Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

Kapitel 3

Relationen und Funktionen

Inhalt

3.1 Relationen

Relationen

Beispiel: Wir betrachten die beiden Mengen

A = {Dick, Bonnie, Maja}, B = {Doof, Clyde, Alice, Willi}.

Wir wissen: Das **kartesische Produkt** enthält *alle* Paare:

A × B = {(Dick, Doof), (Dick, Clyde), (Dick, Alice), (Dick, Willi),
(Bonnie, Doof), (Bonnie, Clyde), (Bonnie, Alice), (Bonnie, Willi),
(Maja, Doof), (Maja, Clyde), (Maja, Alice), (Maja, Willi)}

Möchte man nur *bestimmte* Paare zulassen (die in einer bestimmten Beziehung bzw. „**Relation**“ zueinander stehen), muss man das kartesische Produkt auf eine *Teilmenge* einschränken.

Relationen

Definition. Eine **Relation** zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$.

Beispiel: Die Relation R zwischen den obigen Mengen, die alle „berühmten“ Paare enthält, ist

$$R = \{(\text{Dick}, \text{Doof}), (\text{Bonnie}, \text{Clyde}), (\text{Maja}, \text{Willi})\} \subseteq A \times B.$$



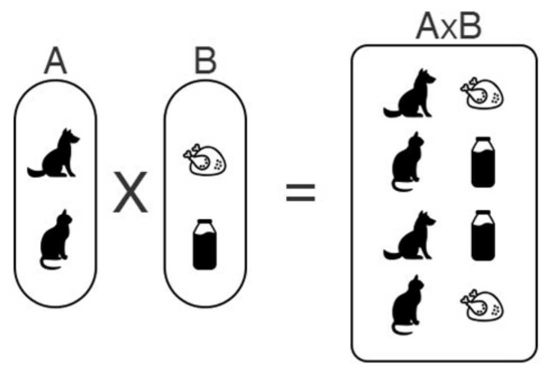
Beispiel

Für die Mengen

$A = \{\text{Hund, Katze}\}$, $B = \{\text{Fleisch, Milch}\}$

ist das kartesische Produkt gleich

$$A \times B = \{(\text{Hund, Fleisch}), (\text{Hund, Milch}), (\text{Katze, Fleisch}), (\text{Katze, Milch})\}$$



Die folgende Relation ist eine Teilmenge davon:

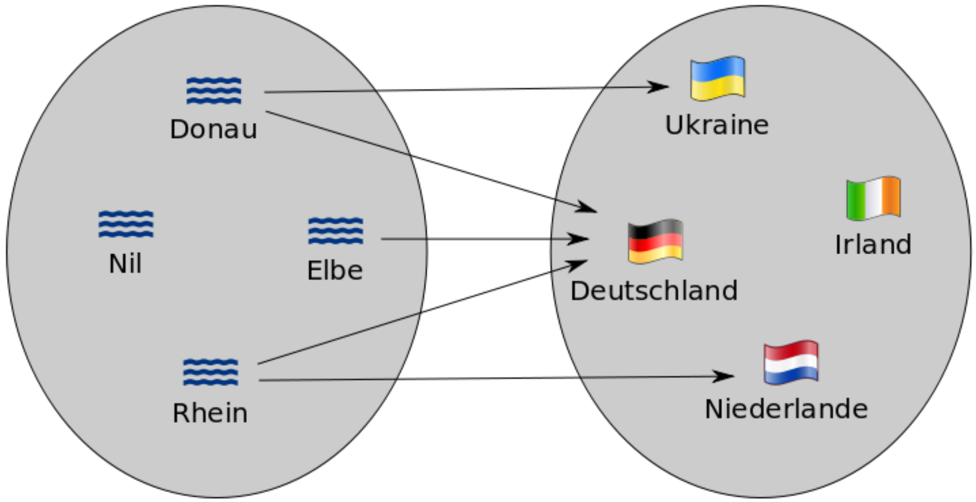
$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid x \text{ ernährt sich am liebsten von } y\}$$

$$= \{(\text{Hund, Fleisch}), (\text{Katze, Milch})\}$$

Übung

Listen Sie alle Elemente der folgenden Relation auf.

$$R = \{(x, y) \in \text{Flüsse} \times \text{Länder} \mid x \text{ fließt durch } y\}$$



Schreib- und Sprechweisen

Sei R eine Relation zwischen den Mengen A und B, also $R \subseteq A \times B$.

Wenn $(x, y) \in R$ gilt, so sagen wir „x steht in der Relation R mit y“ und schreiben dafür auch

x R y.

Wenn wir nur eine einzige Relation betrachten, bezeichnen wir diese oft mit **~** und schreiben **x ~ y** für x R y.

Beispiele aus dem täglichen Leben:

$x \sim y$: „x ist befreundet mit / verwandt mit / per Du mit y“

Beispiel

Für die Relation

$$R = \{(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid a - b \text{ ist gerade}\}$$

gilt zum Beispiel

	$(1, 3) \in R$	bzw.	$1 \, R \, 3$	bzw.	$1 \sim 3$
	$(1, 5) \in R$		$1 \, R \, 5$		$1 \sim 5$
	$(5, 3) \in R$		$5 \, R \, 3$		$5 \sim 3$
aber	$(2, 3) \notin R$	bzw.	$2 \, (\neg R) \, 3$	bzw.	$2 \not\sim 3$.

Umkehrrelation

Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation zwischen A und B. Dann heißt

$$\mathbf{R^{-1}} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

die **Umkehrrelation** von R.

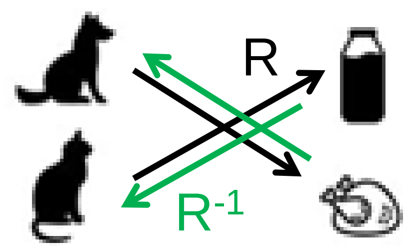
Die Umkehrrelation R^{-1} enthält genau die „umgekehrten" Paare von R. Im Schaubild sind ihre Pfeile umgekehrt orientiert wie die von R.

Beispiel: Die Umkehrrelation von

$$R = \{(\text{Hund, Fleisch}), (\text{Katze, Milch})\}$$

ist

$$R^{-1} = \{(\text{Fleisch, Hund}), (\text{Milch, Katze})\}.$$

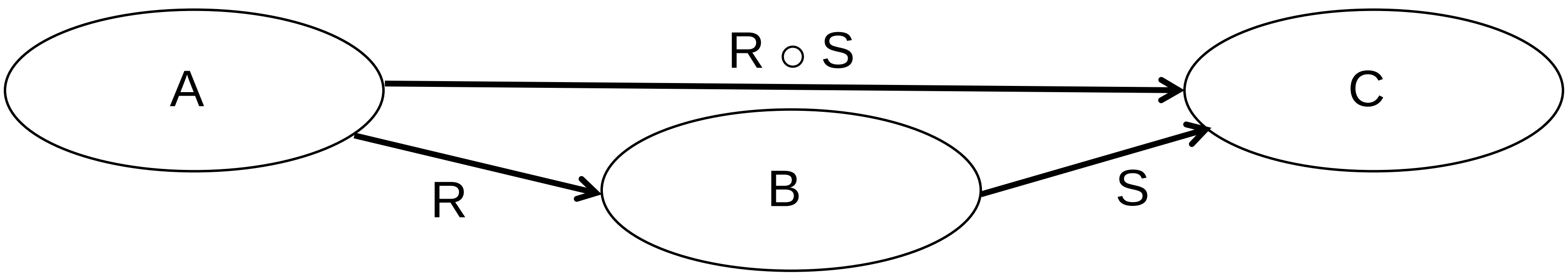


Komposition

Sei R eine Relation zwischen A und B, und sei S eine Relation zwischen B und C. Dann definieren wir die **Komposition R ∘ S** (auch: **Produkt**, **Hintereinanderausführung**) von S und R wie folgt:

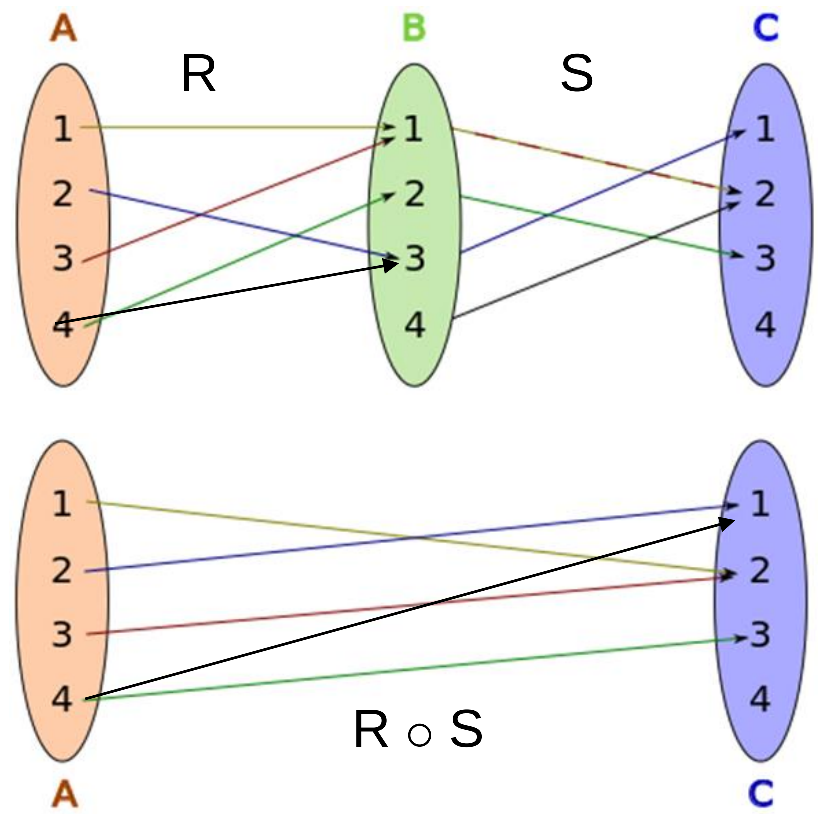
$$R \circ S = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : a\, R\, b \wedge b\, S\, c\}.$$

Die Komposition R ∘ S ist also eine Relation zwischen A und C.



