Hochschule RheinMain

Ü B U N G E N

zur Veranstaltung ***Quantencomputing*** im Studiengang Angewandte Informatik

No. 6 Martin Rehberg

Quantenteleportation

Alice ist im Besitz eines Quantenbits $|x\rangle$ im Zustand $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ und will dieses Bob mitteilen. Es soll also ein Informationsaustausch stattfinden. Zum Zeitpunkt des Informationsaustausches gibt es jedoch keinen Quantenkanal zwischen Alice und Bob. Beide können nur über einen klassischen Kanal miteinander kommunizieren. Jedoch besitzen Alice und Bob jeweils ein Bit eines verschränkten Paares von Quantenbits. Genauer: Alice besitzt ein Quantenbit $|a\rangle$ und Bob ein Quantenbit $|b\rangle$, die sich im verschränkten Zustand $|ab\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ befinden. Alice kann Bob zwei klassische Bits übermitteln.

Aufgabe: Analysieren Sie das folgende Verfahren für das Register $|x\rangle|a\rangle|b\rangle$, wobei X den Bitflip und Z den Phasenflip (vgl. Serie 1, Aufgabe 2) bezeichnet.

1. Alice wendet CNOT an: $|x\rangle|a\rangle \leftarrow |x\rangle|a \oplus x\rangle$.
2. Alice wendet auf das zu übermittelnde Qubit die Hadamard-Transformation an: $|x\rangle \leftarrow H|x\rangle$.
3. Alice misst ihre Qubits und übermittelt die Ergebnisse x und a über den klassischen Kanal an Bob.
4. Bob führt entsprechend den Werten von x und a die folgenden Schritte durch:
   - 4.1 Ist $a = 1$, dann wendet Bob den Bitflip X auf sein Qubit an: $|b\rangle \leftarrow X|b\rangle$.
   - 4.2 Ist $x = 1$, dann wendet Bob den Phasenflip Z auf sein Qubit an: $|b\rangle \leftarrow Z|b\rangle$.

Hinweis: Stellen Sie am Ende des zweiten Schrittes bzgl. der ersten Bits $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ und $|11\rangle$ um, bevor Sie im dritten Schritt die Messung durchführen.

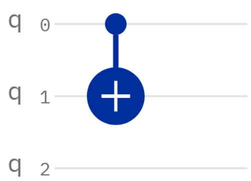
Übungsaufgaben Quantencomputing

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die unitäre (4×4)-Matrix U, die $U : |\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle \mapsto |\alpha\rangle \otimes |\overline{\alpha}\rangle$ realisiert, wobei $\overline{\alpha}$ die Negation von $\alpha \in \{0, 1\}$ bezeichnet.
Hinweis: Betrachten Sie die Pauli-Matrizen von Serie 1. Vergleichen Sie auch mit dem CNOT-Gatter.

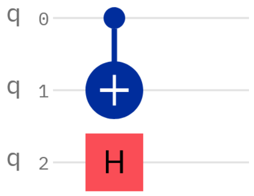
Aufgabe 2: CNOT mit Kontrolle im 2. Qubit
Das bereits kennengelernte CNOT-Gatter $\text{CNOT} : |x, y\rangle \mapsto |x, x \oplus y\rangle$ führt eine über das erste Qubit gesteuerte Negation im zweiten Qubit durch. Das lässt sich vertauschen: Sei $\text{CNOT}_2 : |x, y\rangle \mapsto |x \oplus y, y\rangle$ das *CNOT mit Kontrolle im 2. Qubit.*

(i) Zeigen Sie, dass CNOT_2 eine unitäre Transformation beschreibt.

(ii) Geben Sie die unitäre Transformation mittels Tensorprodukt an, die durch den abgebildeten Schaltkreis beschrieben wird. Bestimmen Sie anschließend die ensprechende (8×8)-Matrix.



(iii) Untersuchen Sie die Wirkung des Schaltkreises auf das Register $R = |q_2 q_1 q_0\rangle$ mit $|q_2\rangle = |1\rangle$ und $|q_1 q_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle$.



Hinweis: Da sich CNOT_2 perspektivisch aus anderen (elementaren) Gattern zusammensetzen lässt, gibt es die Bezeichnung CNOT_2 (meines Wissens nach) in der Literatur nicht. Wir verwenden sie trotzdem, um an dieser Stelle eine klare Unterscheidung zu CNOT zu garantieren.