Zeige $U_f: |x,y\rangle \mapsto |x, y \oplus f(x)\rangle$ ist unitär

Es gibt mehrere Möglichkeiten

1. Möglichkeit: f ist die Nullfunktion, d.h.
$f: \{0,1\} \to \{0,1\}$ mit $f(0)=0$, $f(1)=0$

Dann gilt

$$U_f: \begin{cases} |00\rangle \mapsto |0, 0\oplus f(0)\rangle = |00\rangle \\ |01\rangle \mapsto |0, 1\oplus f(0)\rangle = |01\rangle \\ |10\rangle \mapsto |1, 0\oplus f(1)\rangle = |10\rangle \\ |11\rangle \mapsto |1, 1\oplus f(1)\rangle = |11\rangle \end{cases}$$

D.h. U_f ist die Identität und wird durch I_4 beschrieben.
$U_f = I_4$ ist unitär.

2. Möglichkeit: f ist die Identität, d.h.
$f: \{0,1\} \to \{0,1\}$ mit $f(0)=0$, $f(1)=1$

Dann gilt
$U_f: |x,y\rangle \mapsto |x, y\oplus f(x)\rangle = |x, y\oplus x\rangle = |x, x\oplus y\rangle$

Diese Abbildung kennen wir bereits als CNOT und für die entsprechenden Matrizen gilt $U_f = A_{CNOT}$, d.h. unitär.

3. Möglichkeit f ist die Negation, d.h.
$f: \{0,1\} \to \{0,1\}$, mit $f(0)=1$, $f(1)=0$.

Wir betrachten wieder die einzelnen Bilder von f:

$$U_f: \begin{cases} |00\rangle \mapsto |0, 0\oplus f(0)\rangle = |01\rangle \\ |01\rangle \mapsto |0, 1\oplus f(0)\rangle = |00\rangle \\ |10\rangle \mapsto |1, 0\oplus f(1)\rangle = |10\rangle \\ |11\rangle \mapsto |1, 1\oplus f(1)\rangle = |11\rangle \end{cases}$$

Wir wissen: U_f kann durch eine Matrix beschrieben werden.
Die mit $|i\rangle$ bezeichnete Spalte beschreibt das Bild des Basisvektors $|i\rangle$

$$\begin{array}{c|cccc} & |00\rangle & |01\rangle & |10\rangle & |11\rangle \\ \hline |00\rangle & & & & \\ |01\rangle & & & & \\ |10\rangle & & & & \\ |11\rangle & & & & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U_f$$

U_f ist eine Permutationsmatrix, also unitär.

<u>4. Möglichkeit</u> f ist die Einsfunktion, also
$f: \{0,1\} \to \{0,1\}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 1$.
Dann ist

$$U_f: \begin{cases} |00\rangle \longmapsto |0, 0 \oplus f(1)\rangle = |01\rangle \\ |01\rangle \longmapsto |0, 1 \oplus f(0)\rangle = |00\rangle \\ |10\rangle \longmapsto |1, 0 \oplus f(1)\rangle = |11\rangle \\ |11\rangle \longmapsto |1, 1 \oplus f(1)\rangle = |10\rangle \end{cases}$$

und

$$\begin{array}{c|cccc} & |00\rangle & |01\rangle & |10\rangle & |11\rangle \\ \hline |00\rangle & & & & \\ |01\rangle & & & & \\ |10\rangle & & & & \\ |11\rangle & & & & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U_f$$

U_f ist eine Permutationsmatrix und als solche unitär.

Zeige Für $x \in \{0,1\}$ ist $|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle = (-1)^{f(x)}(|0\rangle - |1\rangle)$

Es gilt $f(x) \in \{0,1\}$, d.h.

$$|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle = \begin{cases} |0\rangle - |1 \oplus 0\rangle = |0\rangle - |1\rangle, & \text{für } f(x) = 0, \\ |1\rangle - |1 \oplus 1\rangle = |1\rangle - |0\rangle, & \text{für } f(x) = 1, \end{cases}$$

$$= (-1)^{f(x)}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Betrachte Algorithmus zum Problem von Deutsch, wobei f die Negation ist.

Wir beginnen in Schritt 3, da f vorher nicht auftritt:

$$|\phi_3\rangle = \frac{1}{2}\left((-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle\right)(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}(-|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$$

Mit $H(|1\rangle - |0\rangle) = -\sqrt{2}|1\rangle$, $H(|0\rangle - |1\rangle) = \sqrt{2}|1\rangle$

folgt in Schritt 4

$$|\phi_4\rangle = \frac{1}{2} H(|1\rangle - |0\rangle)\, H(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}(-\sqrt{2}|1\rangle \sqrt{2}|1\rangle)$$

$$= -|1\rangle|1\rangle$$

Messen liefert $|1\rangle|1\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $(-1)^2 = 1$ und der Algorithmus gibt "balanciert" aus.

Betrachte Algorithmus zum Problem von Deutsch, wobei f die Einsfunktion ist.

Wir beginnen wieder in Schritt 3:

$$|\phi_3\rangle = \frac{1}{2}\left(\left((-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle\right)(|0\rangle - |1\rangle)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-|0\rangle - |1\rangle\right)\left(|0\rangle - |1\rangle\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\left(|0\rangle - |1\rangle\right)$$

Mit $H(|0\rangle + |1\rangle) = \sqrt{2}|0\rangle$, $H(|0\rangle - |1\rangle) = \sqrt{2}|1\rangle$ ergibt sich in Schritt 4

$$|\phi_4\rangle = -\frac{1}{2} H(|0\rangle + |1\rangle)\, H(|0\rangle - |1\rangle)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}|0\rangle \sqrt{2}|1\rangle\right)$$
$$= -|0\rangle|1\rangle$$

Messen liefert $|0\rangle|1\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $(-1)^2 = 1$ und der Algorithmus gibt "konstant" aus.

Berechne

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$
$$= \frac{1}{2}\left(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\right)$$

Berechne H_2

$$H_2 = H \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechne $H \otimes I_2$ und $I_2 \otimes H$. Ist das Tensorprodukt kommutativ?

$$H \otimes I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 \otimes H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes H = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Da die berechneten Tensorprodukte bzw. Matrizen verschieden sind, ist das Tensorprodukt nicht kommutativ.