Kompositionen im Schaubild

Im Schaubild besteht R ○ S aus allen Pfeilen von A nach C, für die es Pfeilfolge von A *über B* nach C gibt.



Beispiel:

R = {(1,1), (2,3), (3,1), (4,2), (4,3)}
S = {(1,2), (2,3), (3,1), (4,2)}

Dann ist

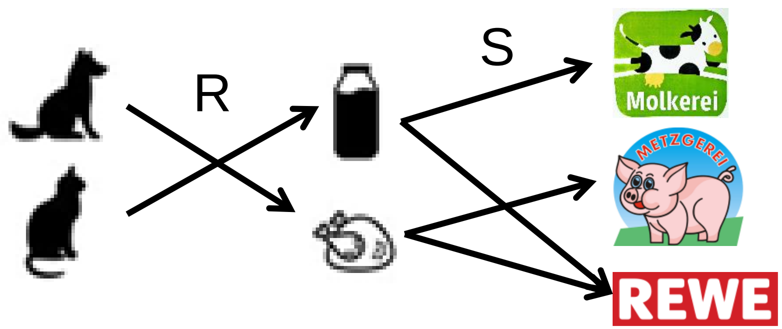
R ○ S = {(1,2), (2,1), (3,2), (4,3), (4,1)}

Übung

Bilden Sie R ∘ S für folgende Relationen. Welche Bedeutung hat R ∘ S?

R = {(Hund, Fleisch), (Katze, Milch)}

S = {(Fleisch, Metzgerei), (Fleisch, Rewe), (Milch, Molkerei), (Milch, Rewe)}



n-stellige Relationen

Eine **n-stellige Relation** R ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts von n Mengen $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$\mathbf{R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n}$$

Die Elemente einer n-stelligen Relation sind n-Tupel.

Beispiel: Auf den Mengen Studierende, Vorlesungen, Semester ist

R = {(x, y, z) | Studi x hört die Vorlesung y im z-ten Semester}

eine 3-stellige Relation. Ein Element dieser Relation wäre zum Beispiel

(Hugo, Diskrete Strukturen, 1).

Anwendung: Relationale Datenbanken

In relationalen Datenbanksystemen werden die Daten als Relationen gespeichert, die man als Tabellen darstellt.

Jedes n-Tupel der n-stelligen Relation ist eine Zeile der Tabelle.

Studierender	Vorlesung	Semester
Hugo	Diskrete Strukturen	1
Emma	Datenbanksysteme	3
Kurt	OOSE	5

Eigenschaften von Relationen

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit Relationen $R \subseteq X \times X$ zwischen *gleichen* Mengen X. Man spricht dann von Relationen **auf** X oder von **homogenen** Relationen.

Definitionen. Für eine Relation $\sim$ auf der Menge X definieren wir:

$\sim$ heißt **reflexiv**, falls für alle $x \in X$ gilt: $x \sim x$

$\sim$ heißt **symmetrisch**, falls für alle $x, y \in X$ gilt:
Aus $x \sim y$ folgt stets $y \sim x$.

$\sim$ heißt **transitiv**, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:
Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt stets $x \sim z$.

Beispiele

(a) Auf der Menge aller Menschen ist die Relation

„Die Person x hat denselben Vornamen wie die Person y.“

reflexiv, symmetrisch und transitiv.

(b) Die Relation

„x ist ein Nachfahre von y.“

ist nur transitiv (denn wenn x ein Nachfahre von y und y ein Nachfahre von z ist, dann ist x auch ein Nachfahre von z).

(c) Die Relation „Land x hat eine gemeinsame Grenze mit Land y“ ist symmetrisch aber nicht transitiv.

Beispiele

(d) Die Gleichheitsrelation

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$$

ist reflexiv (denn für alle x gilt $x = x$),
symmetrisch (denn aus $x = y$ folgt stets $y = x$)
und transitiv (denn aus $x = y$ und $y = z$ folgt $x = z$).

(e) Die Kleiner-Relation

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < y\}$$

ist nur transitiv (denn aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$).

Übung

Welche der Eigenschaften „reflexiv, symmetrisch, transitiv“ gelten?

(a) Die Personen x und y sind in derselben Klasse.

(b) Die Person x hat mit Person y ein gemeinsames Hobby.

(c) Die Person x ist die Schwester der Person y.

(d) Die Zahl x ist kleiner oder gleich der Zahl y.

(e) Die natürliche Zahl x teilt die natürliche Zahl y.

Symmetrie und Umkehrrelation

Satz. Eine Relation R ist genau dann symmetrisch, wenn $R^{-1} = R$ ist.

Beweis. (1.) Wir zeigen zunächst: *Wenn R symmetrisch ist, dann ist $R^{-1} = R$.* Sei also R symmetrisch. Dann gilt:

$$(b, a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R.$$

Jedes Element von R^{-1} ist also auch Element von R und umgekehrt.

Also gilt $R^{-1} = R$.

(2.) Wir zeigen jetzt: *Wenn $R^{-1} = R$ gilt, dann ist R symmetrisch.*

Sei also $R^{-1} = R$. Dann gilt:

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in R.$$

Mit jedem (a, b) aus R ist also auch (b, a) in R, also ist R symmetrisch.

Äquivalenzrelationen

Ziel: Zusammenfassung von Objekten, die „ähnlich“, aber nicht gleich sind. Dadurch kann man Betrachtungen über „viele“ Objekte auf die Betrachtung weniger Klassen von Objekten reduzieren.

Definition. Eine Relation heißt eine **Äquivalenzrelation**, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiele:

(a) Die Gleichheitsrelation $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$ ist eine Äquivalenzrelation (denn sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv).

(b) Die Relation „Person x hat denselben Vornamen wie Person y.“ ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiele

(c) Auf der Menge aller hessischen Studierenden ist die Relation

„x und y studieren an derselben Hochschule.“

eine Äquivalenzrelation.

(d) Auf der Menge F der aussagenlogischen Formeln ist die Relation

$$\equiv \; = \; \{(F_1, F_2) \in F^2 \mid F_1 \text{ ist logisch äquivalent zu } F_2\}$$

eine Äquivalenzrelation.

(e) Weitere Beispiele: Gleichmächtigkeit von Mengen, Parallelität von Geraden, Kongruenz von Dreiecken, …

Gleichheit von Brüchen als Äquivalenzrelation

Wir definieren eine Relation ~ auf der Menge $B = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ wie folgt:

$$\sim\ = \{((a, b), (c, d)) \in B \times B \mid a \cdot d = b \cdot c\}.$$

Dann ist ~ eine Äquivalenzrelation.

Hintergrund: Gleichheit von Brüchen: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ für $a \cdot d = b \cdot c$.

Beweis. *reflexiv:* $(a, b) \sim (a, b)$, denn $a \cdot b = b \cdot a$.

symmetrisch: Es gelte $(a, b) \sim (c, d)$. Dann gilt $a \cdot d = b \cdot c$. Daraus folgt: $c \cdot b = d \cdot a$. Also ist auch $(c, d) \sim (a, b)$.

transitiv: Es gelte $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$. Dann gilt $a \cdot d = b \cdot c$ und $c \cdot f = d \cdot e$. Es folgt $a \cdot d \cdot f = b \cdot c \cdot f = b \cdot d \cdot e$, also $a \cdot f = b \cdot e$, d.h. $(a,b) \sim (e,f)$.

Übung

Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen?

- ❑ $R = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid x \text{ und } y \text{ sind gerade}\}$
- ❑ $R = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid x - y \text{ ist gerade}\}$
- ❑ $R = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid x + y \text{ ist gerade}\}$
- ❑ $R = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid x - y \text{ ist ungerade}\}$
- ❑ $R = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid x + y \text{ ist ungerade}\}$

Kongruenz modulo n

Sei n eine natürliche Zahl > 1. Wir definieren die Relation $\equiv_n$ **(Kongruenz modulo n)** auf der Menge **Z** wie folgt

$$\equiv_n = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 \mid y - x \text{ ist ein ganzzahliges Vielfaches von } n\}$$

Wenn $x \equiv_n y$ gilt, dann sagen wir x und y sind **kongruent modulo n**.

Beispiele: Zwei Zahlen sind kongruent modulo 3, wenn ihre Differenz ein Vielfaches von 3 ist:

(a) $3 \equiv_3 9$, denn $9 - 3 = 6$ ist ein Vielfaches von 3.

(b) $5 \equiv_3 17$, denn $17 - 5 = 12$ ist ein Vielfaches von 3.

(c) $31 \equiv_3 7$, denn $7 - 31 = -24$ ist ein Vielfaches von 3.

Kongruenz modulo n als Äquivalenzrelation

Satz. Die Kongruenzrelation $\equiv_n$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. *reflexiv:* $x \equiv_n x$, denn $x - x = 0$ ist ein Vielfaches von n.

symmetrisch: Es gelte $x \equiv_n y$. Dann ist $y - x$ ein Vielfaches von n, also $y - x = k \cdot n$ für eine ganze Zahl k. Dann ist $x - y = -k \cdot n$ ebenfalls ein Vielfaches von n, also gilt: $y \equiv_n x$.

transitiv: Es gelte $x \equiv_n y$ und $y \equiv_n z$. Dann ist $y - x = k \cdot n$ und $z - y = h \cdot n$ mit ganzen Zahlen k und h. Es folgt, dass

$$z - x = h \cdot n + y - (y - k \cdot n) = h \cdot n + k \cdot n = (h + k) \cdot n$$

ebenfalls ein Vielfaches von n ist. Also gilt $x \equiv_n z$.

Kongruenz modulo n

Definition. Den kleinsten nichtnegativen Rest bei der ganzzahligen Division von a durch n bezeichnet man als **a mod n** („a **modulo** n“).

Beispiele: (a) 17 mod 3 = **2**, denn 17 = 5·3 + **2**

(b) 12 mod 3 = 0, denn 12 = 4·3 + **0**

Beobachtung: Zwei Zahlen a und b sind kongruent modulo n, wenn sie bei Division durch n den gleichen Rest haben: a mod n = b mod n.

