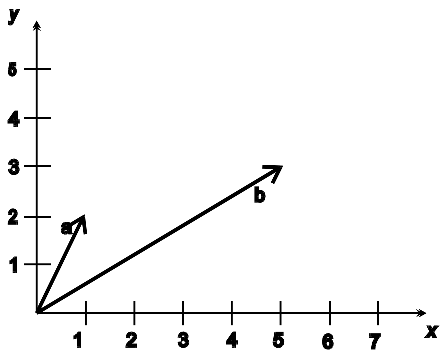
Lineare Algebra und Analytische Geometrie in der Ebene

Punkte und Vektoren

Punkt in der Ebene: repräsentiert durch kartesische Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Ortsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ des Punktes: "Pfeil vom Ursprung nach $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$"

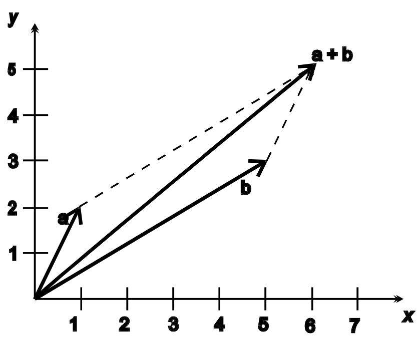


Vektoraddition und Kräfteparallelogramm

Algebraisch: komponentenweise Addition

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Geometrisch: Pfeile aneinander setzen (Kräfteparallelogramm)



Graphische Anwendung: Verschieben von Objekten

Vektor mit Skalar multiplizieren

Algebraisch: komponentenweise Multiplikation

$$0.5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 5 \\ 0.5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Geometrisch: Vektor $\vec{v}$ mit Skalar $\alpha > 0$ multipliziert:

$\alpha\vec{v}$ hat die gleiche Richtung wie $\vec{v}$

$\alpha\vec{v}$ hat eine um den Faktor geänderte Länge:

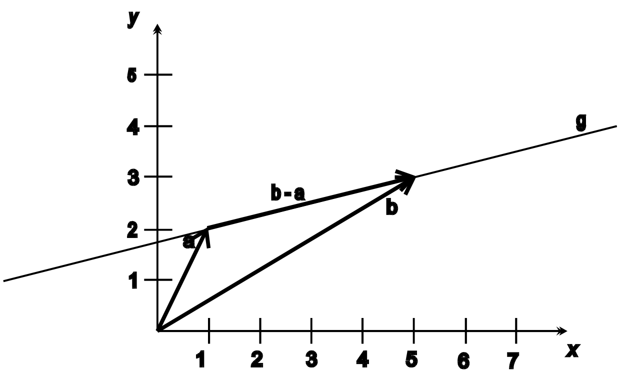
$|\,\alpha\,| > 1$: Verlängerung

$|\,\alpha\,| < 1$: Verkürzung

Negativer Skalarfaktor: zusätzlich Drehung um 180°

Graphische Anwendungen: Skalierung von Objekten, Zoom

Gerade in Parameterdarstellung



Gerade g durch die Punkte $\vec{a}$ und $\vec{b}$**:**

$$g = \left\{ \vec{p} \in R^2 : \vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), t \in R \right\}$$

$\vec{b} - \vec{a}$ heißt **Richtungsvektor,** t heißt **Parameter** von g **.**

Strecke von $\vec{a}$ **nach** $\vec{b}$**:**

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left\{ \vec{p} \in R^2 : \vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), 0 \le t \le 1 \right\}$$

Graphische Anwendungen: Strecken als geometrische Objekte (Polygonzüge), Geraden als Sehstrahlen (Raytracing), Schnittpunktberechnungen …

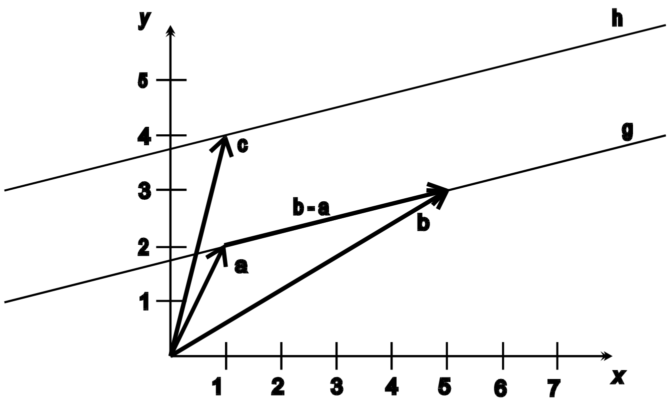
Parallele Geraden

Parallele zu

$$g = \left\{ \vec{p} \in R^2 : \vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}),\, t \in R \right\}$$

durch den Punkt $\vec{c}$:

$$h = \left\{ \vec{p} \in R^2 : \vec{p} = \vec{c} + t(\vec{b} - \vec{a}),\, t \in R \right\}$$



