# Analysis und Numerik

für die Studiengänge

Angewandte Informatik und

Informatik – Technische Systeme

Prof. Dr. Marc-Alexander Zschiegner

Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences

# Das Team

- **Prof. Dr. Marc-A. Zschiegner**

  Fachbereich DCSM, Campus Unter den Eichen, Raum C 242

  Tel.: 0611 / 9495 - 2287

  marc.zschiegner@hs-rm.de

  Sprechstunde: Fr, 11:30 – 12:15 Uhr o. n. V.

- **Anahita Hamidi**

  a.hamidi87@gmail.com

- **Katherina Henning**

  katherina.henning@student.hs-rm.de

# Organisation

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Vorlesung:** | | Do | 08:15 – 09:45 Uhr | B002 | Zschiegner |
| **Übungen:** | AI-A | Mi | 14:15 – 15:45 Uhr | C037 | Hamidi |
| | AI-B | Do | 10:00 – 11:30 Uhr | C035 | Zschiegner |
| | AI-C | Do | 11:45 – 13:15 Uhr | C035 | Zschiegner |
| | I-TS | Do | 10:00 – 11:30 Uhr | C407 | Hamidi |
| **Tutorium:** | | Di | 14:15 – 15:45 Uhr | C035 | Henning |

# Die Vorlesung

- **Hören, ggf. Mitschreiben** – (im Großen und Ganzen) verstehen.
  **Nacharbeiten** – besser verstehen.
  **Übungsaufgaben lösen** – verstehen (hoffentlich)!

- **Ihnen wird alles erklärt – aber in der Regel nur 1- bis 2-mal.**

- **Folien**
  Werden in der Vorlesung gezeigt, besprochen, ergänzt, ...
  Download vorab:

  https://studip.hs-rm.de

  Zur Vorlesung mitbringen (ausgedruckt oder digital).

# Übungen und Tutorium

## Übungen:

- **Jede Woche ein Aufgabenblatt:**
  **- Präsenzaufgaben** (in der Übung bearbeiten),
  **- Hausaufgaben** (bis zur nächsten Woche schriftlich bearbeiten).
- **Mein Job:** Lösbare Aufgaben zu stellen
- **Ihr Job:** Aufgaben selbständig lösen und vorrechnen (können).

## Tutorium:

- Hilfe zum Vorlesungsstoff und zu den Übungsaufgaben

# Nur Übung macht den Meister!

**Gestaffelte Übungsmöglichkeiten:**

- Kurze Übungsaufgaben in der Vorlesung ★☆☆☆☆
- Präsenzaufgaben in der Übung ★★☆☆☆
- Hausaufgaben in der Übung ★★★☆☆
- Probeklausuren ★★★★☆
- Klausur ★★★★★

Schwierigkeitsgrad

*„Mathematics is not a spectator sport. To unterstand mathematics means to be able to do mathematics.“* (George Polya, „How to Solve it“, 1945)

# Benotung

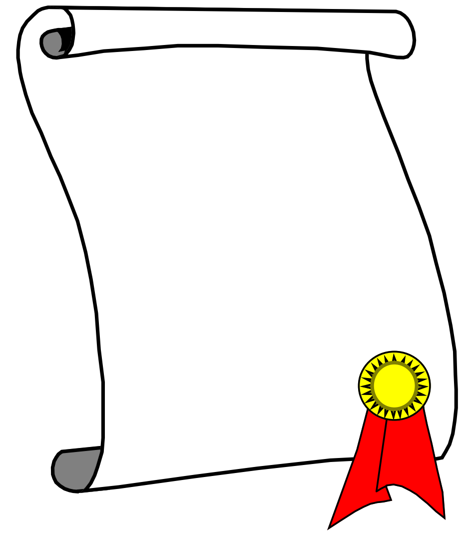
Die Bewertung setzt sich zusammen aus

**Prüfungsleistung:**

- Klausur (Februar oder März): 80 %

**Studienleistung:**

- Mitarbeit in den Übungsgruppen: 15%
- Programmierprojekt (in Gruppen): 5 %



## Was ist Mathematik? – Der Inhalt

- **Geometrie** (seit Euklid, ca. 300 v. Chr.)