Beispiele:

(a) 3 mod 3 = 9 mod 3 (= 0), also $3 \equiv_3 9$,

(b) 5 mod 3 = 17 mod 3 (= 2), also $5 \equiv_3 17$,

(c) 31 mod 3 = 7 mod 3 (= 1), also $31 \equiv_3 7$.

Übung

Berechnen Sie

(a) 7 mod 5

(b) 23 mod 8

(c) 0 mod 2016

(d) –6 mod 8

Äquivalenzklassen

Wir wollen nun alle Elemente, die in einer Äquivalenzrelation miteinander in Relation stehen, zusammenfassen.

Definition. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge X und sei $x \in X$. Dann heißt die Menge

$$[x]_\sim = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

die **Äquivalenzklasse** von x.

Die Äquivalenzklasse von x besteht also aus allen Elementen, die mit x in Relation stehen.

Man nennt die Zahl x einen **Repräsentanten** der Äquivalenzklasse $[x]_\sim$.

Beispiele

(a) Bzgl. der Äquivalenzrelation

$\sim$ = „x und y studieren an derselben Hochschule."

besteht die Äquivalenzklasse des Elements „Hugo" aus allen Studierenden seiner Hochschule:

$[\text{Hugo}]_\sim = \{y \mid \text{Hugo und } y \text{ studieren an derselben Hochschule}\}$

(b) Bzgl. der Kongruenz $\equiv_3$ (modulo 3) besteht die Äquivalenzklasse von 0 aus allen Vielfachen von 3 (d.h. mit Rest 0 bei Division durch 3):

$$\begin{aligned}[0]_3 &= \{y \in \mathbf{Z} \mid y \equiv_3 0\} \\ &= \{y \in \mathbf{Z} \mid y - 0 \text{ ist ein Vielfaches von } 3\} \\ &= \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}\end{aligned}$$

Übung

Geben Sie bzgl. der Kongruenzrelation $\equiv_3$ (modulo 3) die Äquivalenzklasse des Elements 1 an:

$[1]_3 = \{y \in \mathbf{Z} \mid y \equiv_3 1\}$

$= \{y \in \mathbf{Z} \mid y - 1 \text{ ist ein Vielfaches von } 3\}$

Gleiche Äquivalenzklassen

Sei im Folgenden stets ~ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X.

Satz über Äquivalenzklassen: Äquivalente Elemente haben dieselbe Äquivalenzklasse. Das heißt:

Wenn $x \sim y$ gilt, dann ist $[x] = [y]$.

Beispiel: (a) Hugo und Piet studieren beide an der Hochschule RheinMain. Bzgl. der Äquivalenzrelation

~ = „x und y studieren an derselben Hochschule."

gilt für ihre Äquivalenzklassen

$[\text{Hugo}]_\sim = [\text{Piet}]_\sim$ (= alle Studis der HSRM).

(b) Für die Kongruenz modulo 3 gilt zum Beispiel: $[0]_3 = [3]_3 = [6]_3 = \ldots$

Beweis des Satzes über Äquivalenzklassen

Beweis. Sei $x \sim y$. Es ist zu zeigen $[x] = [y]$. Dazu zeigen wir sowohl $[x] \subseteq [y]$ als auch $[y] \subseteq [x]$.

„$[x] \subseteq [y]$":
Sei $z \in [x]$. Das bedeutet $z \sim x$. Wegen $x \sim y$ und der Transitivität von $\sim$ folgt daraus $z \sim y$. Dies bedeutet $z \in [y]$.
Somit ist jedes Element von $[x]$ in $[y]$, also gilt $[x] \subseteq [y]$.

„$[y] \subseteq [x]$ ":
Wegen der Symmetrie folgt aus $x \sim y$ auch $y \sim x$. Also folgt aus dem ersten Fall (wenn man die Buchstaben x und y vertauscht) $[y] \subseteq [x]$.

Gleichheit von Äquivalenzklassen

Satz über Gleichheit von Äquivalenzklassen.
Zwei Äquivalenzklassen sind gleich oder disjunkt.

Beweis. Angenommen, die Äquivalenzklassen [x] und [y] haben mindestens ein Element z gemeinsam.
Dann folgt aus dem Satz über Äquivalenzklassen sowohl $[x] = [z]$ (da $x \sim z$) als auch $[y] = [z]$ (da $y \sim z$), also $[x] = [y]$.
Das bedeutet: Wenn die Äquivalenzklassen [x] und [y] nicht disjunkt sind, dann sind sie gleich. □

Den obigen Satz kann man auch wie folgt formulieren:
Jedes Element von X liegt in genau einer Äquivalenzklasse.

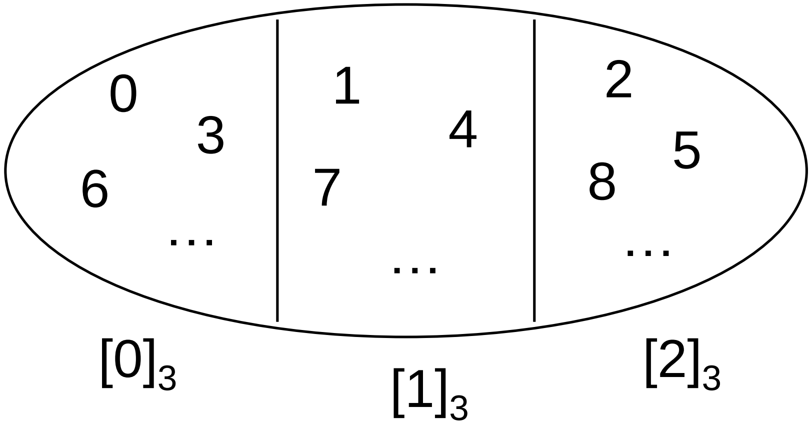
Partition

Diesen Sachverhalt kann man auch wie folgt ausdrücken.

Die Menge der Äquivalenzklassen bildet eine Partition von X.

Eine **Partition** einer Menge X ist eine Menge von Teilmengen von X, die paarweise disjunkt sind und in ihrer Vereinigung die gesamte Menge X ergeben.

Beispiel: Die Äquivalenzklassen der Kongruenzrelation modulo 3 bilden eine Partition von **Z**.



Beispiel

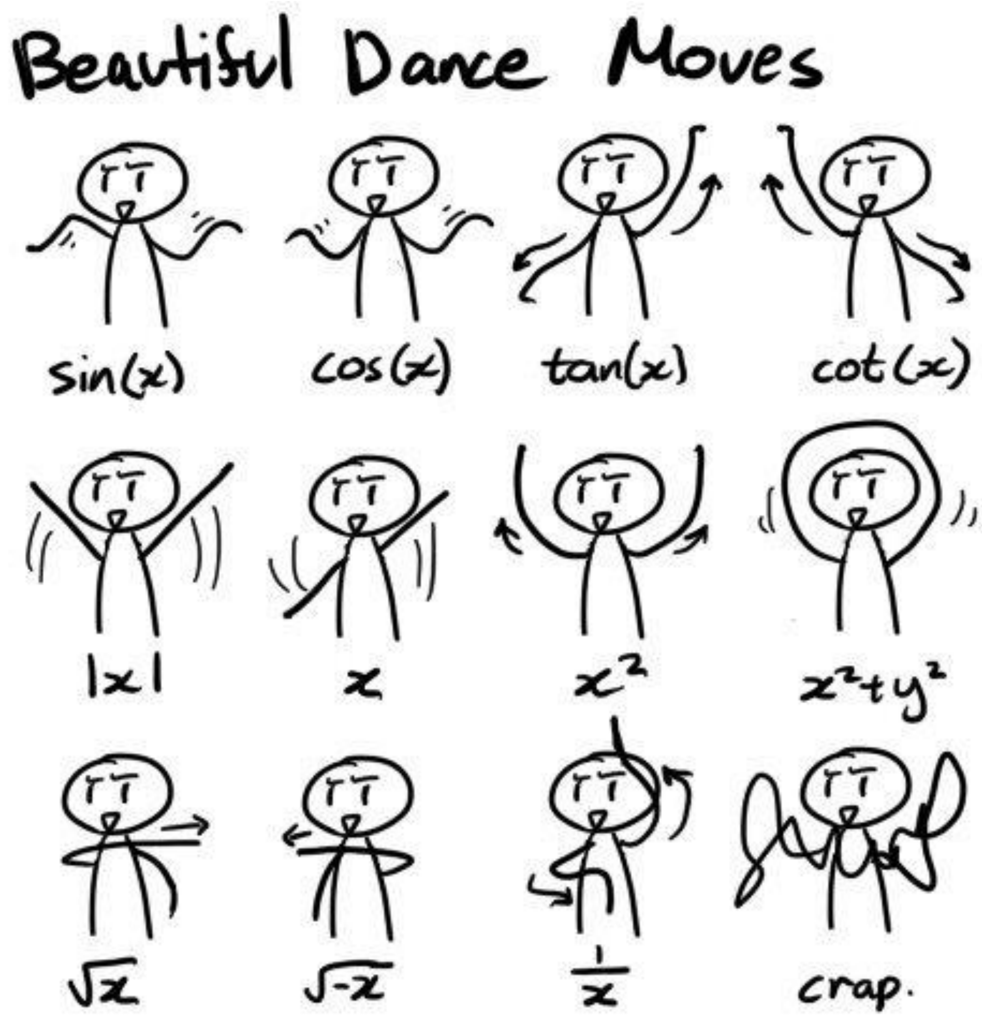
Die Menge aller hessischen Studierenden wird durch die Äquivalenzrelation

„x und y studieren an derselben Hochschule.“

partitioniert.

Jede Äquivalenzklasse enthält genau die Studierenden einer Hochschule.

