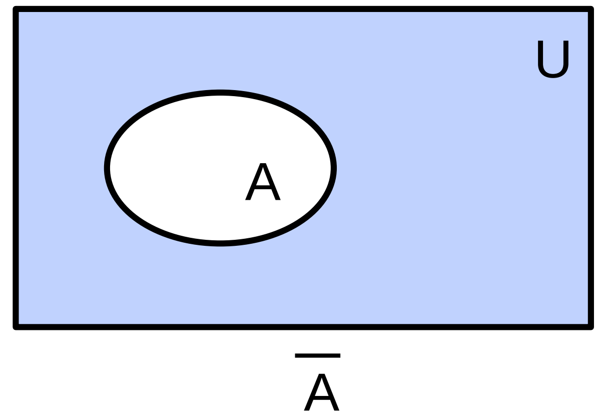
(d) $(A \cap B) \setminus (A \cup B)$

# Komplement einer Menge

Wenn die Menge A eine Teilmenge einer **Grundmenge U** (**Universum**) ist, so nennt man die Differenz $U \setminus A$ das **Komplement** von $A$ in $U$. Wir schreiben dafür

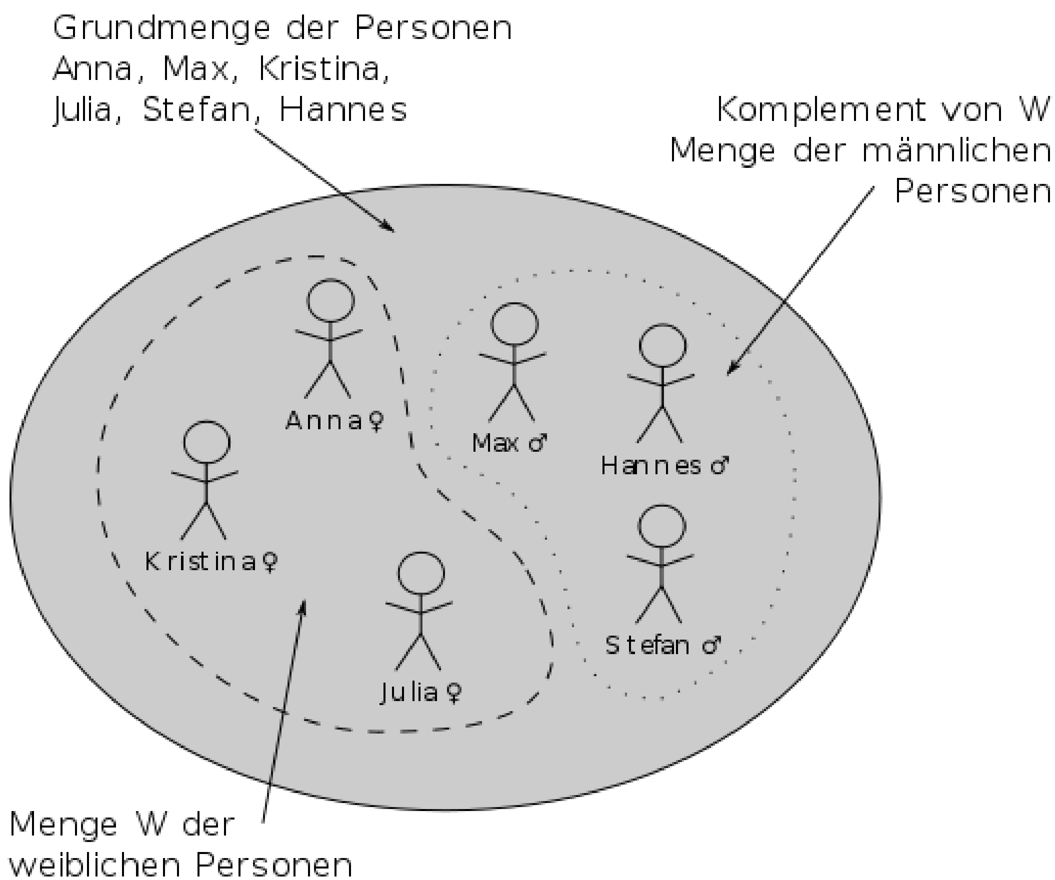
$$\overline{A}\,.$$

Darstellung im Venn-Diagramm:




**Beispiel:** Das Komplement von $A = \{2, 4, 6\}$ in der Grundmenge $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ist $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.

# Beispiel


Grundmenge der Personen
Anna, Max, Kristina,
Julia, Stefan, Hannes
Komplement von W:
Menge der männlichen
Personen
Anna ♀
Max ♂
Hannes ♂
Kristina ♀
Julia ♀
Stefan ♂
Menge W der
weiblichen Personen

# Mengen und Logik

Seien A und B Teilmengen einer Grundmenge U („Universum“).

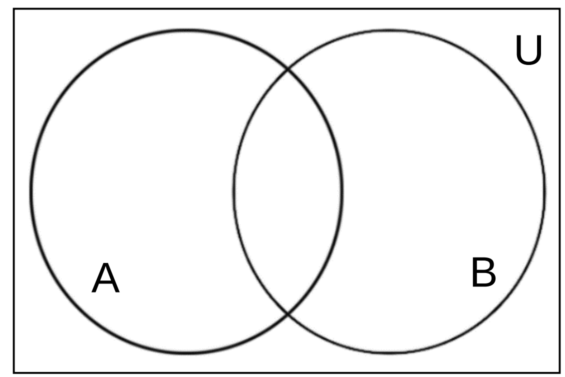
Sämtliche Mengenoperationen werden letztlich auf Logikoperationen zurückgeführt:

Schnitt: $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Vereinigung: $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$

Differenz: $A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$

Komplement: $\overline{A} = \{x \in U \mid \neg(x \in A)\}$



# De Morgansche Gesetze für Mengen

Da die Mengenoperationen

$\cap$, $\cup$ und $\overline{\phantom{x}}$

auf die logischen Verknüpfungen

$\wedge$, $\vee$ bzw. $\neg$

zurückgeführt werden, können wir auch die Gesetze der Aussagenlogik auf Mengen übertragen.

**Satz** (de Morgan). Seien A und B Teilmengen einer Menge U. Dann gilt

(a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (erstes de Morgansches Gesetz).

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (zweites de Morgansches Gesetz).

# Beweis

(a) $$\overline{A \cap B} = \{x \in U \mid \neg(x \in A \cap B)\}$$

$$= \{x \in U \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\}$$

1. de Morgansches Gesetz der *Logik*

$$= \{x \in U \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\}$$

$$= \{x \in U \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\}$$

$$= \overline{A} \cup \overline{B}$$

# Rechengesetze für Mengen

Auch die weiteren aussagenlogischen Rechengesetze der Booleschen Algebra lassen sich so direkt auf Mengen übertragen.

**Satz.** Für alle Teilmengen A, B, C von U gelten die folgenden Gesetze:

(a) Kommutativgesetze: $A \cap B = B \cap A$ und $A \cup B = B \cup A$.