  Die Lehre vom uns umgebenden Raum (2D, 3D, ...)

- **Algebra** (seit der Antike)

  Zahlen und Rechnen

- **Analysis** (seit dem 18.Jahrhundert)

  Die Lehre vom Unendlichkleinen und den Grenzübergängen

- **Wahrscheinlichkeitsrechnung** (20. Jahrhundert)

  (Wie) können wir den Zufall verstehen?

# Was ist Mathematik? – Die Methode

- **Definitionen**
  Festlegungen von Begriffen.
  In der Mathematik wissen wir ganz genau, worüber wir reden.
- **Sätze**
  Aussagen. Die Erkenntnisse der Mathematik.
- **Beweise**
  In der Mathematik erzielen wir Erkenntnisse nur durch rein logische Argumentation. Das ist gut: Die Ergebnisse sind so sicher wie in keiner anderen Wissenschaft.
- **Beispiele**
  Illustrieren und motivieren Sätze und Beweise.

# Was machen wir in Num*Ana*?

1. **Folgen und Grenzwerte**
   Folgen, Grenzwerte, Reihen
2. **Funktionen, ihre Grenzwerte und Stetigkeit**
   f(x) = …, lim f(x), …
3. **Differentialrechnung**
   Ableitung f´(x), Kurvenuntersuchungen, …
4. **Interpolation und Approximation**
   Interpolation durch Polynome, Taylor-Polynome, Potenzreihen
5. **Funktionen mehrerer Variablen**
   f(x, y, …), Darstellungen, Gradient, Extrema, …
6. **Integralrechnung**
   Ober-/Untersumme, Stammfkt., Flächen, Volumina, Längen, …

# Was machen wir in *Num*Ana?

Analytische Untersuchungen kommen oft an ihre Grenzen. Viele Dinge kann (oder will) man nicht exakt ausrechnen.

Daher werden wir *durchgängig* **numerische Verfahren** zur computergestützten Annäherung an Lösungen kennenlernen.

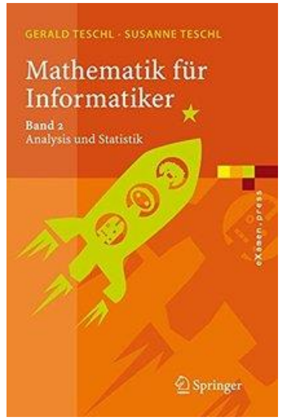
**Beispiele:** Numerisch …

| | |
|---|---|
| – Wurzelziehen: | Heron-Verfahren |
| – Nullstellen berechnen: | Newton-Verfahren |
| – Extrema bestimmen: | Gradientenabstieg |
| – Integrale berechnen: | Simpson-Formel |

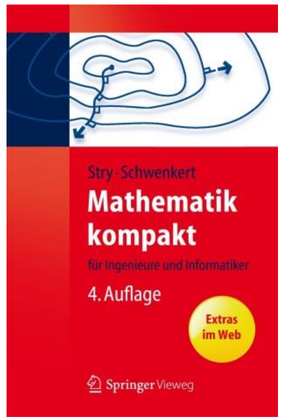
# Literaturtipps

**Praxisnah für Informatiker/innen:**

Teschl und Teschl: *Mathematik für Informatiker – Band 2: Analysis und Statistik*, Verlag Springer-Vieweg




Stry und Schwenkert: *Mathematik kompakt – für Ingenieure und Informatiker*, Verlag Springer-Vieweg



# Kapitel 1

# Folgen und Grenzwerte

# Inhalt

## 1.1 Folgen

$a_n = 1/n$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, …

## 1.2 Grenzwerte von Folgen

$\lim_{n\to\infty}$, …

## 1.3 Summen und Reihen

$1 + ½ + ¼ + 1/8 + \ldots = ?$

# 1.1 Folgen

# Folgen

**Definition:** Eine **Folge reeller Zahlen** ist eine (unendliche) Folge $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ von reellen Zahlen $a_i$.