3.2 Funktionen



Beispiel

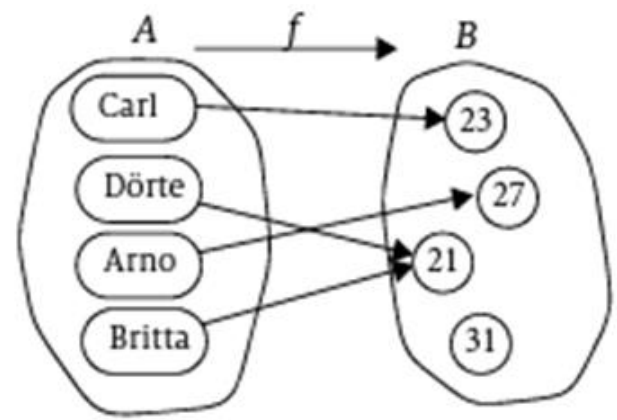
Beispiel: Sei A = {Arno, Britta, Carl, Dörte}, B = {21, 23, 27, 31}.

Das **kartesische Produkt** besteht aus allen möglichen 16 Paaren:

$A \times B$ = {(Arno, 21), (Arno, 23), (Arno, 27), (Arno, 31), (Britta, 21), …}.

Die **Relation** f ordne jeder Person (eindeutig) ihr Alter zu:

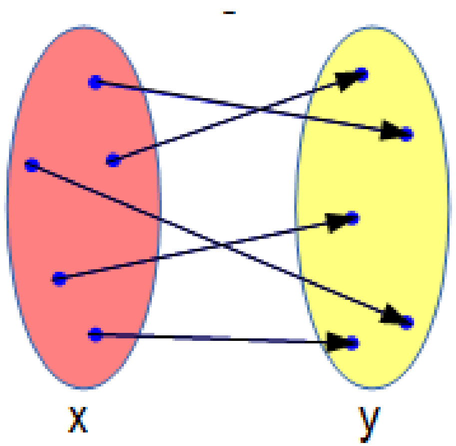
f = {(Arno, 27), (Britta, 21),
(Carl, 23), (Dörte, 21)}.



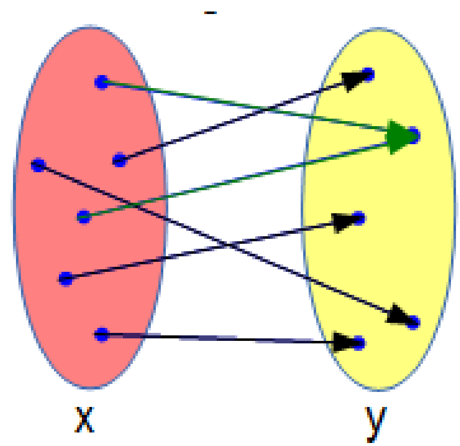
Da *jedem* Namen *genau ein* Alter zugeordnet wird, ist f eine **Funktion**.

Funktionen als eindeutige Relationenen

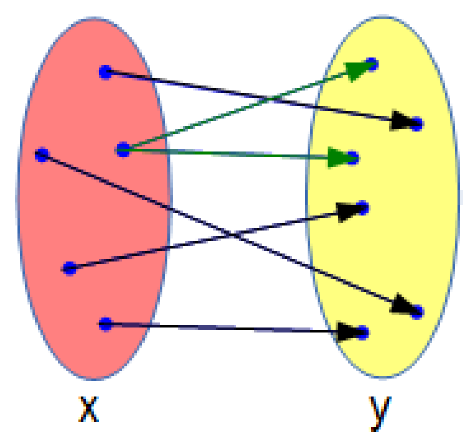
Funktionen sind eindeutige Relationen: *Jedem* Element aus X muss *genau ein* Element aus Y zugeordnet werden (und nicht etwa 2 oder mehr oder gar keins).



Funktion!



Funktion!



Keine Funktion!

Formale Definition

Formale Definition. Seien X und Y Mengen. Eine **Funktion** (auch: **Abbildung**) von X nach Y ist eine Relation

$$f \subseteq X \times Y$$

mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt mit $(x, y) \in f$. („linkstotal" und „rechtseindeutig").

In aussagenlogischer Symbolik könnten wir dies wie folgt schreiben:

$f \subseteq X \times Y$ heißt **Funktion** von X nach Y, wenn gilt:

$\forall\, x \in X \;\exists\, y \in Y : (x, y) \in f$ („zu *jedem* x gibt es ein y …")

$\wedge\, [(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \rightarrow y_1 = y_2]$ („… *genau ein* y …")

Funktionen als eindeutige Zuordnungen

(Arbeits-) Definition. Seien X und Y Mengen.

Eine **Funktion** (auch: **Abbildung**) von X nach Y ist eine *Vorschrift*, die *jedem* Element von X *genau ein* Element von Y *zuordnet*.

Beispiel: Die Zuordnung **Ware** $\rightarrow$ **Preis** ist eine Funktion.
X: Menge aller Waren, Y: Menge der rationalen Zahlen.
Jede Ware hat einen Preis. Der Preis einer Ware ist *eindeutig*.
Es kann sein, dass mehrere Waren denselben Preis haben; das ist nicht verboten.

Sprache der Funktionen

- Für eine Funktion f von X nach Y schreiben wir **$f: X \to Y$**.
- Jedem Element $x \in X$ wird genau ein $y \in Y$ zugeordnet. Dieses y bezeichnen wir mit **$f(x)$**.
- **Bezeichnung:**

  $$f: X \to Y: y = f(x)$$

  oder

  $$f: X \to Y: x \to f(x).$$

  X: **Definitionsbereich**, Y: **Bildbereich**.

Darstellungen von Funktionen

a) Wortvorschrift (verbale Beschreibung) — Jeder reellen Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet.

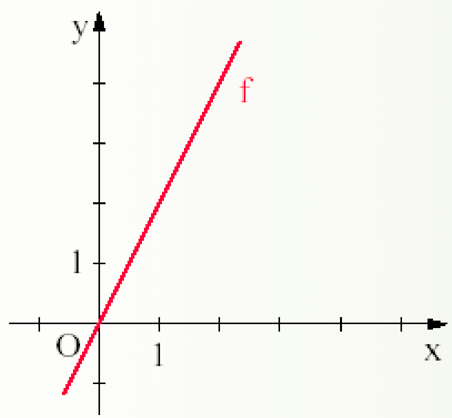
b) Funktionsgleichung — $y = 2 \cdot x$ oder $f(x) = 2 \cdot x$ oder $y = f(x) = 2 \cdot x$ oder $f\colon x \mapsto 2x$, jeweils $x \in \mathbb{R}$

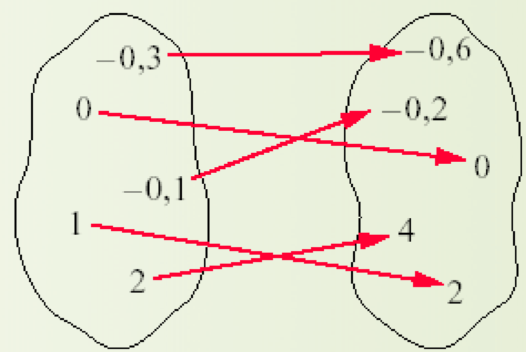
c) Wertetabelle

x	–0,3	–0,1	0	0,1	0,5	0,7	1	2	…
y	–0,6	–0,2	0	0,2	1	1,4	2	4	…

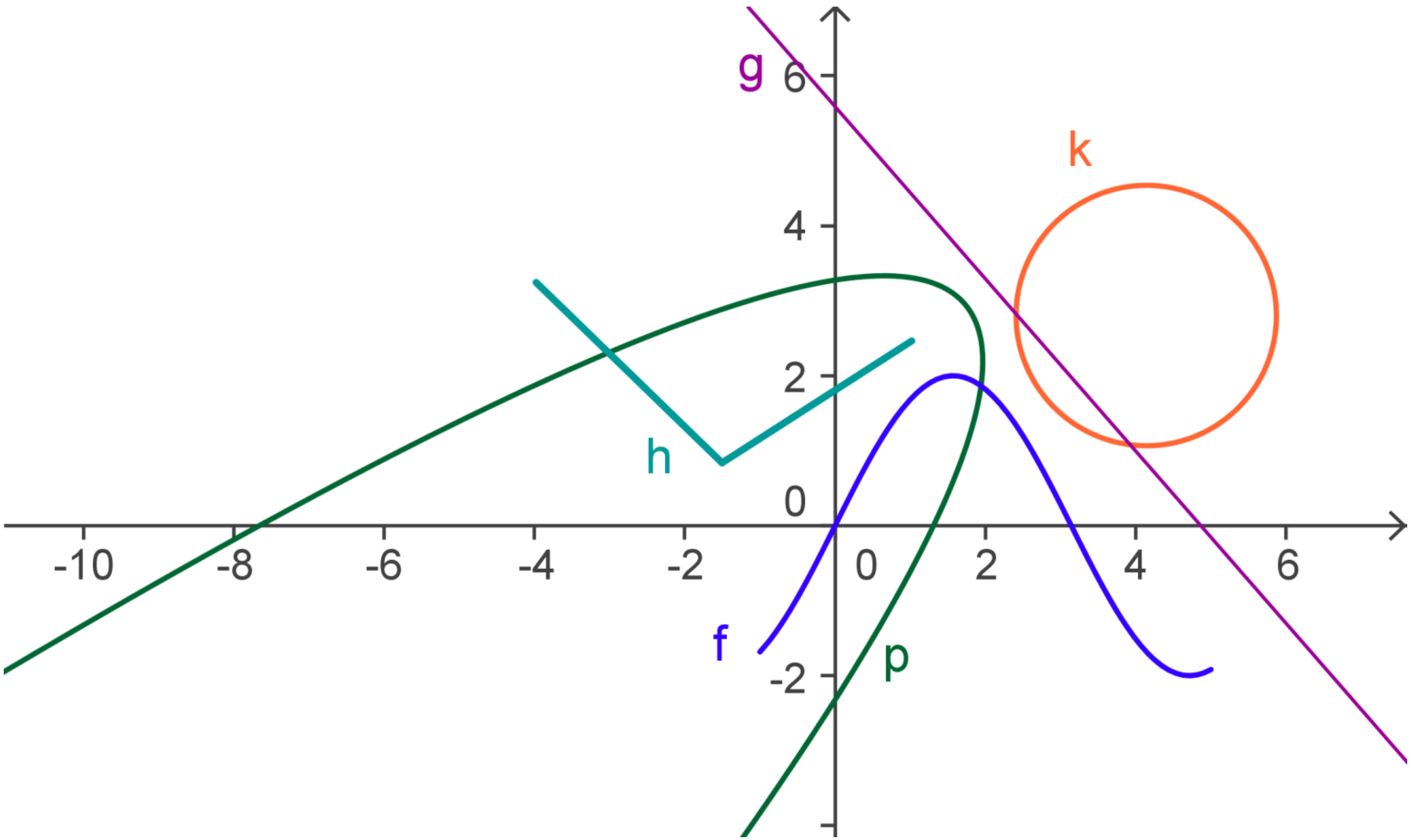
d) grafische Darstellung (im rechtwinkligen Koordinatensystem)/Graph der Funktion

e) Pfeildarstellung bzw. Pfeildiagramm





Übung: Funktion oder nicht?



