Diskrete Strukturen

für die Studiengänge

Angewandte Informatik,

Informatik – Technische Systeme,

Wirtschaftsinformatik

Prof. Dr. Marc-Alexander Zschiegner

Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences

Das Team

- **Prof. Dr. Marc-A. Zschiegner**

  Fachbereich DCSM, Campus Unter den Eichen, Raum C 242

  Tel.: 0611 / 9495 – 2287, marc.zschiegner@hs-rm.de

  Sprechstunde: Fr, 11:30 – 12:15 Uhr

- **Kim Hoitz, B.Sc.:** Kim.Hoitz@hs-rm.de
- **Mahir Doganci, B.Sc.:** mahirdoganci@gmail.com
- **Jens Möhrstedt, B.Sc.:** jens.moehrstedt@hs-rm.de
- **Matthias Lang:** matthias.lang@student.hs-rm.de

Organisation

Vorlesung:	Fr	08:15 – 09:45 Uhr	B001	Zschiegner	
Übungen:	Mo	11:45 – 13:15 Uhr	C035	Doganci	AI
	Mi	10:00 – 11:30 Uhr	C035	Möhrstedt	AI
	Mi	11:45 – 13:15 Uhr	C035	Möhrstedt	AI
	Mo	10:00 – 11:30 Uhr	C035	Doganci	TS
	Mi	11:45 – 13:15 Uhr	F010	Hoitz	WI
	Mi	14:15 – 15:45 Uhr	F010	Hoitz	WI
	Fr	10:00 – 11:30 Uhr	C035	Zschiegner	WI
Tutorium:	Fr	16:00 – 17:30 Uhr	C035	Lang	

Die Vorlesung

- **Hören, ggf. Mitschreiben** – (im Großen und Ganzen) verstehen.
  Nacharbeiten – besser verstehen.
  Übungsaufgaben lösen – verstehen (hoffentlich)!

- **Ihnen wird alles erklärt – aber in der Regel nur 1- bis 2-mal.**

- **Folien**
  Werden in der Vorlesung gezeigt, besprochen, ergänzt, ...
  Download vorab:

  https://studip.hs-rm.de

  STUD.IP

  Zur Vorlesung mitbringen (ausgedruckt oder digital).

Übungen

Übungen:

- **Jede Woche ein Aufgabenblatt:**

  - Präsenzaufgaben (im Seminar bearbeiten),

  - Hausaufgaben (bis zur nächsten Woche schriftlich bearbeiten).

- **Mein Job:** Lösbare Aufgaben zu stellen

- **Ihr Job:** Aufgaben selbständig lösen und vorrechnen (können).

Nur Übung macht den Meister!

Gestaffelte Übungsmöglichkeiten:

- Kurze Übungsaufgaben in der Vorlesung ★☆☆☆☆
- Präsenzaufgaben im Seminar ★★☆☆☆
- Hausaufgaben im Seminar ★★★☆☆
- Probeklausuren ★★★★☆
- Klausur ★★★★★

Schwierigkeitsgrad

„Mathematics is not a spectator sport. To unterstand mathematics means to be able to do mathematics.“ (George Polya, „How to Solve it“, 1945)

Benotung

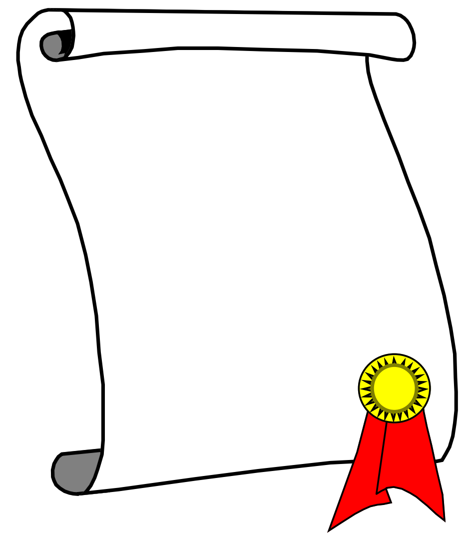
Die Bewertung setzt sich zusammen aus

Prüfungsleistung:

- Klausur (Februar oder März): 80 %

Studienleistung:

- Mitarbeit in den Übungsgruppen: 10 %
- Kurztests: 10 %



Was ist Mathematik? – Der Inhalt

- **Geometrie** (seit Euklid, ca. 300 v. Chr.)

  Die Lehre vom uns umgebenden Raum (2D, 3D, ...)

- **Algebra** (seit der Antike)

  Zahlen und Rechnen

- **Analysis** (seit dem 18.Jahrhundert)

  Die Lehre vom Unendlichkleinen und den Grenzübergängen

- **Wahrscheinlichkeitsrechnung** (20. Jahrhundert)

  (Wie) können wir den Zufall verstehen?

Was ist Diskrete Mathematik? I

- Diskrete Mathematik ist ein modernes Gebiet der Mathematik, das in einzigartiger Weise sogenannte „reine Mathematik” mit „Anwendungen” verbindet.
- Mathematik bis vor wenigen Jahrzehnten: Beschreibung der physikalischen Welt: Wie modelliert man den Raum? Wie misst man den Raum? Wie beschreibt man Bewegungen?
- Disziplinen, die sich mit solchen kontinuierlichen Phänomenen beschäftigen: Geometrie und Analysis.