(b) Assoziativgesetze: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(c) Distributivgesetze: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

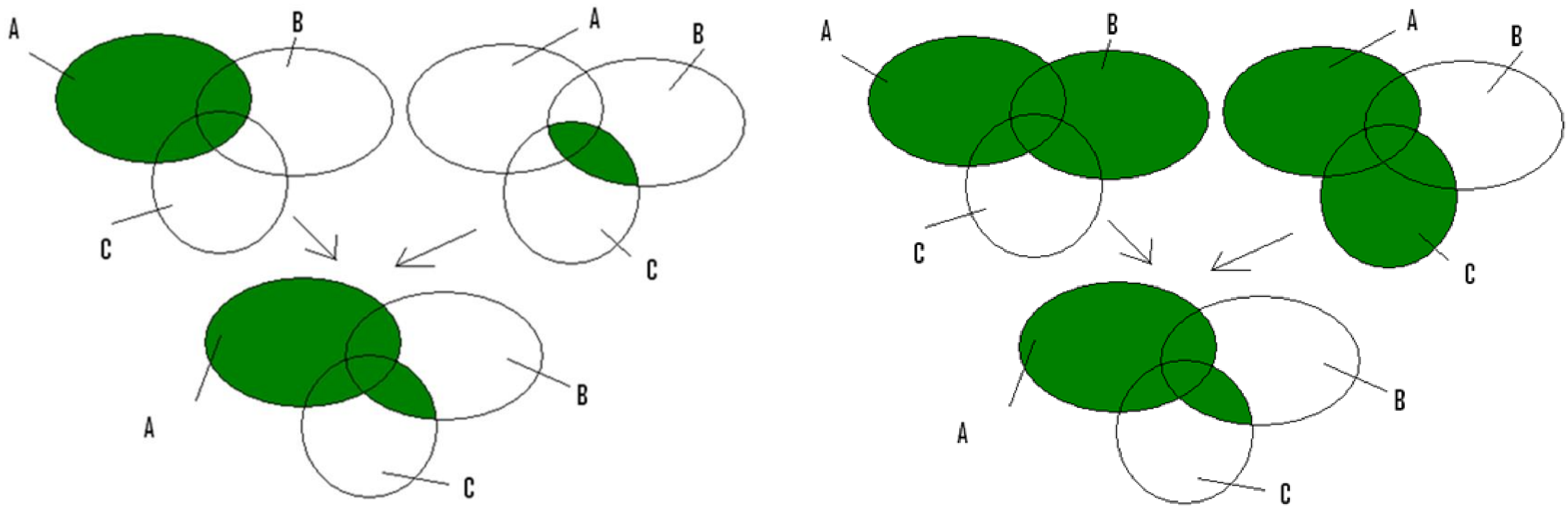
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(d) Existenz neutraler Elemente: $U \cap A = A$ und $\emptyset \cup A = A$.

(e) Existenz des Komplements: $A \cap \overline{A} = \emptyset$ und $A \cup \overline{A} = U$.

# Rechengesetze und Venn-Diagramme

Mit Venn-Diagrammen kann man Gesetze veranschaulichen,
z. B. das erste Distributivgesetz:

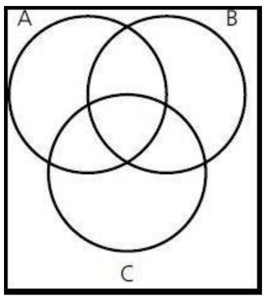


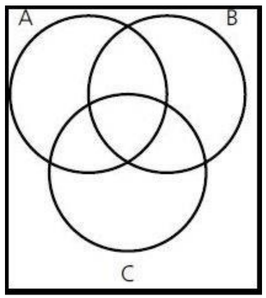

$A \cup (B \cap C) \quad = \quad (A \cup B) \cap (A \cup C)$

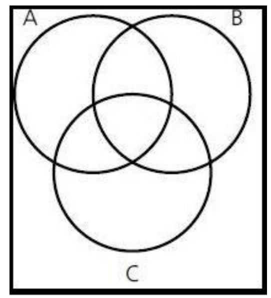
# Übung

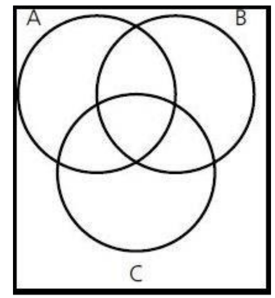
Veranschaulichen Sie mit Venn-Diagrammen folgendes Gesetz:

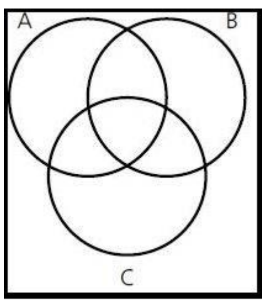
$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$$

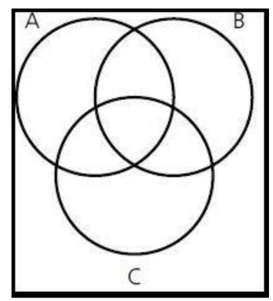


# Weitere Gesetze für Mengen

Analog zur Aussagenlogik gelten folgende Gesetze für Mengen.

**Satz.** Für alle Teilmengen A und B von U gelten die folgenden Gesetze:

(a) Absorptionsgesetze: $A \cap (A \cup B) = A$

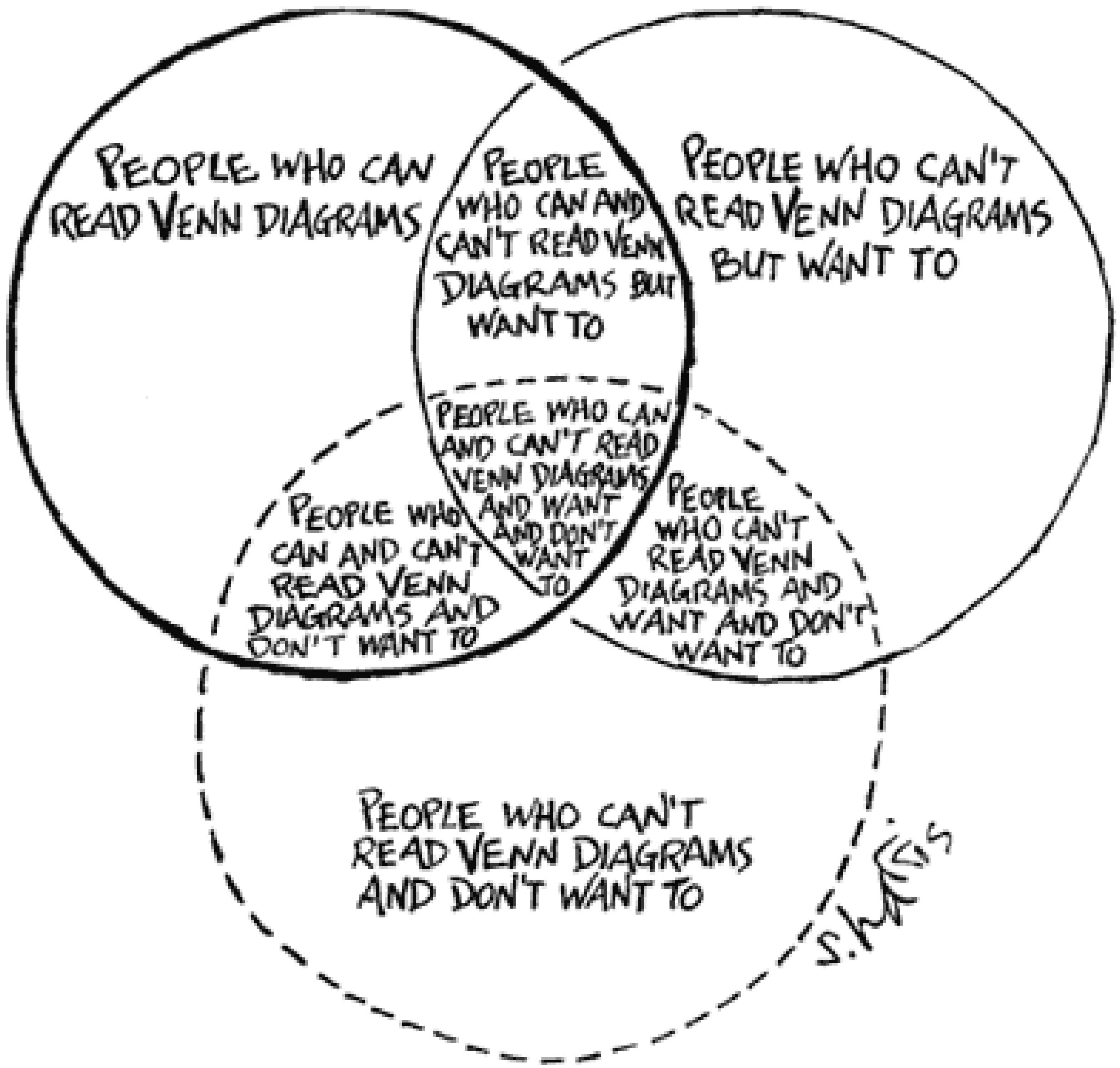
und $A \cup (A \cap B) = A$.