Injektiv, surjektiv, bijektiv

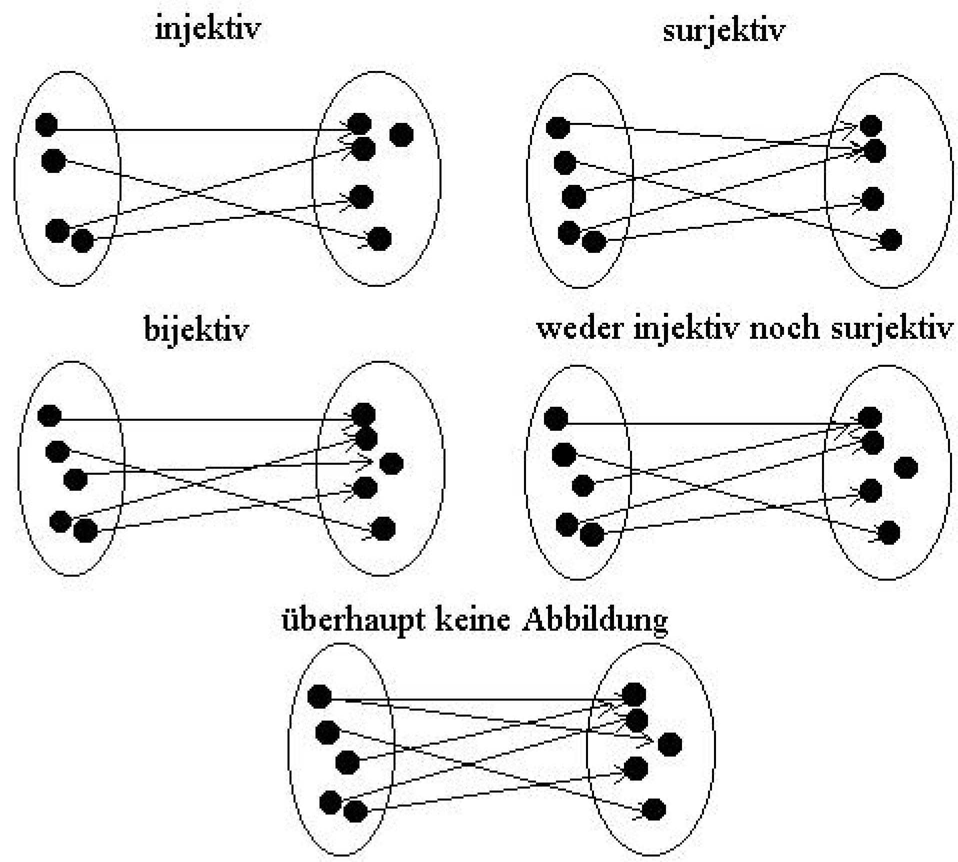
Sei f eine Funktion von X nach Y.

Definition: Man nennt f **injektiv**, wenn keine zwei verschiedenen Elemente von X auf dasselbe Element von Y abgebildet werden.
Bei keinem Element von Y enden zwei oder mehr Pfeile.

Definition: Man nennt f **surjektiv**, wenn es zu jedem Element $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$.
An jedem Element von Y endet mindestens ein Pfeil.

Definition: Eine Funktion heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist. *An jedem Element von Y endet genau ein Pfeil.*

Beispiel



injektiv
surjektiv
bijektiv
weder injektiv noch surjektiv
überhaupt keine Abbildung

Beispiele

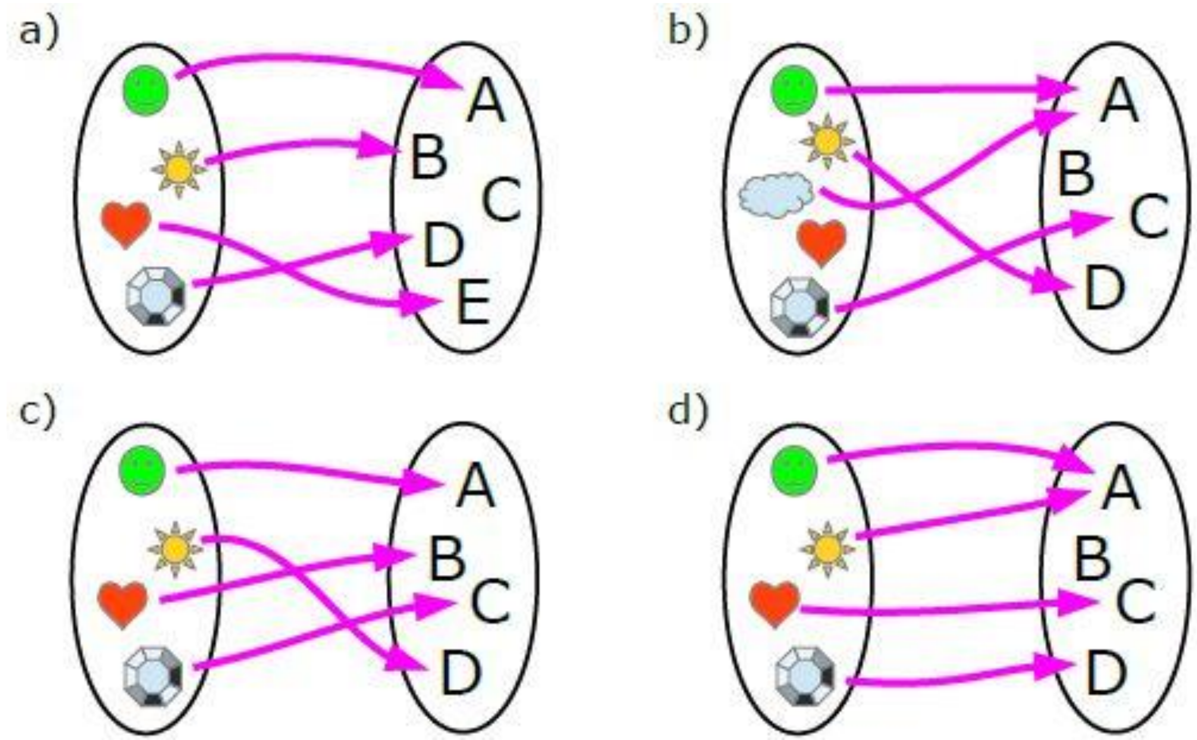
- Die Funktion, die einer Person ihr Alter (in Jahren) zuordnet, ist nicht injektiv, da es verschiedene Personen desselben Alters gibt.
- Die Funktion, die jedem Kraftfahrzeug sein Kennzeichen zuordnet, ist injektiv.
- Die Funktion, die jedem ehemaligen Studenten seine Examensnote zuordnet, ist (vermutlich) surjektiv, aber nicht injektiv.
- Die Funktion f der Menge $\{0, 1, 2\}$ in die Menge $\{a, b, c\}$ mit

  $$f(0) = b,\ f(1) = c,\ f(2) = a$$

  ist sowohl injektiv als auch surjektiv, also bijektiv.

Übung

Injektiv, surjektiv, bijektiv? Oder gar keine Funktion?