Parallele Geraden haben linear abhängige Richtungsvektoren – nicht unbedingt die gleichen …

Geradenschnittpunkt

Schnittpunkt von

$$g = \left\{ \vec{p} \in R^2 : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R \right\}$$

und

$$h = \left\{ \vec{p} \in R^2 : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}, s \in R \right\}$$

Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ergibt (komponentenweise geschrieben):

$$4t - 8s = 0$$

$$t + 6s = 2$$

ein lineares Gleichungssystem in den Variablen s und t .

Skalarprodukt: Längen und Winkel

Länge des Vektors $\vec{a}$ **:** $|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Skalarprodukt zweier Vektoren: $< \vec{a}, \vec{b} > = < \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} > = \vec{a}^T \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$

Länge und Skalarprodukt: $|\vec{a}| = \sqrt{< \vec{a}, \vec{a} >}$

Kommutativgesetz:

$< \vec{a}, \vec{b} > = < \vec{b}, \vec{a} >$

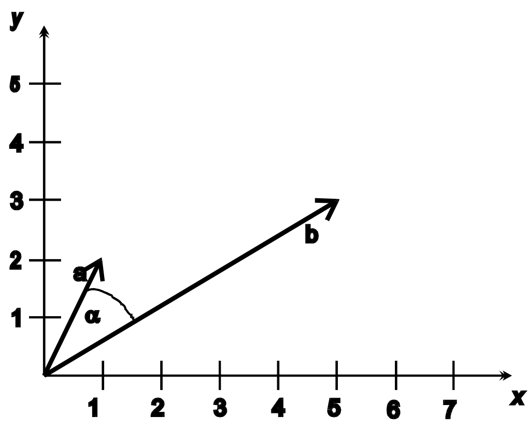
Bilinearität:

$< s\vec{a}, \vec{b} > = s < \vec{a}, \vec{b} >$ und $< \vec{a}, s\vec{b} > = s < \vec{a}, \vec{b} >$ für alle $s \in R$

Distributivgesetze:

$< \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} > = < \vec{a}, \vec{c} > + < \vec{b}, \vec{c} >$ und $< \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} > = < \vec{a}, \vec{b} > + < \vec{a}, \vec{c} >$

Winkel α **zwischen zwei Vektoren** $\vec{a}$ **und** $\vec{b}$ **:** $\cos\alpha = \dfrac{< \vec{a}, \vec{b} >}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$



$$\cos\alpha = \frac{<\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}>}{\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\right|} = \frac{11}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{5^2+3^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}\sqrt{34}} = 0.8436615$$

$$\alpha = 32.47°$$

Rechter Winkel

Zwei Vektoren stehen **senkrecht** aufeinander (d.h. sie schließen einen Winkel von 90° ein) wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.

"Drehtrick" zur Berechnung eines Vektors im Winkel von 90°:

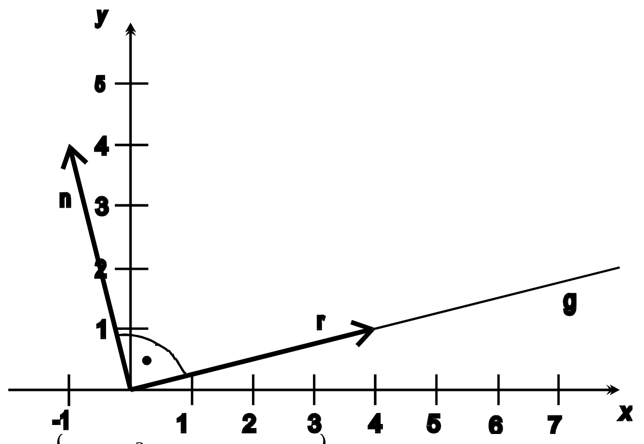
$$\vec{a} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ steht senkrecht auf } \vec{b} = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$$

Drehung von $\vec{a}$ um 90° gegen den Uhrzeigersinn.