Was ist Diskrete Mathematik? II

- Mathematik heute: Modelle zum Verständnis und zur Beherrschung von endlichen, eventuell allerdings sehr großen Phänomenen und Strukturen.

- Beispiele:

  - Eine Gesellschaft als Menge ihrer endlich vielen Mitglieder.

  - Ein ökonomischer Prozess mit nur endlich vielen möglichen Zuständen.

  - Ein Computer, der nur Zahlen bis zu einer gewissen Größe verarbeiten kann.

Was ist Diskrete Mathematik? III

- Mathematische Disziplinen, die sich mit solchen diskreten Phänomenen beschäftigen: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra, Zahlentheorie, Codierungstheorie, Algorithmentheorie, Kryptographie usw.
- Zusammenfassung dieser Disziplinen unter „**Diskrete Mathematik**“
- „diskret” hat hier nichts zu tun mit „heimlich”, „verborgen” etc., sondern bezieht sich nur darauf, dass wir endliche, diskrete Phänomene studieren.
- Diskrete Mathematik = Mathematische Grundlage der Informatik!

Inhalt der Vorlesung

1. Logik

Aussagen, Aussageformen, Quantoren → Logische Schaltungen

2. Mengen

Operationen, Kartesisches Produkt, Mächtigkeiten → Theoretische Informatik

3. Relationen und Funktionen

Operationen, Eigenschaften, Funktionen → Relationale Datenbanken

4. Beweisen

Beweismethoden, Schubfachprinzip, Vollst. Induktion → Rekursive Programme

5. Graphentheorie

Grundlagen, Bäume, Planarität, Färbungen → Suchalgorithmen

6. Algebraische Grundstrukturen

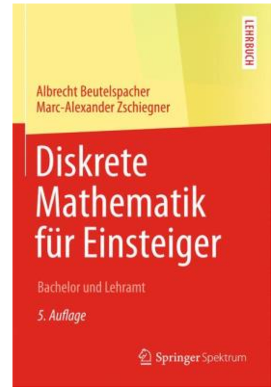
Gruppen, Ringe, Körper, modulare Arithmetik → Kryptografie

Wie funktioniert Mathematik? – Die Methode

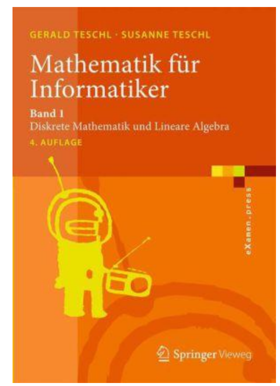
- **Definitionen**
  Festlegungen von Begriffen.
  In der Mathematik wissen wir ganz genau, worüber wir reden.
- **Sätze**
  Aussagen. Die Erkenntnisse der Mathematik.
- **Beweise**
  In der Mathematik erzielen wir Erkenntnisse nur durch rein logische Argumentation. Das ist gut: Die Ergebnisse sind so sicher wie in keiner anderen Wissenschaft.
- **Beispiele**
  Illustrieren und motivieren Sätze und Beweise.

Literaturtipps

Beutelspacher und Zschiegner: *Diskrete Mathematik für Einsteiger - Mit Anwendungen in Technik und Informatik*, Verlag Springer Spektrum, 5. Auflage 2015



Teschl und Teschl: *Mathematik für Informatiker - Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra*,
Verlag Springer Vieweg



Kapitel 1

Logik

Inhalt

1.1 Aussagen

Logic: another thing that penguins aren't very good at.

Aussagen

Eine **Aussage** ist ein sprachliches Konstrukt, das prinzipiell entweder falsch oder wahr ist (aber nie beides gleichzeitig).

Eine wahre Aussage hat den **Wahrheitswert**

„**w**“ (oder „1“ oder „true“),

eine falsche Aussage hat den Wahrheitswert

„**f**“ (oder „0“ oder „false“).

Bemerkung: In einem Schaltkreis entsprechen diese Wahrheitswerte den Zuständen „Strom fließt” und „Strom fließt nicht”.

Aussagen

Beispiele für Aussagen und ihre Wahrheitswerte:

Wiesbaden liegt in Hessen.	(w)
Es gibt unendlich viele Primzahlen.	(w)
2 + 2 = 5.	(f)
1 ist eine Primzahl.	(f)
Alle Informatikstudenten lieben Mathe.	(_)
Jede gerade Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen.	(_)

(Dies ist die Goldbach-Vermutung, die bis heute unbewiesen ist.)

Keine Aussagen

Keine Aussagen sind zum **Beispiel**:

Guten Morgen!

5+3

Wann ist die Vorlesung endlich vorbei?

Keine Aussage ist folgendes **Paradoxon**:

„Ich lüge gerade.“

Sowohl die Annahme, es sei wahr, als auch die Annahme, es sei falsch, führen zu einem Widerspruch!

(Klassische Version: „Ein Kreter sagt: Alle Kreter sind Lügner.“)

Übung

Handelt es sich um Aussagen?