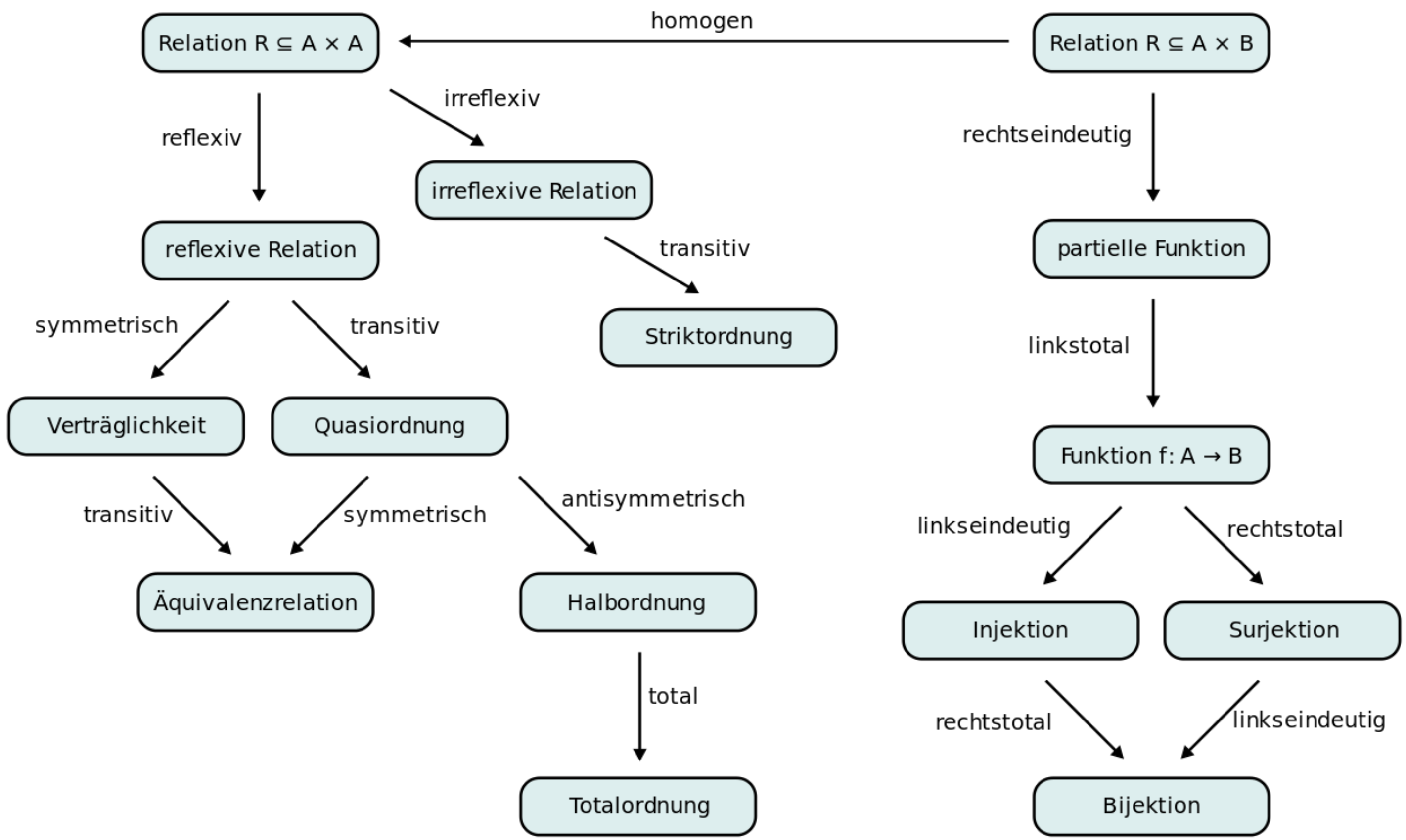


Beispiele

Die Funktion f von **R** in sich mit

- **$f(x) = x^2$** ist weder injektiv (denn z.B. zu $y = 4$ gibt es zwei Urbilder: $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$) noch surjektiv (denn z.B. zu $y = -1$ gibt es kein Urbild x).
- **$f(x) = 2x+3$** ist sowohl injektiv (denn aus $y_1 = y_2$, also $2x_1+3 = 2x_2+3$ folgt $x_1 = x_2$), als auch surjektiv (denn zu jedem y gibt es ein Urbild x, nämlich $x = ½(y – 3)$), also bijektiv.
- **$f(x) = x^2(x+1) = x^3 + x^2$** ist nicht injektiv (denn z.B. zu $y = 0$ gibt es zwei Urbilder: $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$), aber surjektiv (denn zu jedem y gibt es mindestens ein Urbild x).

Typen von Relationen



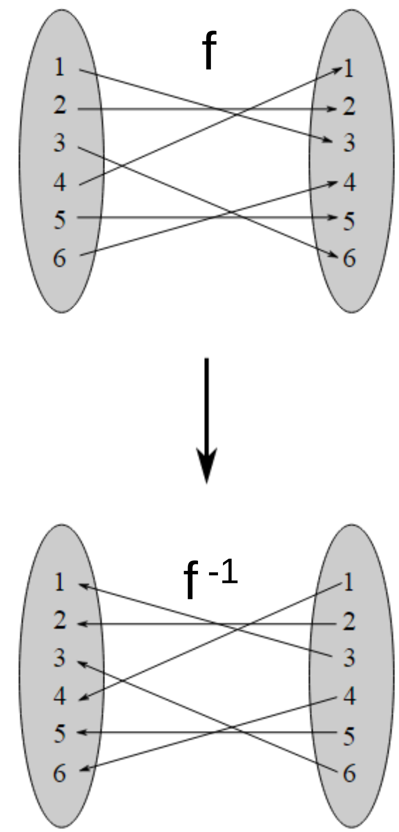
Umkehrfunktion

Jede bijektive Funktion f ist umkehrbar. Das heißt, die Umkehrrelation **f^{-1}** ist wieder eine Funktion, die man **Umkehrfunktion** nennt.
f^{-1} macht die Wirkung von f rückgängig, d.h. bei einer Verkettung heben sich f^{-1} und f gegenseitig auf:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(x)) = x.$$

Bei einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion sind Definitionsbereich und Wertebereich vertauscht:

$$D_{f^{-1}} = W_f \quad \text{und} \quad W_{f^{-1}} = D_f.$$



Umkehrfunktion

Beispiel: Umrechnung von Celsius in Fahrenheit:

Ein Amerikaner benutzt in Deutschland die Umrechnungsformel

$$f(x) = 9/5\, x + 32$$

um von °C (= x) in °F (= f(x)) umzurechnen. Es ergibt sich die Tabelle:

°C	−20	−10	0	10	20	30
°F	−4	14	32	50	68	86

Welche Formel kann ein Deutscher in Amerika benutzen?

Gesucht ist zur Funktion f: °C $\rightarrow$ °F die **Umkehrfunktion** f^{-1}: °F $\rightarrow$ °C.

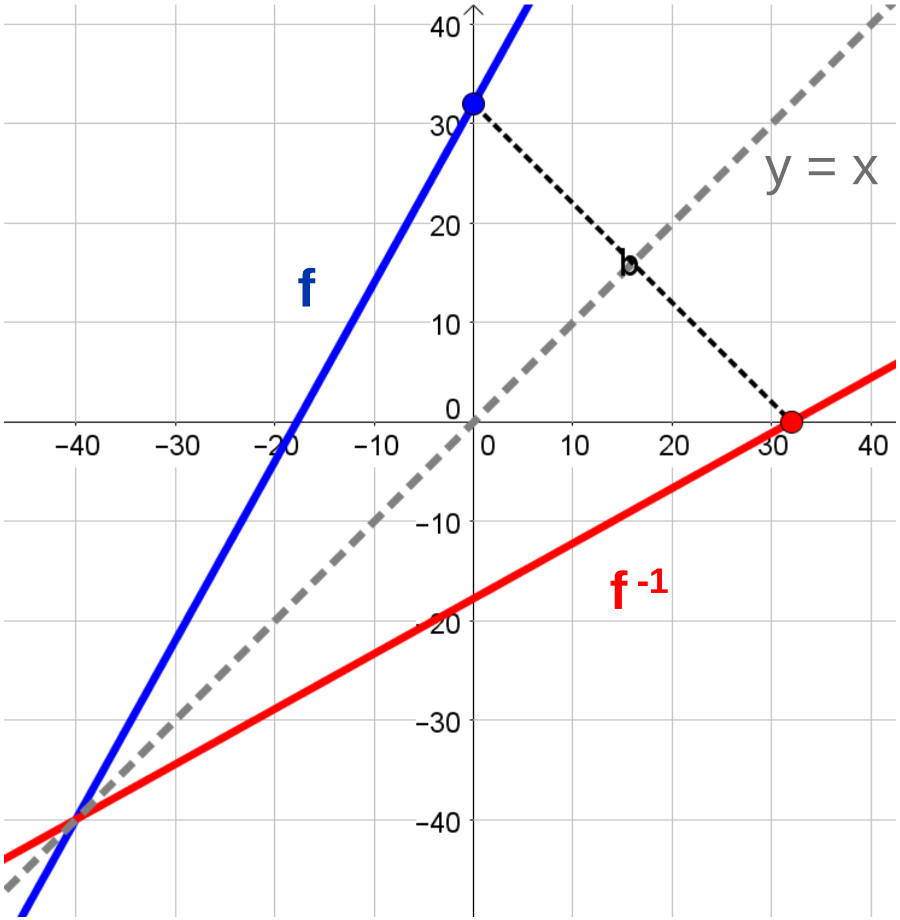
Graph der Umkehrfunktion

Für die Umkehrfunktion f^{-1} ergibt sich die umgekehrte Tabelle:

°F	−4	14	32	50	68	86
°C	−20	−10	0	10	20	30

Aus dem Punkt (0, 32) von f wird der Punkt (32, 0) von f^{-1} usw.

Den Graph der Umkehrfunktion f^{-1} erhält man aus dem von f durch Spiegelung an der Geraden y = x.



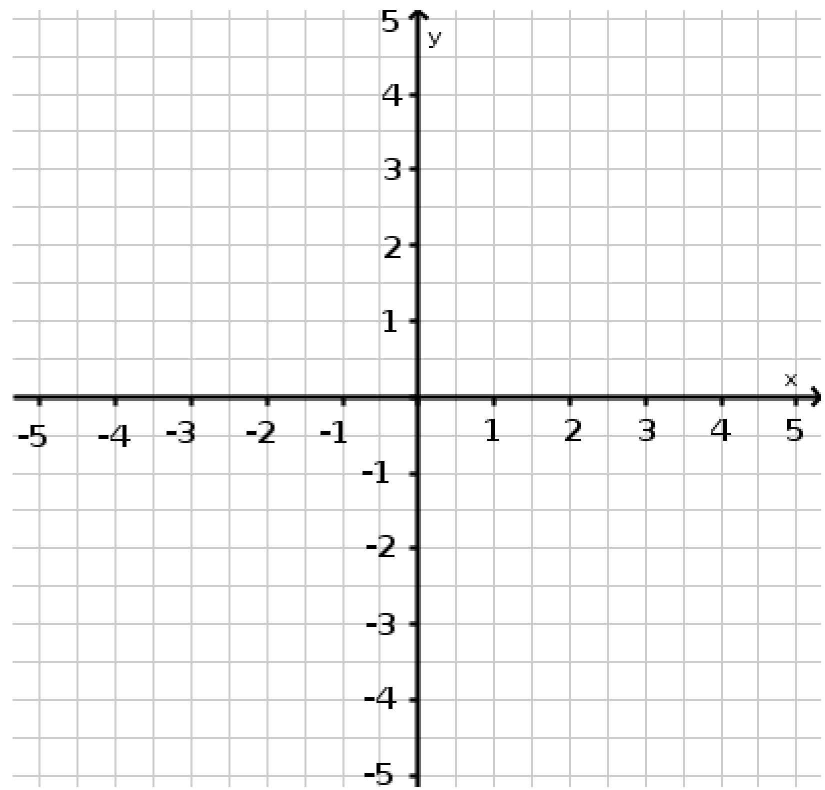
Berechnung der Umkehrfunktion

Die Gleichung der Umkehrfunktion f^{-1} erhält man in folgenden Schritten:

