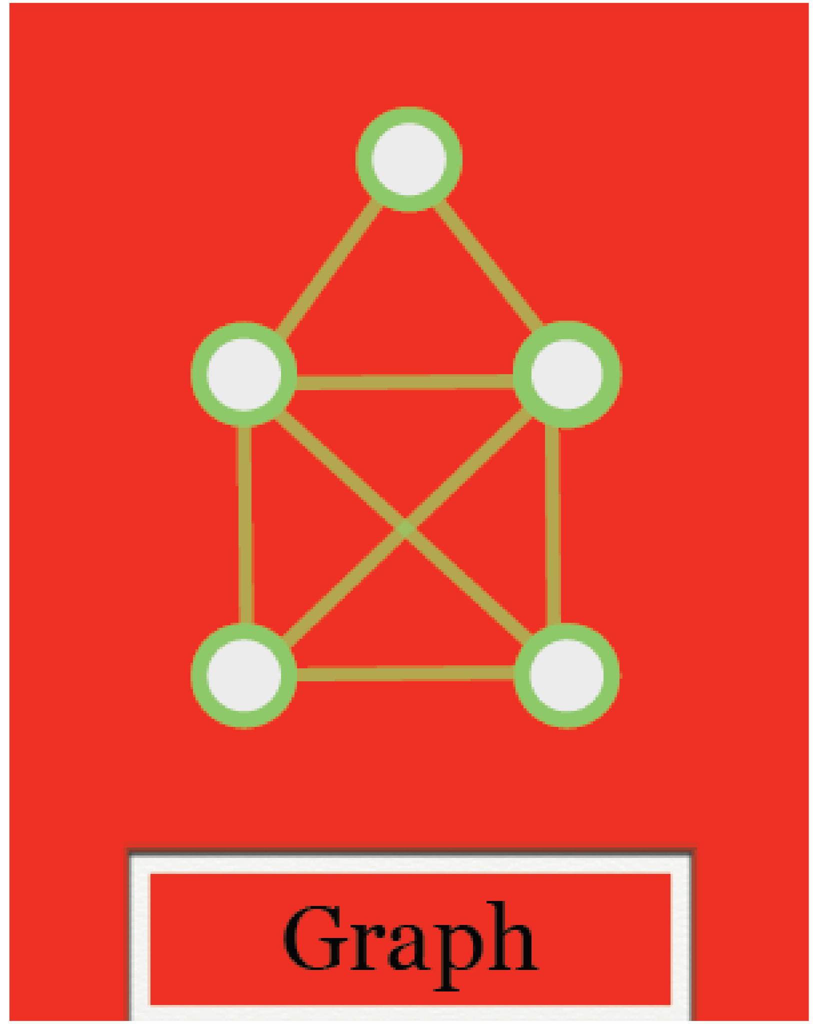
Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

Kapitel 5

Graphentheorie

Inhalt

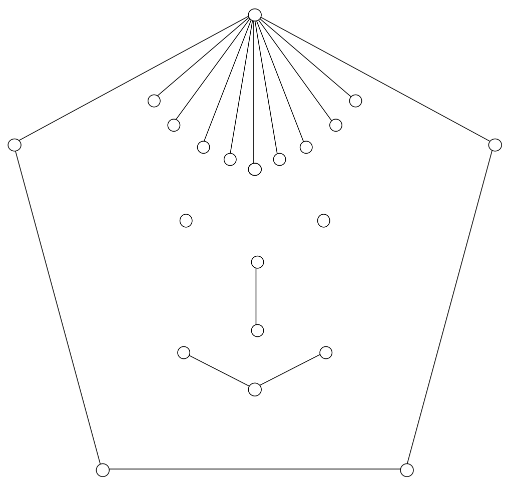
5.1 Grundlagen

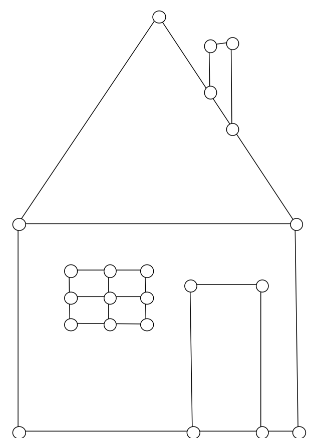


Grundbegriffe

Ein **Graph** besteht aus **Ecken** und **Kanten**; dabei verbindet jede Kante genau zwei Ecken; je zwei Ecken können durch keine, eine oder mehr als eine Kante verbunden sein.

Beispiele:



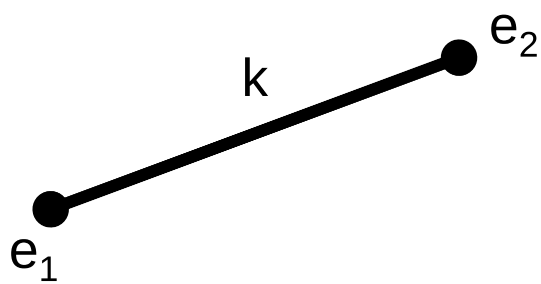


Ungerichtete Graphen

Ein **Graph** ist ein Paar G = (E, K), wobei E die Menge der **Ecken** (auch: Knoten) und K die Menge der **Kanten** ist.

Bei einem **ungerichteten Graphen** ist jede Kante eine zweielementige Teilmenge der Eckenmenge.

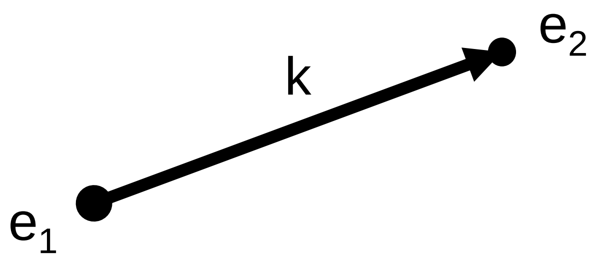
Beispiel: $k = \{e_1, e_2\}$ ist eine Kante, die die Ecken e_1 und e_2 *verbindet*.



Gerichtete Graphen

Bei einem **gerichteten Graphen** ist jede Kante ein Paar aus zwei Ecken. Die Kantenmenge ist also eine Relation auf der Eckenmenge.

Beispiel: $k = (e_1, e_2)$ ist eine Kante, die *von* e_1 *nach* e_2 zeigt.



Wir beschäftigen uns zunächst nur mit *ungerichteten* Graphen.

Anwendungen

Städteverbindungen: Ecken = Städte, Kanten = Straßen. Typische (und schwere) Frage: Wie kann man eine Rundreise kürzester Länge finden? („**Travelling Salesman Problem**").

Chemische Moleküle: Ecken = Atome, Kanten = Verbindungen. Wichtige Frage (die zur Entwicklung der Graphentheorie entscheidend beigetragen hat): Gegeben eine Summenformel (z.B. $C_nH_{2n+1}OH$), wie viele verschiedene Strukturformeln gibt es dazu?

Soziogramme: Ecken = Personen einer Gruppe, Kanten = Beziehungen zwischen den Menschen (z. B. „bekannt sein mit").

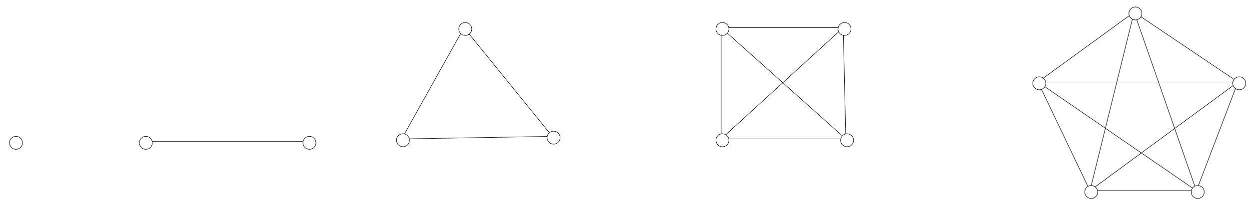
Vollständige Graphen

Ein Graph heißt **vollständig**, wenn jede Ecke mit jeder anderen durch genau eine Kante verbunden ist.

Das heißt, bei einem vollständigen Graphen sind je zwei Ecken verbunden, aber nur durch eine Kante.

Der vollständige Graph mit n Ecken wird mit $\mathbf{K_n}$ bezeichnet.

Beispiele:



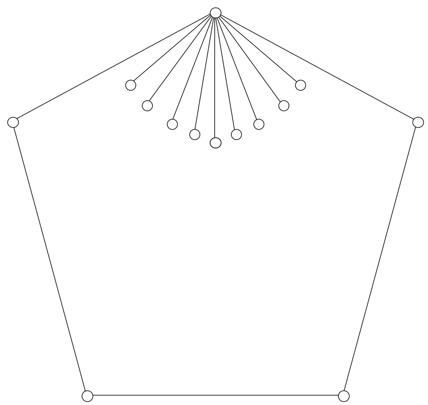
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

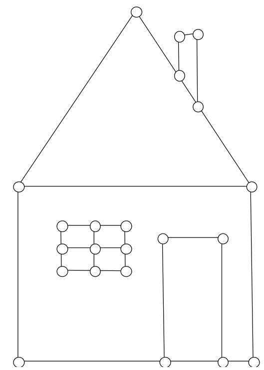
Zusammenhängende Graphen

Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn man von jeder Ecke zu jeder anderen über eine Folge von Kanten kommen kann.

Das bedeutet: Ein Graph ist zusammenhängend, wenn er nicht in mehrere Teile „zerfällt".

Beispiele:





zusammenhängend unzusammenhängend

Grad einer Ecke

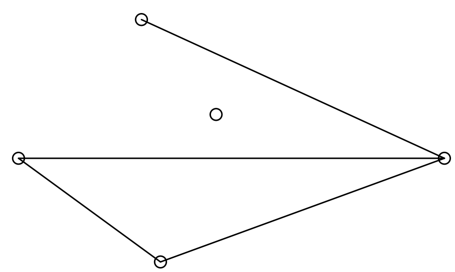
Der **Grad einer Ecke** ist die Anzahl der Kanten, die von dieser Ecke ausgehen.

Beispiele:

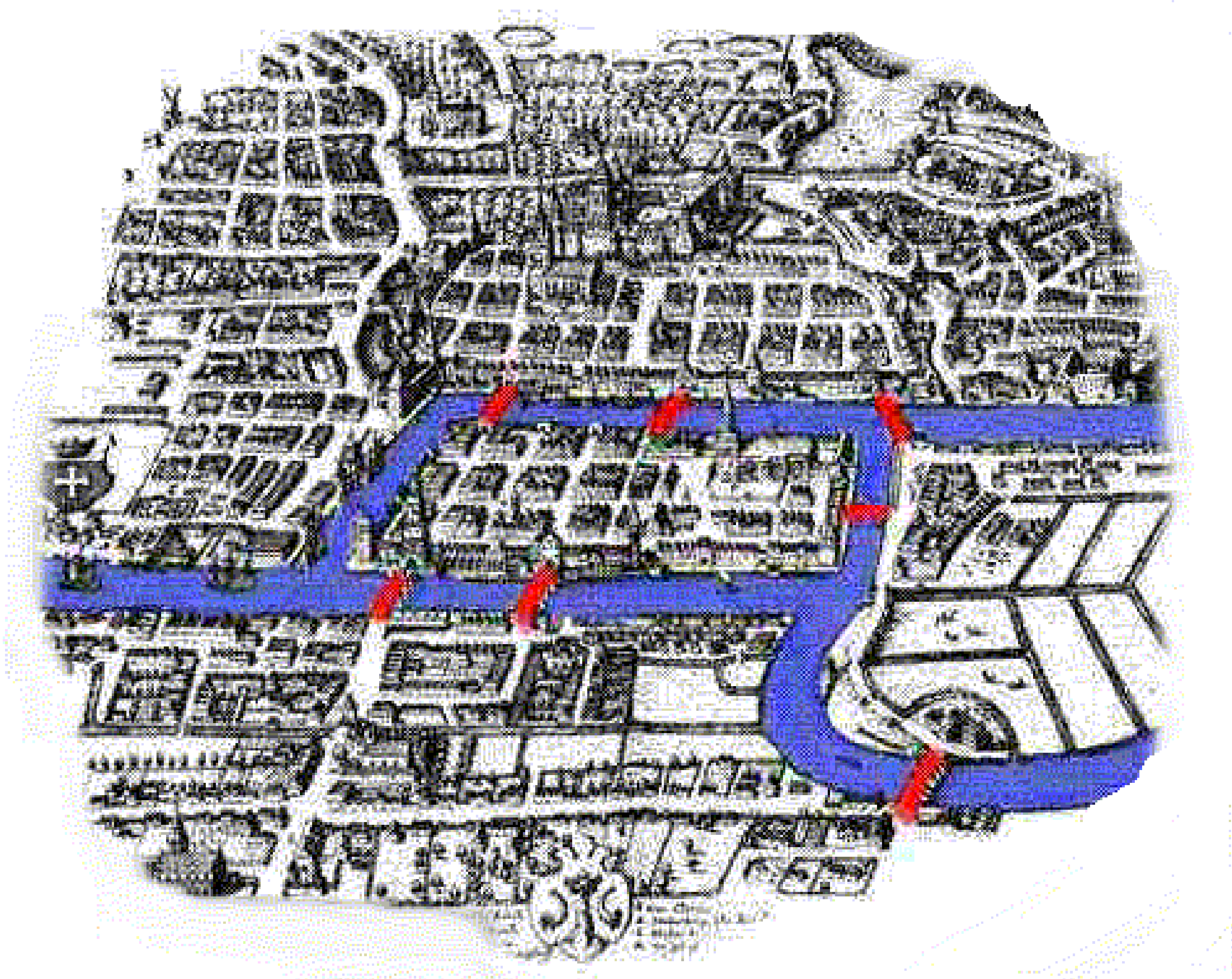
a) Der Grad einer Ecke ist gleich 0, falls von ihr keine Kante ausgeht.

b) In dem vollständigen Graphen K_n hat jede Ecke den Grad $n-1$, da sie mit jeder der $n-1$ anderen durch genau eine Kante verbunden ist.

Im allgemeinen haben die Ecken eines Graphen verschiedene Grade. **Beispiel:**

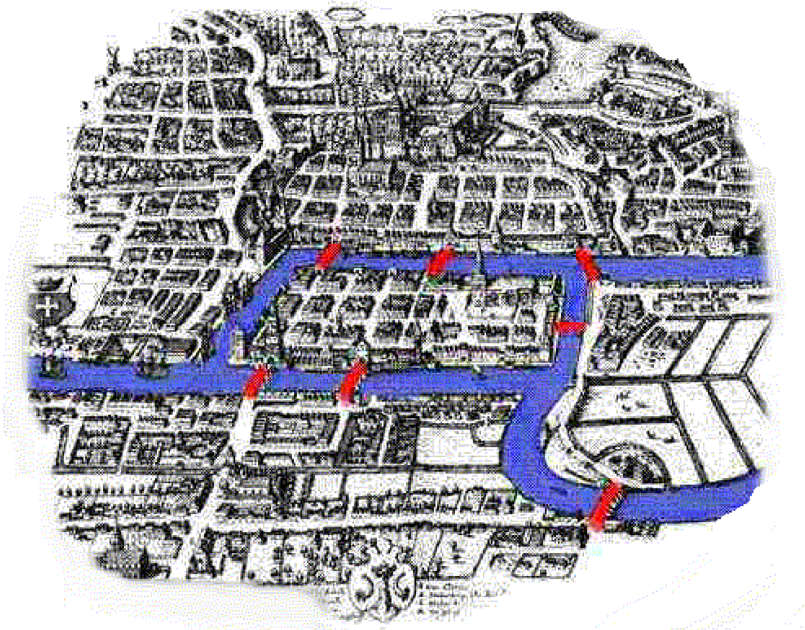


Über sieben Brücken musst du geh‘n …



Das Königsberger Brückenproblem

Dem Mathematiker Leonhard Euler wurde 1736 folgendes Problem gestellt, das ihn zur Entwicklung der **Graphentheorie** geführt hat.



Durch Königsberg fließt die Pregel, die sich teilt und zwei Inseln umfließt. Diese sind untereinander und mit den Ufern wie abgebildet durch Brücken verbunden.