- ❐ Die Erde ist eine Scheibe.
- ❐ Alter, komm wir gehen McDonald‘s!
- ❐ 2 ist eine Primzahl.
- ❐ Wann machen wir Pause?
- ❐ Dieser Satz ist falsch.
- ❐ Herr Zschiegner hat genau 97865 graue Haare.

Können Sie bei allen Aussagen ihren Wahrheitswert angeben?

Verknüpfungen von Aussagen

Wir bezeichnen Aussagen mit Großbuchstaben, wie **A, B, C**.

Aus einer oder zwei Aussagen **A** und **B** kann man eine dritte machen. Die wichtigsten **Verknüpfungen von Aussagen** sind:

Symbolisch	**Umgangssprachlich**	**Mathematisch**
$\neg$**A**	nicht A	Negation
A $\wedge$ **B**	A und B	Konjunktion
A $\vee$ **B**	A oder B	Disjunktion
A $\rightarrow$ **B**	wenn A, dann B	Implikation
A $\leftrightarrow$ **B**	A genau dann, wenn B	Äquivalenz

Wahrheitswertetafeln

Die Symbole $\wedge$, $\vee$, ..., mit denen Aussagen verknüpft werden, nennt man auch **Junktoren**.

Wir definieren verknüpfte Aussagen, indem wir festlegen, wann sie wahr und wann sie falsch sein sollen. Das hängt davon ab, ob die einzelnen Aussagen **A**, **B**, … wahr oder falsch sind.

Dazu verwenden wir **Wahrheitswertetafeln**:
Jede Zeile enthält eine **Belegung** mit Wahrheitswerten.
Die Wahrheitswertetafel enthält alle möglichen Kombinationen von Belegungen der Aussagen **A**, **B**, …

Negation: $\neg$A („nicht A“)

A	$\neg$A
w	**f**
f	**w**

Das bedeutet: $\neg$A ist genau dann eine wahre Aussage, wenn A falsch ist.

Beispiel: $\neg(2+2=5)$ ist eine wahre Aussage.

Konjunktion: $A \wedge B$ („A und B“)

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Wenn A und B wahr sind, dann ist $A \wedge B$ wahr.

Wenn A wahr und B falsch ist, dann ist $A \wedge B$ falsch.

Wenn A falsch und B wahr ist, dann ist $A \wedge B$ falsch.

Wenn A und B falsch sind, dann ist $A \wedge B$ falsch.

Beispiel: Die Aussage $(2+2=5) \wedge$ (5 ist eine Primzahl) ist falsch.

Disjunktion: $A \vee B$ („A oder B“)

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Wenn A und B wahr sind, dann ist $A \vee B$ wahr.

Wenn A wahr und B falsch ist, dann ist $A \vee B$ wahr.

Wenn A falsch und B wahr ist, dann ist $A \vee B$ wahr.

Wenn A und B falsch sind, dann ist $A \vee B$ falsch.

Beispiel: Die Aussage $(2+2=5) \vee$ (5 ist eine Primzahl) ist wahr.

Bemerkung zu „oder“

Mit der **Disjunktion** $\vee$ („oder“) ist das einschließende Oder im Sinne von „oder auch“ gemeint.

A $\vee$ **B** ist auch dann wahr, wenn *beide* Aussagen **A** und **B** wahr sind.

Beispiel: „Abschreiben oder (auch) Spickzettel führen zur Note 5.“

Das ausschließende Oder im Sinne von „entweder oder“ (engl.: „exclusive or“ = XOR) heißt **Kontravalenz** und wird durch $\oplus$ symbolisiert.

Beispiel: „Möchten Sie (entweder) Kaffee oder Tee?“

Kontravalenz: $A \oplus B$ („entweder A oder B“)

A	**B**	**$A \oplus B$**
w	**w**	**f**
w	**f**	**w**
f	**w**	**w**
f	**f**	**f**

Wenn A und B wahr sind, dann ist $A \oplus B$ *falsch*.

Wenn A wahr und B falsch ist, dann ist $A \oplus B$ wahr.

Wenn A falsch und B wahr ist, dann ist $A \oplus B$ wahr.

Wenn A und B falsch sind, dann ist $A \oplus B$ falsch.

Beispiel: Die Aussage $(2+2=4) \oplus$ (5 ist eine Primzahl) ist falsch.

Übung

Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der verknüpften Aussagen.

(a) $(1 + 1 = 1) \wedge$ (Wasser ist nass)

(b) $\neg(1 + 1 = 1) \wedge$ (Wasser ist nass)

(c) $(1 + 1 = 1) \vee$ (Wasser ist nass)

(d) $\neg(1 + 1 = 1) \vee \neg$(Wasser ist nass)

(e) $\neg(1 + 1 = 1) \oplus$ (Wasser ist nass)

Implikation: $A \to B$ („wenn A, dann B“)

A	B	$A \to B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wenn A und B wahr sind, dann ist $A \to B$ eine wahre Aussage.

Wenn A wahr und B falsch ist, dann ist $A \to B$ falsch.

Wenn A falsch und B wahr ist, dann ist $A \to B$ wahr.

Wenn A und B falsch sind, dann ist $A \to B$ eine wahre Aussage.

Beispiel: Die Aussage $(2+2=5) \to$ (5 ist eine Primzahl) ist wahr.