1. Gleichung von f: $f(x) = 9/5\,x + 32$
2. Ersetze f(x) durch y: $y = 9/5\,x + 32$
3. Vertausche x und y: $x = 9/5\,y + 32$
4. Löse nach y auf: $9/5\,y = x - 32$
   $y = 5/9\,(x - 32)$
   $y = 5/9\,x - 160/9$
5. Ersetze y durch $f^{-1}(x)$: $\mathbf{f^{-1}(x) = 5/9\,x - 160/9}$

Übung

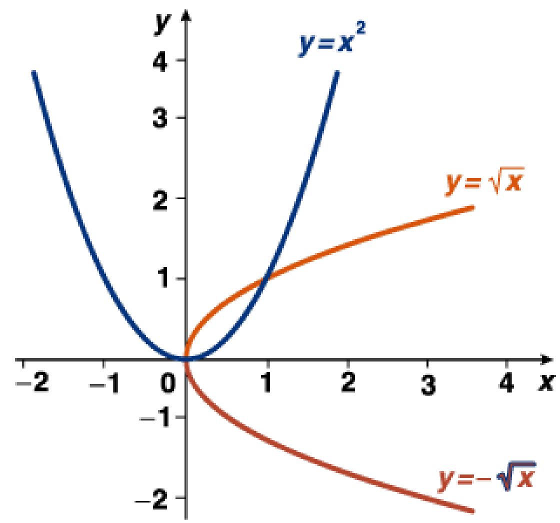
Berechnen und zeichnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von $f(x) = 3x + 1$.



Umkehrbare Teilfunktionen

Beispiel: $f(x) = x^2$ mit D = **R** ist nicht umkehrbar.

Wenn wir den Definitionsbereich auf $x \geq 0$ (rechter Ast) einschränken, ist f umkehrbar:



$f(x) = x^2$

$y = x^2$

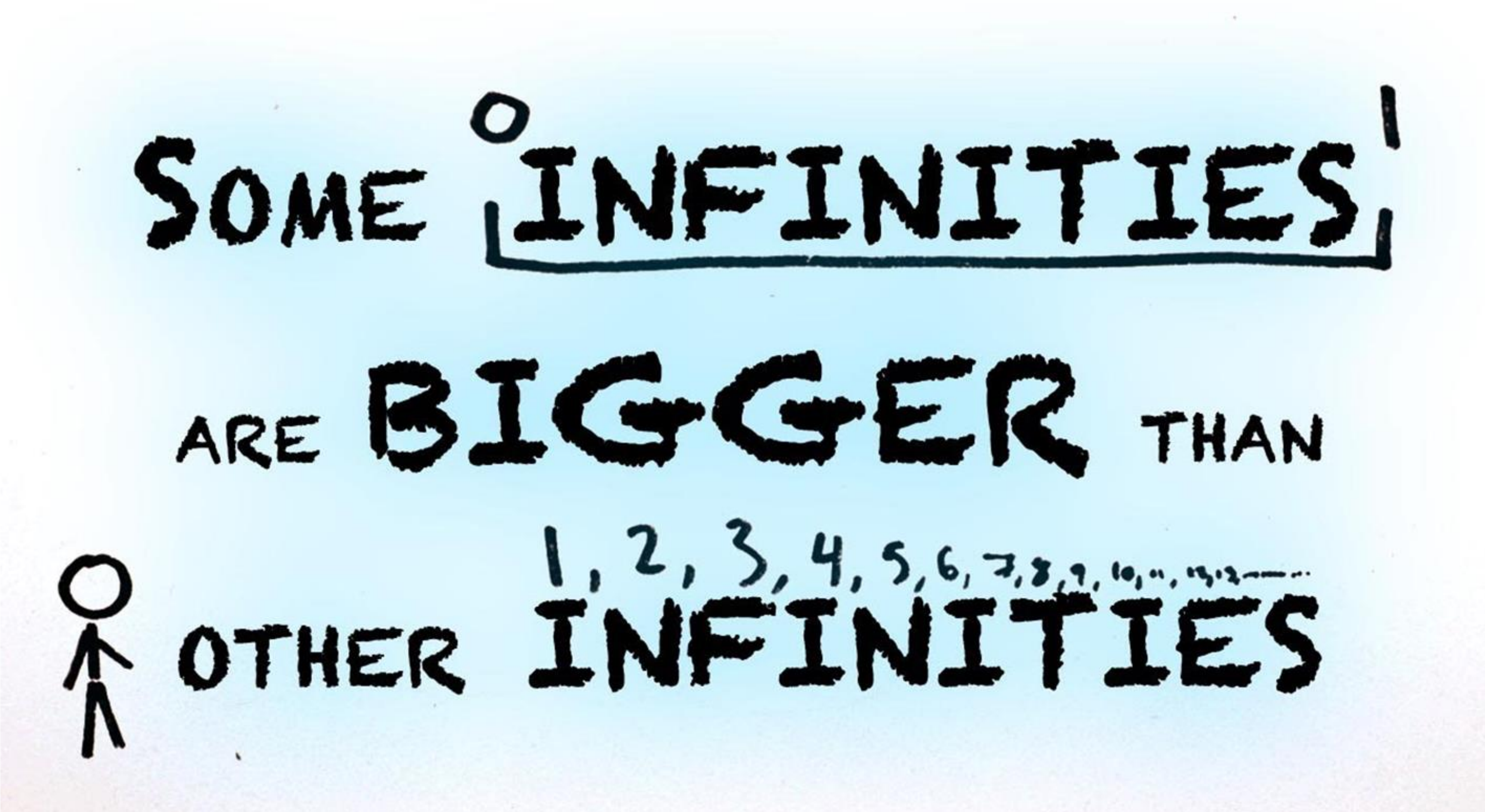
$x = y^2$ (x-y-Tausch!)

$y = \sqrt{x}$

$\mathbf{f^{-1}(x) = \sqrt{x}}$

Eine Einschränkung auf $x < 0$ (linker Ast), ergäbe $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

3.3 Abzählbarkeit

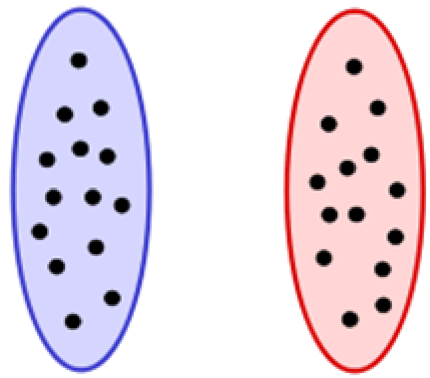


Wann haben zwei Mengen gleich viele Elemente?

Wir stellen uns die – zunächst dumm klingende – **Frage:**

Wann haben zwei Mengen gleich viele Elemente?

Bei **endlichen Mengen** (die also endlich viele Elemente haben) ist die Sache einfach:
Wir zählen die Elemente beider Mengen und vergleichen die Anzahlen.



Problem bei **unendlichen Mengen:** *Haben alle unendlichen Mengen gleich viele Elemente? Ist „unendlich = unendlich"?*

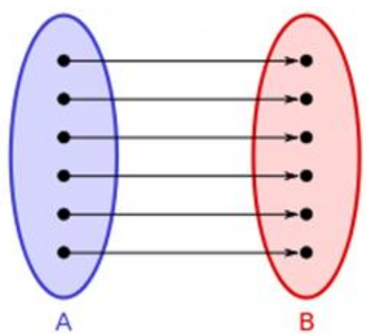
Gleichmächtige Mengen

Um auch unendliche Mengen vergleichen zu können, erweitern wir unsere Definition mit Hilfe von Abbildungen (= Funktionen).

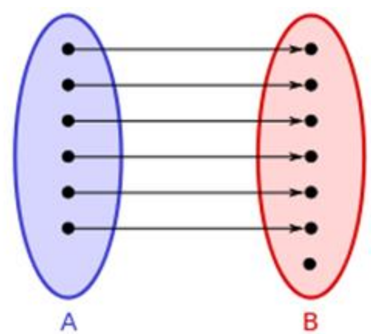
Definition. Zwei Mengen A und B heißen **gleichmächtig**, wenn es eine *bijektive Abbildung* von A nach B gibt.

Für endliche Mengen entspricht diese Definition unserer Anschauung.

Beispiel:



Mengen sind gleichmächtig



Mengen sind nicht gleichmächtig

Beispiel

Um festzustellen, ob es genau so viele Stühle wie Personen gibt, muss man nicht die Personen und die Stühle abzählen, sondern man lässt de Personen Platz nehmen. Wenn es aufgeht, dann sind die beiden Mengen gleichmächtig. (Durch das Sich-Setzen wird eine Bijektion hergestellt.)

Abzählbarkeit

Interessant ist die Frage nach Gleichmächtigkeit bei **unendlichen Mengen**.

Beispiel: **N**, **Z**, **Q**, **R.**

Manche dieser Mengen kann man durch Aufzählung so beschreiben, dass man „drei Pünktchen“ verwendet. Dies sind die „abzählbaren Mengen“; dazu gehören z.B. **N**, **Z**, die geraden Zahlen und sogar **Q**.

Definition. Eine Menge A heißt **abzählbar**, wenn A entweder endlich oder gleichmächtig zu **N** ist.

Abzählbarkeit von Z

Satz. Die Mengen **N** und **Z** sind gleichmächtig. D. h.: Die Menge **Z** der ganzen Zahlen ist abzählbar.

Beweis. Wir definieren folgende Abbildung f von **N** nach **Z**:

$$f(n) = -n/2 \qquad \text{falls n gerade ist,}$$
$$f(n) = (1+n)/2 \qquad \text{falls n ungerade ist.}$$

Also:

N:	0	1	2	3	4	5	6	7	…
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
Z:	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	…

Diese Abbildung ist bijektiv, denn jede ganze Zahl kommt als Bild vor (surjektiv) und jede ganze Zahl hat nur ein Urbild (injektiv).