(b) Idempotenzgesetze: $A \cup A = A$

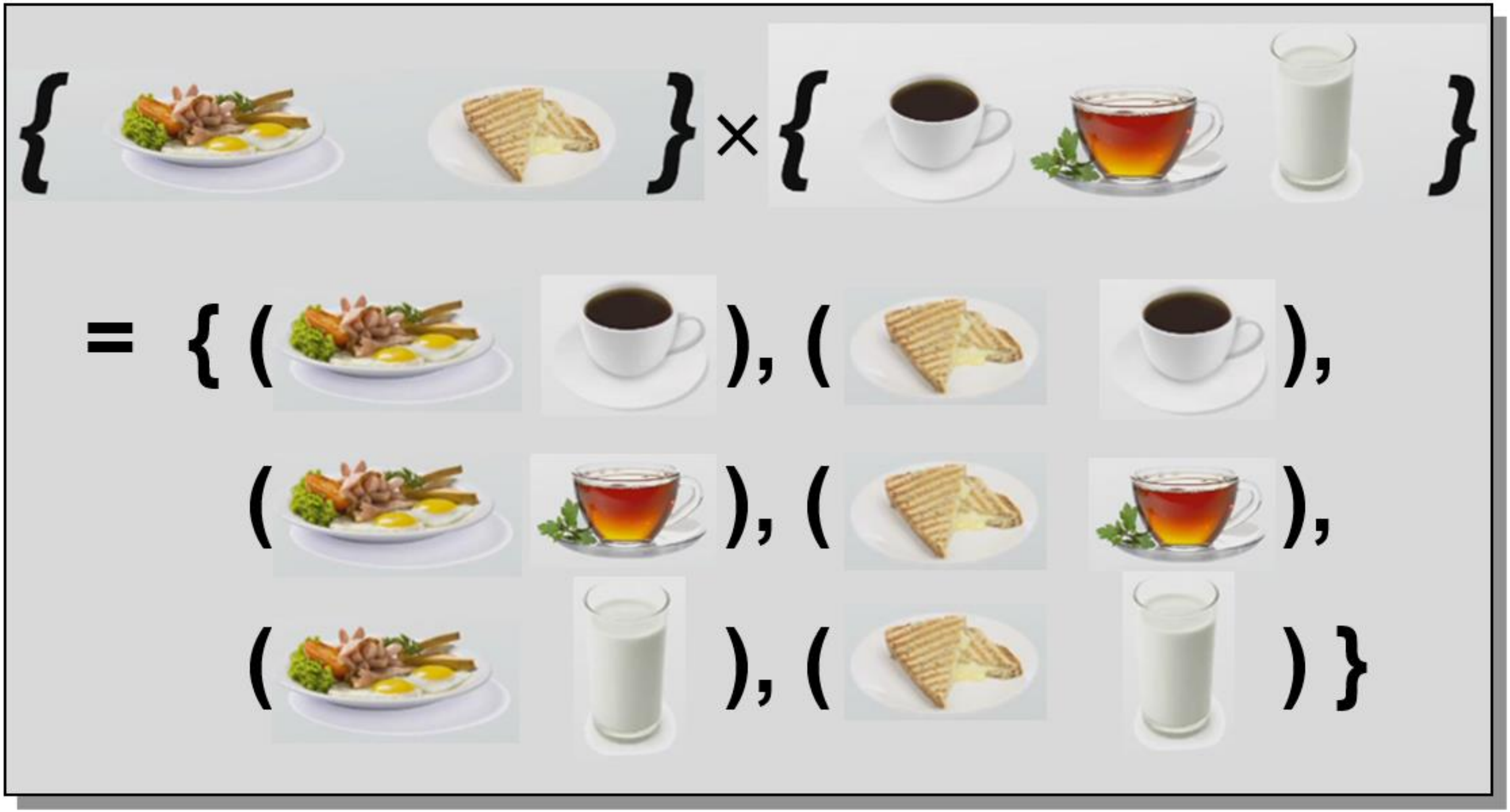
und $A \cap A = A$.

(c) Involutionsgesetz („doppeltes Komplement"):

$\overline{\overline{A}} = A$.


PEOPLE WHO CAN READ VENN DIAGRAMS
PEOPLE WHO CAN AND CAN'T READ VENN DIAGRAMS BUT WANT TO
PEOPLE WHO CAN'T READ VENN DIAGRAMS BUT WANT TO
PEOPLE WHO CAN AND CAN'T READ VENN DIAGRAMS AND WANT AND DON'T WANT TO
PEOPLE WHO CAN AND CAN'T READ VENN DIAGRAMS AND DON'T WANT TO
PEOPLE WHO CAN'T READ VENN DIAGRAMS AND WANT AND DON'T WANT TO
PEOPLE WHO CAN'T READ VENN DIAGRAMS AND DON'T WANT TO

# 2.2 Kartesisches Produkt



# Das kartesische Produkt

**Definition.** Für zwei nichtleere Mengen $A$ und $B$ definieren wir das **kartesische Produkt $A \times B$** (auch **Kreuzprodukt**, gesprochen: „A kreuz B“) als die Menge aller Paare, von denen der erste Teil aus $A$, der zweite aus $B$ kommt:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Außerdem definieren wir für jede Menge A ihr kartesisches Produkt mit der leeren Menge $\varnothing$ wie folgt:

$$A \times \varnothing = \varnothing = \varnothing \times A.$$

# 1. Beispiel

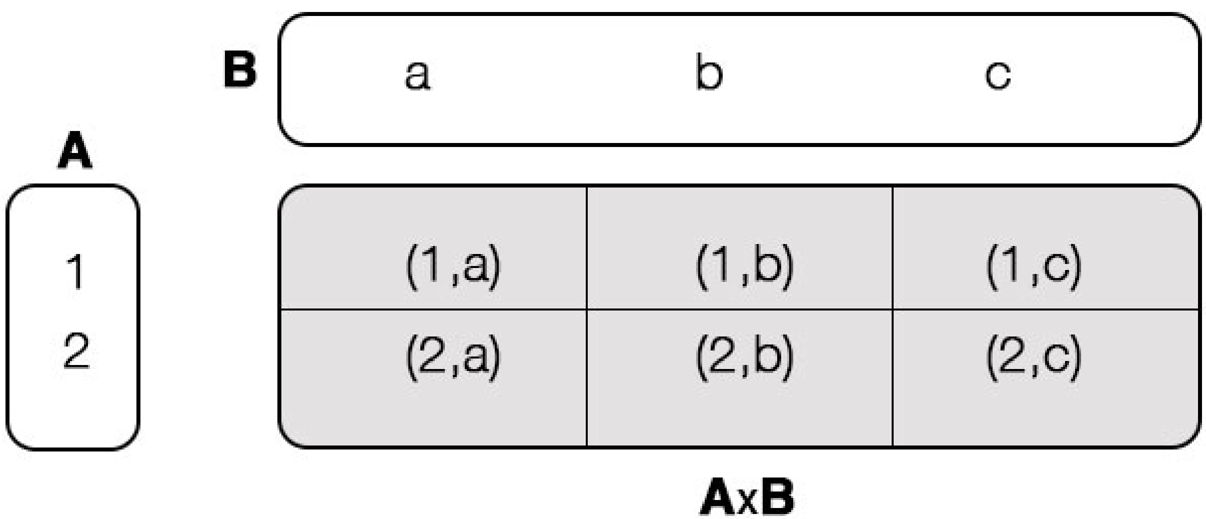
Beim Schachbrett hat jedes Feld eine eindeutige Adresse, etwa (E, 4) für Spalte E und Reihe 4. Das Schachbrett lässt sich darstellen durch das kartesische Produkt $S \times R$ mit