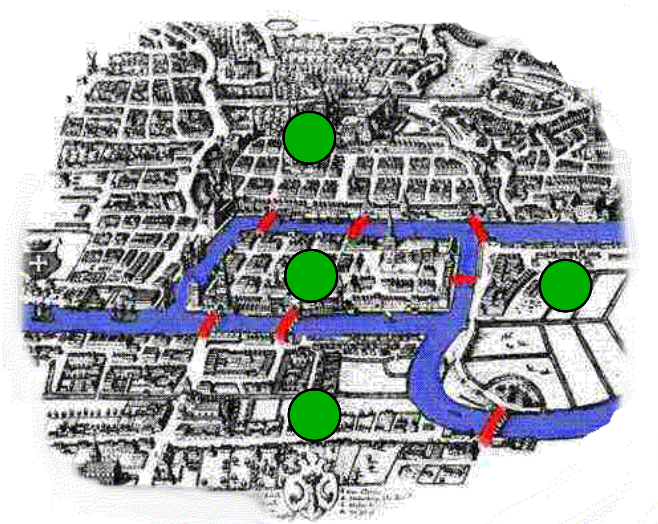
Schwierige Frage: Gibt es einen Spaziergang, der jede Brücke genau einmal überquert und bei dem man zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

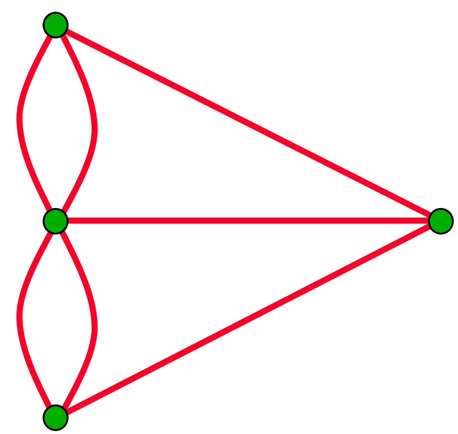
Übersetzung der Karte in einen Graphen

Jedem Landteil wird eine Ecke zugeordnet:

Jede Brücke wird mit einer Kante identifiziert:

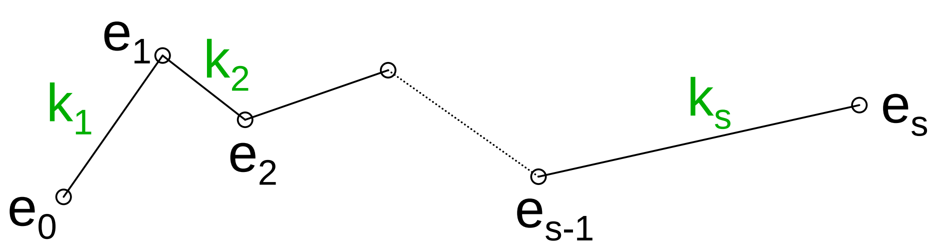
Aus der Landkarte erhält man so den folgenden Graphen:





Übersetzung des Problems (I): Eulersche Kreise

Sei G ein Graph. Eine Folge $k_1, k_2, \ldots, k_s$ von Kanten von G heißt **Kantenzug**, falls es Ecken $e_0, e_1, \ldots, e_s$ gibt, so dass die Kante k_1 die Ecken e_0 und e_1 verbindet, die Kante k_2 die Ecken e_1 und e_2 verbindet, ..., die Kante k_s die Ecken e_{s-1} und e_s verbindet.



Ein Kantenzug heißt ein **eulerscher Kreis** von G, wenn

– jede Kante von G genau einmal unter den $k_1, k_2, \ldots, k_s$ auftaucht

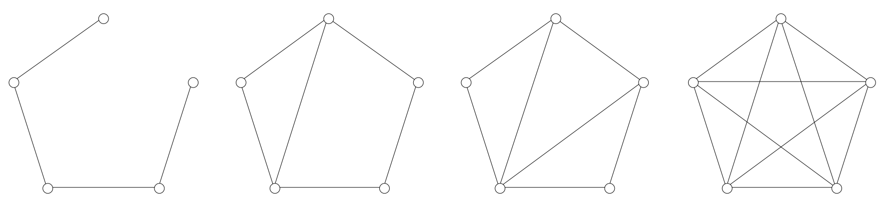
– und $e_s = e_0$ ist.

Übersetzung des Problems (II): Eulersche Graphen

Ein **eulerscher Graph** ist ein Graph, der einen eulerschen Kreis enthält.

Mit anderen Worten: Ein Graph ist eulersch, wenn man
- seine Kanten in einem Zug zeichnen kann und
- am Ende wieder am Ausgangspunkt anlangt.

Beispiel: K_5 ist eulersch:



Lösung des Königsberger Brückenproblems

Der gesuchte Spaziergang, der jede Brücke genau einmal überquert und zum Startpunkt zurückkehrt, entspricht einem eulerschen Kreis.

Unsere **Frage** lautet also: Ist der Graph des Königsberger Brückenproblems eulersch?

Eine **Antwort** gibt der

Satz von Euler (1736): Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

Damit gelang Euler die Lösung des Königsberger Brückenproblems: Der Graph des Problems hat Ecken vom Grad $3, 3, 3, 5$. Also ist er nicht eulersch. Ein solcher Spaziergang ist nicht möglich!

Beweis des Satzes von Euler

Sei e eine beliebige Ecke von G. Der eulersche Kreis durchquert die Ecke e ein paar Mal, sagen wir a mal.

Behauptung: Der Grad der Ecke e ist gleich $2a$, also eine gerade Zahl.

Denn: Bei jedem Durchgang durch e verbraucht der eulersche Kreis zwei Kanten; in a Durchgängen werden also $2a$ Kanten erfasst. Da keine Kante zweimal benutzt werden darf, ist der Grad von e also mindestens gleich $2a$. Der Grad kann aber auch nicht größer sein, da jede Kante (also auch jede Kante, die an e angrenzt) in dem eulerschen Kreis mindestens einmal vorkommen muss.

Damit ist der Grad von e wirklich gleich $2a$, und der Satz ist bewiesen.

Umkehrung des Satzes von Euler

Es gilt auch die

Umkehrung des Satzes von Euler: Wenn in einem zusammenenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Folgerung: Jeder vollständige Graph K_n mit ungeradem n (also K_3, K_5, K_7, ...) ist eulersch.

Denn: Jede Ecke von K_n hat den Grad $n–1$; und wenn n ungerade ist, ist $n–1$ gerade.

Das Haus des Nikolaus

Offene eulersche Linien

Eine **offene eulersche Linie** ist ein Kantenzug,

- der jede Kante genau einmal durchquert,
- wobei die Anfangsecke verschieden von der Endecke ist.

Also kann ein Graph genau dann „in einem Zug” gezeichnet werden, wenn er einen eulerschen Kreis oder eine offene eulersche Linie besitzt.

Satz: Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann eine offene eulersche Linie, wenn er genau 2 Ecken ungeraden Grades besitzt. Wenn dies der Fall ist, so beginnt die offene eulersche Linie an der einen Ecke ungeraden Grades und endet an der anderen.

Beweis der Hinrichtung

Wir müssen zwei Richtungen zeigen.

1. Richtung: „Wenn G eine offene eulersche Linie hat, dann gibt es genau 2 Ecken mit ungeradem Grad.”

G habe eine offene eulersche Linie mit Anfangsecke a und Endecke e.

Trick: Wir denken uns eine zusätzliche Kante k* zwischen a und e. Dann wird aus der offenen eulerschen Linie eine geschlossene. Nach dem Satz von Euler hat dann also jede Ecke geraden Grad.

Nun vergessen wir k* wieder. Jede Ecke verschieden von a und e hat dann immer noch geraden Grad, während sich der Grad von a und e jeweils um 1 erniedrigt hat, also jetzt ungerade ist. Also sind a und e die einzigen Ecken ungeraden Grades.

Beweis der Rückrichtung

2. Richtung: „Wenn G genau 2 Ecken mit ungeradem Grad hat, dann gibt es eine offene eulersche Linie.”

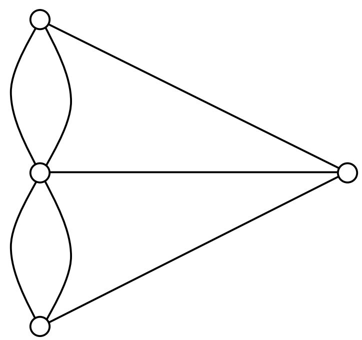
Sei G ein zusammenhängender Graph, der genau zwei Ecken a und e ungeraden Grades besitzt.

Trick: Wir denken uns eine zusätzliche Kante k^* zwischen a und e. Diese hat den Effekt, dass jetzt jede Ecke geraden Grad hat. Nach der Umkehrung des Satzes von Euler hat der Graph mit der Kante k^* eine geschlossene eulersche Linie.

Wenn wir k^* wieder vergessen, wird aus der geschlossenen eulerschen Linie eine offene mit der Anfangsecke a und der Endecke e. Also hat G eine offene eulersche Linie.

Bsp.: Gibt es „offene Spaziergänge“ durch Königsberg?

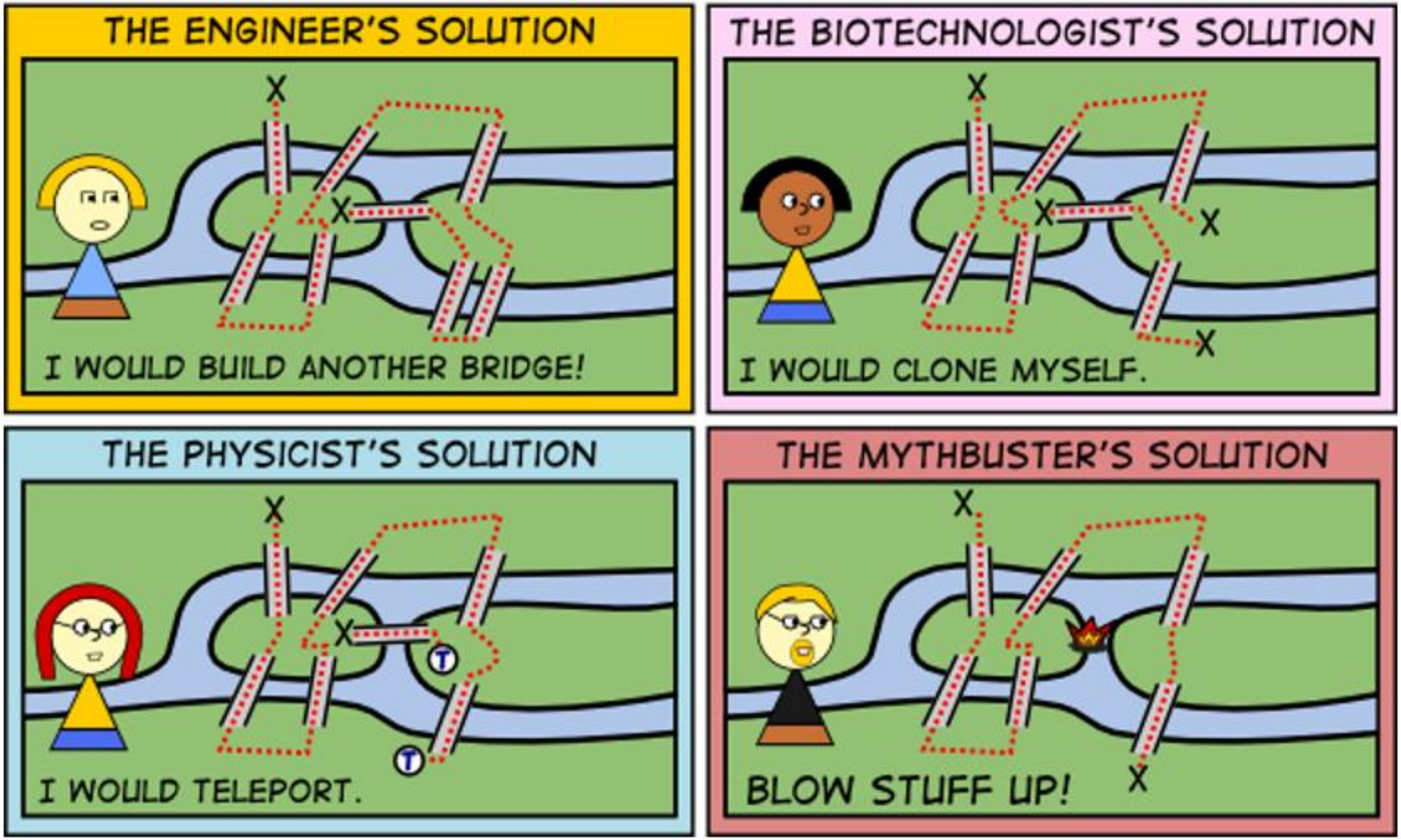
Der Graph des Königsberger Brückenproblems hat vier Ecken ungeraden Grades.



Also enthält er auch keine offene Linie.

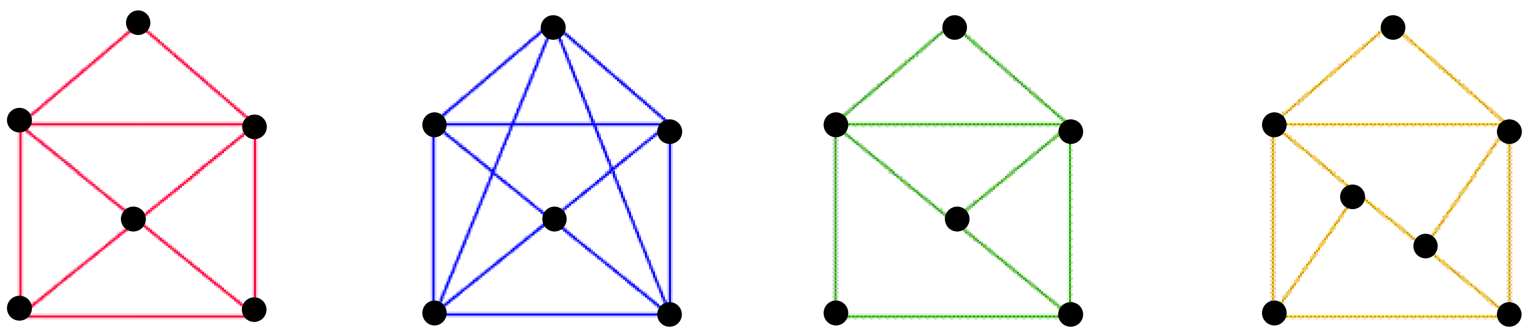
Es gibt also keinen Spaziergang durch Königsberg, der jede Brücke genau einmal überquert – selbst wenn der Startpunkt verschieden vom Endpunkt sein darf.

Lösungen des Königsberger Brückenproblems ;-)



Übung

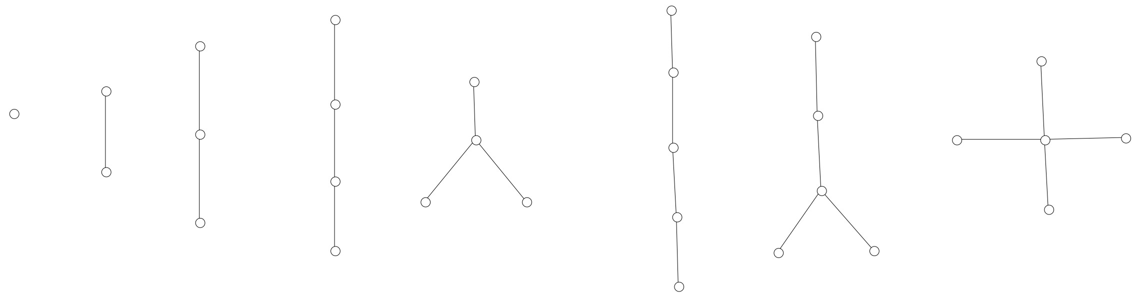
Gibt es einen eulerschen Kreis oder eine offene eulersche Linie?



Bäume

Ein **Baum** ist ein Graph, der zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält.

Beispiel: Alle Bäume mit höchstens fünf Ecken:



Bemerkung: Wir betrachten nur Bäume mit endlich vielen Ecken.

Hilfssatz über Endecken

Eine **Endecke** eines Baums ist eine Ecke vom Grad 1.

Hilfssatz. Jeder Baum (bis auf den Baum, der nur aus einer Ecke besteht) hat mindestens eine Endecke.

Beweis: Wir starten mit einer beliebigen Ecke e_0. Wir gehen von e_0 aus über eine Kante zu einer Ecke e_1. Wenn e_1 eine Endecke ist, so ist alles gut. Wenn nicht, können wir über eine neue Kante von e_1 aus zu einer Ecke e_2 gelangen. Wenn e_2 eine Endecke ist, sind wir fertig. Sonst gehen wir über eine neue Kante zu einer Ecke e_3. Usw.
Alle diese Ecken sind verschieden (sonst gäbe es einen Kreis). Da es nur endlich viele Ecken gibt, muss obige Konstruktion einmal abbrechen. Die Ecke, an der es nicht weitergeht, ist eine Endecke.