**Beispiele:**

1, 2, 3, 4, 5, ...

1, 1, 1, 1, 1, 1, ...

1, –1, 1, –1, 1, –1, 1, ...

1, 1/2, 1/3, 1/4, ...

2, 3, 5, 7, 11, 13, …

3, 1, 4, 1, 5, 9, ...

# Schreibweisen für Folgen

Für die Folge $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ schreiben wir auch $(a_n)$ oder $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

**Beispiele:**

$(n)_{n\in\mathbf{N}}$

$(1)_{n\in\mathbf{N}}$

$((-1)^{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$

$(1/n)_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}}$

Eine Folge muss nicht mit der Nummer 0 oder 1 beginnen;
auch $(a_n)_{n\geq 5}$ ist eine Folge.

# Schreibweisen

Eine Folge kann durch eine Formel angegeben werden.

Man kann aber auch zwei (oder mehrere) Formeln verwenden:

$a_n = 1$, falls $n$ ungerade ist

$a_n = -n$, falls $n$ gerade ist.

Man kann eine Folge aber auch verbal beschreiben:

- $a_n$ ist $n^2$, falls $n$ eine Primzahl ist;
- sonst ist $a_n = 1$,
- es sei denn $n = 2018$; in diesem Fall ist $a_n$ gleich der Anzahl der Hörer des Vorlesung „Analysis und Numerik“.

# Folgen als Funktionen

Eine **Folge** $(a_n)$ kann als reelle Funktion mit dem Definitionsbereich

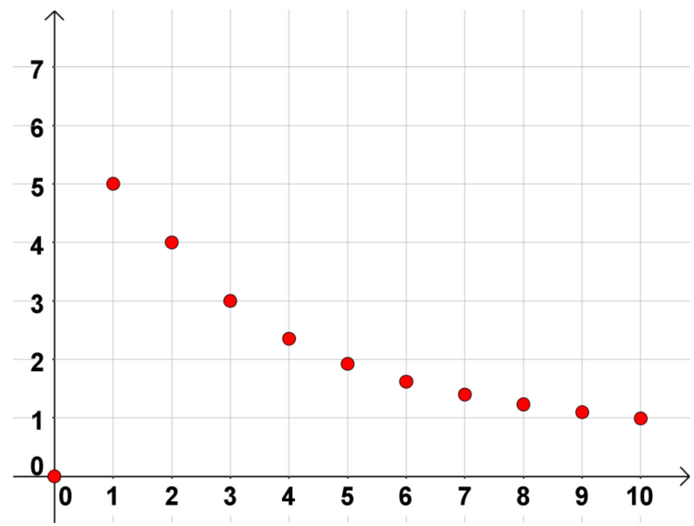
$$D = \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

(natürliche Zahlen) aufgefasst werden: Jedem Index $n \in \mathbf{N}$ wird eindeutig das Folgenglied $a_n$ zugeordnet.

**Beispiel:** Funktionsgraph der Folge

$$a_n = \frac{10n}{n^2 + 1}$$

Plot in GeoGebra: Folge[(n, 10n/(n² + 1)), n, 0, 10]



# Arithmetische Folgen

Wir betrachten zunächst Folgen mit einem einfachen Bildungsgesetz.

