Übungen - Serie 1

Lineare Algebra

Aufgabe 1

Für $v = (a,b)$, $w = (a',b')$ ist

$$v + w = (a+a', b+b'),$$
$$kv = (ka, kb) \text{ für } k \in \mathbb{R},$$
$$F(v) = (a+b, a), \text{ und}$$
$$F(w) = (a'+b', a').$$

Also folgt

$$F(v+w) = F(a+a', b+b') = (a+a'+b+b', a+a')$$
$$= (a+b, a) + (a'+b', a')$$
$$= F(v) + F(w)$$

und $$F(kv) = F(ka, kb) = (ka+kb, ka)$$
$$= k(a+b, a) = kF(v)$$

Da $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $k \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt waren, ist F linear.

Aufgabe 2

Wähle $v = (1,2)$ und $w = (3,4)$. Dann ist $v+w = (4,6)$, $F(v) = 2$ und $F(w) = 12$.

Es folgt

$$F(v+w) = F(4,6) = 24 \neq 14 = F(v) + F(w)$$

Also ist F nicht linear.

Aufgabe 3

Für beliebige $A, B \in V$ und $k \in K$ gilt

$$\begin{aligned} F(A+B) &= (A+B)M + M(A+B) \\ &= AM + BM + MA + MB \\ &= (AM+MA) + (BM+MB) \\ &= F(A) + F(B), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} F(kA) &= (kA)M + M(kA) = kAM + kMA \\ &= k(AM+MA) = kF(A) \end{aligned}$$

Also ist F linear.

Quantencomputing

Aufgabe 2

zu (i) $W^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$

$$\rightarrow W^+W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq I_2$$

Also ist W^+ nicht die Linksinverse von W, insb. auch nicht unitär; die Wirkung von W auf $|\psi\rangle$ muss demnach nicht untersucht werden.

<u>zu (ii)</u> $X^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X$

$$\Rightarrow X^+X = X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

X ist also unitär (und selbstinvers). Es gilt

$$X|\psi\rangle = \alpha X|0\rangle + \beta X|1\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$$

denn

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>zu (iii)</u> $Y^+ = \begin{pmatrix} 0 & \bar{i} \\ \overline{-i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = Y$

$$\Rightarrow Y^+Y = Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Y ist somit unitär (und selbstinvers). Die Wirkung auf dem Qubit ist

$$Y|\psi\rangle = \alpha Y|0\rangle + \beta Y|1\rangle = \alpha i|1\rangle - \beta i|0\rangle,$$

denn

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

zu (iv) $Z^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Z$

$$\Longrightarrow Z^+ Z = Z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

D.h. Z ist unitär (und selbstinvers). Es folgt

$$Z|\psi\rangle = \alpha Z|0\rangle + \beta Z|1\rangle = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle,$$

denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$