$$S = \{A, B, \ldots, H\} \quad \text{und} \quad R = \{1, 2, \ldots, 8\}.$$

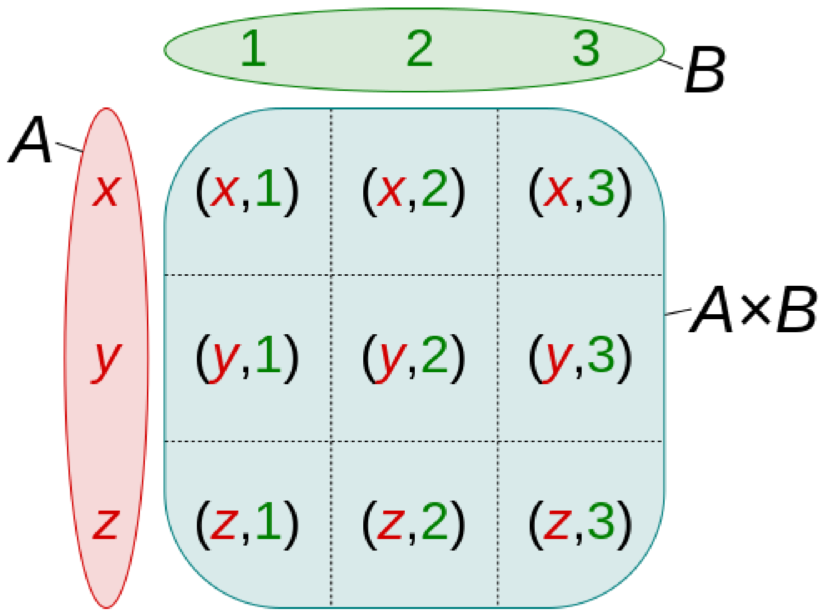
# 2. Beispiel

Für A = {1, 2} und B = {a, b, c} ist

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$



# Reihenfolge!




**Achtung:** Bei den Paaren kommt es auf die Reihenfolge an! Zum Beispiel ist das Paar $(1, x)$ kein Element der obigen Menge $A \times B$.

# Gesetze

Das kartesische Produkt ist nicht kommutativ und nicht assoziativ, d. h. i. A. gilt: $A \times B \neq B \times A$ und $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$.

Es gelten folgende Distributivgesetze bzgl. Vereinigung, Schnitt und Differenzbildung:

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

(d) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

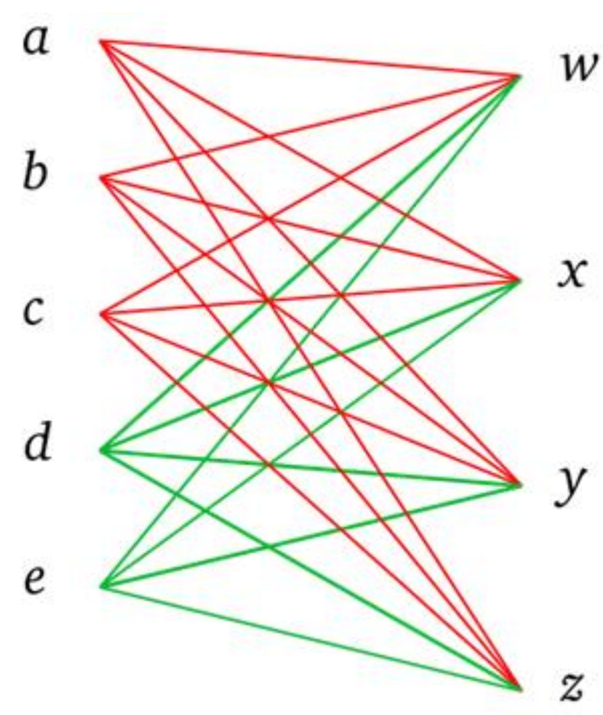
(e) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(f) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

# Beispiel

Veranschaulichung des ersten Distributivgesetzes

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$




mit

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{d, e\}$

$C = \{w, x, y, z\}$

# Übung

Bestimmen Sie das kartesische Produkt $A \times B$ für die Mengen

$A = \{\text{T-Shirt, Hemd, Pulli}\}$,

$B = \{\text{Lange Hose, Shorts}\}$.

# Verallgemeinerung auf mehr als zwei Mengen

# Das allgemeine kartesische Produkt

**Definition.** Seien $M_1, M_2, ..., M_n$ nichtleere Mengen, dann ist das **kartesische Produkt** dieser Mengen definiert durch:

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(m_1, m_2, ..., m_n) \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2, ..., m_n \in M_n\}$$

Die Elemente von $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ heißen **n-Tupel**. Statt 2-Tupel sagt man **Paar**, statt 3-Tupel sagt man **Tripel**.

Wenn (mind.) eine der Mengen $M_i$ die leere Menge $\emptyset$ ist, so ist das kartesische Produkt ebenfalls die leere Menge $\emptyset$.

# Beispiele

(a) Seien He, Ho, S die Mengen der Hemden, Hosen und Schuhen von Professor X. Dann beschreibt die Menge

$$He \times Ho \times S$$

die Möglichkeiten von Professor X, sich zu kleiden.

(b) Für $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ und $C = \{x, y\}$ ist

$$\begin{aligned} A \times B \times C = \{ & (1,a,x), (1,a,y), (1,b,x), (1,b,y), \\ & (2,a,x), (2,a,y), (2,b,x), (2,b,y), \\ & (3,a,x), (3,a,y), (3,b,x), (3,b,y) \}. \end{aligned}$$

# $A^n$

Für das n-fache kartesische Produkt einer Menge A mit sich selbst, schreiben wir auch

$$\mathbf{A^n} = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A.}_{\text{n Faktoren}}$$

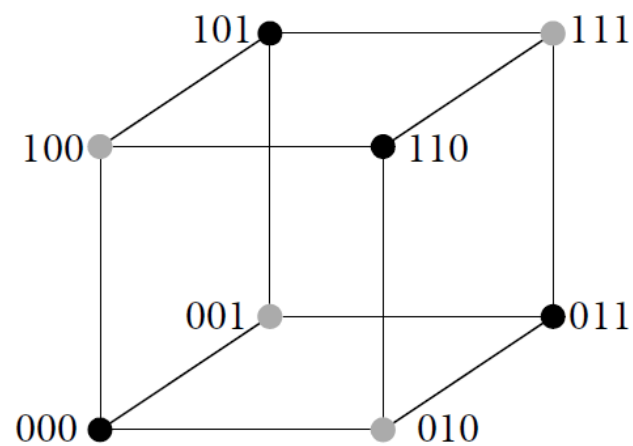
**Beispiel:** Für A = {0, 1} ergibt sich

$$\begin{aligned} A^3 &= A \times A \times A \\ &= \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\} \end{aligned}$$

