Prof. Dr. R. Dörner
Fachbereich Design Informatik Medien
HS RheinMain

Praktikum zur Computergraphik

Übung 0

Gehört zu: Wiederholung von für die Computergraphik wichtigen Teilen der Linearen Algebra

Aufgabe 0.1

Ziel der Aufgabe ist es, wieder fit in Matrizen-Rechnung zu werden. Matrizen spielen in der GDV eine große Rolle, da sie es erlauben, verschiedene geometrische Operationen wie z.B. Rotationen einfach zu berechnen. Viele Graphik-APIs stellen Matrix-Funktionen zur Verfügung und das besondere an "Hardware-Beschleunigung" von Graphik-Karten ist unter anderem, dass Matrix-Operationen in Hardware realisiert sind.

Gegeben sind folgende Matrizen und Vektoren:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{q} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.1 Berechnen Sie:
$$A+B \quad A+C \quad A+D \qquad \vec{p}+\vec{q}$$

1.2 Berechnen Sie:
$$2 \cdot A \quad C \cdot \frac{1}{3} \quad 3 \cdot \vec{p}$$

1.3 Berechnen Sie:
$$A \cdot B \quad B \cdot A \quad B \cdot C \quad B \cdot D \quad D \cdot B \quad < \vec{p}, \vec{q} >= \vec{p}^{\,T} \cdot \vec{q}$$

1.4 Geben Sie eine Formel für das Matrixprodukt an und geben Sie entsprechenden C++ Code für die Multiplikation zweier Matrizen an. Wie würden Sie Matrizen in einem Programm repräsentieren? Überlegen Sie, wie eine Klasse Matrix aussehen könnte (Hausaufgabe)!

1.5 Geben Sie eine 3x3 Matrix an, die eine Rotation um die x-Achse um den Winkel 30° darstellt. Wie lauten die Koordinaten des Punktes P', auf den der Punkt P (2, 0, 1) durch diese Rotation abgebildet wird?

1.6 Gilt $D = A^{-1}$? Berechnen Sie C^{-1} und D^{-1}.

1.7 Berechnen Sie
$$A^T \quad 2 \cdot B^T \quad D^T \cdot B^T \qquad \vec{q}^{\,T}$$

1.8 Ist D orthogonal? Wie lautet die Inverse der Rotationsmatrix aus Aufgabe 1.5?

Aufgabe 0.2

Ziel der Aufgabe ist es, wichtige Operationen der Vektorrechnung sich wieder parat zu haben: Berechnung des Betrags, Berechnung von Skalarprodukt und Kreuzprodukt. Diese werden in vielfältigen Algorithmen der Computergraphik benötigt, z.B. um die Beleuchtung von Objekten richtig zu berechnen.

Gegeben sind folgende Vektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.1 Berechnen Sie:

$$3 \cdot \vec{u} \qquad |\,\vec{u}\,| \qquad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \qquad \vec{u} \times \vec{v}$$

2.2 Die Vektoren $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ geben in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges Koordinatensystem vor. Was bedeutet dies?

2.3 Wie groß ist der von den beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossene Winkel?

Aufgabe 0.3

Ziel der Aufgabe ist es, wieder die Kenntnisse in analytischer Geometrie aus der Schule und dem Grundstudium aufzufrischen. Diese braucht man auch an vielfältigen Stellen in der Computergraphik, z.B. in Algorithmen der Bilderzeugung aber auch um herauszufinden, ob in einem Computerspiel eine Rakete trifft oder nicht.

Gegeben ist die Ebene E:

$$\mathrm{E} = \left\{ \vec{\mathrm{x}} \in \mathrm{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in R \right\}$$

$$\mathrm{E} = \left\{ \vec{\mathrm{x}} \in \mathrm{R}^3 \mid \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x} \right\rangle = 3 \right\}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^3 \mid 3 \cdot x + 5 \cdot y - z = 3 \right\}$$

3.1 Eine Ebene E kann in 3D auf verschiedene Art und Weisen dargestellt werden. Erläutern Sie diese Darstellungen. Wie wandelt man eine Darstellung in eine andere um?

3.2 Geben Sie E in Hesse'scher Normalform an. Wie groß ist der Abstand des Punktes P(1,2,3) von E?

3.3 Wie würde man eine Gerade in 3D angeben?

3.4 Erläutern Sie, wie man Schnittpunkte berechnet.