**Beispiel:** Wir legen ein Startguthaben von 100 € an. Jedes Jahr erhalten wir 2% Zinsen (also 2 €), die jedoch *nicht mitverzinst* werden.

| | | |
|---|---|---|
| Guthaben | nach 0 Jahren: | $a_0 = 100$ |
| | nach 1 Jahr: | $a_1 = 100 + 2 = 102$ |
| | nach 2 Jahren: | $a_2 = 100 + 2 + 2 = 104$ |
| | nach 3 Jahren: | $a_3 = 100 + 2 + 2 + 2 = 106$ |
| | … | … |
| | nach n Jahren: | $\mathbf{a_n = 100 + n \cdot 2}$ |

**Frage:** Nach wie vielen Jahren beträgt das Guthaben 200 €?

# Arithmetische Folgen

**Definition.** Eine Folge $(a_n)$ heißt **arithmetische Folge**, wenn die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder stets dieselbe Zahl d ergibt:

$$\mathbf{a_{n+1} - a_n = d} \quad \text{(für alle } n \in \mathbf{N}\text{)}.$$

**Beispiel**: $a_n = 100 + n \cdot 2$ ist eine arithmetische Folge, denn

$$a_{n+1} - a_n = [100 + (n + 1) \cdot 2] - [100 + n \cdot 2] = 2.$$

**Satz.** Ist $(a_n)$ eine arithmetische Folge, so gilt für alle $n \in \mathbf{N}$:

$$a_n = a_0 + n \cdot d.$$

**Beweis:** $a_1 = a_0 + d$, $a_2 = a_1 + d = a_0 + 2 \cdot d$, …, $a_n = a_0 + n \cdot d$.

# Übung

Bestimmen Sie das Bildungsgesetz der arithmetischen Folge, die gegeben ist durch

(a) $a_0 = 4$, $d = -2$

(b) 5, 9, 13, 17, …

(c) $a_5 = 18$, $a_7 = 24$

# Geometrische Folgen

**Beispiel:** Einer Legende nach durfte sich der Erfinder des Schachspiels vom König eine Belohnung wünschen:

„Ein Reiskorn auf das erste Feld, zwei Körner auf das zweite, vier Körner auf das dritte und auf jedes weitere Feld doppelt so viele Körner wie auf das vorherige."

Der König war erbost über die Bescheidenheit dieses Wunsches…

**Frage:** Wie viele Körner befinden sich auf dem letzten Feld?


$2^{63} = 9\ 223\ 372\ 036\ 854\ 775\ 808$
Körner auf dem 64. Feld!
ORYZA
PATNA REIS
mathematikum
Mathematik zum Anfassen.

# Geometrische Folgen

**Definition.** Eine Folge $(a_n)$ mit $a_n \neq 0$ heißt **geometrische Folge**, wenn der Quotient aufeinander folgender Glieder stets dieselbe Zahl q ergibt:

$$\mathbf{a_{n+1} / a_n = q} \quad (\text{für alle } n \in \mathbf{N}).$$

**Beispiel**: $a_n = 3 \cdot 2^n$ ist eine geometrische Folge, denn

$$a_{n+1} / a_n = (3 \cdot 2^{n+1}) / (3 \cdot 2^n) = 2.$$

**Satz.** Ist $(a_n)$ eine geometrische Folge, so gilt für alle $n \in \mathbf{N}$:

$$a_n = a_0 \cdot q^n.$$

**Beweis:** $a_1 = a_0 \cdot q$, $a_2 = a_1 \cdot q = a_0 \cdot q^2$, …, $a_n = a_0 \cdot q^n$.

# Beispiel

Wir legen erneut ein Startguthaben von 100 € zu 2% Zinsen an.
Jetzt werden die Zinsen *mitverzinst*.

| | | |
|---|---|---|
| Guthaben | nach 0 Jahren: | $a_0 = 100$ |
| | nach 1 Jahr: | $a_1 = 100 \cdot 1{,}02 = 102$ |
| | nach 2 Jahren: | $a_2 = (100 \cdot 1{,}02) \cdot 1{,}02 = 104{,}04$ |
| | nach 3 Jahren: | $a_3 = (100 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02) \cdot 1{,}02 = 106{,}12$ |
| | … | … |
| | nach n Jahren: | $\mathbf{a_n = 100 \cdot 1{,}02^n}$ |

**Frage:** Nach wie vielen Jahren beträgt jetzt das Guthaben 200 €?

# Übung

Bestimmen Sie das Bildungsgesetz der geometrischen Folge, die gegeben ist, durch

(a) $a_0 = 5$, $q = 4$

(b) 2, 6, 18, 54, …

(c) $a_1 = 14$, $a_4 = 112$

## explizit vs. rekursiv

Man unterscheidet zwei Möglichkeiten Folgen darzustellen.