Satz über die Anzahl von Ecken und Kanten

Satz: Für jeden Baum G mit n Ecken und m Kanten gilt $n = m + 1$.

Beweis durch Induktion nach der Anzahl n der Ecken:

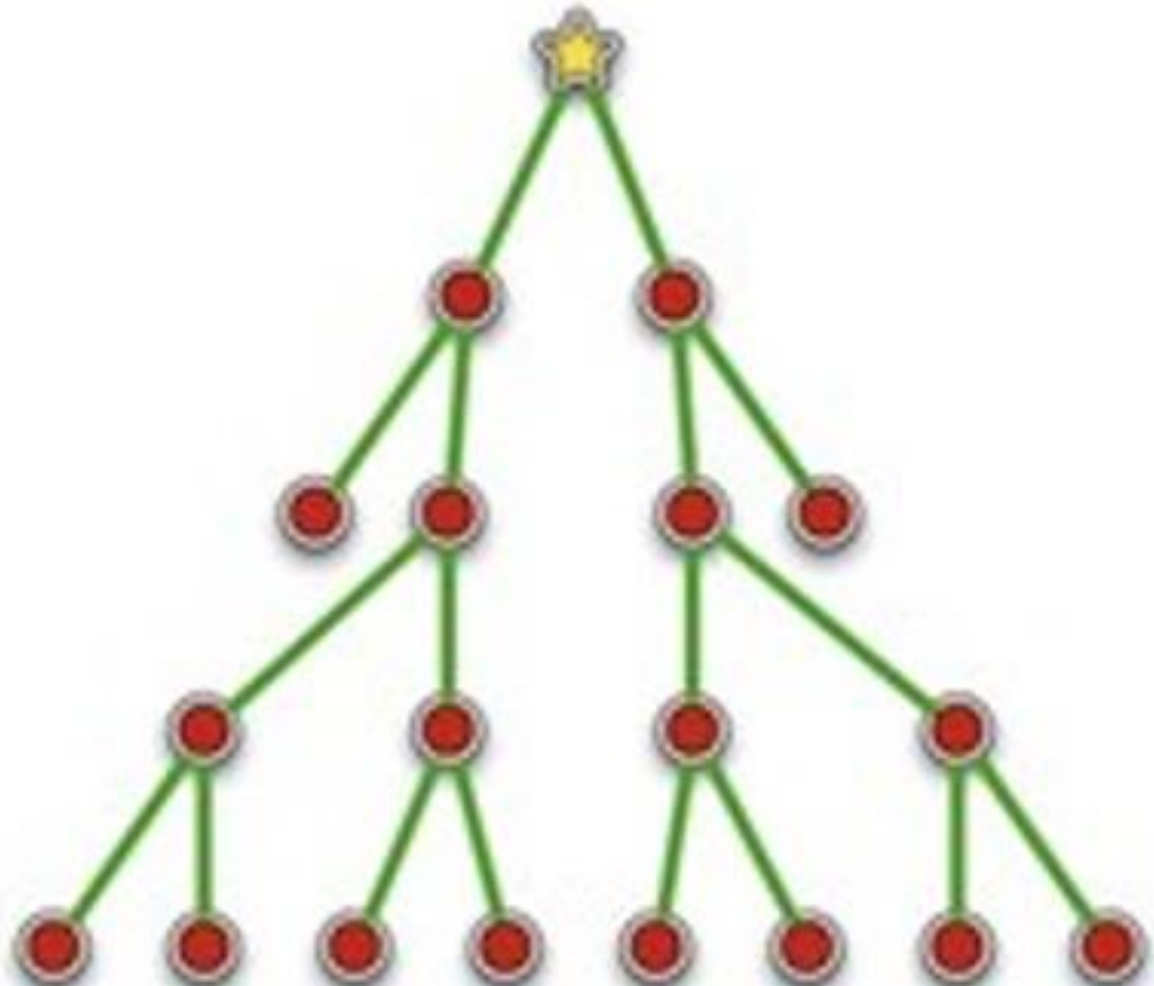
Induktionsbasis: Im Fall $n = 1$ besteht G nur aus einer Ecke und keiner Kante; also ist $m = 0$, und somit $n = m+1$.

Induktionsschritt: Angenommen, die Behauptung gilt bis zu einem gewissen n. Daraus müssen wir die Gültigkeit für $n+1$ folgern.

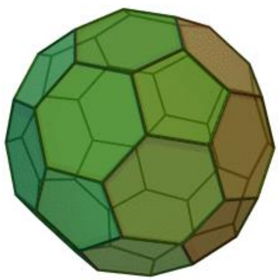
Sei G ein Baum mit $n+1$ Ecken. Nach dem Hilfssatz hat G eine Endecke e^*. Entfernen wir e^* und die an e^* angrenzende Kante k^*, so erhalten wir einen Baum G^* mit nur n Ecken. Nach Induktionsvoraussetzung hat G^* also genau $n–1$ Kanten. Da G genau eine Kante mehr als G^* hat, hat G genau n Kanten.

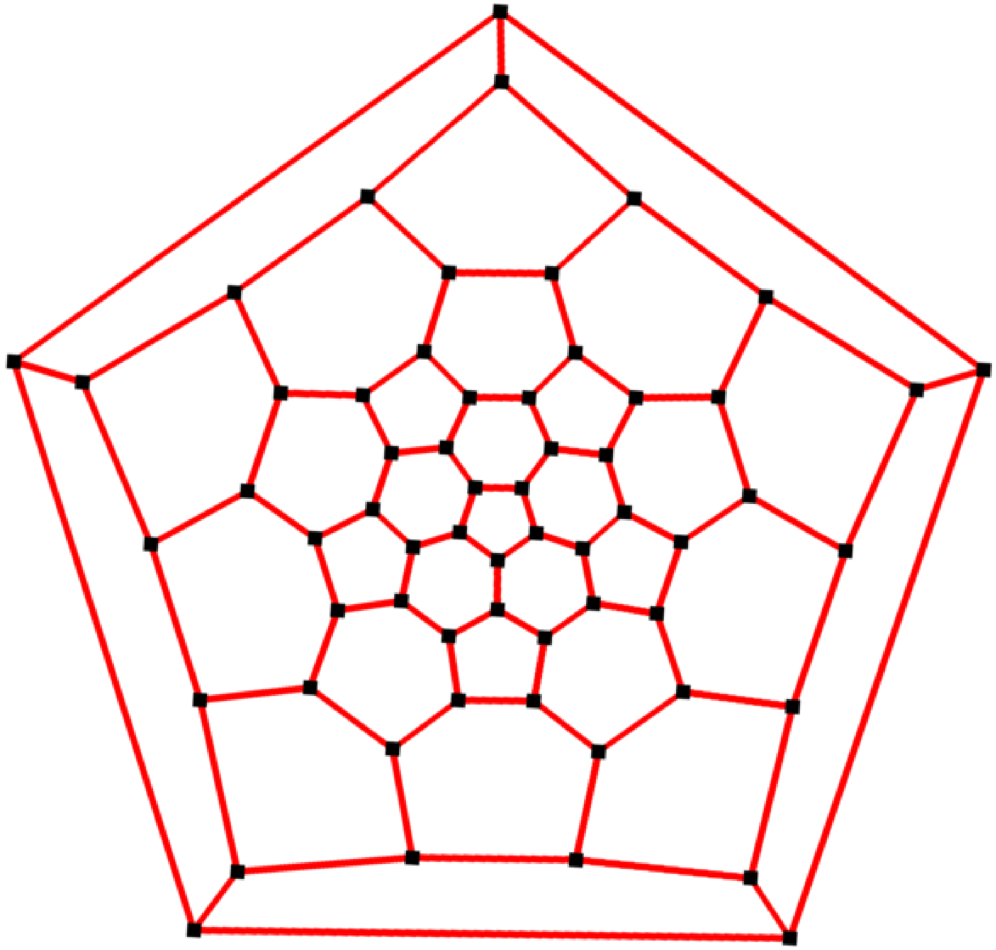
Damit ist der Induktionsschritt bewiesen, die Aussage gilt allgemein.

Beispiel



5.2 Planarität





Darstellung von Graphen

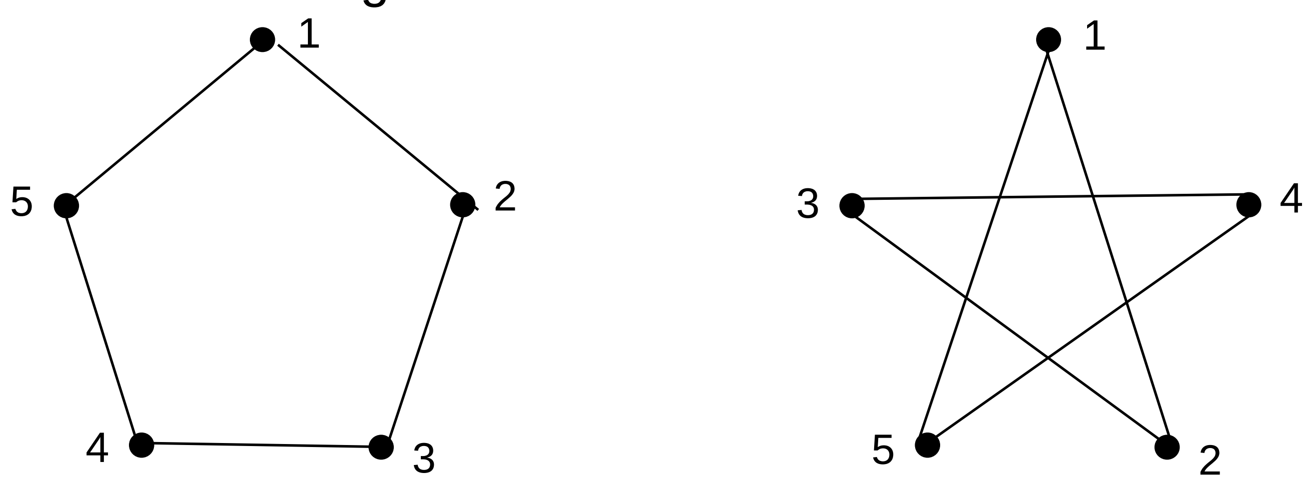
Die grafische Darstellung eines Graphen ist nicht eindeutig.

Beispiel: Der Graph G = (E, K) mit

- der Eckenmenge E = {1, 2, 3, 4, 5},

- der Kantenmenge K = {{1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, {5, 1}}

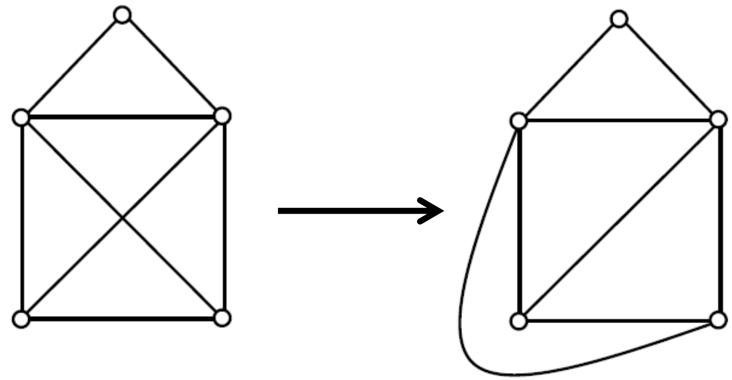
kann verschieden dargestellt werden:



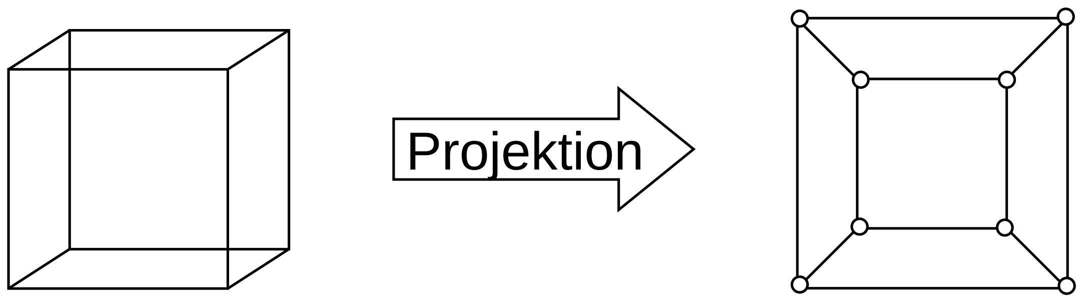
Planare Graphen

Ein Graph heißt **planar**, falls er ohne Überschneidungen von Kanten in der Ebene gezeichnet werden kann.

Beispiele: (a) Das Haus vom Nikolaus ist planar, denn es kann überschneidungsfrei gezeichnet werden:



(b) Projektionen konvexer Polyeder, z. B. eines Würfels:

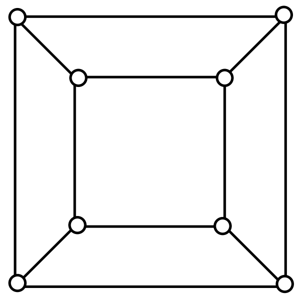


Gebiete

Die überschneidungsfreie Darstellung eines planaren Graphen zerlegt die Ebene in **Gebiete**. Wir bezeichnen die **Anzahl der Gebiete** mit **g**. Es gibt stets mindestens ein Gebiet, das äußere Gebiet. D.h.: $g \geq 1$.

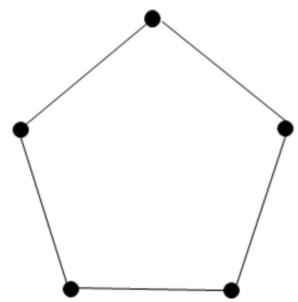
Beispiele:

(a) Der Graph



hat $g = 6$.

(b) Ein Graph mit $g = 2$ ist zum Beispiel:



(c) Bäume haben nur ein Außengebiet: $g = 1$.

Die Eulersche Polyederformel

Der folgende Satz liefert für planare Graphen einen wichtigen Zusammenhang zwischen der Zahl ihrer Ecken, Kanten und Gebiete.

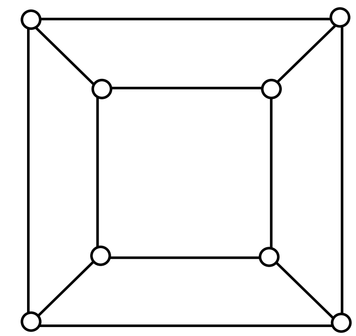
Eulersche Polyederformel. Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit n Ecken, m Kanten und g Gebieten. Dann gilt:

$$n - m + g = 2.$$

Beispiel: Für den abgebildeten Graph gilt

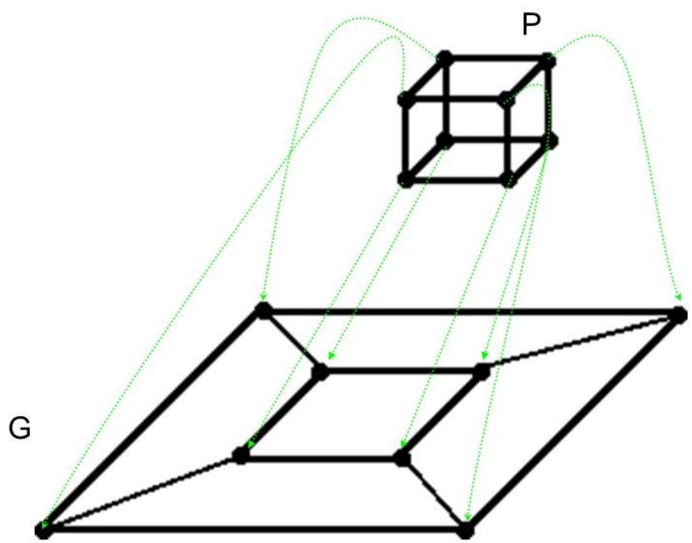
$$n = 8,\ m = 12,\ g = 6,$$

also $n - m + g = 8 - 12 + 6 = 2$.



Die Eulersche Polyederformel

Bemerkung: Konvexe Polyeder (z. B. Würfel, Pyramide, Fußball, …) lassen sich stets auf einen planaren Graphen projizieren (siehe Abb.). Daher liefert der Satz auch einen Zusammenhang zwischen der Eckenzahl n, der Kantenzahl m und der Flächenzahl g solcher Polyeder.



Beweis der Eulerschen Polyederformel

Beweis durch Induktion nach der Anzahl g der Gebiete.