# Anwendung: Codierungstheorie

Die Menge $\{0,1\}^3$ aller binären Tripel findet bei **fehlererkennenden Codes** eine Anwendung:

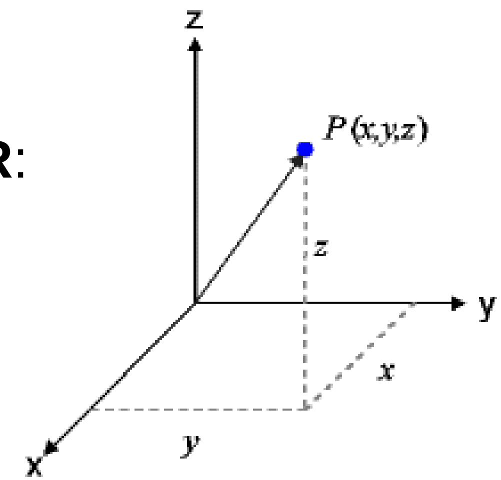
Die Punkte sind verbunden, wenn sie sich durch genau ein Bit unterscheiden.




Die schwarzen Punkte sind Elemente des Codes. Ein einzelner Bitfehler führt zu einem grauen Punkt (kein Element des Codes), wird also immer erkannt.

# $\mathbf{R}^3$

Der dreidimensionale Raum $\mathbf{R}^3$ besteht aus dem 3-fachen kartesischen Produkt der reellen Zahlen **R**:




$$\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{R}\}.$$

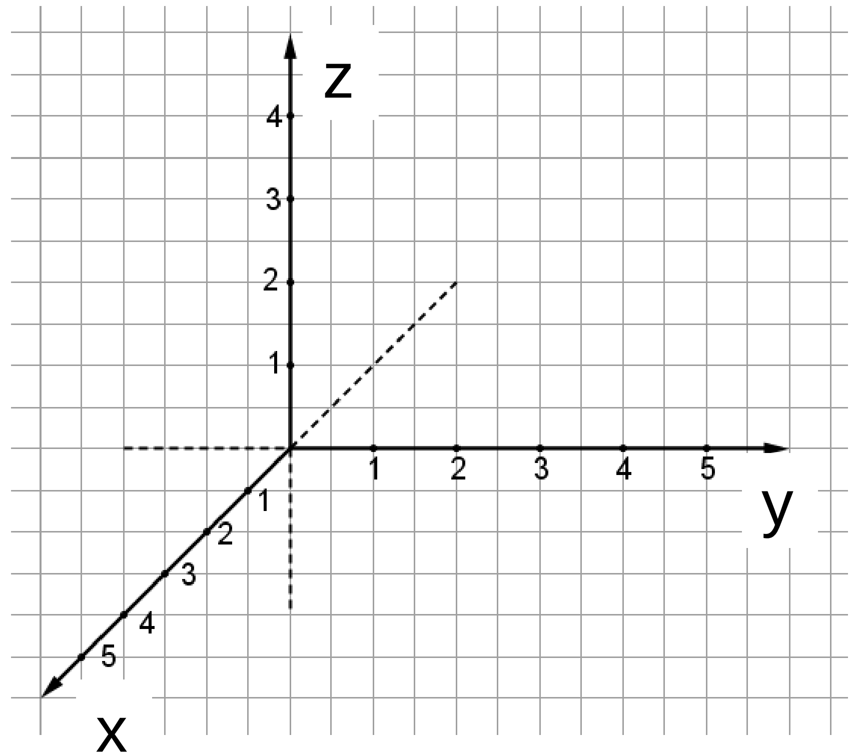
Die 3-Tupel (x, y, z) sind die 3-dimensionalen kartesischen Koordinaten.

Die Bezeichnung „kartesisch” geht auf **René Descartes** (1596 - 1650) zurück, der Koordinaten in der Geometrie eingeführt hat und somit die Analytische Geometrie begründet hat.

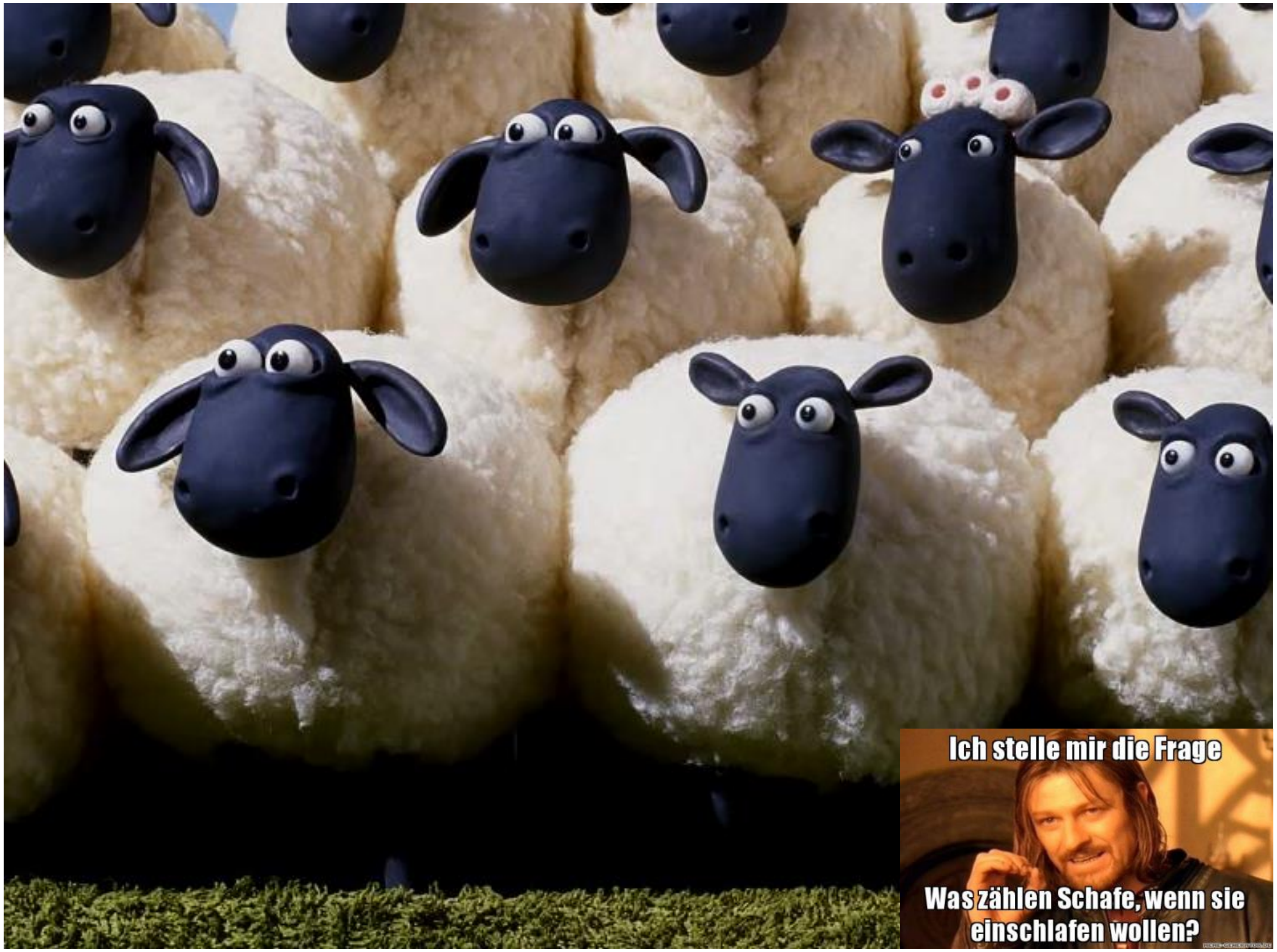
# Übung

Was ergibt das folgende kartesische Produkt dreier reeller Intervalle?

$$[0, 3] \times [0, 5] \times [0, 2]$$



# 2.3 Zählformeln



# Mächtigkeiten

Sei $M$ eine Menge. Wir bezeichnen die Anzahl der Elemente von $M$ mit **$|M|$**. Diese Zahl heißt **Mächtigkeit** (oder **Kardinalität**) von $M$.