Normalendarstellung einer Geraden

Gerade durch den Koordinatenursprung:

Die Gerade



$$g = \{\vec{p} \in R^2 : \vec{p} = t\vec{r}, t \in R\}$$

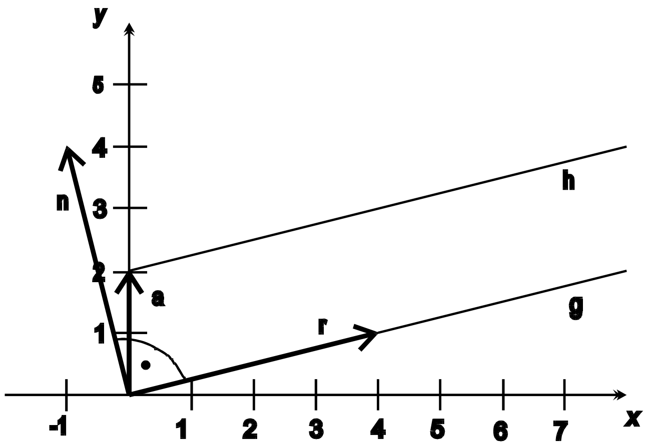
kann man auch als Menge aller Punkte beschreiben, deren Ortsvektoren senkrecht auf einem Normalenvektor $\vec{n}$ stehen:

$$g = \{\vec{p} \in R^2 : <\vec{p},\vec{n}> = 0\}$$

$\vec{n}$ erhält man aus dem Richtungsvektor $\vec{r}$ mit dem "Drehtrick".

Gerade nicht durch den Koordinatenursprung

Eine Gerade *h*, die nicht durch 0 läuft, läßt sich aus einer Geraden *g* durch den Ursprung durch Verschiebung um einen Vektor $\vec{a}$ ableiten:



$$h = \{\vec{p} \in R^2 : \vec{p} = \vec{a} + \vec{q}\,, \vec{q} \in g\}$$

$$< \vec{p}, \vec{n} > = < \vec{a} + \vec{q}, \vec{n} > = < \vec{a}, \vec{n} > + < \vec{q}, \vec{n} > = < \vec{a}, \vec{n} >$$

Normalendarstellung von *h*:

$$h = \{\vec{p} \in R^2 : < \vec{p}, \vec{n} > = \alpha\} \text{ mit } \alpha = < \vec{a}, \vec{n} >$$

Geradengleichung und Normalendarstellung

Eine Gerade in der Ebene läßt sich durch eine (lineare) Gleichung beschreiben, z.B.

$$4x - 2y = 5$$

d.h. genau die Punkte, deren Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die Gleichung erfüllen, liegen auf der Geraden.

Dies ist die "ausmultiplizierte Normalendarstellung":

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 : < \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} > = 5 \right\}$$

Die Koeffizienten der Gleichung (einschl. Vorzeichen) sind die Komponenten des Normalenvektors.

Die rechte Seite der Gleichung ist die Zahl α in der Normalendarstellung.

