Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1 (Kolmogorov)
Richtig oder falsch? Falls ja, begründen Sie mit Hilfe der Kolmogorov-Axiome. Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel.

- $P(A \cup B|A) = 1$ (falls $P(A) > 0$).
- Aus $A \subsetneq B$ ($\subsetneq$ bedeutet "echte Teilmenge von") folgt $P(A) < P(B)$.
- Aus $P(A) < P(B)$ folgt $P(A|C) < P(B|C)$ (falls $P(C) > 0$)?
- Sind A und B unabhängig, sind auch $\bar{A}$ und B unabhängig.

a) $P(A \cup B|A) = 1$ (wenn $P(A)>0$) richtig

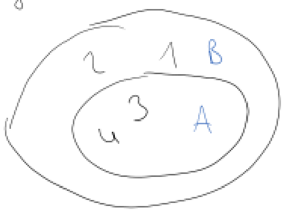
z.B. A = weiß ; B = Zahl $= P(B|A) + \underbrace{P(A|A)}_{=1}$

$\Rightarrow$ alle Werte von A sind in A oder B enthalten

$A = \{5, 6, ⛫, O\}$; $A \cup B = \{5, 6, ⛫, O, 7, 8\}$

b) $A \subsetneq B \Rightarrow P(A) < P(B)$ richtig

Bei einer echten Teilmenge hat die TM immer min. ein Element weniger und alle ihre Elemente sind in der Menge enthalten.



c) $P(A) < P(B) \Rightarrow P(A|C) < P(B|C)$ (wenn $P(C) > 0$) falsch

$m = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, X, Y, Z\}$ $\Rightarrow P(A) = 2$; $P(B) = 7 \Rightarrow P(A) < P(B)$

$A = \text{rot} = \{X, Y\}$ $\Rightarrow P(A|C) = 2$, $P(B|C) = 1 \Rightarrow \underline{P(A|C) > P(B|C)}$

$B = \text{weiß} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, Z\}$

$C = \text{Buchstaben} = \{X, Y, Z\}$

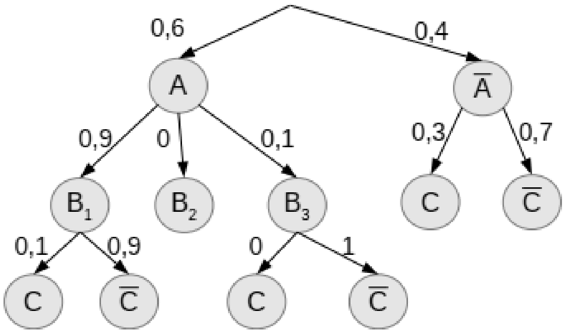
d) A u. B unabhängig, dann $\bar{A}$ und B unabhängig richtig

A = gerade Würfelzahl $\Rightarrow$ $\bar{A}$ = ungerade Würfelzahl

B = WZ > 3

Nur weil man andere Werte in einem unabhängigen System nimmt, werden sie dadurch nicht abhängiger.

Aufgabe 5.2 (Ereignisbäume)



Gegeben diesen Ereignisbaum, berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten. *Hinweis: Gemäß dem Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit (siehe Slides in Stud.IP) können Sie das Ereignis C in disjunkte Fälle zerlegen, die den Blättern von C entsprechen.*

- $P(A, B_1, \bar{C})$
- $P(C)$
- $P(A \cup C)$
- $P(\bar{C}, B_3 | A)$

2.

a) $P(A, B_1, \bar{C}) = 0{,}6 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}486$

b) $P(C) = P(A, B_1, C) + P(A, B_3, C) + P(\bar{A}, C)$

$= 0{,}6 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}054 + 0{,}12 = 0{,}174$

c) $P(A \cup C) = P(A) + P(\bar{A}, C) = 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}72$

d) $P(\bar{C}, B_3 | A) = 0{,}1 \cdot 1 = 0{,}1$

Aufgabe 5.3 (Wahrscheinlichkeitsbäume)

a) Bei einem Elfmeterschießen schießen nacheinander fünf Spieler einer Mannschaft. Wir definieren $B_1, B_2, ..., B_5$ (der 1./2./.../5. Schütze trifft). Generell trifft jeder Schütze mit 80% Wahrscheinlichkeit. Hat der vorherige Schütze aber verschossen, wächst der Druck auf seinen Nachfolger, und die Wahrscheinlichkeit dass dieser verschießt ist gegenüber der generellen Trefferwahrscheinlichkeit um 10% erhöht. Berechnen Sie $P(B_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3 \cap B_4 \cap B_5)$. *Achten Sie auf eine saubere Notation des Rechenwegs. Notieren Sie die formalen Wahrscheinlichkeiten, nicht nur Zahlenwerte!.*