**Beispiele:**

(a) $|\{0,1,2,3\}| = 4$

(b) $|\emptyset| = 0$

(c) $|\{1, \{2, 3\}\}| = 2$ (Achtung!)

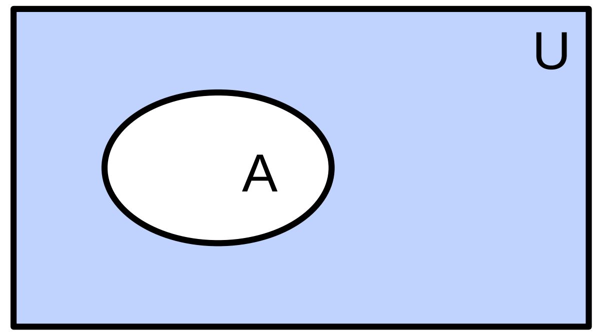
Eine Menge wird **endlich** genannt, wenn ihre Mächtigkeit eine natürliche Zahl ist. Sonst heißt die Menge **unendlich**. Wenn $M$ eine unendliche Menge ist, so schreiben wir $|M| = \infty$.

**Beispiele:** $|\mathbf{N}| = \infty$ und $|\mathbf{R}| = \infty$

# Mächtigkeit des Komplements

**Satz.** Sei U ein endliches Universum, und sei A eine Teilmenge von U. Dann gilt für die Mächtigkeit des Komplements von A:

$$|\overline{A}| = |U \setminus A| = |U| - |A|.$$




$\overline{A}$

**Beispiel:** Anzahl der männlichen Einwohner der Bundesrepublik = Gesamtbevölkerungszahl minus Anzahl der Frauen.

# Summenformel

**Summenformel.** Seien A und B endliche Mengen. Dann gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

**Folgerung.** Wenn A und B disjunkt (elementfremd) sind, so gilt sogar

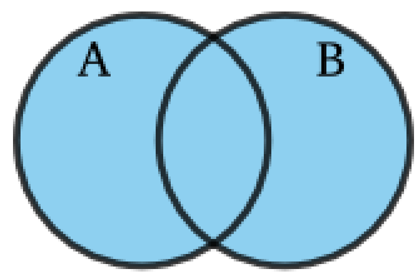
$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

**Beispiel:** Für die Anzahl der Studierenden, die Mathematik studieren oder Sport studieren, muss man wissen,

(a) wie viele Leute Mathematik studieren,

(b) wie viele Sport studieren

*und* (c) wie viele Mathematik und Sport studieren.



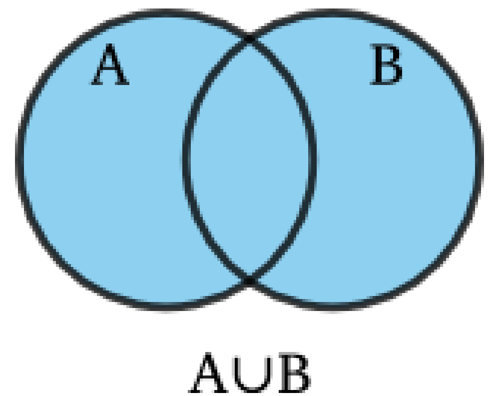

A∪B

# Beweis der Summenformel

**Beweisidee:** Die Elemente von $A \cap B$ werden bei $|A| + |B|$ doppelt gezählt, müssen also einmal wieder abgezogen werden.

**Beweis.** Die Menge $A \cup B$ setzt sich aus drei disjunkten Teilmengen zusammen:

$$A \setminus B,\ A \cap B,\ B \setminus A.$$




Also gilt

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| \\ &= (|A| - |A \cap B|) + |A \cap B| + (|B| - |A \cap B|) \\ &= |A| + |B| - |A \cap B|. \end{aligned}$$

# Übung

In einer Seminargruppe spielen 20 Personen gerne Computerspiele und 10 Personen gerne Fußball, wobei 5 beides gerne machen.

Wie viele Personen sind in der Seminargruppe?

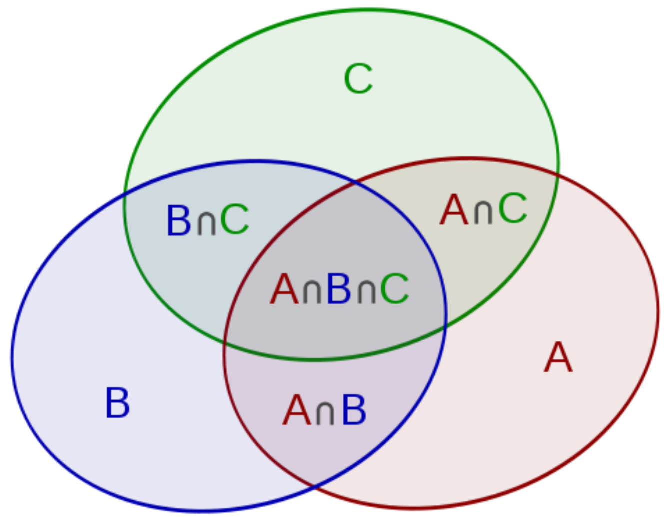
# Summenformel für 3 Mengen

Die Summenformel für *drei* endliche Mengen A, B, C lautet:

$$|A \cup B \cup C| =$$

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

**Beweisidee:** Wir machen uns am Venn-Diagramm klar, dass jedes Element genau einmal gezählt wird.



# Die Siebformel

Wir wollen die Summenformel auf die Vereinigung *beliebig vieler* Mengen verallgemeinern.

**Siebformel.** Seien $A_1, A_2, ..., A_n$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \pm ...$$

Dabei erhält man $\alpha_i$ auf folgende Weise:

(a) Man bildet den Durchschnitt von je $i$ der Mengen $A_1, A_2, ..., A_n$.

(b) Man bestimmt die Mächtigkeit dieser Durchschnitte.

(c) Man addiert diese Mächtigkeiten.

Die Siebformel heißt auch **Prinzip von Inklusion und Exklusion**.

# Übung

Wenden Sie die Siebformel auf vier Mengen an.

$$|A \cup B \cup C \cup D| =$$

# Die Produktformel

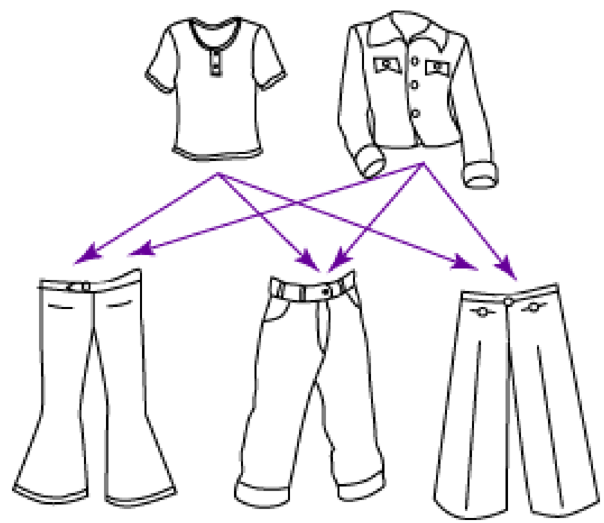
Die Mächtigkeit des kartesischen Produkts ergibt sich sehr einfach.