Äquivalenz: $A \leftrightarrow B$ („A genau dann, wenn B“)

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

$A \leftrightarrow B$ ist genau dann eine wahre Aussage, wenn A und B beide wahr oder beide falsch sind.

Beispiel: Die Aussage $(2+2=5) \leftrightarrow$ (5 ist eine Primzahl) ist eine falsche Aussage, aber die Aussage $(2+2=5) \leftrightarrow$ (6 ist eine Primzahl) ist eine wahre Aussage.

Übung

Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der verknüpften Aussagen.

(a) $(1 + 1 = 1) \rightarrow$ (Wasser ist nass)

(b) $(1 + 1 = 1) \rightarrow \neg$(Wasser ist nass)

(c) $\neg(1 + 1 = 1) \rightarrow \neg$(Wasser ist nass)

(d) $(1 + 1 = 1) \leftrightarrow \neg$(Wasser ist nass)

1.2 Gesetze der Logik

Reihenfolge der Auswertung

Um komplexere logische Ausdrücke zu erhalten, können die Junktoren mehrfach hintereinander angewendet werden, man erhält **aussagenlogische Formeln**.

Dabei ist die unterschiedliche **Priorität** der Junktoren zu beachten:

$\neg$ kommt vor $\wedge$, und $\wedge$ kommt vor $\vee$, und $\vee$ kommt vor $\leftrightarrow$ und $\rightarrow$.

Beispiel: Es gilt $\neg A \vee \neg B \wedge C = (\neg A) \vee ((\neg B) \wedge C)$.

Möchte man andere Prioritäten setzen, so muss man die entsprechenden Teilausdrücke in Klammern setzen.

Tautologie

Mit Wahrheitswertetafeln können kompliziertere aussagenlogische Formeln überprüft werden.

Eine Formel heißt **Tautologie**, wenn sie für jede Belegung wahr ist.

Beispiel: $(A \wedge B) \rightarrow A$ ist eine Tautologie. Denn:

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow A$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	w

Kontradiktion

Eine Formel heißt **Kontradiktion**, wenn sie für jede Belegung falsch ist.

Beispiel: $(A \wedge B) \wedge \neg A$ ist eine Kontradiktion. Denn:

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$(A \wedge B) \wedge \neg A$
w	w	w	f	f
w	f	f	f	f
f	w	f	w	f
f	f	f	w	f

Logische Äquivalenz

Es kann vorkommen, dass unterschiedliche Formeln für jede Belegung den gleichen Wahrheitswert liefern („gleiche Spalten“).

Beispiel: Die Formeln $(A \to B) \land (B \to A)$ und $A \leftrightarrow B$ haben stets den gleichen Wahrheitswert, denn:

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \land (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

Logische Äquivalenz

Zwei Formeln F_1 und F_2, die die gleiche Wahrheitswertetabelle haben, heißen **logisch äquivalent**. Wir schreiben in diesem Fall:

$$F_1 \equiv F_2.$$

Beispiel: $(A \to B) \land (B \to A) \equiv A \leftrightarrow B$

Logisch äquivalente Formeln haben also für jede Belegung den gleichen Wahrheitswert. Das bedeutet:

Zwei Formeln F_1 und F_2 sind genau dann logisch äquivalent, wenn $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ eine Tautologie ist.

Übung

Zeigen Sie, dass für die Implikation folgende nützliche Äquivalenz gilt:

$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$.

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
w	w			
w	f			
f	w			
f	f			

De Morgansche Gesetze

Mit Wahrheitstafeln können zahlreiche Rechengesetze beweisen werden, mit deren Hilfe man aussagenlogische Formen umformen bzw. vereinfachen kann.

Satz (Augustus de Morgan). Seien A und B Aussagen. Dann gilt

(a) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (erstes de Morgansches Gesetz).

(b) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (zweites de Morgansches Gesetz).

Beispiele: (a) Die Negation von „Die Sonne scheint *und* der Himmel ist blau.“ ist „Die Sonne scheint nicht *oder* der Himmel ist nicht blau.“

(b) $\neg((2 \text{ ist gerade}) \vee (1 + 1 = 3)) \equiv (2 \text{ ist ungerade}) \wedge (1 + 1 \neq 3)$

Beweis des ersten de Morganschen Gesetzes

Beweis. (a) Wir zeigen, dass für jede Belegung der Wahrheitswerte von A und B die beiden Seiten $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ stets den gleichen Wahrheitswert haben.

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	w	w
f	w	w	w	f	w
f	f	w	w	w	w

Die beiden Seiten haben genau an den gleichen Stellen w und f stehen; also sind die Aussagen logisch äquivalent.

Übung

Beweisen Sie das zweite de Morgansche Gesetz.

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w					
w	f					
f	w					
f	f					

Rechengesetze

Für die Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ gelten eine Reihe Rechengesetze, die uns vom Umgang mit den reellen Zahlen her vertraut sind, wenn wir an Addition und Multiplikation denken.

Satz. Für alle Aussagen A, B, C gelten die folgenden Gesetze:

(a) Kommutativgesetze: $A \wedge B = B \wedge A$ und $A \vee B = B \vee A$.

(b) Assoziativgesetze: $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$.