**Explizite Darstellung:** Wir berechnen für ein gegebenes n direkt das n-te Folgenglied $a_n$.

**Beispiele**: $a_n = 100 + 2n$

**Rekursive Darstellung:** Wir starten bei $a_0$, berechnen daraus das nächste Folgenglied $a_1$, daraus $a_2$ usw., bis wir bei $a_n$ angekommen sind.

**Beispiel:**

| | |
|---|---|
| $a_0 = 100$ | Startwert |
| $a_n = a_{n-1} + 2$ für $n \geq 1$ | Rekursionsvorschrift |

# Übung

(a) Bestimmen Sie ein rekursives Bildungsgesetz der Folge

$$a_n = 3 \cdot 7^n.$$

(b) Finden Sie ein explizites Bildungsgesetz der rekursiven Folge

$$a_0 = 5, \; a_{n+1} = 2 \cdot a_n \, .$$

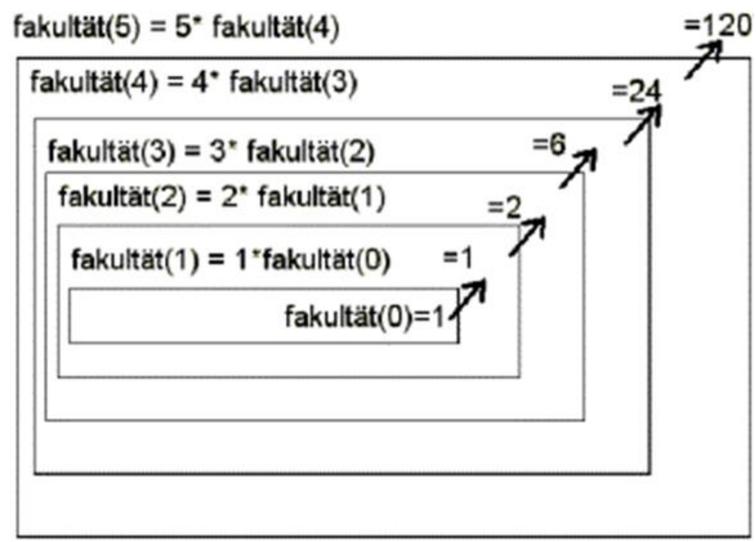
# Rekursive Definition der Fakultät

Die **Fakultät n!** einer natürlichen Zahl n kann man rekursiv definieren:

| | |
|---|---|
| $0! = 1$ | Startwert |
| $n! = n \cdot (n-1)! \quad \text{für } n \geq 1$ | Rekursionsvorschrift |

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} \mathbf{5!} &= 5 \cdot 4! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! \\ &= \mathbf{5} \cdot \mathbf{4} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{1} \cdot 1 \\ &= \mathbf{120}. \end{aligned}$$