Induktionsverankerung: Sei zunächst $g = 1$. Dann hat G keine Kreise, ist also ein Baum. Daher gilt nach dem letzten Satz $n = m+1$, das heißt $n – m + g = (m+1) – m + 1 = 2$.

Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Aussage gilt für ein g. Zu zeigen: Dann gilt sie auch für $g+1$.

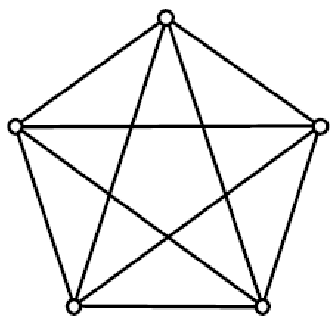
Induktionsschritt: G habe $g+1$ Gebiete. Da $g+1 > 1$ ist, ist G kein Baum, enthält daher einen Kreis. Wir entfernen eine Kante k^* dieses Kreises. Da k^* an zwei Gebiete von G angrenzt, hat der neue Graph G^* nur noch $g^* = g$ Gebiete. Also können wir auf G^* die Induktionsvoraussetzung anwenden (G^* hat $m–1$ Kanten und n Ecken):
$2 = n – (m–1) + g = n – m + (g+1)$. Also gilt die Aussage für $g+1$.

Einfache Graphen

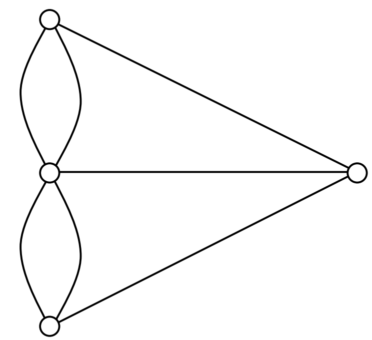
Ein Graph heißt **einfach**, wenn je zwei Ecken durch höchstens eine Kante verbunden sind.

Beispiele:

(a) einfach



(b) nicht einfach



Satz über planare Graphen

Satz. Sei G ein zusammenhängender einfacher planarer Graph mit $n \geq 3$ Ecken und m Kanten. Dann gilt: $m \leq 3n - 6$.

(D.h.: Ein planarer Graph hat relativ wenige Kanten.)

Beweis (durch trickreiche Abzählungen):

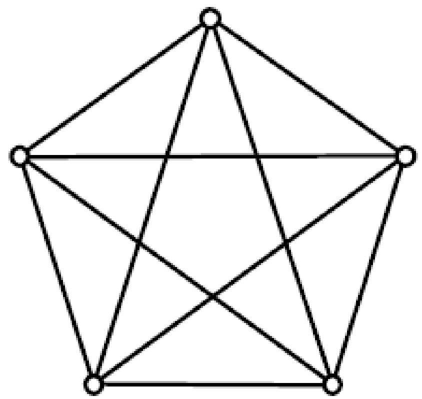
Für ein Gebiet L (wie „Land”) sei $m(L)$ die Anzahl der Kanten dieses Landes. Da jedes Land mindestens drei Kanten hat, gilt: $\sum_{L \text{ Gebiet}} m(L) \geq 3g$.

Nun zählen wir die Paare (k, L), wobei die Kante k ein Teil der Grenze des Gebiets L ist: $\sum_{L \text{ Gebiet}} m(L) \leq 2m$.

Zusammen folgt: $2m \geq 3g$, d.h. $g \leq 2m/3$. Einsetzen in die Eulersche Polyederformel: $n - m + 2m/3 \geq n - m + g = 2$, also $m \leq 3n - 6$.

Folgerungen

Folgerung. Der vollständige Graph K_5 ist *nicht* planar.



Beweis: Wäre K_5 planar, so könnte nach obigem Satz seine Anzahl von Kanten höchstens $3n-6 = 9$ sein. K_5 hat jedoch $\binom{5}{2} = 10$ Kanten.

Folgerungen

Den folgenden Satz werden wir später benötigen.

Satz. Sei G ein zusammenhängender einfacher planarer Graph. Dann gibt es mindestens eine Ecke, die einen Grad ≤ 5 hat.

Beweis: Die Behauptung ist klar für $n = 1$ und $n = 2$. Sei nun $n \geq 3$: Wenn jede Ecke mindestens den Grad 6 hätte, folgte aus dem vorigen Satz

$$6 \cdot n \leq \sum_{x \text{ Ecke}} \mathrm{Grad}(x) = 2m \leq 6n - 12,$$

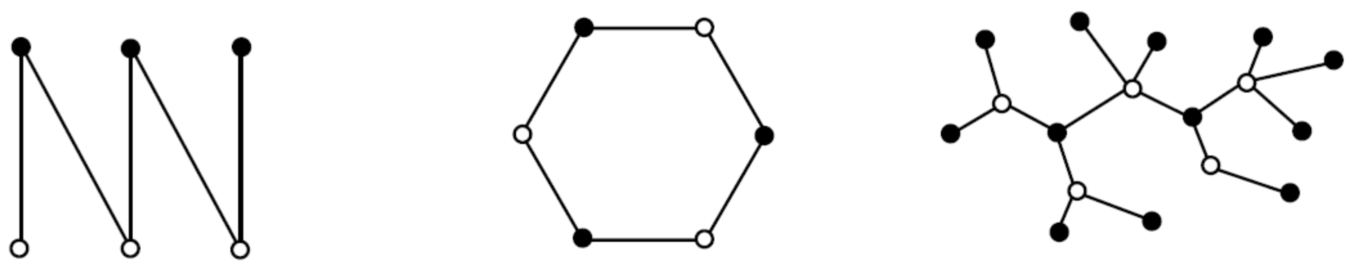
das ist ein Widerspruch.

Bipartite Graphen

Ein Graph heißt **bipartit**, wenn man seine Ecken in zwei Klassen E_1 und E_2 einteilen kann, dass jede Kante von einer Klasse zur anderen führt. Die Menge $\{E_1, E_2\}$ nennt man dann auch **Bipartition**.

Mit anderen Worten: Ein Graph ist bipartit, wenn man seine Ecken so schwarz (E_1) und weiß (E_2) färben kann, dass jede Kante eine schwarze und eine weiße Ecke verbindet.

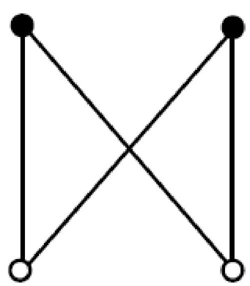
Beispiele:

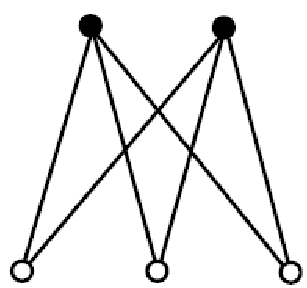


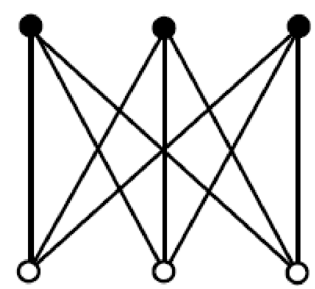
Vollständig bipartite Graphen

Ein bipartiter Graph mit Bipartition $\{E_1, E_2\}$ heißt **vollständig bipartit**, wenn jede Ecke von E_1 mit jeder Ecke von E_2 durch genau eine Kante verbunden ist. Wenn E_1 genau m und E_2 genau n Ecken hat, bezeichnet man den vollständig bipartiten Graphen mit Bipartition $\{E_1, E_2\}$ auch mit $\mathbf{K_{m,n}}$.

Beispiele: $K_{2,2}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$





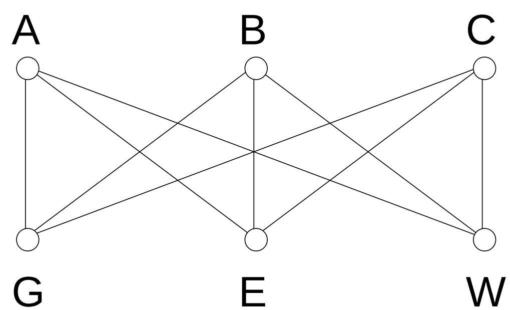


Anwendungsproblem

Problem: Drei Häuser A, B, C sollen jeweils durch eine Leitung mit dem Gaswerk (G), Elektrizitätswerk (E) und dem Wasserwerk (W) verbunden werden.

Kann man dies so machen, dass sich die Leitungen nicht überkreuzen?

Graphentheoretische Formulierung: Ist der vollständig bipartite Graph $K_{3,3}$ planar?



Lösung des Problems

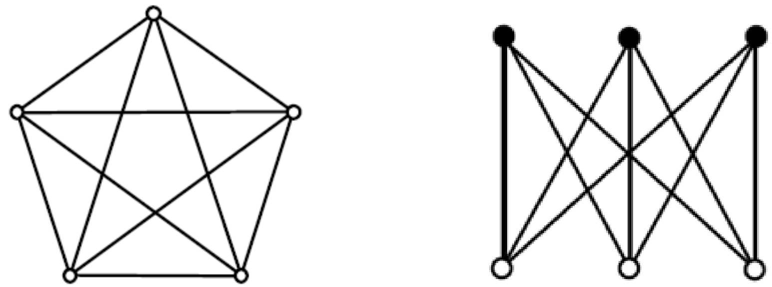
Es ist nicht möglich!

Beweis: Angenommen, wir könnten diesen Graphen als planaren Graphen zeichnen. Dann hätte dieser $n = 6$ Ecken, $m = 9$ Kanten, und nach der Eulerschen Polyederformel könnten wir die Anzahl der Länder ausrechnen: $2 = n - m + g = 6 - 9 + g$, also $g = 5$.

Jedes Gebiet des Graphen muss eine gerade Anzahl von Ecken haben, denn Häuser und Versorgungswerke wechseln sich ab. Daher hat jedes Gebiet mindestens 4 Ecken und also auch mindestens 4 Kanten. Daher gilt $\sum_{L \text{ Gebiet}} m(L) \geq 4g$,

und daher $2m \geq 4g$. In unserem Fall bedeutet dies $18 = 2m \geq 4g = 20$. Dieser Widerspruch zeigt, dass $K_{3,3}$ nicht planar ist.

Alle nichtplättbaren Graphen



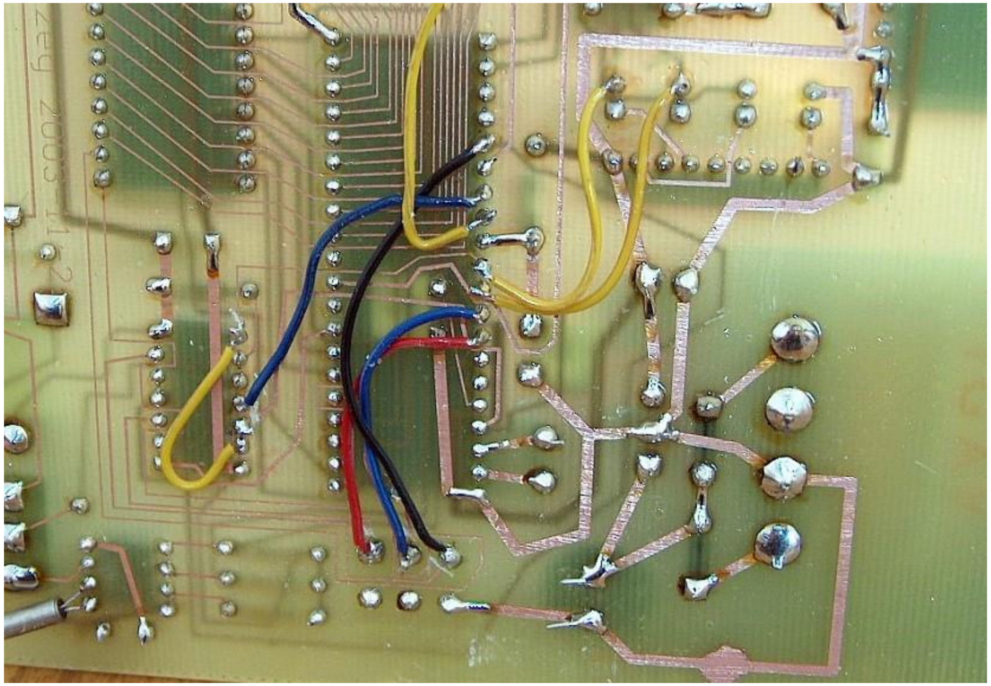
Bemerkung. Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht „irgendwelche“ nichtplanaren Graphen – im Gegenteil!

Man kann beweisen, dass *jeder* nichtplanare Graph K_5 oder $K_{3,3}$ enthalten muss. Dies sagt der berühmte **Satz von Kuratowski**.

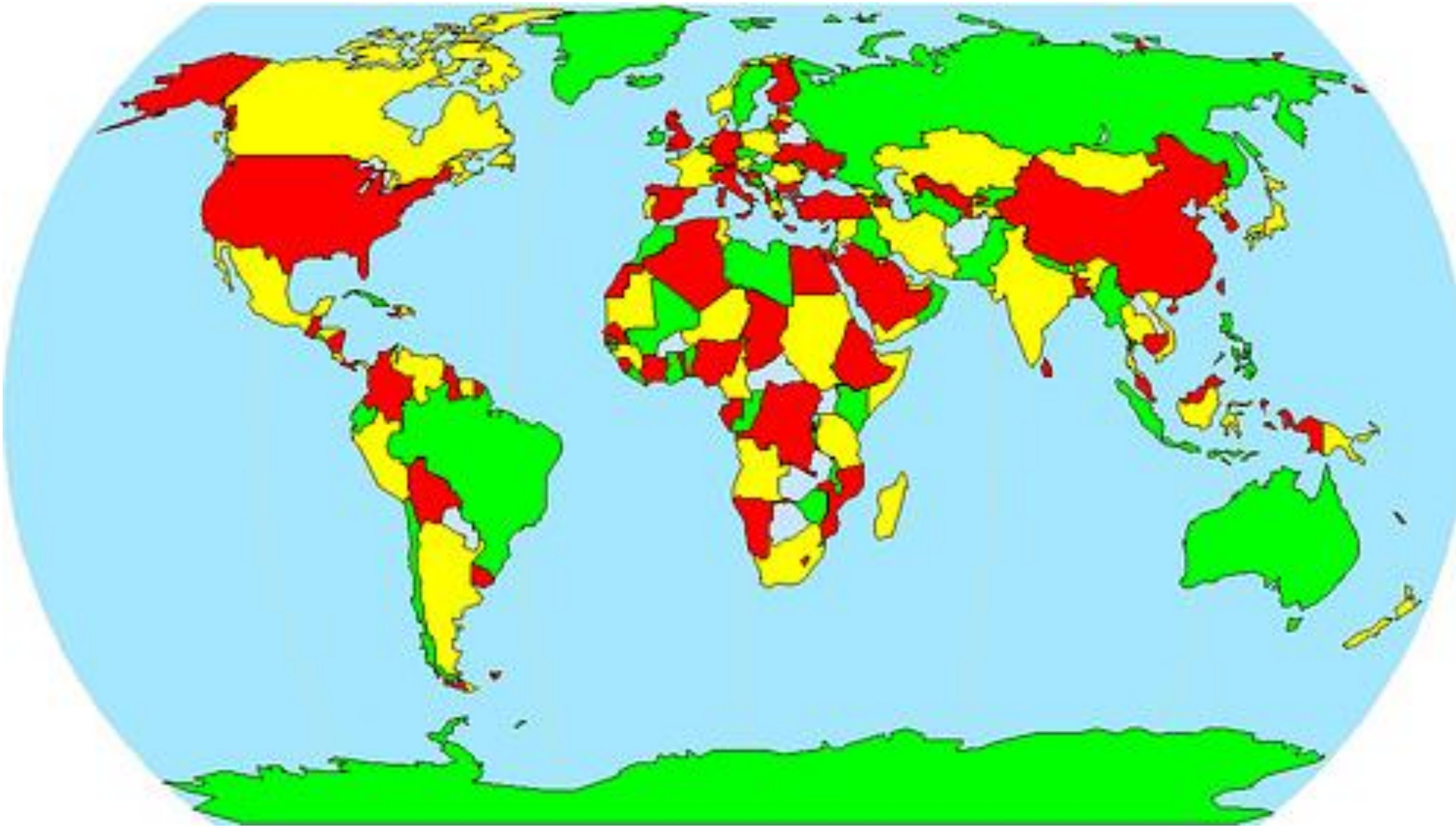
Anwendung

Planare Graphen spielen bei der **Entwicklung von Leiterplatten** eine wichtige Rolle:

Bestimmte Kontakte müssen verbunden werden, ohne andere Leiterbahnen zu kreuzen.