(c) Distributivgesetze: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

und $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

(d) Existenz neutraler Elemente: $w \wedge A = A$ und $f \vee A = A$.

(e) Existenz des Komplements: $A \wedge \neg A = f$ und $A \vee \neg A = w$.

Beweis des 1. Distributivgesetzes

Exemplarisch beweisen wir das erste Distributivgesetz. Dazu zeigen wir mit einer Wertetabelle, dass sich für alle möglichen Werte von A, B, C auf der linken Seite stets das Gleiche ergibt wie auf der rechten:

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
f	f	f	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	w	f
f	w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w
w	w	w	w	w	w	w	w

Boolesche Algebra

Eine Menge mit Operationen $\wedge$, $\vee$ und $\neg$, für die die Gesetze aus dem vorherigen Satz gelten, nennt man auch **Boolesche Algebra**.

Die Menge {f, w} (bzw. {0, 1}) zusammen mit den bereits definierten Und-, Oder- und Nicht-Operationen ist also eine Boolesche Algebra.

Bemerkung: Es gibt noch mehr Boolesche Algebren. Zum Beispiel bildet auch die Menge aller Teilmengen einer Menge eine Boolesche Algebra, wenn man als Operationen die Mengenoperationen Durchschnitt, Vereinigung und Komplement nimmt.
Mehr dazu in Kapitel 2 ...

Dualität

Die Gesetze der Booleschen Algebra bestehen jeweils aus zwei Teilen, die auseinander hervorgehen, wenn man $\wedge$ und $\vee$, sowie w und f vertauscht.

Aus dieser Symmetrie folgt, dass wir auch in jeder Folgerung aus diesen Gesetzen diese Vertauschungen durchführen können.

Diese Eigenschaft der Booleschen Algebra heißt **Dualität**.

Ein Satz, der durch Vertauschen von $\wedge$ und $\vee$ und von w und f aus einem anderen Satz hervorgeht, heißt zu diesem **dual**.

Weitere Gesetze

Eine erste Anwendung findet die Dualität beim Beweis des folgenden Satzes, der weitere Gesetze der Booleschen Algebra beschreibt.

Satz. Für alle Aussagen A und B gelten die folgenden Gesetze:

(a) Absorptionsgesetze: $A \wedge (A \vee B) = A$

und $A \vee (A \wedge B) = A$.

(b) Idempotenzgesetze: $A \vee A = A$

und $A \wedge A = A$.

(c) Involutionsgesetz („doppelte Negation“):

$$\neg(\neg A) = A.$$

Beweis der Absorptionsgesetze

Wir wollen die bereits bewiesenen Gesetze der Booleschen Algebra anwenden und dabei ihre Dualität ausnutzen.

(a) Es gilt

$$A \wedge (A \vee B) = (A \vee f) \wedge (A \vee B) = A \vee (f \wedge B) = A \vee f = A.$$

Dies ist das erste Absorptionsgesetz.

Auf Grund der Dualität können wir in jedem dieser Schritte, also auch im Endergebnis, $\wedge$ und $\vee$ sowie w und f vertauschen und erhalten daraus das zweite Absorptionsgesetz:

$$A \vee (A \wedge B) = A.$$

Beweis der Idempotenzgesetze

(b) Ferner gilt

$$A \vee A = (A \vee A) \wedge w = (A \vee A) \wedge (A \vee \neg A) = A \vee (A \wedge \neg A) = A \vee f = A;$$

damit haben wir das erste Idempotenzgesetz gezeigt.

Das zweite Idempotenzgesetz folgt wiederum aus der Dualität. ❑

Die Rechengesetze können wir nun benutzen, um logische Formeln umzuformen und zu vereinfachen.

Beispiel

	$\neg(\neg A \land B) \land (A \lor B)$	| De Morgan
$\equiv$	$(\neg\neg A \lor \neg B) \land (A \lor B)$	| Doppelte Negation
$\equiv$	$(A \lor \neg B) \land (A \lor B)$	| 1. Distributivgesetz: A ausklammern
$\equiv$	$A \lor (\neg B \land B)$	| Kontradiktion: $\neg B \land B$
$\equiv$	$A \lor f$	| neutrales Element
$\equiv$	A	

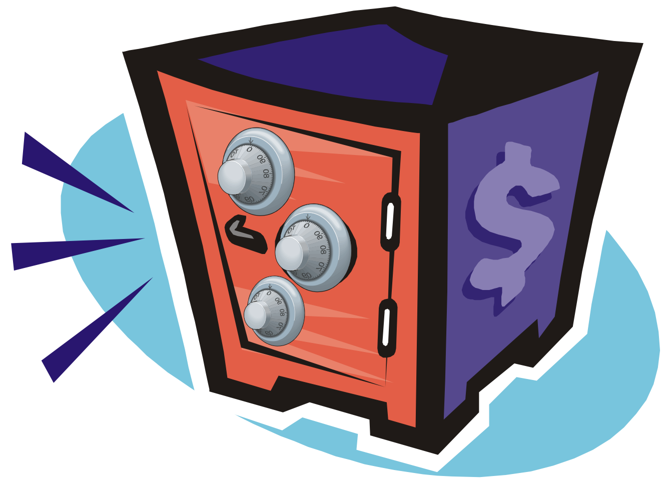
Übung

Vereinfachen Sie:

$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$

Anwendung: Schaltungsentwurf

Eine wichtige Anwendung der Aussagenlogik ist der **Entwurf von Schaltungen**. Letztendlich ist jeder Computer aus logischen Schaltungen aufgebaut.



