<u>Übung</u> Zeige: $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ ist eine Orthogonalbasis

Wir müssen zeigen, dass das Skalarprodukt der Basisvektoren null ist. Mit

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

folgt $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-1) = 0$

Also ist $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ eine Orthogonalbasis.

<u>Übung</u> Zeige: $\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)$, $\beta' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)$ Nachtrag

für $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha'|+\rangle + \beta'|-\rangle$.

Wir beobachten:

$$|+\rangle = H|0\rangle, \quad |-\rangle = H|1\rangle$$

Mit $H^2 = I_2$ (Identität) folgt

$$H(\alpha'|+\rangle + \beta'|-\rangle) = \alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle = \alpha H|0\rangle + \beta H|1\rangle$$

$$= \alpha\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \beta\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)|1\rangle$$

Koeffizientenvergleich liefert $\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)$, $\beta' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)$

<u>Übung</u> Messe nach 2. Qubit das Register im Zustand

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{2}|101\rangle + \frac{1}{2}|111\rangle$$

Mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ wird $|0\rangle$ angenommen.

Das Register ist dann im Zustand

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{2}|101\rangle}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|101\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|101\rangle$$

Mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ wird $|1\rangle$ angenommen. Das Register ist dann im Zustand

$$\frac{\frac{1}{2}|111\rangle}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = |111\rangle$$

<u>Übung</u> Zeige: Φ^+ kann nicht als Produkt zweier Ein-Bit Zustände geschrieben werden

Angenommen es wäre doch möglich, dann ist

$$\Phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \overset{!}{=} (\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle)(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle)$$

$$= \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle$$

Nach Koeffizientenvergleich muss gelten

$$\alpha_0\beta_0 = \alpha_1\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \alpha_0\beta_1 = \alpha_1\beta_0 = 0 \qquad \lightning$$

Also ist die geforderte Darstellung für Φ^+ nicht möglich.

<u>Übung</u> Schreibe $\frac{1}{2}(|0\rangle + |3\rangle + |12\rangle + |15\rangle)$ als ein Produkt von Bell-Zuständen.

$$\frac{1}{2}(|0\rangle + |3\rangle + |12\rangle + |15\rangle) =$$

$$= \frac{1}{2}(|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$= \Phi^+ \otimes \Phi^+$$

Nachtrag zum Thema „Koeffizientenvergleich"

Wir verwenden

$$|+\rangle = H|0\rangle, \quad |-\rangle = H|1\rangle$$

$$H^2 = I_2 \quad (\text{Identität})$$

und werden Hadamard-Transformation auf die Gleichung

$$\alpha'|+\rangle + \beta'|-\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

an:

$$\begin{aligned}
\alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle &= \alpha' H^2|0\rangle + \beta' H^2|1\rangle = \alpha' H(H|0\rangle) + \beta' H(H|1\rangle) \\
&= \alpha' H|+\rangle + \beta' H|-\rangle \\
&= H(\alpha'|+\rangle + \beta'|-\rangle) = H(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \\
&= \alpha H|0\rangle + \beta H|1\rangle \\
&= \alpha \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \beta \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)|1\rangle
\end{aligned}$$

Erinnerung: $|0\rangle, |1\rangle$ sind „nur" andere Bezeichnungen für die Basisvektoren $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$. Per Definition ist die Darstellung bzgl. einer Basis eindeutig

Koeffizientenvergleich (d.h. Vergleich von rechter / linker Seite der Gleichung bzgl. der Basis $|0\rangle, |1\rangle$) liefert

$$\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta), \quad \beta' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)$$