5.3 Färbungen



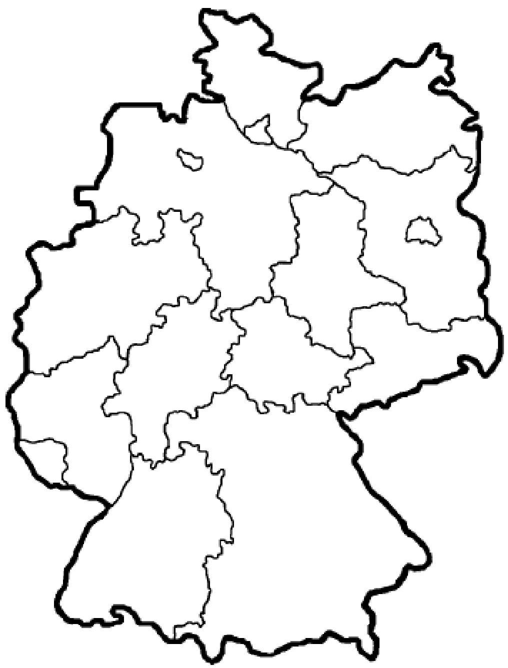
Färbungen von Landkarten

Um 1850 kam die Frage auf:

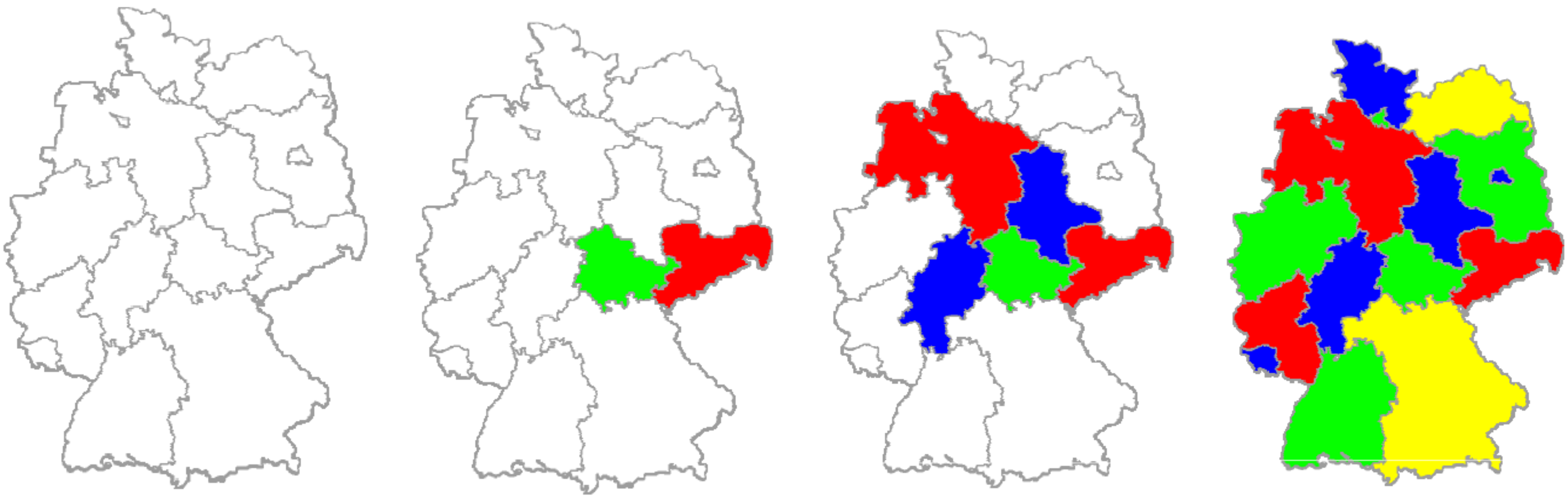
Wie viele Farben braucht man mindestens, um eine beliebige Landkarte so zu färben, dass je zwei benachbarte Länder verschiedene Farben haben?

Übung

Färben Sie die Deutschlandkarte mit möglichst wenigen Farben so, dass benachbarte Bundesländer unterschiedlich gefärbt sind.



Mindestens 4 … und 4 reichen auch!



Vierfarbenvermutung:

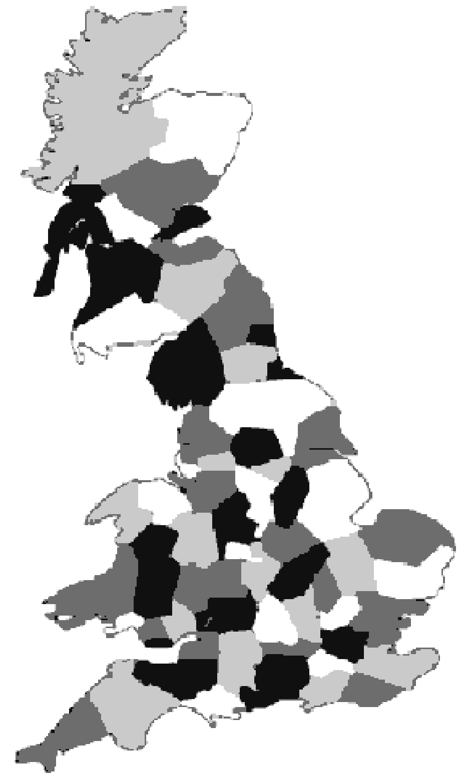
Vier Farben genügen! - Immer!

Vierfarbenvermutung - Die Anfänge

1852: Mathematikstudent F. **Guthrie** färbt Karte von England mit Grafschaften und äußert zum ersten Mal die Vierfarbenvermutung.

Sein Bruder erzählte es seinem Professor A. de **Morgan**, der seinem Kollegen W. R. **Hamilton** in einem Brief davon berichtet.

Hamilton interessierte sich jedoch nicht sehr dafür.



Vierfarbenvermutung - Beweisversuche

1878: „On the colouring of maps” von A. **Cayley**.

1879: „On the geographical problem of the four colors” von A. B. **Kempe**: erster „Beweis“ des Vierfarbensatzes.

1890: P. J. **Heawood** entdeckt einen Fehler in Kempes Beweis. Heawood kann den Fünffarbensatz zeigen („5 Farben reichen auf jeden Fall“).

H. **Heesch** (1906-1995): Entwickelt von Kempes Methoden jahrzehntelang subtil weiter und kommt zu dem Schluss, dass das Problem mit Hilfe eines Rechners lösbar sein müsste. Sein Antrag an die DFG wird aber abgelehnt!

Der Beweis des Vierfarbensatzes mit dem Computer

1976: K. **Apel** und W. **Haken** (University of Illinois at Urbana) bauen auf den Arbeiten von Heesch auf, haben Geld für einen Computer und können das Problem lösen.

Der Satz ist endlich bewiesen!

Der Beweis hat viel Aufsehen erregt: Zum ersten Mal beim Beweis eines Satzes wurde der Computer essentiell eingesetzt.
Auch heute noch wünschen sich viele Mathematiker einen schönen, kurzen Beweis, den man z.B. in einer Vorlesung darstellen könnte.

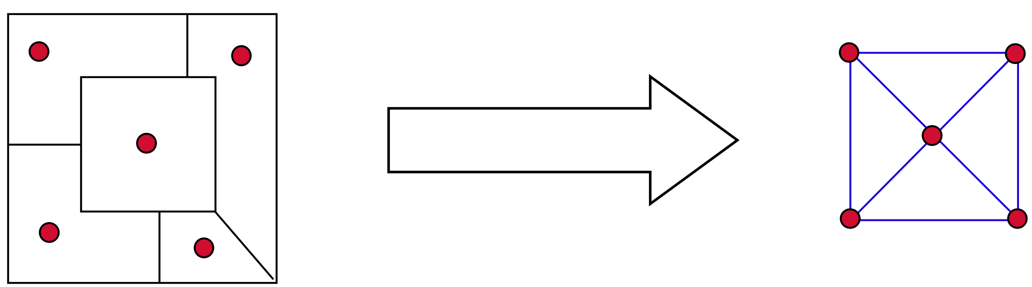
Übersetzung der Landkarte in einen Graphen

Wir zeichnen in jedem Land einen Punkt (die „Hauptstadt”) aus; das sind die Ecken des Graphen.

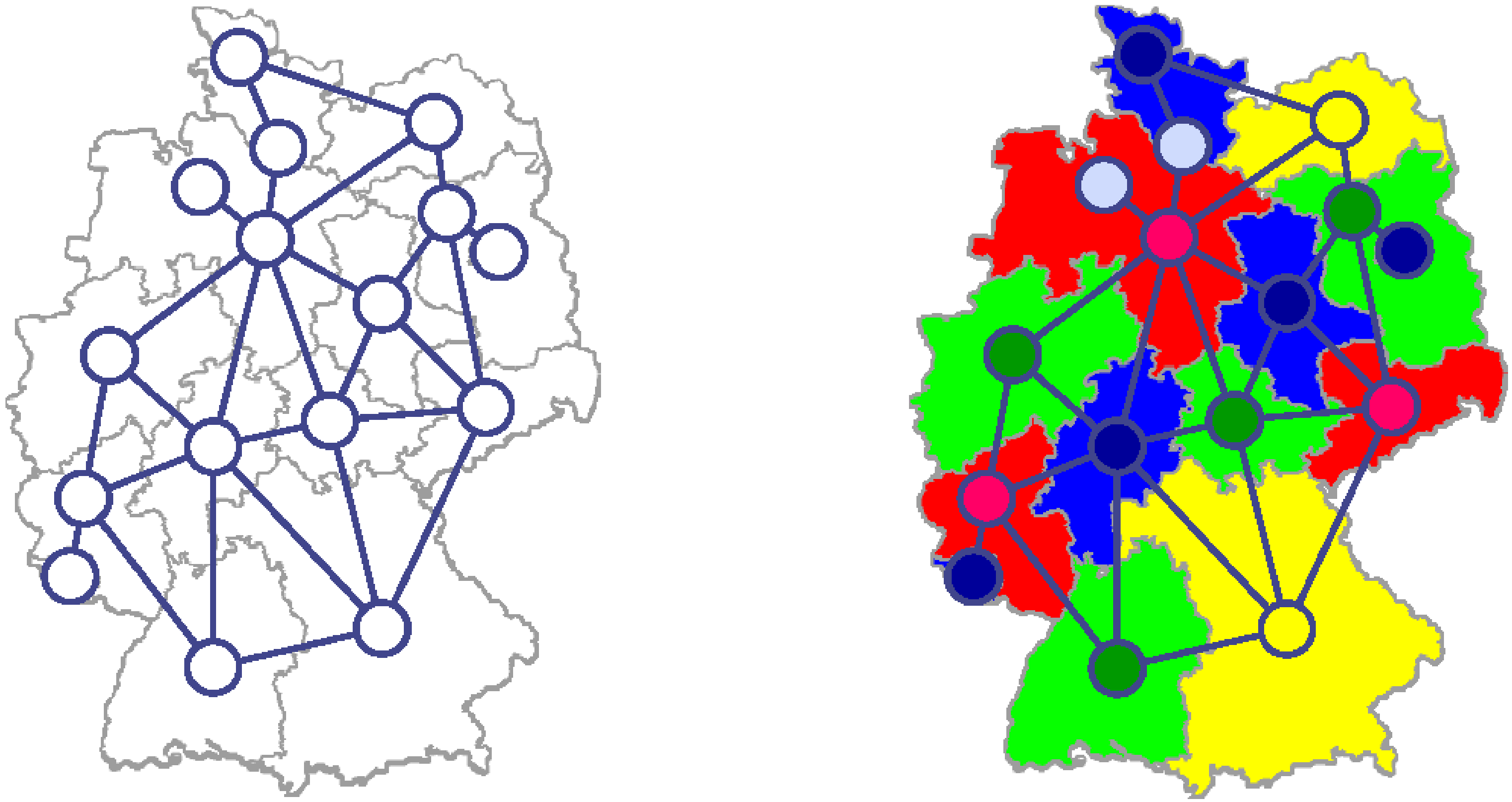
Wir verbinden zwei Ecken durch eine Kante, wenn die entsprechenden Länder ein Stück Grenze gemeinsam haben.

Auf diese Weise erhält man einen planaren Graphen.

Beispiel:



Modellierung durch Graphen



Die chromatische Zahl $\chi(G)$

Eine **Färbung** eines Graphen ist eine Zuordnung von „Farben” zu den Ecken, so dass keine zwei durch eine Kante verbundenen Ecken die gleiche Farbe haben.

Die **chromatische Zahl** $\chi(G)$ eines Graphen G ist die kleinste natürliche Zahl n, so daß G mit n Farben gefärbt werden kann.
(χ ist der griechische Buchstabe „chi”, der Anfangsbuchstabe des Wortes „chroma” = Farbe.)

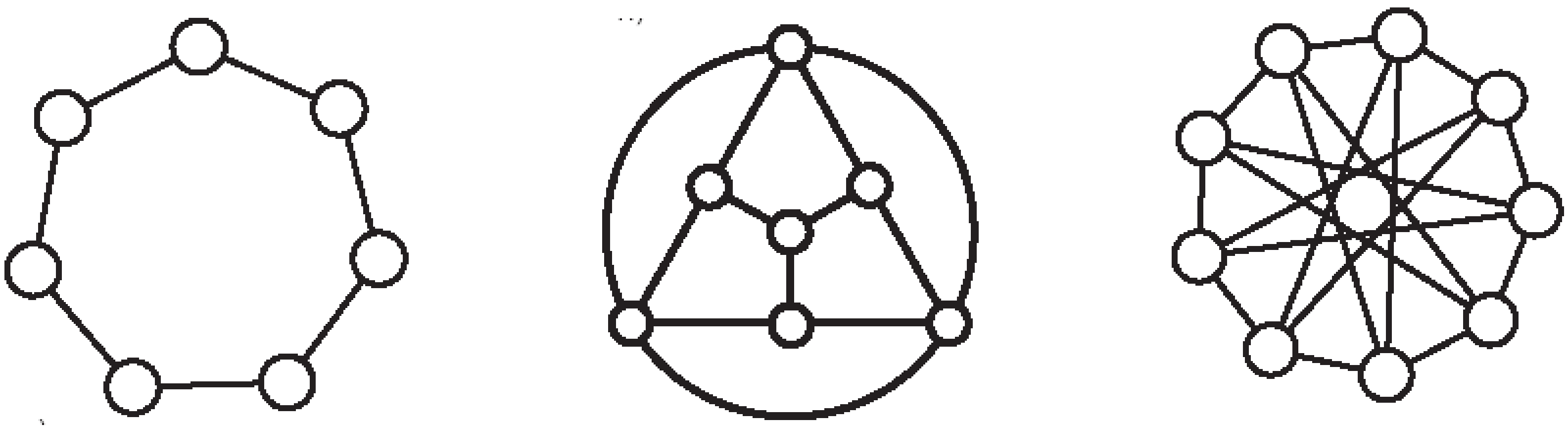
Beispiele:

(a) Kreise gerader Länge haben $\chi = 2$, Kreise ungerader Länge $\chi = 3$.

(b) Für vollständige Graphen gilt: $\chi(K_n) = n$.

Übung

Bestimmen Sie die chromatischen Zahlen der folgenden Graphen:

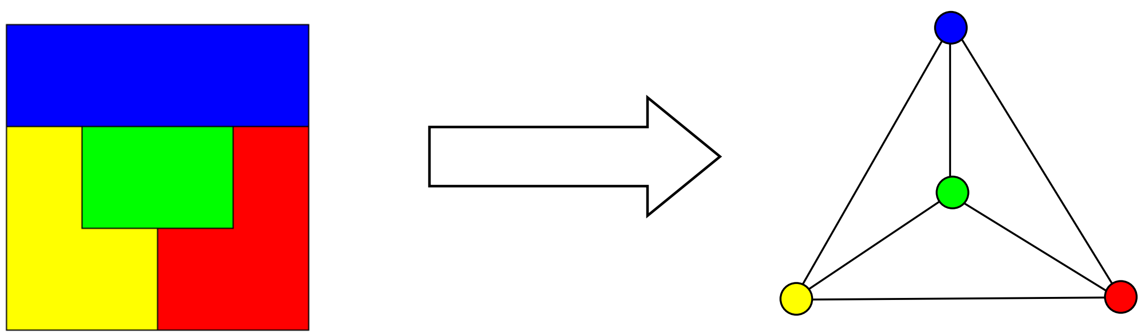


Übersetzung des Färbungsproblems in Graphentheorie

Übersetzung des Problems: Die Ecken des Graphen sollen so gefärbt werden, dass je zwei durch eine Kante verbundene Ecken verschiedene Farben haben. Wie viele Farben benötigt eine solche Färbung?