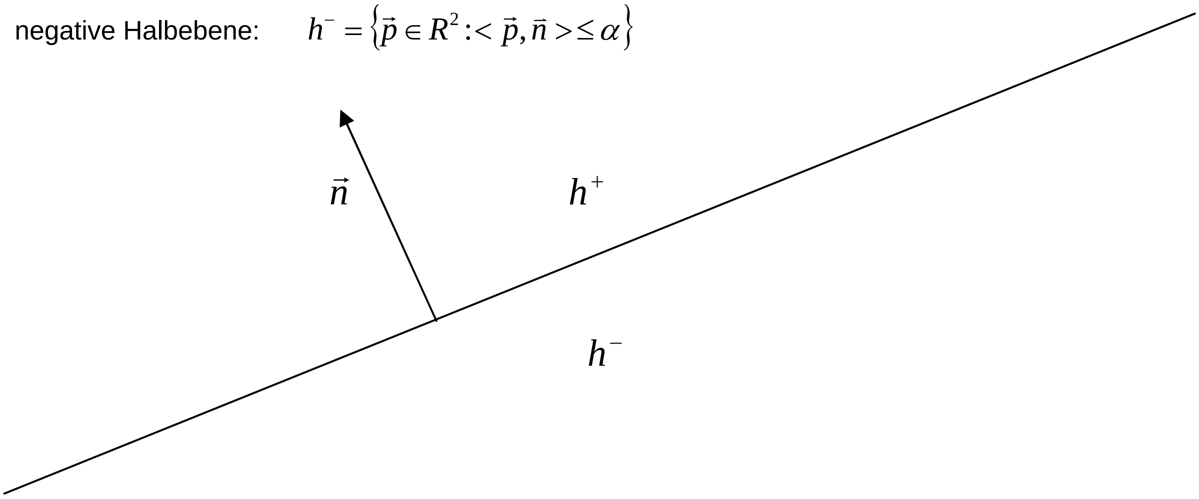
Normalendarstellung und Halbebenen

Eine Gerade teilt die Ebene in zwei **Halbebenen**:

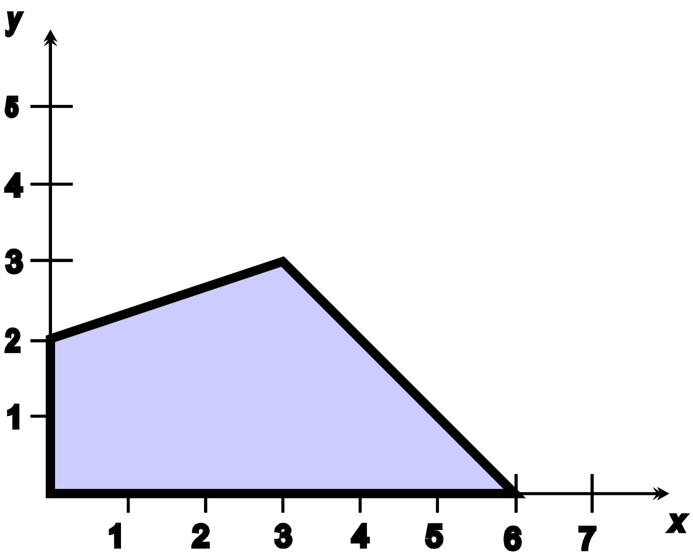
Gerade: $h = \{\vec{p} \in R^2 : < \vec{p}, \vec{n} > = \alpha\}$

positive Halbebene: $h^+ = \{\vec{p} \in R^2 : < \vec{p}, \vec{n} > \geq \alpha\}$

negative Halbebene: $h^- = \{\vec{p} \in R^2 : < \vec{p}, \vec{n} > \leq \alpha\}$



Konvexe Polygone



(Konvexes) Polygon als Durchschnitt von Halbebenen:

d.h. dargestellt durch ein lineares Ungleichungssystem:

für jede Kante eine Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
&y \geq 0 \\
&x \geq 0 \\
&-x + 3y \leq 6 \\
&3x + 3y \leq 18
\end{aligned}
$$

Die ersten beiden Ungleichungen sind trivial (Koordinatenachsen).

Bei den anderen:

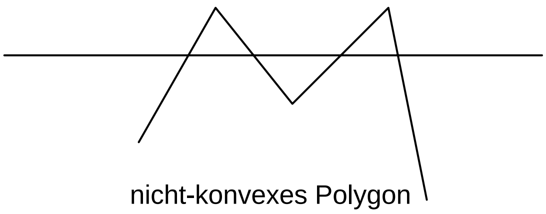
Koeffizienten mit "Drehtrick" aus Richtungsvektor der Kante

Rechte Seite durch Einsetzen eines (End-)Punkts der Kante

Was ist "konvex" ?

Ein Polygon P heißt konvex, wenn eine der 3 (gleichwertigen) Bedingungen erfüllt ist:

- Mit 2 Punkten enthält P stets auch die gesamte Verbindungsstrecke der Punkte.
- Der Durchschnitt von P mit einer Geraden ist immer *eine* Strecke.
- P läßt sich durch ein lineares Ungleichungssystem beschreiben.



nicht-konvexes Polygon

Vorteile der Konvexität für die Graphikprogrammierung:

- Einfache Verwaltung des Durchschnitts Polygon – Gerade
- Einfacher Test von "Punkt in Polygon"

Viele Graphiksysteme unterstützen deshalb nur konvexe Polygone, manche sogar nur Dreiecke.