**Produktformel.** Für je zwei Mengen $A$ und $B$ gilt

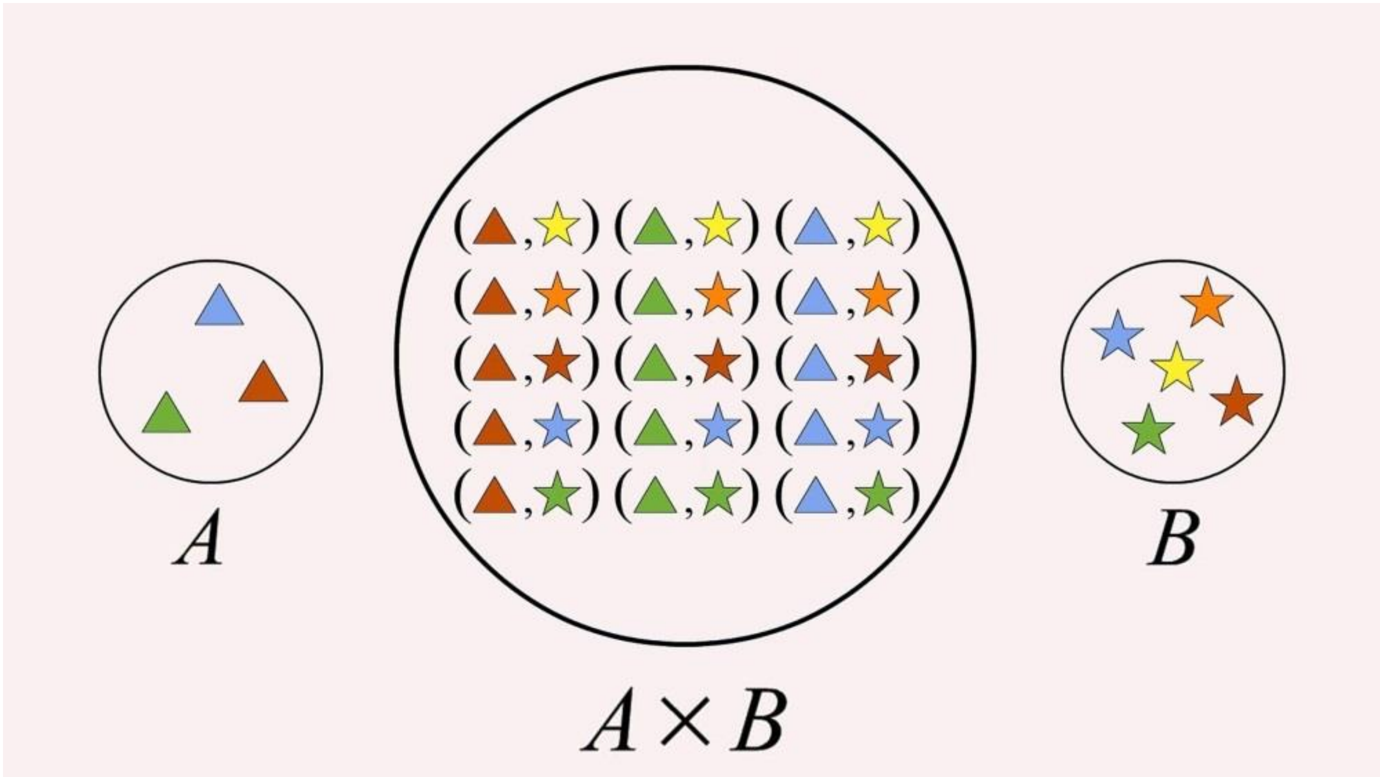
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

**Beispiel:** Mit 2 Hemden und 3 Hosen hat man 6 Möglichkeiten sich anzuziehen:

$$\begin{aligned} &|\,\text{Hemden} \times \text{Hosen}\,| \\ &= |\,\text{Hemden}\,| \cdot |\,\text{Hosen}\,| \\ &= 2 \cdot 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$



# Beispiel




Aus |A| = 3 und |B| = 5 folgt: |A × B| = 3 · 5 = 15.

# Beweis der Produktformel

**Beweis.** Die Menge $A \times B$ besteht aus allen Paaren $(a, b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$. Wir müssen die Anzahl dieser Paare berechnen.

Für die erste Komponente (also für a) haben wir genau $|A|$ Möglichkeiten zu Auswahl.
Für jede dieser Möglichkeiten können wir die zweite Komponente b aus der Menge B ohne jede Einschränkung wählen. Dafür gibt es $|B|$ Möglichkeiten.

Um ein Paar $(a, b)$ zu wählen, gibt es insgesamt also genau $|A| \cdot |B|$ Möglichkeiten. □

# Verallgemeinerte Produktformel

Die Produktformel kann man auf das kartesische Produkt beliebig vieler Mengen verallgemeinern.

**Satz.** Seien $M_1, M_2, ..., M_n$ endliche Mengen. Dann ist

$$|M_1 \times M_2 \times ... \times M_n| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot ... \cdot |M_n| .$$

**Beispiele.** (a) Mit 8 Hemden, 3 Hosen und 4 Paar Schuhen, kann man sich auf $8 \cdot 3 \cdot 4 = 96$ Weisen kleiden.

(b) Bei Geldausgabeautomaten besteht die Geheimzahl (PIN) aus vier Dezimalstellen. Wie viele PINs gibt es, bei denen die erste Stelle nicht 0 ist? Antwort: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

# Übung

$K \times Z \times S$ beschreibe eine Menge von Schlüsselwörtern, wobei

$$K = \{a, b, c, \ldots, z\},\ Z = \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \text{ und } S = \{\%, \#\}.$$

Wie viele solche Schlüsselwörter gibt es?

# Binäre n-Tupel

Eine **binäres n-Tupel** ist eine n-Tupel $(b_1, b_2, ..., b_n)$ mit $b_i \in \{0, 1\}$.

Wie groß ist die Anzahl aller binären n-Tupel?

**Beispiel:** Die binären 3-Tupel sind (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1),(1,1,0), (1,1,1), also gibt es genau 8 binäre 3-Tupel.

**Satz.** Die Anzahl der binären n-Tupel ist gleich $2^n$.

**Beweis.** Die Menge der binären n-Tupel ist gleich dem n-fachen kartesischen Produkt der Menge $B = \{0, 1\}$. Mit der Produktformel ergibt sich: $|B^n| = |B \times B \times ... \times B| = |B| \cdot |B| \cdot ... \cdot |B| = |B|^n = 2^n$.

# Potenzmenge

**Zur Erinnerung:** Eine Menge $M'$ ist eine **Teilmenge** einer Menge M, falls jedes Element von $M'$ auch ein Element von $M$ ist. Wir schreiben: $M' \subseteq M$.

„Triviale“ Teilmengen: Jede Menge hat sich selbst und die **leere Menge** $\{\,\}$ (auch $\emptyset$) als Teilmenge.