Beispiel: 2-aus-3-Schaltung

(Z. B. ein Tresor öffnet sich nur, wenn mindestens zwei von drei Schlössern geöffnet werden.)

Ziel: Schaltung mit drei Eingängen x, y, z.

Am Ausgang f(x, y, z) soll genau dann der Zustand 1 (= wahr) auftreten, wenn an mindestens zwei Eingängen 1 (= wahr) anliegt.

Entwurf einer 2-aus-3-Schaltung

Wertetabelle der gesuchten Funktion f:

x	y	z	f(x, y, z)		
0	0	0	0		
0	0	1	0		
0	1	0	0		
0	1	1	1	←	$\neg x \wedge y \wedge z$
1	0	0	0		
1	0	1	1	←	$x \wedge \neg y \wedge z$
1	1	0	1	←	$x \wedge y \wedge \neg z$
1	1	1	1	←	$x \wedge y \wedge z$

Ablesen einer Formel für f:

Zeilen mit 1 am Ausgang betrachten:

mit $\vee$ verknüpfen

Aus der Tabelle können wir so die **disjunktive Normalform** ablesen:

$$f(x, y, z) = (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z).$$

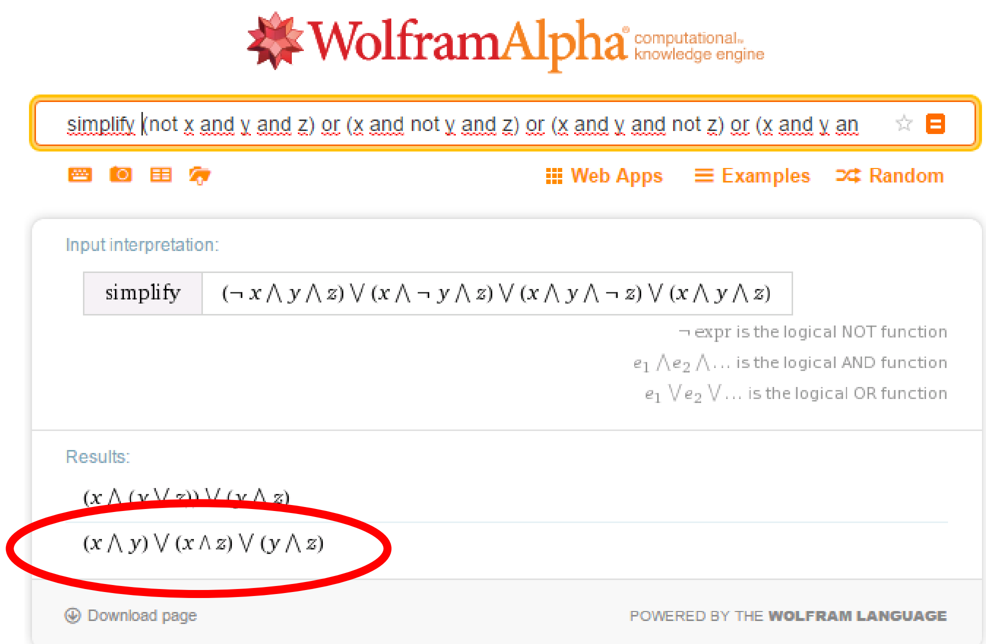
Entwurf einer 2-aus-3-Schaltung

Wir vereinfachen f mit den Rechengesetzen:

$f(x, y, z) = (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$	$x \wedge y$ ausklammern
$= (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y) \wedge (\neg z \vee z)$	$\neg z \vee z = 1$
$= (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y) \wedge 1$	1 neutrales Element
$= (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y)$	x ausklammern
$= (\neg x \wedge y \wedge z) \vee x \wedge ((\neg y \wedge z) \vee y)$	ausmultiplizieren
$= (\neg x \wedge y \wedge z) \vee x \wedge ((\neg y \vee y) \wedge (z \vee y))$	$\neg y \vee y$
$= (\neg x \wedge y \wedge z) \vee x \wedge (1 \wedge (z \vee y))$	1 neutrales Element
$= (\neg x \wedge y \wedge z) \vee x \wedge (z \vee y)$	ausmultiplizieren
$= (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$	z ausklammern
$= (((\neg x \wedge y) \vee x) \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$	ausmultiplizieren
$= ((\neg x \vee x) \wedge (y \vee x) \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$	$\neg x \vee x = 1$
$= ((1 \wedge (y \vee x)) \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$	1 neutrales Element
$= ((y \vee x) \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$	ausmultiplizieren
$= (y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$	Idempotenz $A \vee A = A$
$= (y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$	