Die **Vierfarbenvermutung** lautet nun: Wenn G ein planarer Graph ist, so ist $\chi(G) \leq 4$.

Folgendes **Beispiel** zeigt, dass nur 3 Farben *nicht* genügen:



Färbung und maximaler Grad

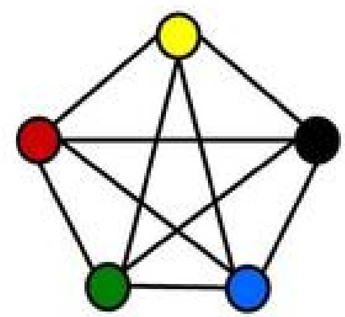
Sei $\Delta(G)$ („delta“) der **maximale Grad** von G.

Satz: Für jeden Graphen G (nicht nur für planare) gilt

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Das bedeutet: Jeder beliebige Graph kann mit $\Delta(G) + 1$ Farben gefärbt werden.

Bemerkung: Gleichheit (also $\chi(G) = \Delta(G) + 1$) gilt nur für vollständige Graphen ($\chi = n$, $\Delta = n-1$) und Kreise ungerader Länge ($\chi = 3$, $\Delta = 2$). Dies ist der Inhalt des **Satzes von Brooks** (1941).



Beweis mit Greedy Algorithmus

Beweis. Mit folgendem **Greedy Algorithmus** („greedy“ = gierig) kann man einen beliebigen Graphen G mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben färben:

Die Farben seien die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... Die Ecken seien nummeriert: e_1, e_2, e_3, ... Wir färben e_1 mit der Farbe 1. Wenn wir zu irgendeiner Ecke e_i kommen, färben wir sie mit der kleinsten Farbe, die nicht verboten ist. Wie viele Farben sind für e_i verboten? Schlimmstenfalls ist e_i eine Ecke mit maximalem Grad $\Delta = \Delta(G)$ und alle Δ Nachbarecken von e_i sind bereits verschieden gefärbt. In diesem Fall sind Δ Farben verboten. Dann gibt es aber immer noch eine, die wir wählen können.

Der Vierfarbensatz

Für *planare* Graphen gilt etwas viel besseres:

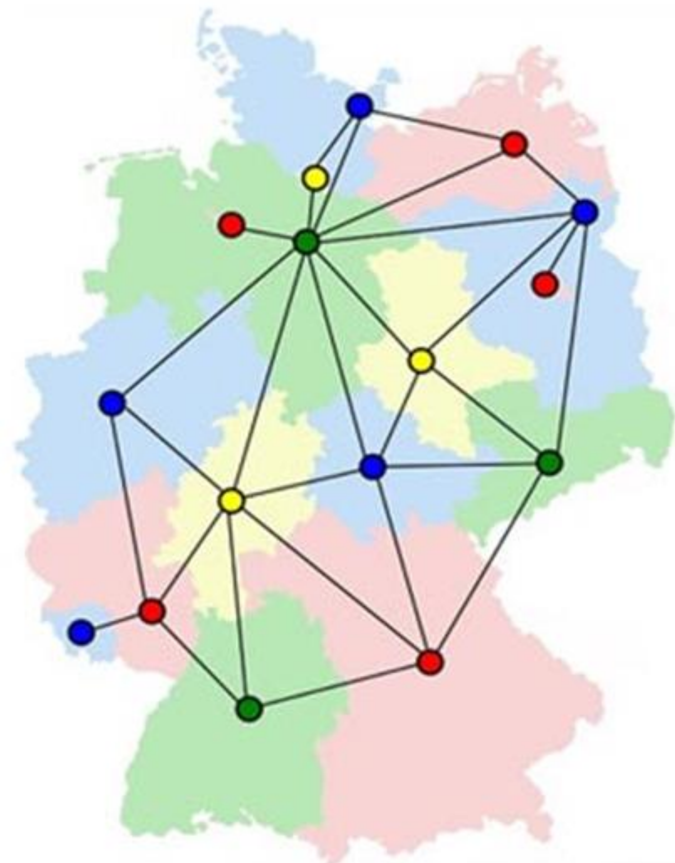
Vierfarbensatz. Jeder planare Graph kann mit vier Farben gefärbt werden. D.h.: Für jeden planaren Graphen G gilt:

$$\chi(G) \leq 4 .$$

Das bedeutet: In jeder ebenen Landkarte können die Länder so mit vier Farben gefärbt werden, dass je zwei Länder, die ein Stück gemeinsame Grenze haben, verschieden gefärbt sind.

Der **Beweis** (Apel und Haken, 1976) ist zu schwierig für eine Vorlesung.

Beispiel



Der Fünffarbensatz

Wir beweisen den

Fünffarbensatz (Heawood, 1890). Jeder planare Graph kann mit fünf Farben gefärbt werden.

Beweis. Wir gehen schrittweise vor und führen eine vollständige Induktion nach der Eckenzahl n durch.

Induktionsanfang: Für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ist die Aussage trivial: Jeder Graph mit höchstens 5 Ecken kann natürlich mit 5 Farben gefärbt werden.

Beweis des Fünffarbensatzes (I)

Induktionsvoraussetzung: Sei nun $n \geq 5$, und sei die Aussage richtig für n. Das bedeutet: Jeder planare Graph mit n Ecken kann mit 5 Farben gefärbt werden.

Induktionsschritt: Sei nun G ein planarer Graph mit $n+1$ Ecken. Wir müssen zeigen, dass auch G mit 5 Farben gefärbt werden kann.

Wir wissen, dass G eine Ecke e^* vom Grad ≤ 5 enthält. Wir entfernen e^* und alle an e^* anliegenden Kanten. So erhalten wir einen planaren Graphen G^* mit nur n Ecken. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt G^* eine Färbung mit 5 Farben.

Ziel: Mit dieser Färbung von G^* eine Färbung von G erstellen!

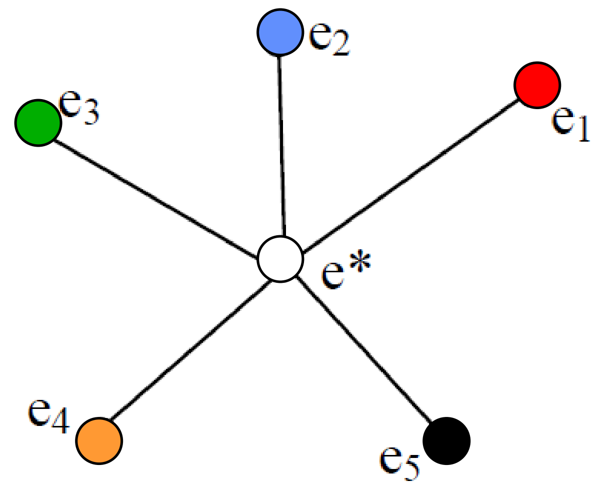
Beweis des Fünffarbensatzes (II)

1. Fall: Wenn die (≤ 5) zu e* benachbarten Ecken insgesamt mit höchstens 4 Farben gefärbt sind, dann kann e* mit der verbleibenden 5. Farbe gefärbt werden.

2. Fall: e* hat 5 Nachbarecken e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, die mit den Farben 1, 2, 3, 4, 5 gefärbt sind.

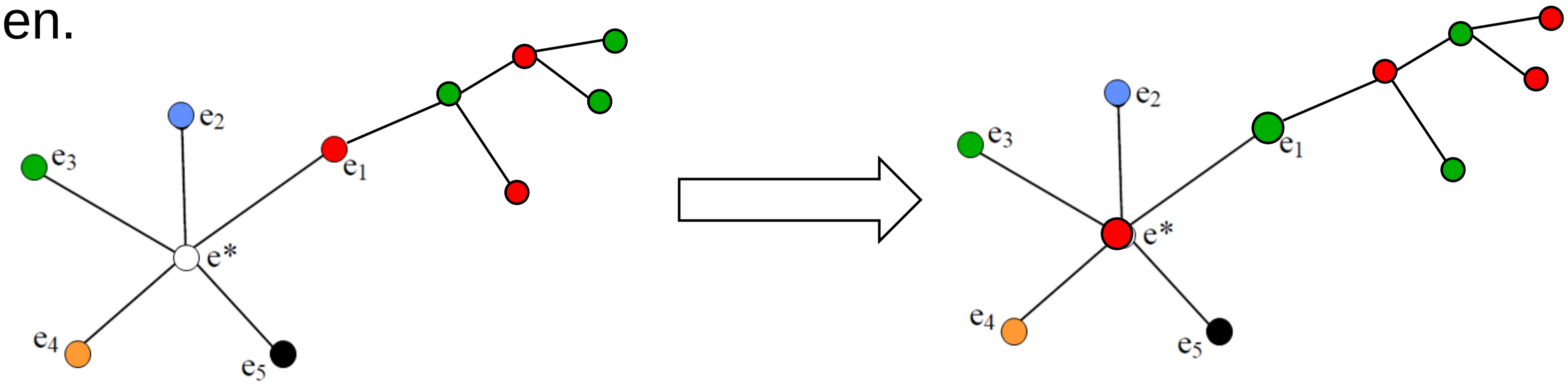
Die Ecken e_1, ..., e_5 seien gegen den Uhrzeigersinn angeordnet. Wir betrachten zunächst nur die Menge aller Ecken der Farben 1 oder 3, die von e_1 aus erreichbar sind.

Wir unterscheiden zwei (Unter-) Fälle.



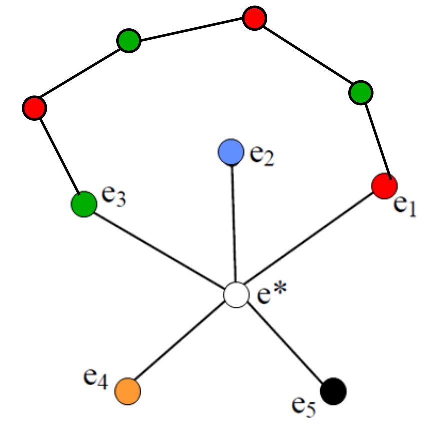
Beweis des Fünffarbensatzes (III)

Guter Fall: Wenn man von e_1 ausgeht und nur Ecken der Farben 1 oder 3 benutzt, kommt man nie zu e_3.
Dann kann man die Ecken der Farben 1 oder 3, die man von e_1 aus erreichen kann, umfärben (aus 1 wird 3, aus 3 wird 1). Diese neue Färbung von G^* hat die Eigenschaft, dass bei den Ecken $e_1, ..., e_5$ nur die Farben 2, 3, 4, 5 vorkommen. Also kann e* mit der Farbe 1 gefärbt werden.

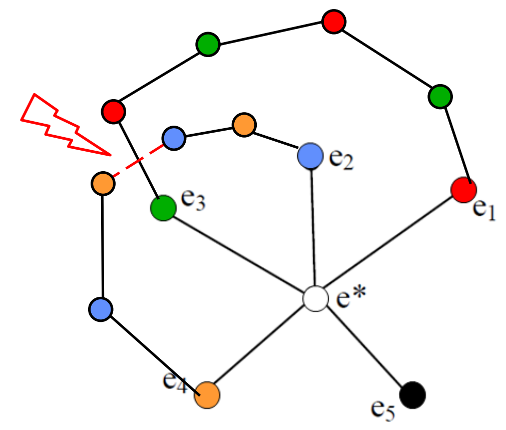


Beweis des Fünffarbensatzes (IV)

Schlechter Fall: Es gibt einen Weg von e_1 nach e_3, der nur Ecken der Farben 1 und 3 benutzt.

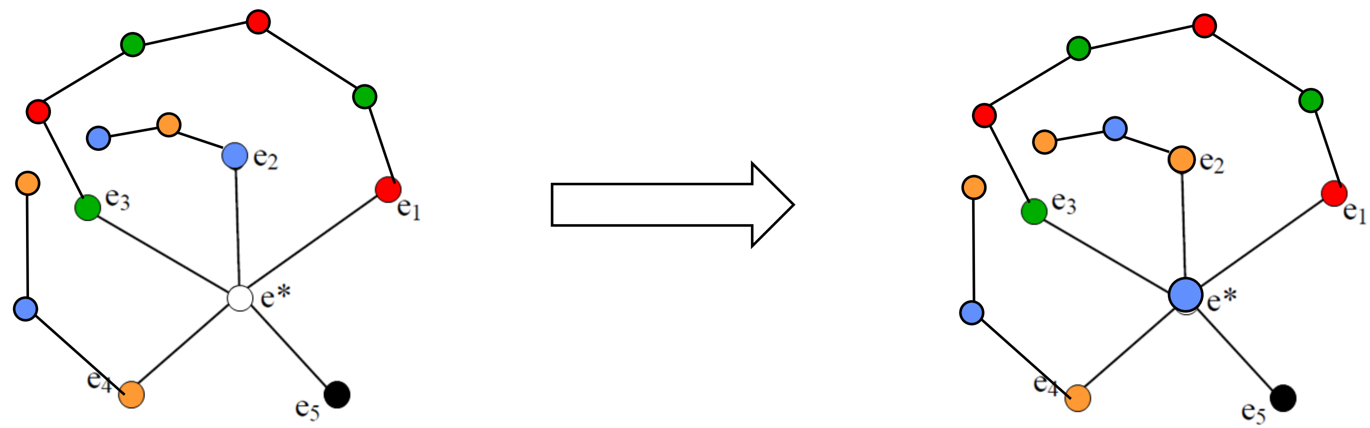


Nun betrachten wir die Ecken e_2 und e_4. Wegen der **Planarität** von G können diese Ecken *nicht* durch einen Weg verbunden sein, der nur Ecken der Farben 2 und 4 benutzt.



Beweis des Fünffarbensatzes (V)

Also kann man alle Ecken der Farben 2 oder 4, die von e_2 aus erreichbar sind, umfärben (2 $\leftrightarrow$ 4 vertauschen). Damit erhält man eine Färbung von G^*, bei der e_2 die Farbe 4 erhält. Nun kann man e^* mit der Farbe 2 färben.

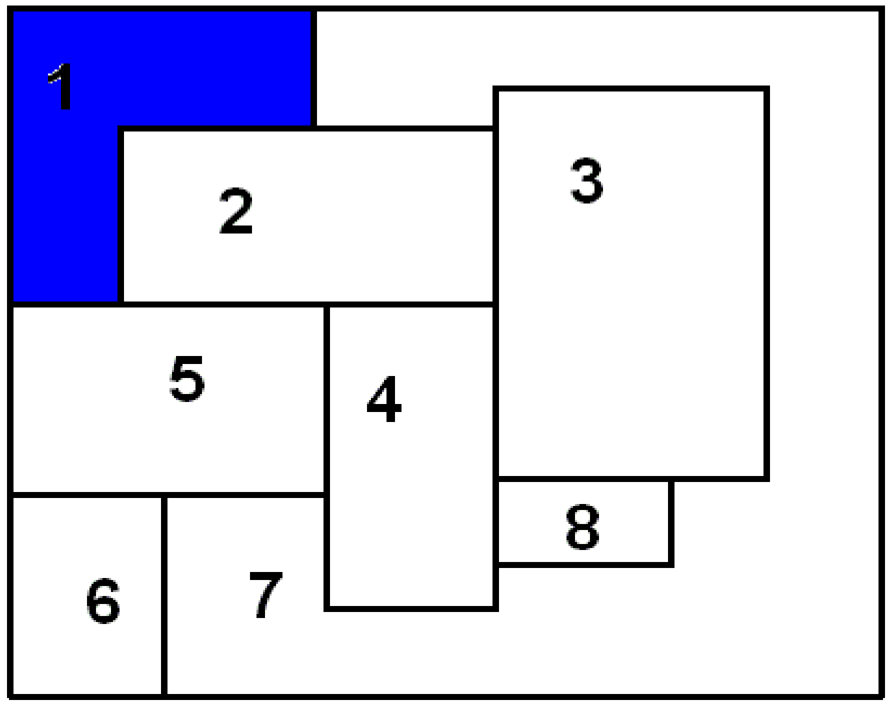


Damit ist der Fünffarbensatz bewiesen!