5.3

a) $P(B_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3 \cap B_4 \cap B_5)$

$= \underbrace{0{,}8}_{\text{TREFFER (NORMAL)}} \cdot \underbrace{0{,}2}_{\text{TREFFER (NORMAL)}} \cdot \underbrace{0{,}3}_{\text{TREFFER (+10\%)}} \cdot \underbrace{0{,}6}_{\text{TREFFER (-20\%)}} \cdot \underbrace{0{,}8}_{\text{TREFFER (NORMAL)}}$

$= 0{,}02304$ //

b) Geben Sie formal die im Text enthaltenen Wahrscheinlichkeiten an, und leiten Sie einen möglichst vollständigen Ereignisbaum her. Verwenden Sie die Ereignisse C (Patient hat COVID-19), A (Patient hat Atembeschwerden) und F (Patient hat Fieber).
"In einem Krankenhaus stellen sich Patienten mit Grippe-Symptomen vor, manche haben COVID-19. Unter den COVID-19-Fällen haben 80% Atembeschwerden, 70% Fieber und 60% beides. 40% aller vorstelligen Patienten haben COVID-19. Für die anderen gilt: 75% sind frei von Atembeschwerden, haben aber zu 60% Fieber."
Anmerkung: Die Zahlen sind frei erfunden.

$\overbrace{P(A|C)}^{} \qquad = \overbrace{P(A,F|C)}^{}$

$0{,}8 \cdot P(C,A,F) = 0{,}6$

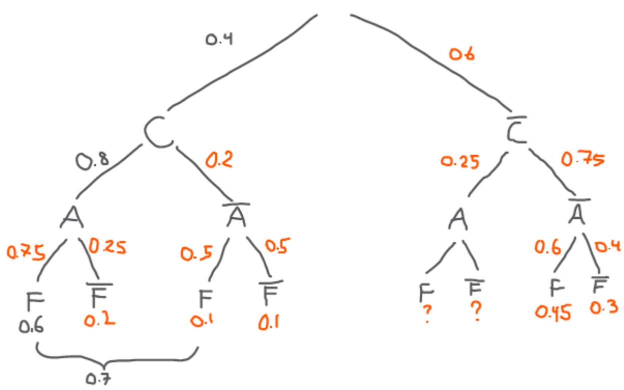
$P(F,A,C) = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

$P(F,\bar{A},C) = \underbrace{0{,}7 - 0{,}6} = 0{,}1$

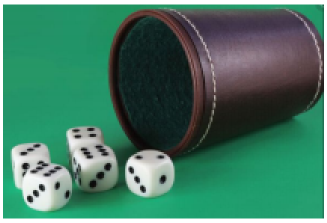
$P(F|C) - P(A,F|C)$

$P(F,A,C) \cdot P(\bar{A}|C) = 0{,}1$

$P(F,A,C) = \frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5$



c) Beim Kniffel hat man 3 Versuche um mit 5 Würfeln ein bestimmtes Ergebnis zu erzielen. Tom würfelt im ersten Versuch eine 2-3-4-6-6:



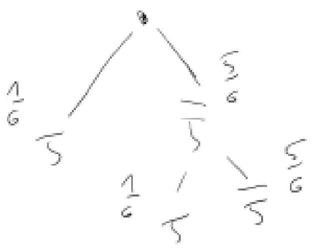
Sein Ziel ist eine Große Straße (1-2-3-4-5 oder 2-3-4-5-6). Bob denkt über zwei Strategien nach:

(a) Er legt eine der Sechsen zurück in den Becher und versucht mit diesem einem Würfel in den verbleibenden zwei Versuchen die fehlende Fünf zu erzielen.

(b) Er legt <u>beide</u> Sechsen zurück in den Becher. Weil er nun mit zwei Würfeln weiterwürfelt hätte er mehr Chancen auf die fehlende 5, und könnte diese entweder mit einer 1 oder einer 6 ergänzen.