Übung

Zeigen Sie, dass die Menge **G** der geraden Zahlen abzählbar ist.
Finden Sie dazu eine bijektive Abbildung von **Z** nach **G**.

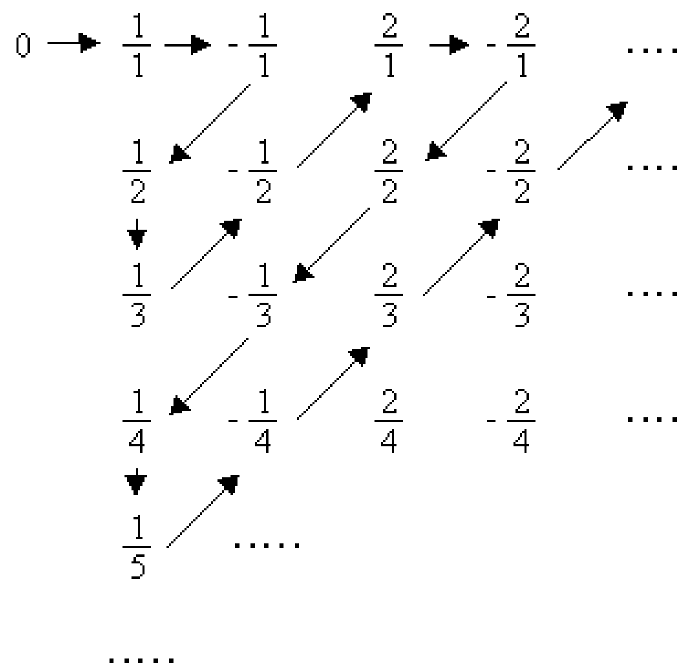
Tipp:	**Z**:	…	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	…
	G:	…	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12	14	…

f(x) =

Q ist abzählbar

Satz. Die Menge **Q** der rationalen Zahlen („Brüche“) ist abzählbar, d.h. gleichmächtig zu **N**.

Beweis. Wir können alle Brüche nach folgendem Schema („**Cantorsches Diagonalverfahren**“) durchnummerieren. Doppelt vorkommende Brüche werden weggelassen.
Dies ergibt eine bijektive Abbildung von **N** auf **Q**.



Überabzählbare Mengen

Aber nicht alle unendlichen Mengen sind gleichmächtig zu den natürlichen Zahlen!

Satz. Die Potenzmenge P(**N**) der natürlichen Zahlen ist nicht abzählbar.

Dies folgt aus dem allgemeineren Satz:

Für jede nichtleere Menge X hat die Potenzmenge P(X) eine größere Mächtigkeit als X.

Beweisidee: P(X) enthält immer eine zu X gleichmächtige Teilmenge (nämlich die Menge aller einelementigen Teilmengen {x} mit $x \in X$), daher hat P(X) eine größere Mächtigkeit als X.

Überabzählbarkeit von **R**

Anders als die gleichmächtigen Zahlenmengen **N**, **Z** und **Q** verhalten sich die reellen Zahlen **R**.

Satz (Cantor). Es gibt keine bijektive Abbildung von **N** auf das reelle Intervall [0,1). Das heißt: Die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 sind nicht abzählbar.

Erst recht ist die Menge **R** aller reellen Zahlen nicht abzählbar!

Beweis. (Oft auch „**Cantorsches Diagonalverfahren**“ genannt.)
Der Beweis erfolgt durch Widerspruch: Wir nehmen an, dass sich die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 abzählen lassen.
Es gibt also eine erste reelle Zahl r_1, eine zweite r_2, eine dritte r_3, usw.

Beweis: Erster Trick

Erster Trick: Wir schreiben die Zahlen zwischen 0 und 1 in dieser Reihenfolge als Dezimalbrüche auf!

$r_1 = 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ a_{16}\ \ldots$

$r_2 = 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ a_{25}\ a_{26}\ \ldots$

$r_3 = 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ a_{35}\ a_{36}\ \ldots$

$r_4 = 0,\ a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44}\ a_{45}\ a_{46}\ \ldots$

$r_5 = 0,\ a_{51}\ a_{52}\ a_{53}\ a_{54}\ a_{55}\ a_{56}\ \ldots$

...

Beispiel: Wenn $r_1 = 0,0925378929$ ist, so ist $a_{11} = 0$, $a_{12} = 9$, $a_{13} = 2$ usw. Die vierte Nachkommastelle von r_7 wird mit a_{74} bezeichnet.

Beweis: Zweiter Trick

Zweiter Trick (genial!): Wir konstruieren eine reelle Zahl t zwischen 0 und 1, die nicht in dieser Liste vorkommt!
Dies ist ein Widerspruch, denn die obige Liste soll ja alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 enthalten.

Konstruktion von t: Die Zahl t hat eine Null vor dem Komma und nach dem Komma die Stellen $b_1, b_2, b_3, \ldots$

Für die Ziffer b_1 ist nur verboten, dass sie gleich a_{11} ist. Also unterscheidet sich t wenigstens an der ersten Nachkommastelle von r_1. Somit ist sicher $t \neq r_1$.

Die Ziffer b_2 darf nicht gleich a_{22} sein. Daher unterscheidet sich t jedenfalls an der zweiten Nachkommastelle von r_2; somit ist $t \neq r_2$.

Beweis: Der Widerspruch

Und so weiter: Die Ziffer b_i wird so gewählt, dass $b_i \neq a_{ii}$ ist.

Dann unterscheidet sich t an der i-ten Stelle von r_i, also ist $t \neq r_i$.

So erhalten wir eine reelle Zahl $t = 0, b_1\, b_2\, b_3 \ldots$ zwischen 0 und 1.

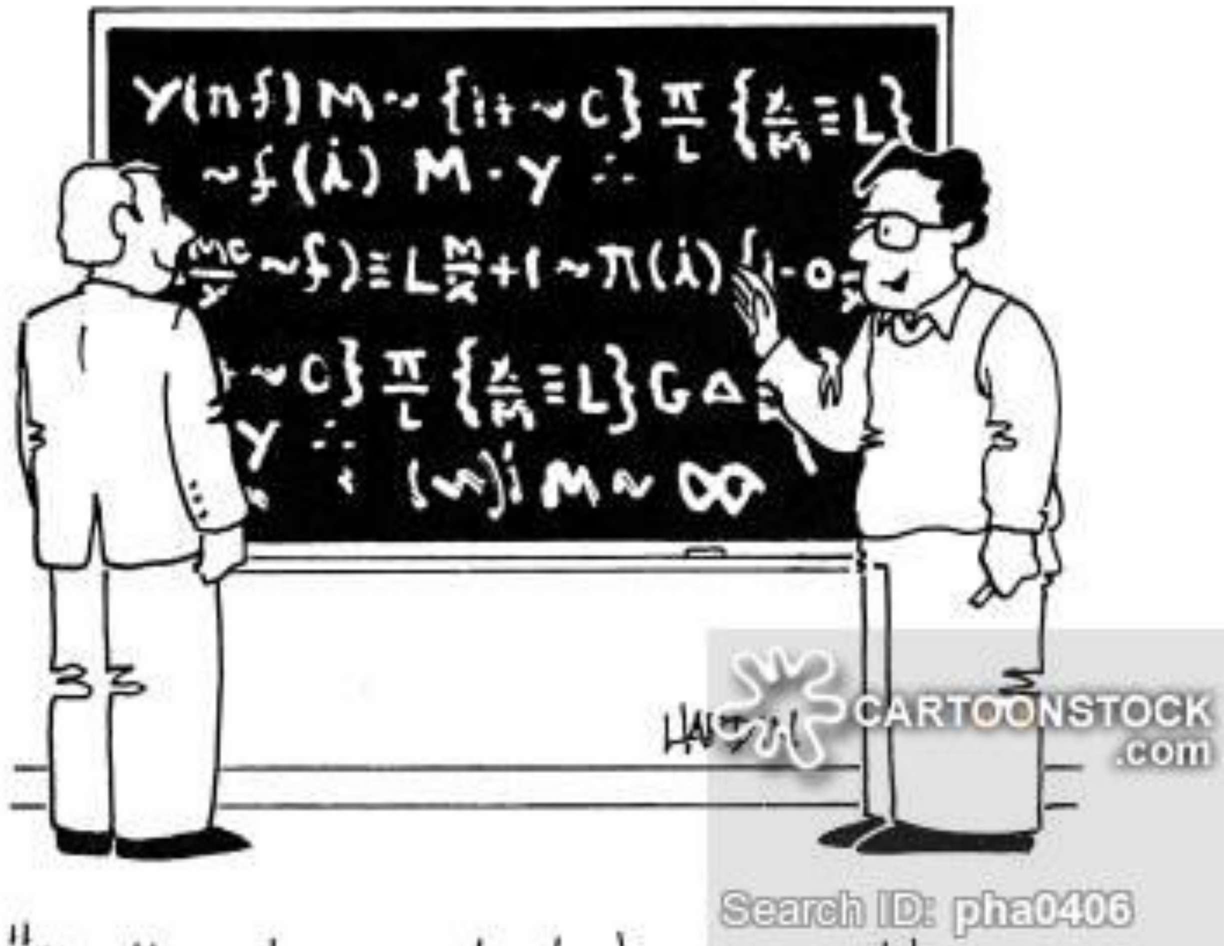
Behauptung: Die Zahl t steht nicht in obiger Liste!

Warum? Wenn t auf der Liste wäre, müsste t gleich einer Zahl r_i sein.

Wir haben aber schon gesehen, dass dies (wegen $b_i \neq a_{ii}$) nicht der Fall sein kann.

Widerspruch! Dieser Widerspruch kommt von der Annahme her. Also ist die Annahme falsch.

Daher ist die Menge $[0, 1)$ nicht abzählbar. $\square$



"Don't get me started – I could go on about infinity forever!"