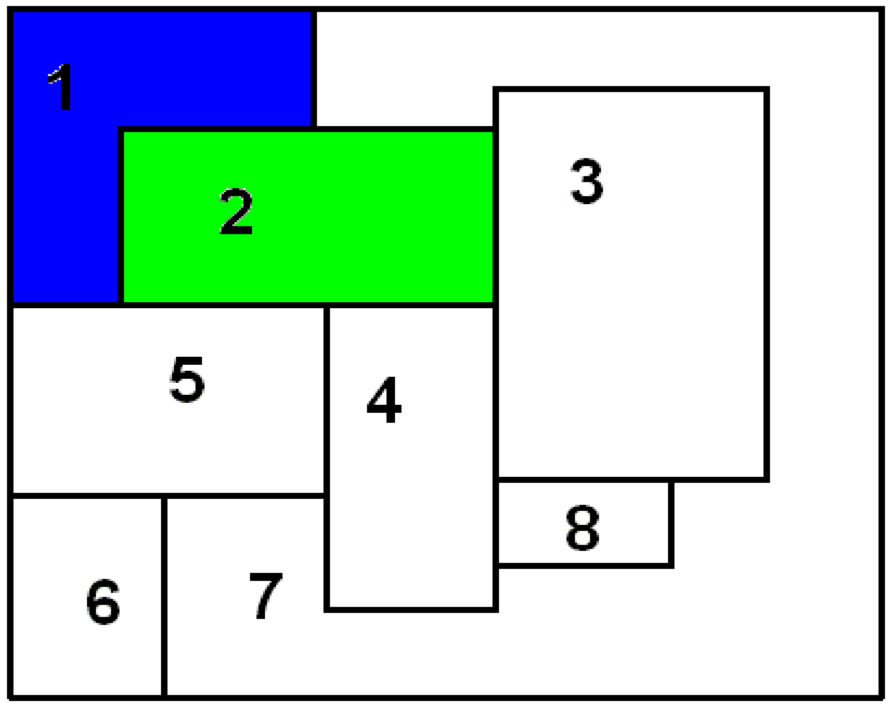
Wie findet man die minimale Färbung? Backtracking!

- Ecken nummerieren.
- Ein Land färben und dann versuchen das nächste zu färben, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
  - die benachbarten bereits gefärbten Länder haben unterschiedliche Farben,
  - keines der benachbarten noch ungefärbten Länder wird unfärbbar.
- Falls Bedingungen in einer Sackgasse enden:
  - Rückverfolgung des Pfades und Setzen der nächstmöglichen Farbe.

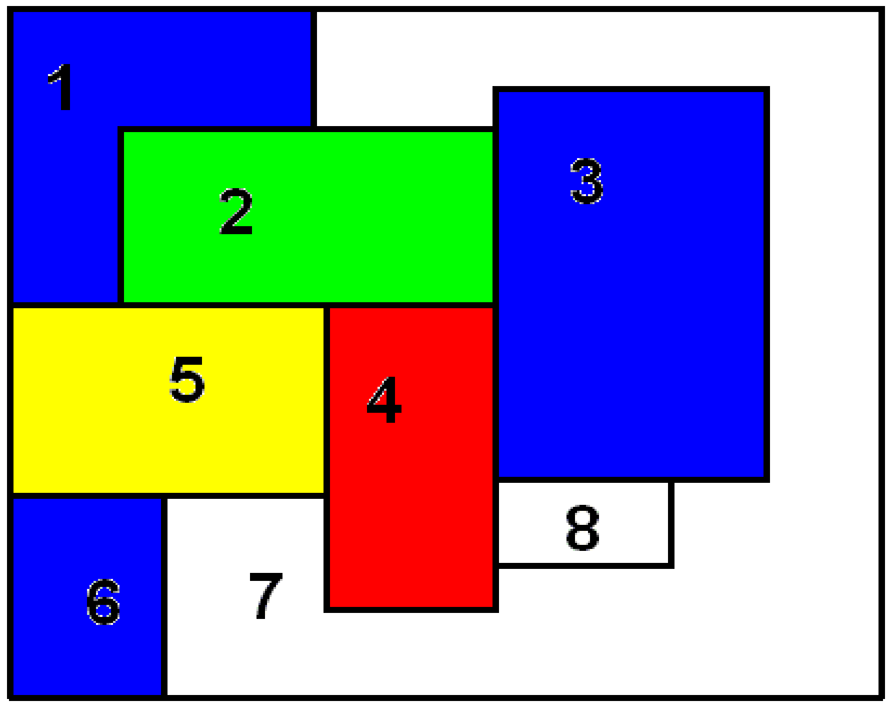
Backtracking



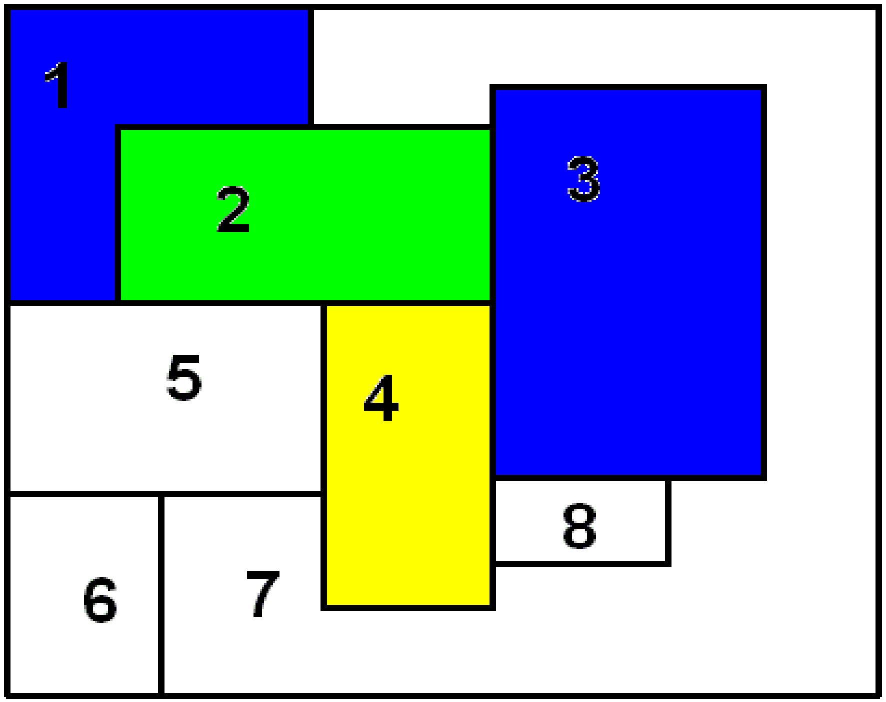
Backtracking



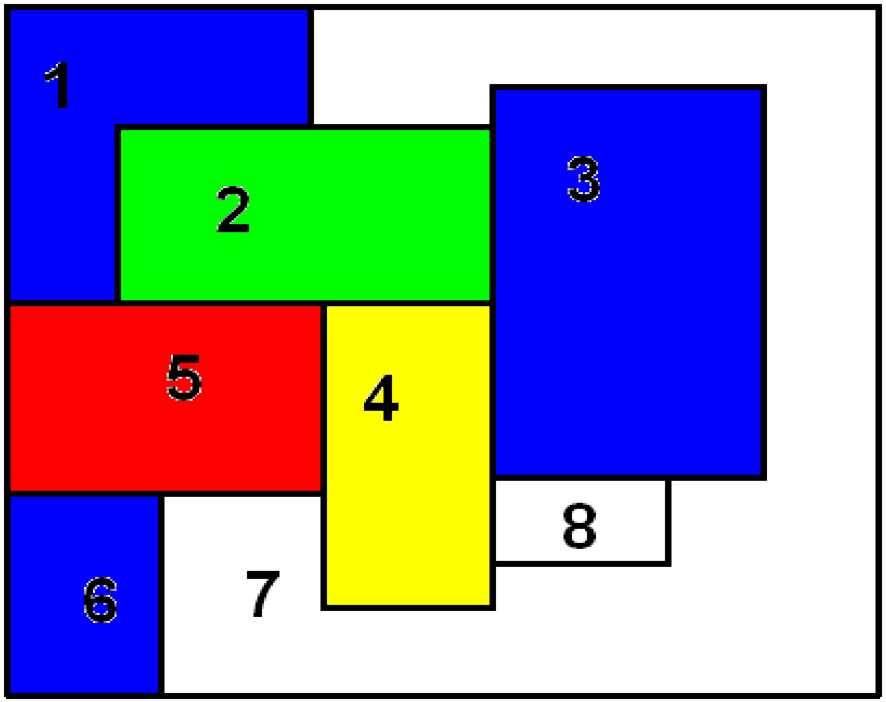
Backtracking



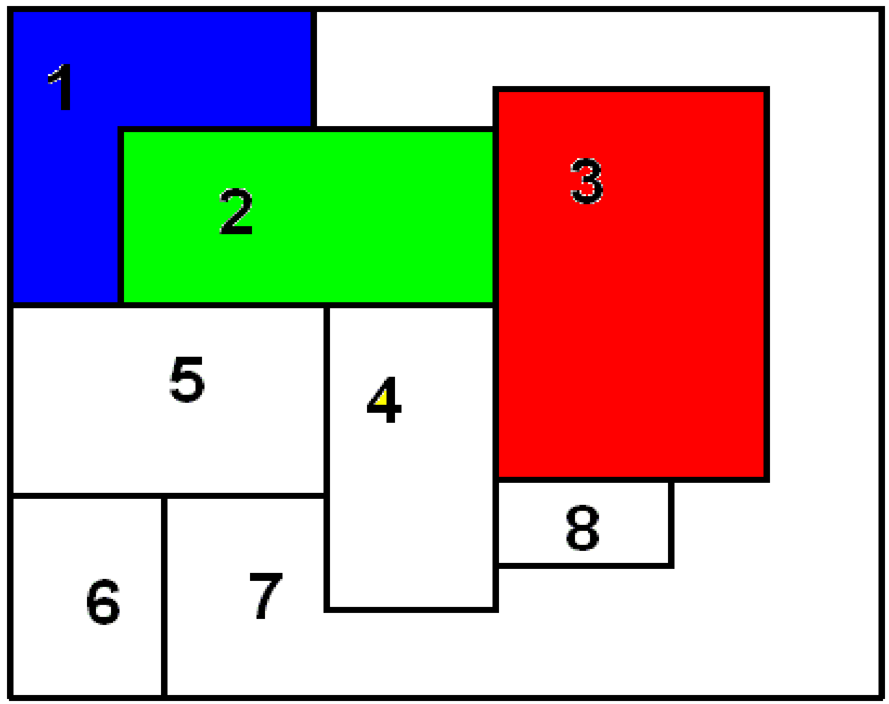
Backtracking



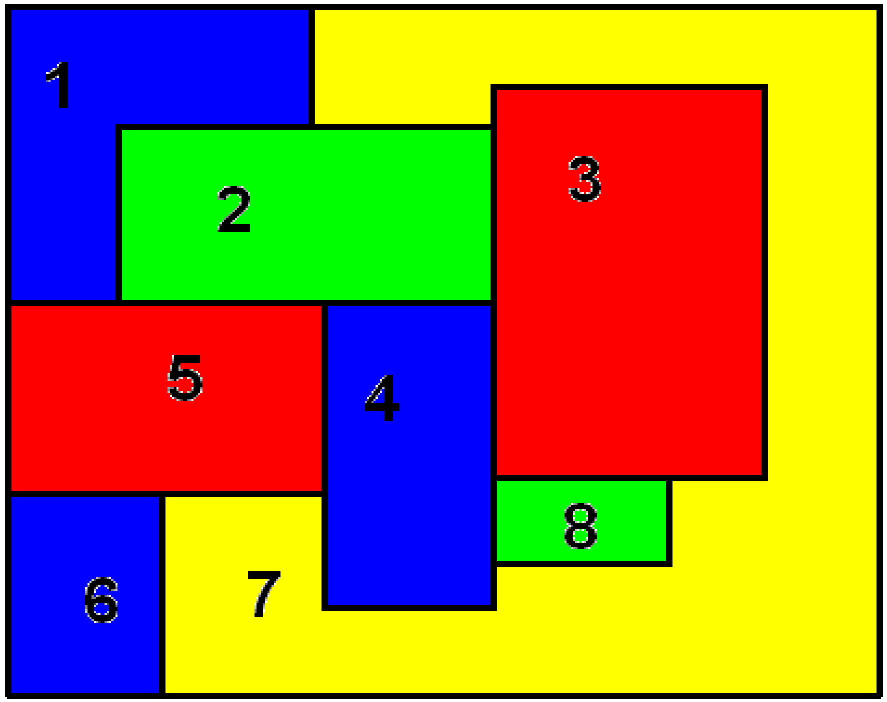
Backtracking



Backtracking



Backtracking



Backtracking

- Nachteil: Abhängig von der Nummerierung, bei ungünstiger Nummerierung ist der Aufwand enorm hoch.
- Exponentieller Aufwand:
  - Anzahl der Kombinationen steigt exponentiell
  - Anzahl der möglichen Sackgassen steigt ebenfalls exponentiell, allerdings abhängig von der Nummerierung, daher ist Backtracking oftmals deutlich schneller als vollständige Suche
- Es gibt wahrscheinlich keinen effizienten Algorithmus.

Anwendungen: Konfliktgraphen

Viele mathematische Anwendungen lassen sich als Eckenfärbe-Problem formulieren. Die Graphen, die dabei eine Rolle spielen, nennt man auch **Konfliktgraphen**.

Beispiele: Stundenpläne, Ampelsteuerung, Mobilfunkfrequenzen

Stundenplanproblem:

- Veranstaltungen = Ecken
- Veranstaltungen, die nicht gleichzeitig ablaufen können, sind verbunden
- Anzahl der Farben = Anzahl der verschiedenen Zeitfenster

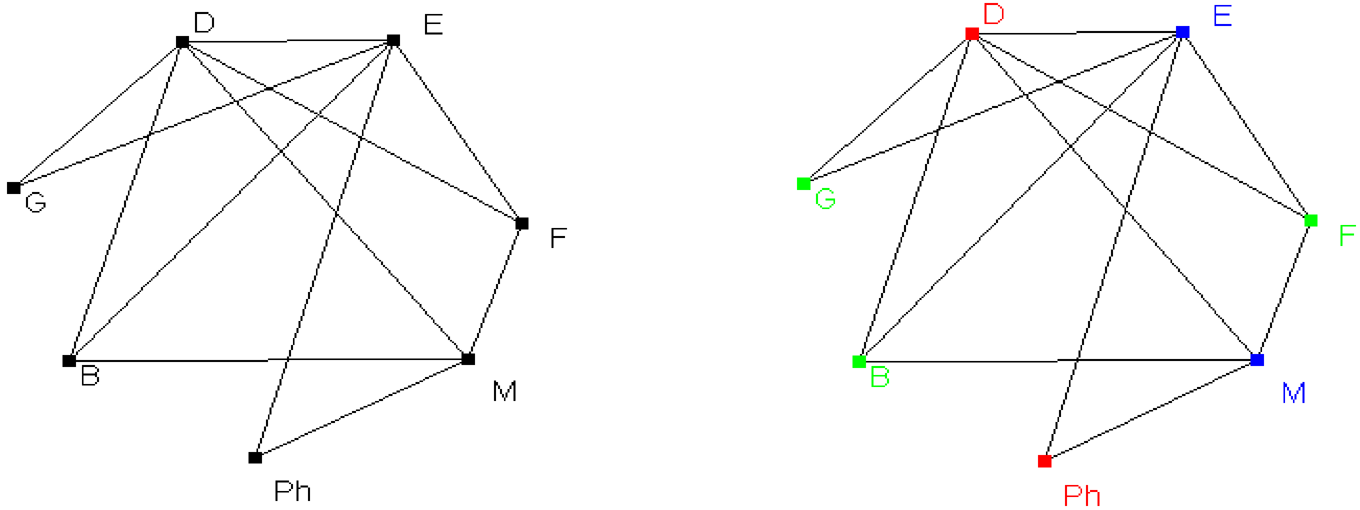
Stundenplanproblem

Folgende Tabelle zeigt, wie viele Schüler einzelne Leistungskurs-kombinationen gewählt haben.

	D	En	Fr	Ma	Ph	Bi	Ge
De		7	7	5	0	2	7
En			8	0	5	6	7
Fr				7	0	0	0
Ma					9	5	0

Die Schule möchte allen Schülern ermöglichen, Kurse der gewählten Fächerkombination zu besuchen. Solche Kurse dürfen also nicht gleichzeitig stattfinden. Wie viele verschiedene Zeiten müssen im Stundenplan reserviert werden?

