Aufgabe Toffoli-Gatter

(i) Für $b = c = 1$ ist das dritte Ausgangsbit $1 \oplus a = \bar{a}$

(ii) Für $c = 0$ ist das dritte Ausgangsbit $ab = a \wedge b$

(iii) Nach DeMorgan ist $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$, also $a \vee b = \overline{\bar{a} \wedge \bar{b}}$.
Negation und Konjunktion können nach (i) und (ii) mittels Toffoli-Gatter beschrieben werden, also auch die Disjunktion.

(iv) Wir beobachten: Nach (i) und (ii) ist der Informationsträger das dritte Ausgangsbit. Es gilt

$$(a,b,c) = (1,1,0) \xmapsto{\bar{b}} (1,1,1)$$
$$(a,b,c) = (1,1,1) \xmapsto{\bar{b}} (1,1,0)$$

Aus der Ausgabe ist die Belegung der Eingabebits rekonstruierbar. T_0 ist somit invertierbar mit $T_0^2 = \mathrm{id}$
Allgemeiner: $T_0^2(a,b,c) = T_0(a,b,c \oplus ab) = (a,b,c \oplus ab \oplus ab) = (a,b,c)$

Aufgabe 2 Analyse bzgl. der Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$
Im Wesentlichen ist hier eine günstige Darstellung bzgl. der Messbasis zu finden. Die ersten beiden Schritte sind wie zuvor und liefern
$$|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$
Auch U_f ist unverändert und es ergibt sich im dritten Schritt

$$|\phi_3\rangle = \frac{1}{2}\left((-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle\right)(|0\rangle - |1\rangle)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left((-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)}_{=|y\rangle}$$
$$= \begin{cases} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|y\rangle, & \text{für } f(0) = f(1) \text{ (konstant)} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|y\rangle, & \text{für } f(0) \neq f(1) \text{ (balanciert)} \end{cases}$$

Letzte Umformung folgt aus der Fallunterscheidung (wie zuvor):

- $f(0)=f(1)=0$ liefert $|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|y\rangle$
- $f(0)=f(1)=1$ liefert $|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|0\rangle - |1\rangle)|y\rangle$
$= \frac{-1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|y\rangle$
- $f(0)=0,\ f(1)=1$ liefert $|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|y\rangle$
- $f(0)=1,\ f(1)=0$ liefert $|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|0\rangle + |1\rangle)|y\rangle$
$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|y\rangle$

In Schritt 4 wird bzgl. des ersten Bits gemessen, wobei die Messbasis $\{|+\rangle, |-\rangle\} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\}$ verwendet wird. Es gibt zwei Möglichkeiten

1. Das Ergebnis ist $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Dann ist f konstant
2. Das Ergebnis ist $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. Dann ist f balanciert.

Aufgabe 3

$$|q_2 q_1 q_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{2}|100\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|101\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|111\rangle$$

(i) Messe $|q_0\rangle$:

- Mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ wird $|0\rangle$ angenommen. Das Register ist dann im Zustand

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{2}|100\rangle}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|100\rangle$$

- mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{1}{4}$ wird $|1\rangle$ angenommen und das Register ist im Zustand

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{8}}|101\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|111\rangle}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{8}}|101\rangle + \frac{2}{\sqrt{8}}|111\rangle$$

(ii) Messe $|q_2\rangle$:

- Mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ wird $|0\rangle$ angenommen. Das Register ist dann im Zustand

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = |000\rangle$$

- Mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ wird $|1\rangle$ angenommen. Das Register ist dann im Zustand

$$\frac{\frac{1}{2}|100\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|101\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|111\rangle}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}|100\rangle + \frac{1}{2}|101\rangle + \frac{1}{2}|111\rangle$$