Einfacher vereinfachen …

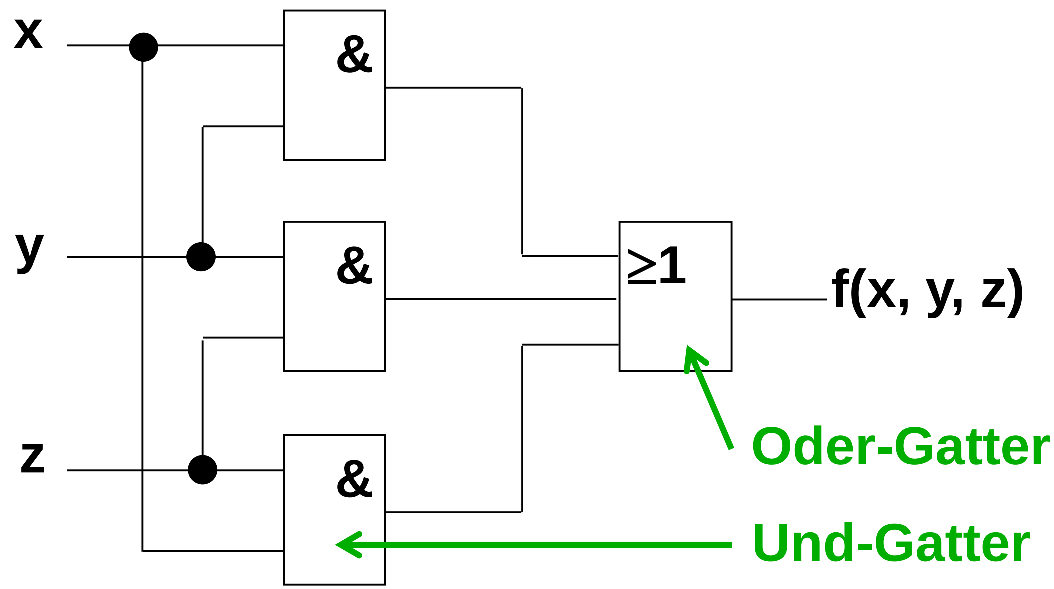
- mit **KV-Diagrammen:** Siehe Beutelspacher/Zschiegner, Kapitel 10.
- mit **WolframAlpha.com:**



Entwurf einer 2-aus-3-Schaltung

In der Schaltung werden die Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ durch elektronische Bauteile (**Gatter**) realisiert. Die vereinfachte Funktion

$f(x, y, z) = (y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$ ergibt die fertige 2-aus-3-Schaltung:



1.3 Quantoren

Aussagen und Aussageformen

Bis jetzt haben wir nur Aussagen über konkrete Objekte betrachtet.

Beispiel: Aussage: A = „2 ist eine Primzahl".

Jetzt sollen diese Objekte durch Variablen ersetzt werden. Dadurch entsteht eine **Aussageform**.

Beispiel: Aussageform: A(x) = „x ist eine Primzahl".

Wenn wir in der Aussageform für die Variablen Werte einsetzen, entstehen Aussagen.

Beispiele: A(2) ist eine wahre Aussage, A(4) ist eine falsche Aussage.

Universum

Die Menge der Werte, die man für die freien Variablen einer Aussageform einsetzen kann, nennen wir **Universum**.

Beispiele:

(a) Das Universum der Aussageform A(x) = „x ist eine Primzahl" ist die Menge **N** der natürlichen Zahlen.

(b) Für die Aussageform B(x) = „x blüht rot" könnte das Universum die Menge aller Blumen sein.

(c) Für die Aussageform C(x, y) = „$x^2 + y^2 = 25$" könnte das Universum für x und für y die Menge **R** der reellen Zahlen sein.

Aussageformen

Definition. Eine **Aussageform** über den Universen U_1, U_2, …, U_n ist ein Satz mit den Variablen x_1, x_2, …, x_n, der zu einer Aussage wird, wenn alle x_i jeweils mit einem Wert aus U_i belegt werden.

Beispiel: $C(x, y)$ = „$x^2 + y^2 = 25$" ist eine Aussageform über den Universen

$U_x = \mathbf{R}$ und $U_y = \mathbf{R}$.

Für jede Belegung von x und y mit einer reellen Zahl ergibt sich eine Aussage, z. B.

$C(3, 4)$ = „$3^2 + 4^2 = 25$" ist eine wahre Aussage,

$C(1, 2)$ = „$1^2 + 2^2 = 25$" ist eine falsche Aussage.

Übung

Geben Sie sinnvolle Universen für die Aussageformen an.

A(x) = „x ist gerade“

B(x) = „x ist gut in Mathe“

C(x, y) = „$y = x^2$“

Allaussagen

Allaussagen sind Aussagen über *alle* Elemente eines Universums.

Beispiele:

(a) Alle Primzahlen > 2 sind ungerade.

(b) In jedem Dreieck schneiden sich die Mittellote in einem Punkt.

Solche Allaussagen können wir immer in die folgenden Form bringen:

Für alle x (aus einem Universum) gilt ...

Beispiele:

(c) Für alle Dreiecke gilt: Die Winkelsumme ist 180°

(d) Sei U = {1, 3, 5, 7}. Dann gilt für alle $x \in U$: x ist eine ungerade Zahl.

Allquantor

Symbolisch können Allaussagen mit dem **Allquantor** $\forall$ formuliert werden: Für die Allaussage

Für alle x aus einem Universum U gilt A(x)

schreiben wir

$\forall\, x \in \mathbf{U}\ \ \mathbf{A(x)}$.