Stundenplanproblem



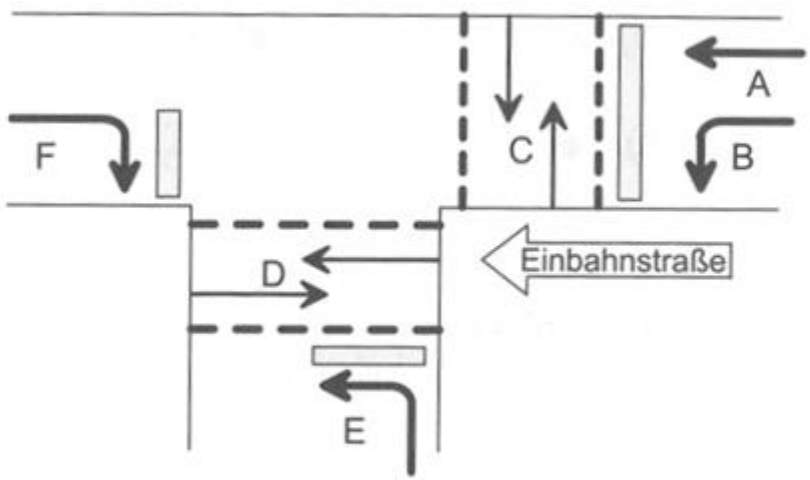
Es müssen 3 Zeiten reserviert werden:

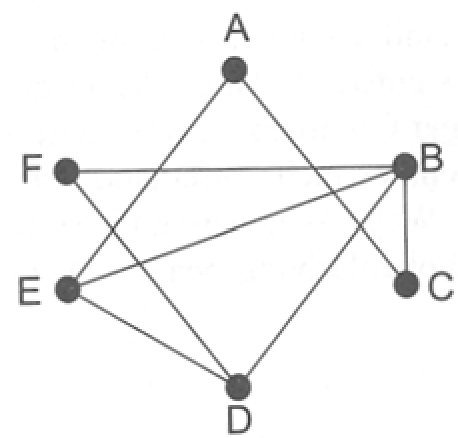
- Zeitperiode I: Deutsch, Physik
- Zeitperiode II: Englisch, Mathe
- Zeitperiode III: Französisch, Geschichte, Biologie

Ampelproblem

Die Verkehrsströme werden Ecken. Wenn zwei in Konflikt geraten, werden sie durch eine Kante verbunden.

Eine zulässige Eckenfärbung des Graphen zeigt: Verkehrsströme mit der gleichen Farbe dürfen gleichzeitig „Grün“ an ihrer Ampel haben.

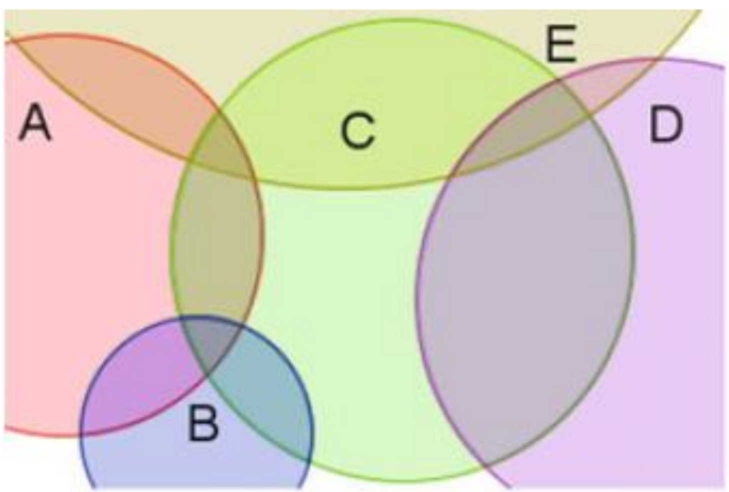


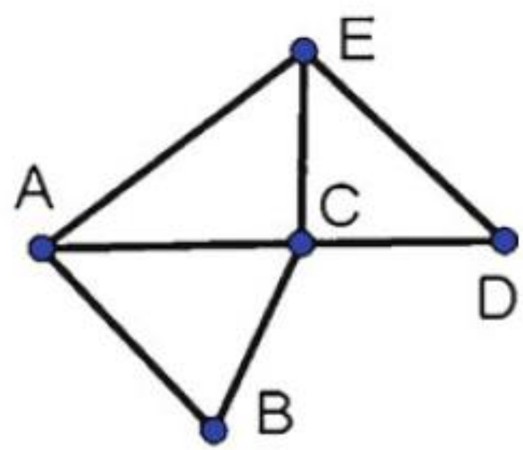


Zuteilung von Mobilfunkfrequenzen

Überlappende Handybereiche brauchen verschiedene Sende-frequenzen.

Eine Eckenfärbung des Konfliktgraphen zeigt, wie man Frequenzen zuordnen kann.



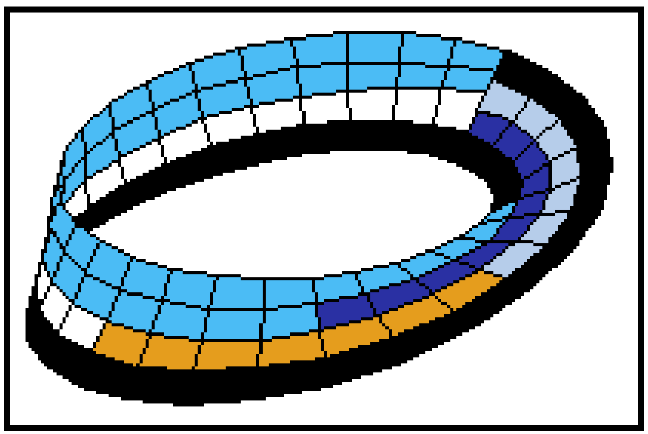


Möbiusband und Torus

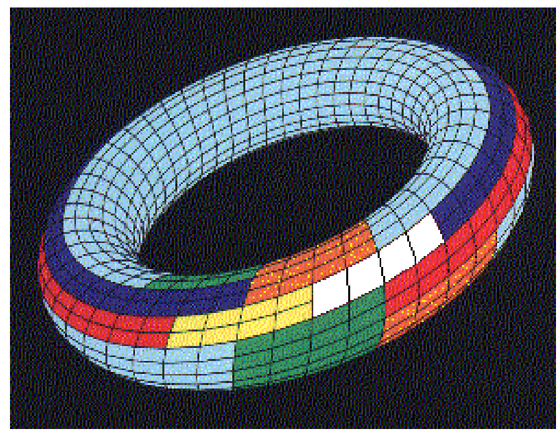
Der Vierfarbensatz gilt für Karten in der Ebene und auf dem Globus.

Es gibt analoge Sätze für das Möbiusband und den Torus, die lange vorher bewiesen waren:

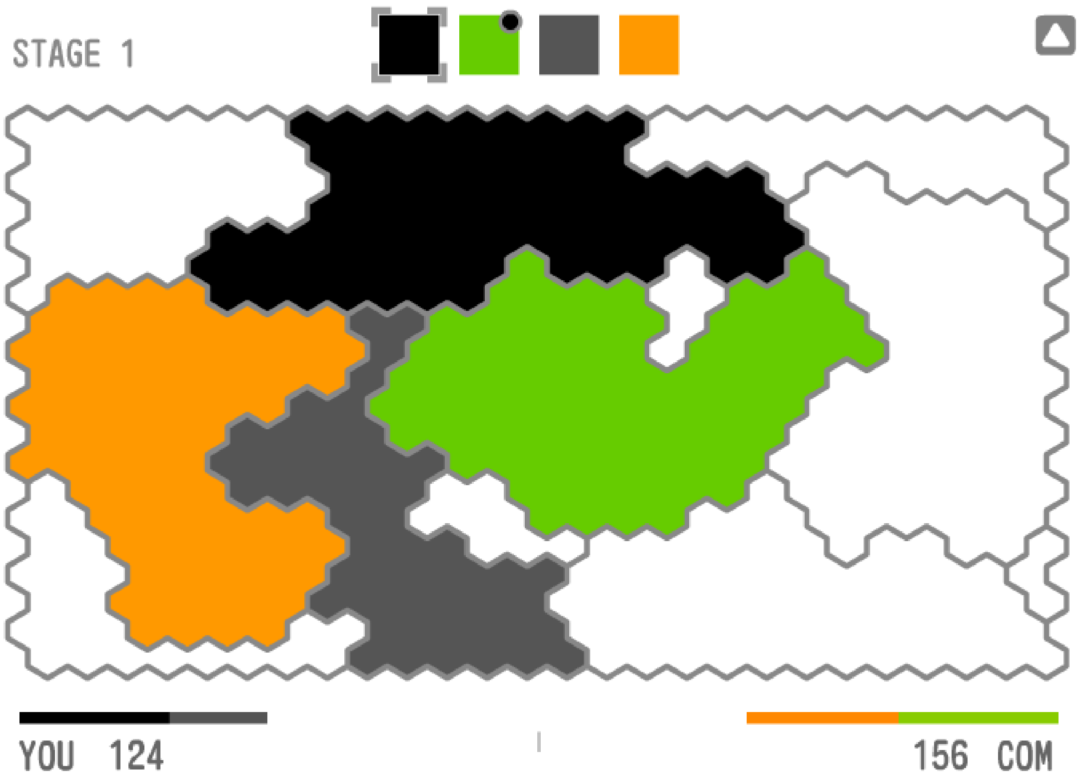
Möbiusband: 6-Farben-Satz



Torus: 7-Farben-Satz



Zum Spielen …



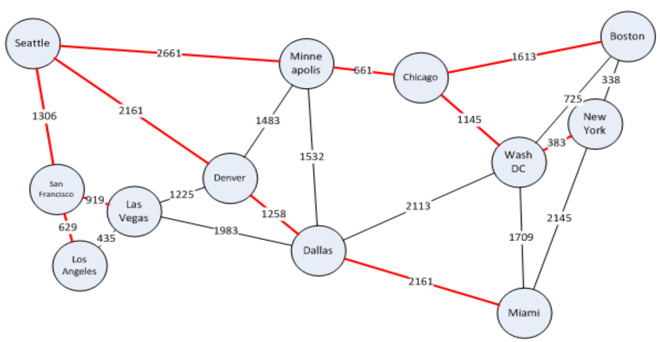
http://www.kostenlos-online-spielen.com/vier-farben-problem/

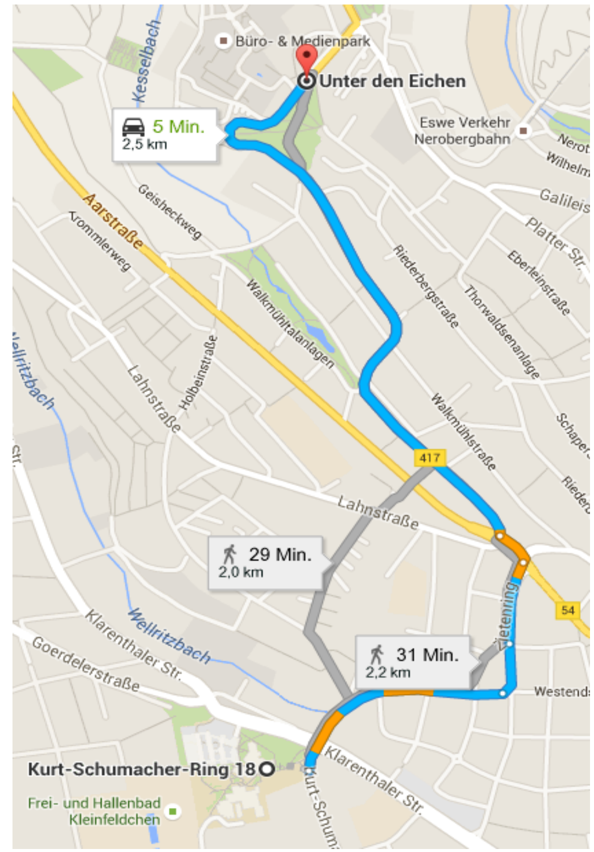
Weitere Anwendungen der Graphentheorie (I)

Das Kürzeste-Wege-Problem:

Was ist der kürzeste (schnellste, billigste, …) Weg von A nach B?

- Routenplaner
- Logistik
- Datenpakete im Internet

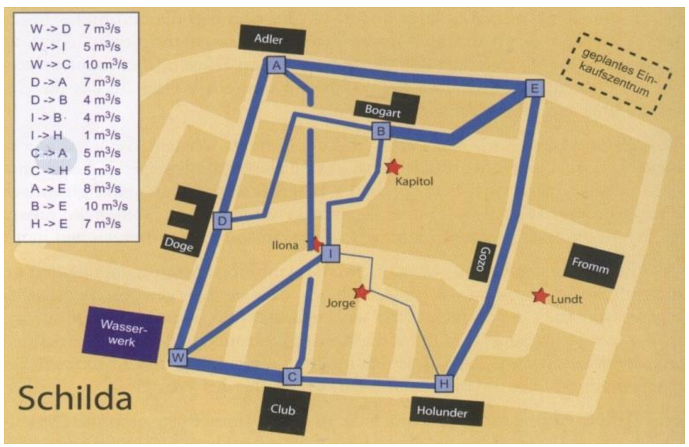


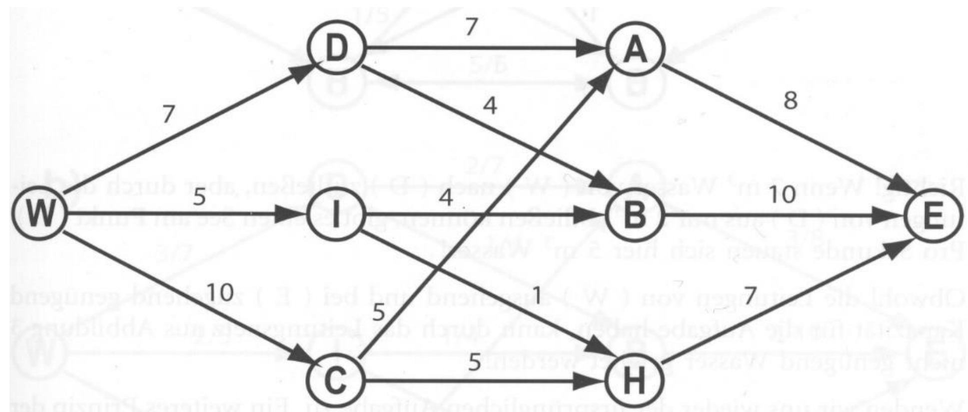


Optimale Flüsse in Netzwerken:

Wie fließt (unter Beachtung der Leitungskapazitäten) das meiste Wasser von X nach Y?

- Optimaler Transport von Wasser, Strom, Energie, …



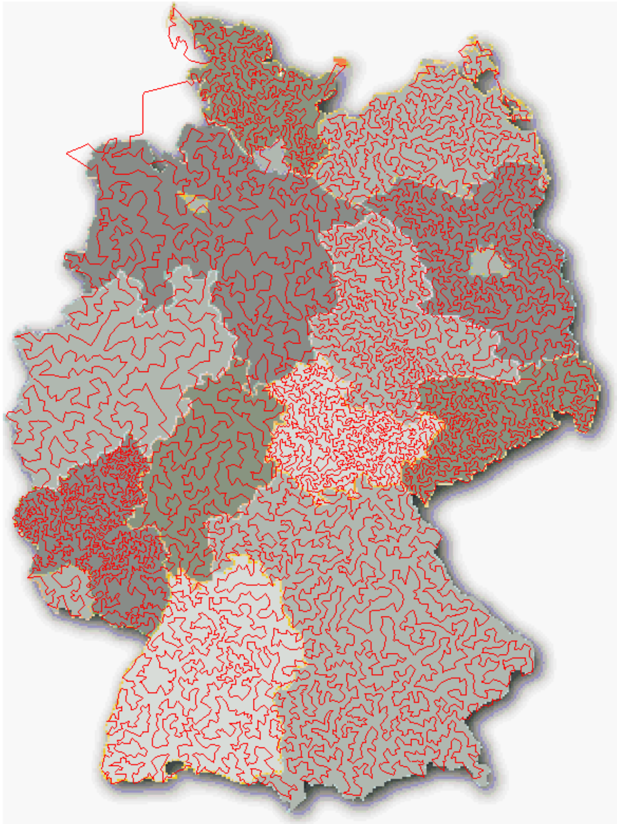


Weitere Anwendungen der Graphentheorie (III)

Traveling Salesman Problem (Problem des Handlungsreisenden):

Wie findet man die kürzeste Rundreise durch alle Städte?

Schwieriges Problem!



Rundreise durch Deutschland mit 15.112 Knoten (momentaner Weltrekord)