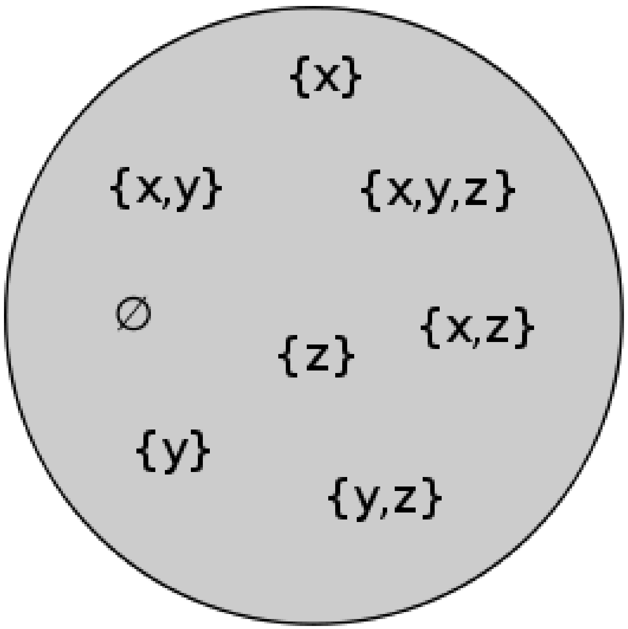
**Definition.** Die Menge aller Teilmengen von $M$ heißt **Potenzmenge** **P(M)** von M.

**Beispiel:** Die Potenzmenge der Menge $M = \{a, b\}$ ist

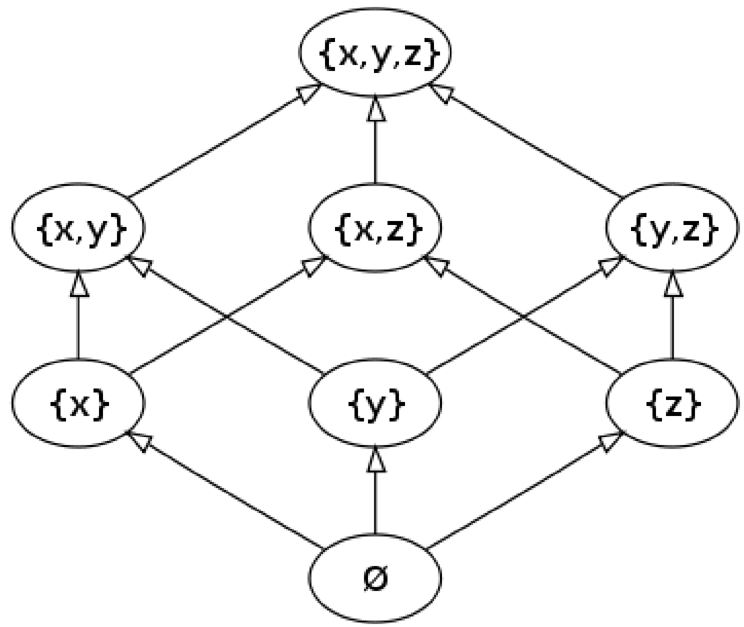
$$P(M) = \{\, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \,\}.$$

# Beispiel

$\mathcal{P}(\{x, y, z\})$




Potenzmenge von {x, y, z}




Teilmengen im Hasse-Diagramm

# Mächtigkeit der Potenzmenge

**Satz.** Jede n-elementige Menge M hat genau $2^n$ Teilmengen, d. h.

$$| P(M) | = 2^n.$$

**Beweis.** Wir nummerieren die Elemente von M beliebig:
$M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$. Sei M' eine Teilmenge von M. Dann ordnen wir M' wie folgt ein binäres n-Tupel $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ zu (und umgekehrt):

$$b_i = 1, \text{ falls } m_i \in M' \text{ und } b_i = 0 \text{ sonst.}$$

[ **Beispiel:** M = {a, b, c}. Dann gehören folgende Teilmengen und 3-Tupel zusammen: ∅ {a} {b} {c} {a, b} {b, c} {a, c} {a, b, c} ]

| ∅ | {a} | {b} | {c} | {a, b} | {b, c} | {a, c} | {a, b, c} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 1 0 0 | 0 1 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 0 1 1 | 1 0 1 | 1 1 1 |

Da es $2^n$ binäre n-Tupel gibt, gibt es auch genau $2^n$ Teilmengen von M.

# Binomialzahlen

**Definition.** Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge wird mit $\binom{n}{k}$ („n über k“) bezeichnet; diese Zahlen heißen **Binomialzahlen**.

**Beispiele:**

$\binom{n}{0}$ = 1 (jede Menge hat genau eine 0-elem. Teilmenge, nämlich {})

$\binom{n}{n}$ = 1 (jede n-elementige Menge hat nur eine n-elementige Teilmenge, nämlich sich selbst)

$\binom{n}{1}$ = n (die Teilmengen der Mächtigkeit 1 sind genau die n Elemente)

$\binom{4}{2}$ = 6 (die 4-elementige Menge {a, b, c, d} hat sechs 2-elementige Teilmengen: {a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {c, d})

# Rekursionsformel für Binomialzahlen

Wie kann man die Binomialzahlen ausrechnen? 1. Methode:

**Rekursionsformel für Binomialzahlen.** Seien $k$ und $n$ natürliche Zahlen mit $1 \leq k \leq n$. Dann gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

**Beispiel:**

$$\binom{6}{2} = \binom{5}{2} + \binom{5}{1} = \binom{4}{2} + \binom{4}{1} + \binom{5}{1} = 6 + 4 + 5 = 15.$$

# Beweis der Rekursionsformel

Sei M eine Menge mit $n$ Elementen. Sei m ein Element von M.

Wir teilen die k-elementigen Teilmengen von M in zwei Klassen ein:

1. Klasse: die, die m nicht enthalten. Jede dieser Teilmengen ist eine k-elementige Teilmenge der (n–1)-elementigen Menge M \ {m}. Also gibt es davon genau $\binom{n-1}{k}$ Stück.

2. Klasse: die k-elem. Teilmengen, die m enthalten. Sei M' eine Teilmenge aus dieser Klasse. Wir entfernen nun m aus M' und aus M. Dann ist M' \ {m} eine (k–1)-elem. Teilmenge der (n–1)-elem. Menge M \ {m}. Umgekehrt kann man jede (k–1)-elem. Teilmenge von M \ {m} durch Hinzufügen von m zu einer Teilmenge der Klasse 2 ergänzen. Somit ist die Anzahl der Teilmengen in der Klasse 2 gleich $\binom{n-1}{k-1}$.

Durch Addition der beiden Anzahlen ergibt sich die Formel. □

# Explizite Formel für Binomialzahlen

2. Berechnungsmethode für Binomialzahlen:

**Explizite Formel für die Binomialzahlen.** Seien $k$ und $n$ natürliche Zahlen mit $0 \leq k \leq n$. Dann gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

**n!** („**n Fakultät**”) ist definiert als $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$.

**Beispiel:** $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

**Beispiel** zur expliziten Formel: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6.$

# Möglichkeiten beim Lotto

**Beispiel.** Beim Lotto „6 aus 49” werden sechs der Zahlen 1, 2, ..., 49 gezogen, wobei es auf die Reihenfolge nicht ankommt.

In unserer Sprache heißt das: Es wird eine 6-elementige Teilmenge der Menge $\{1, 2, ..., 49\}$ gezogen.

Dafür gibt es nach Definition genau $\binom{49}{6}$ Möglichkeiten.

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13.983.816.$$

Die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige ist also

1/13.983.816 = 0,000000071…

# Übung

Berechnen Sie $\binom{4}{3}$,

(a) indem Sie alle 3-elementigen Teilmengen einer 4-elementigen Menge {a, b, c, d} auflisten,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

(b) indem Sie die explizite Formel anwenden,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

(c) indem Sie die rekursive Formel anwenden.


Unterhaltsames über die „Neue Mathematik“: http://www.spiegel.de/spiegel/print/d-41784469.html