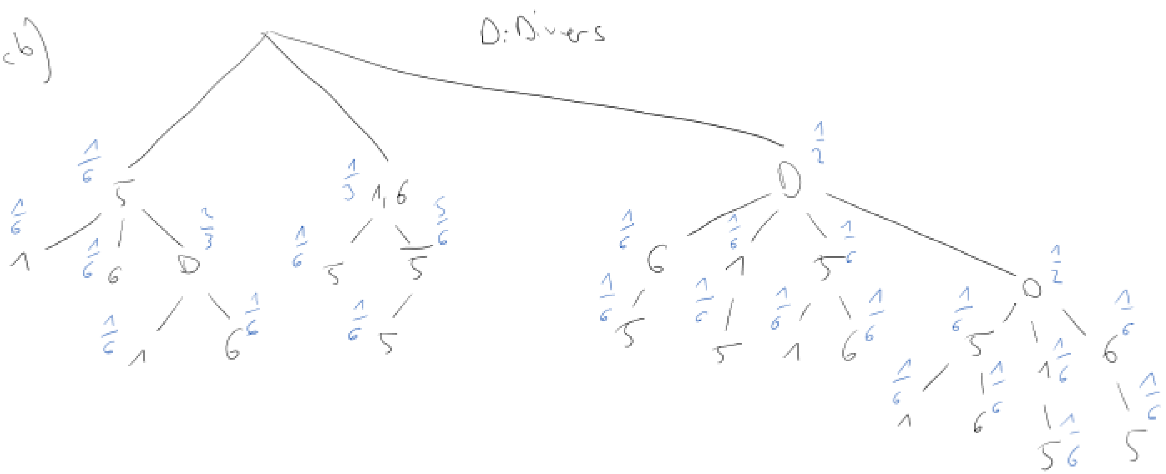
Berechnen Sie für beide Strategien die Wahrscheinlichkeit die Große Straße zu erreichen. Verwenden Sie hierzu jeweils einen Entscheidungsbaum. Strategie (b) ist etwas kniffliger. Sie gibt Bonuspunkte bei der Abgabe und kann für Bonuspunkte in der Übung vorgestellt werden.

c a)



$$\Rightarrow P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36} \approx 0{,}306$$

c b)



Möglichkeit 1:

$$1.W=1: \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}+\frac{5}{108}=\underline{\underline{\frac{11}{108}}}\ (=1.W:6)$$

$$1.W=5: 2\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\right)=2\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{1}{54}=\frac{5}{54}$$

$$1.W=D: 4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot 4=4\cdot\frac{1}{72}+4\cdot\frac{1}{144}=\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{108}+\frac{5}{54}+\frac{1}{12}=\frac{5}{18}=0{,}2\overline{7}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{18}-\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}}=\frac{16}{63}\approx\underline{\underline{0{,}254}}$$

Es muss einmal herausgenommen werden, wenn eine 1 und 6 gewürfelt wird, aber die genaue Gewichtung ist unsicher.

Möglichkeit 2:

b) 2, 3, 4 GEWÜRFELT

2 WÜRFEL → 1, 5, 6 WÜRFELN (EIGENTLICH: <u>5 UND 1,6</u> WÜRFELN)

A: KOMBINATIONEN SOFORT GEWINN: $\frac{2}{\binom{7}{2}}$ (1,5) (5,6)

B: KOMBINATIONEN 1x 5: $\frac{4}{\binom{7}{2}}$ (2,5) (3,5) (4,5) (5,5)

C: KOMBINATIONEN 6 ODER 1: $\frac{9}{\binom{7}{2}}$ (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,6) (6,2) (6,3) (6,4) (6,6)

D: KOMBINATIONEN NICHTS: $\frac{6}{\binom{7}{2}}$ (2,2) (2,3) (2,4) (3,3) (3,4) (4,4)

A: $\frac{2}{21}$ B: $\frac{4}{21}\cdot\frac{2}{6}$ C: $\frac{9}{21}\cdot\frac{1}{6}$ D: $\frac{6}{21}\cdot\frac{2}{21}$

$$\Rightarrow \text{GESAMT: } \frac{2}{21}+\frac{4\cdot 2}{21\cdot 6}+\frac{9\cdot 1}{21\cdot 6}+\frac{6\cdot 2}{21\cdot 21}\approx\underline{\underline{0{,}257}}$$