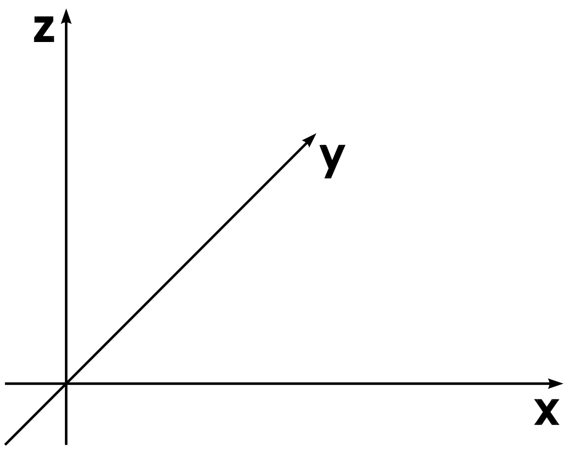
Lineare Algebra und Analytische Geometrie im Raum

Rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem:



"Rechte-Hand-Regel":

- Drehe mit der rechten Hand die (positive) x-Achse auf die (positive) y-Achse zu.
- Dann zeigt der Daumen in Richtung der (positiven) z-Achse.

Bedeutung für die Computergraphik:

- In einem linkshändigen Koordinatensystem
  - werden Drehungen umgekehrt.
  - stehen Normalenvektoren entgegengesetzt.
- mit Verfälschungen u.a. bei der
  - Sichtbarkeit
  - Beleuchtung

(Fast) alles wie in der Ebene

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ statt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und dann (fast) alles durch Anhängen der z-Koordinate:

- Vektoraddition

- Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar
- Differenzvektor
- Parameterdarstellung einer Geraden oder Strecke
- Parallelen und linear abhängige Richtungsvektoren
- Länge eines Vektors
- Skalarprodukt und Winkel zwischen Vektoren

aber einiges ist anders ...

Berechnung des Geradenschnittpunkts wie in der Ebene:

$$\begin{pmatrix}1\\7\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\-3\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

aber jetzt:

- **drei** Gleichungen, aber nur **zwei** Variable
- überbestimmtes Gleichungssystem
- hat meist keine Lösung – also kein Schnittpunkt

Windschiefe Geraden:

Zwei Geraden im Raum heißen windschief, wenn

- sie sich nicht schneiden
- aber auch nicht parallel sind

Normalendarstellung

- einer Geraden ?: Gibt's nicht !
- einer Ebene:

Ebene durch den Ursprung mit Normalenvektor $\vec{n}$:

$$E=\left\{\vec{p}\in R^3 :< \vec{p},\vec{n} >= 0\right\}$$

Ebene durch den Punkt $\vec{a}$ mit Normalenvektor $\vec{n}$:

$$E=\left\{\vec{p}\in R^3 :< \vec{p},\vec{n} >= \alpha\right\} \text{ mit } \alpha =< \vec{a},\vec{n} >$$

Hesse’sche Normalform

Ebene durch den Punkt $\vec{a}$ mit Normalenvektor $\vec{n}$ der Länge 1:

$$E=\left\{\vec{p}\in R^3 :< \vec{p},\vec{n} >= d\right\} \textbf{ mit } d =< \vec{a},\vec{n} >$$

Der Wert d gibt den Abstand der Ebene zum Ursprung an. Mit der Hesse’schen Normalform lässt sich leicht der Abstand w eines Punktes mit Ortsvektor $\vec{p}$ zur Ebene E berechnen: $w =|< \vec{p},\vec{n} > -d\,|$

Was in der Ebene für Geraden ging, geht im Raum für Ebenen:

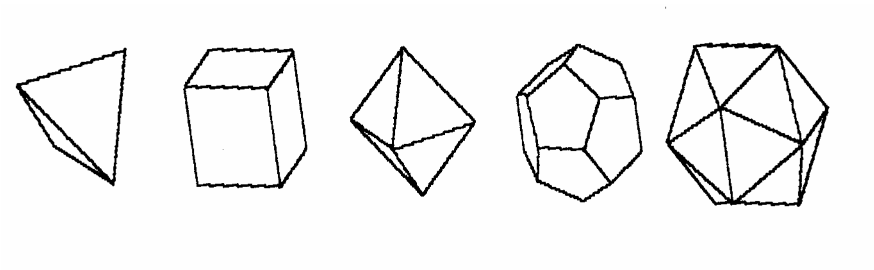
- Lot von einem Punkt auf eine Ebene fällen
- Ebene teilt den Raum in zwei Halb**räume**

Polyeder

3-dimensionale (konvexe) Polyeder:

- Durchschnitte von Halbräumen
- d.h. beschrieben durch ein lineares Ungleichungssystem
- Konvexität wie bei Polygonen in der Ebene (sehr vorteilhaft für graphische Anwendungen)