Beispiel: $\forall\, x \in \mathbf{R}\ \ x^2 \geq 0$.

Bemerkung: Es gibt auch noch die (veraltete) Schreibweise mit einem großen Und-Zeichen:

$$\bigwedge_{x \in U} A(x)$$

Allaussagen als lange Und-Aussagen

Ist das Universum $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ endlich, so gilt

$$\forall\, x \in U \;\; A(x) \;\equiv\; A(u_1) \wedge A(u_2) \wedge \ldots \wedge A(u_n).$$

Eine Allaussage ist also eine lange Und-Aussage.

Beispiel: Sei $U = \{1, 3, 5, 7\}$. Dann kann man für die Allaussage

$\forall\, x \in U$ x ist eine ungerade Zahl

auch schreiben:

(1 ist ungerade) $\wedge$ (3 ist ungerade) $\wedge$ (5 ist ungerade) $\wedge$ (7 ist ungerade).

Existenzaussagen

Existenzaussage: *Es gibt mindestens ein Element* des Universums, das eine gewisse Eigenschaft hat.

Beispiele:

(a) Es gibt eine gerade Primzahl.

(b) Sei $U = \{1, 4, 9, 16\}$. Dann gibt es (mind.) ein $x \in U$, für das gilt: x ist gerade.

Solche Existenzaussagen können wir immer in die folgenden Form bringen:

Es gibt ein x (aus einem Universum), für das gilt ...

Existenzquantor

Symbolisch können Existenzaussagen mit dem **Existenzquantor $\exists$** formuliert werden: Für die Existenzaussage

Es gibt ein x aus einem Universum U, für das A(x) gilt

schreiben wir

$\exists\, x \in U\ \ A(x)$.

Beispiel: $\exists\, x \in \mathbf{R}\ \ x^2 = 2$.

Bemerkung: Es gibt auch noch die (veraltete) Schreibweise mit einem großen Oder-Zeichen:

$$\bigvee_{x \in U} A(x)$$

Existenzaussagen als lange Oder-Aussagen

Ist das Universum $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ endlich, so gilt

$$\exists\, x \in U \;\; A(x) \;\equiv\; A(u_1) \vee A(u_2) \vee \ldots \vee A(u_n).$$

Eine Existenzaussage ist also eine lange Oder-Aussage.

Beispiel: Sei $U = \{1, 4, 9, 16\}$. Dann kann man für die Existenzaussage

$$\exists\, x \in U \;\; x \text{ ist eine gerade Zahl}$$

auch schreiben:

(1 ist gerade) $\vee$ (4 ist gerade) $\vee$ (9 ist gerade) $\vee$ (16 ist gerade).

Negation von All- und Existenzaussagen

Satz. (a) Die Negation einer Allaussage ist eine Existenzaussage. Genauer gilt:

$$\neg(\forall x \; A(x)) \equiv \exists x \, (\neg A(x)).$$

(„Nicht für alle x gilt …“ ≡ „Es gibt ein x, für das … nicht gilt.“)

(b) Die Negation einer Existenzaussage ist eine Allaussage. Genauer gilt:

$$\neg(\exists x \, A(x)) \equiv \forall x \, (\neg A(x)).$$

(„Es gibt kein x, für das … gilt.“ ≡ „Für alle x gilt … nicht.“)

Beispiele

(a) Alle Schwäne sind weiß

Negation: Es gibt einen nichtweißen Schwan.

(b) Es gibt einen dummen Studenten

Negation: Alle Studenten sind intelligent.

(c) $\neg(\forall x \in \mathbf{R} \;\; x^2 = 2) \equiv \exists x \in \mathbf{R} \;\; x^2 \neq 2$

(d) $\neg(\exists x \in \mathbf{R} \;\; x^2 = -1) \equiv \forall x \in \mathbf{R} \;\; x^2 \neq -1$

Weitere Rechenregeln für Quantoren

Ausklammerregeln. Für beliebige Aussageformen A(x) und B(x) über dem gleichen Universum gilt

$$(\forall x\, A(x)) \wedge (\forall x\, B(x)) \equiv \forall x\, (A(x) \wedge B(x))$$

$$(\exists x\, A(x)) \vee (\exists x\, B(x)) \equiv \exists x\, (A(x) \vee B(x))$$

Vertauschungsregeln. Für beliebige Aussageformen A(x, y) können gleichartige Quantoren wie folgt vertauscht werden:

$$\forall x\, \forall y\, A(x, y) \equiv \forall y\, \forall x\, A(x, y)$$

$$\exists x\, \exists y\, A(x, y) \equiv \exists y\, \exists x\, A(x, y)$$

Übung

Bilden Sie die Negation der folgenden All- bzw. Existenzaussagen. Entscheiden Sie, ob die gegebenen Aussagen oder die jeweiligen Negationen wahr sind.

(a) Jede Primzahl ist ungerade.

(b) $\forall\, n \in \mathbf{N}$ 2n+1 ist ungerade

(c) $\exists\, n \in \mathbf{N}$ $n^2 = 169$

Logic is the beginning of wisdom

not the end

Spock in „Star Trek VI: The Undiscovered Country“ (1991)