Übung Was beobachten Sie beim Messen der Qubits

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \ ?$$

Nach dem Messen ergibt sich mit Wahrscheinlichkeit

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} \text{ der Zustand } |0\rangle$$

und mit Wahrscheinlichkeit

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} \text{ der Zustand } |1\rangle.$$

Analog: Mit Wahrscheinlichkeit

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

der Zustand $|0\rangle$ und mit Wahrscheinlichkeit

$$\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

der Zustand $|1\rangle$

$\longrightarrow$ Das Ergebnis ist unabhängig vom Vorzeichen der Amplitude.

Übung Zeige: Die Hadamard-Matrix ist unitär.

Wegen $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, d.h. symmetrisch und reelle Einträge, gilt $\overline{H} = H$ und $H^T = H$, also $H^+ = H$. Es genügt zu zeigen, dass H selbstinvers ist, also $H^2 = I_2$ gilt.

$$H^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Damit ist H unitär.

<u>Übung</u> Konstruieren Sie alle unitären Transformationen A, für die gilt

$$|0\rangle \xmapsto{A} \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle.$$

Wir wissen: Soll auf einem Qubit im Zustand $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ein Rechenschritt ausgeführt werden, so wird dies durch eine unitäre Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

beschrieben. Der Folgezustand $\alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle$ ergibt sich durch Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\beta \\ c\alpha + d\beta \end{pmatrix}.$$

In unserem Fall:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

Also gilt $a = \frac{1}{2}$, $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und b, d können "frei" gewählt werden, unter der Bedingung das die Matrix A <u>unitär</u> ist. D.h.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & d \end{pmatrix} \quad \text{und } A \text{ unitär.}$$

A unitär, d.h. $A^{+}A = I_2$, bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} & \frac{1}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}d \\ \frac{1}{2}\bar{b} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{d} & b\bar{b} + d\bar{d} \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich drei Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \frac{1}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}d = 0$$

$$\text{II.} \quad \frac{1}{2}\bar{b} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{d} = 0 \qquad \text{mit } b, d \in \mathbb{C}$$

$$\text{III.} \quad b\bar{b} + d\bar{d} = 1.$$

Wir wissen: $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ und Umformung liefert

I+II wird zu $\frac{1}{2}(b + \bar{b}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(d + \bar{d}) = 0$,

bzw. $\operatorname{Re}(b) + \sqrt{3}\operatorname{Re}(d) = 0$

III lässt sich schreiben als $|b|^2 + |d|^2 = 1$.

b, d liegen also auf dem Einheitskreis und die Realteile unterscheiden sich im Vorzeichen.

Wir folgern

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{it}, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

$$d = -\frac{1}{2}e^{it}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$