Beispiel: Platonische Körper

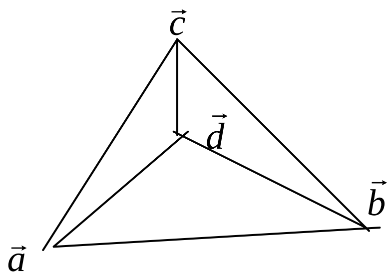


Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder

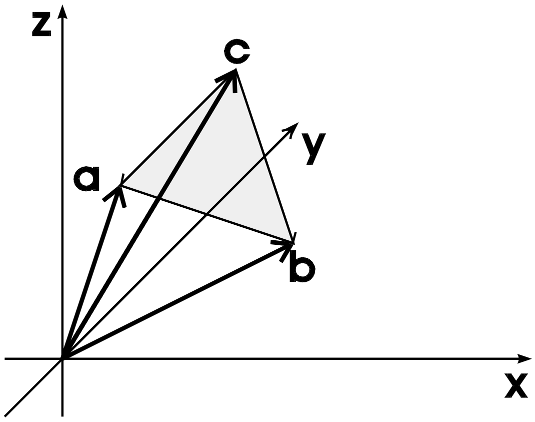
Tetraeder

Ein 3-dimensionales Polyeder hat mindestens 4 Ecken

Ein Polyeder mit 4 Ecken heißt Tetraeder



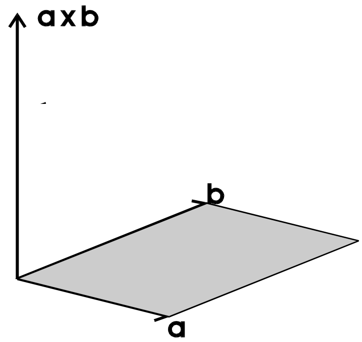
Ebene in Parameterdarstellung



- Ebene durch drei Punkte $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (nicht auf einer Geraden)
- statt eines Richtungsvektors bei einer Geraden hat man **zwei aufspannende Vektoren** $\vec{a}-\vec{c}$ und $\vec{b}-\vec{c}$ (linear unabhängig)
- mit **zwei unabhängigen Parametern** *s* und *t*

$$E = \left\{ \vec{p} \in R^3 : \vec{p} = \vec{c} + s(\vec{a}-\vec{c}) + t(\vec{b}-\vec{c}),\ s,t \in R \right\}$$

Vektorprodukt



$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$:

- ist ein Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- Richtung nach "Rechter-Hand-Regel"
- Länge von $\vec{a} \times \vec{b}$ ist die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

Vektorprodukt mit "formaler Determinante":

- Schreibe in die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in die 2. und 3. Spalte einer 3-reihigen Determinante.
- Schreibe in die 1. Spalte die Symbole der Koordinatenvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$.
- Entwickle die Determinante nach der 1. Spalte:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & a_x & b_x \\ \vec{e}_y & a_y & b_y \\ \vec{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Reihenfolge der Faktoren bestimmt Richtung des Normalenvektors:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Umrechnung der Ebenendarstellungen

Parameter- in Normalendarstellung:

$$E = \left\{ \vec{p} \in R^3 : \vec{p} = \vec{c} + s(\vec{a} - \vec{c}) + t(\vec{b} - \vec{c}),\ s,t \in R \right\}$$

- Normalenvektor $\vec{n} = (\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c})$
- rechte Seite $\alpha = < \vec{n}, \vec{c} >$

$$E = \left\{ \vec{p} \in R^3 : < \vec{p}, \vec{n} > = \alpha \right\}$$

Normalen- in Parameterdarstellung:

Finde (?) drei Punkte $\vec{a}\,,\ \vec{b}\,,\ \vec{c}$, die

- die Ebenengleichung $< \vec{p}, \vec{n} >= \alpha$ erfüllen
- und nicht auf einer Geraden liegen.

Transformationen im Raum

Transformation als Abbildung

Jede Transformation bildet einen Punkt P auf einen neuen Punkt P' ab. Diese Abbildung lässt sich als Matrix M repräsentieren:

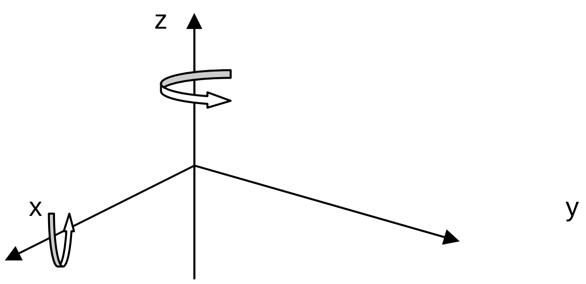
$$\vec{p}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \cdot \vec{p}$$

Spiegelung an den Koordinatenebenen

x,y-Ebene x,z-Ebene y,z-Ebene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Drehung um die Koordinatenachsen um den Ursprungspunkt



Drehrichtung

- gegen den Uhrzeigersinn,
- wenn man gegen die Achsrichtung blickt.

z-Achse	x-Achse	y-Achse (kein Vorzeichenfehler!)
$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$