# Rekursive Definition der Ackermannfunktion

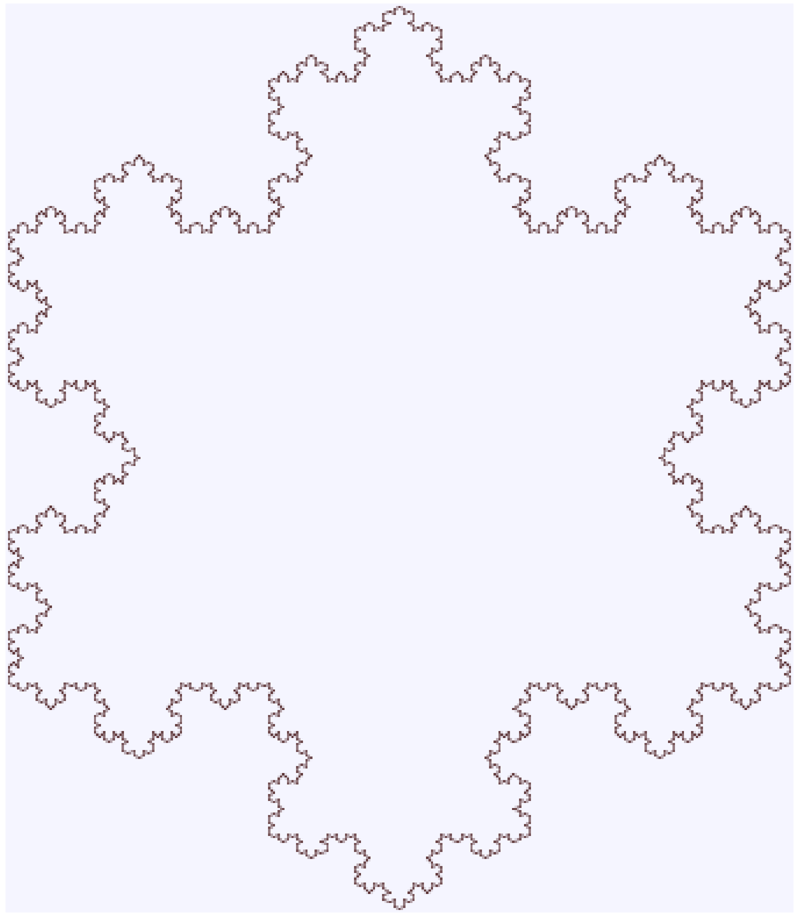
Die **Ackermannfunktion A(m, n)** hängt von 2 natürlichen Zahlen ab.
Sie wächst so schnell, dass man in der Informatik mit ihr Grenzen von Computer- und Berechnungsmodellen aufzeigen kann.

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{if } m = 0 \\ A(m-1, 1) & \text{if } m > 0 \text{ and } n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{if } m > 0 \text{ and } n > 0. \end{cases}$$

**Übung:** Berechnen Sie

A(1, 2)

# 1.2 Grenzwerte von Folgen



# Konstruktion der Koch´schen Schneeflockenkurve

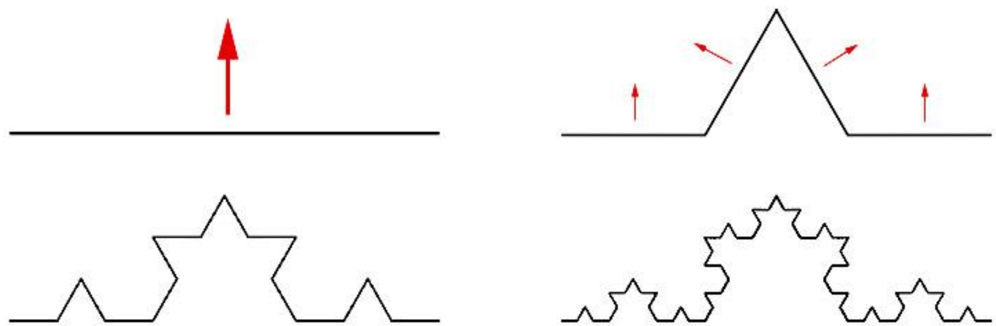
Folgender Konstruktionsschritt wird immer wieder durchgeführt:

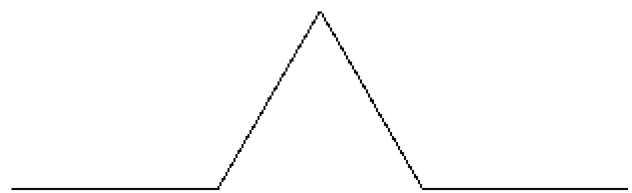
Auf den mittleren Dritteln einer Seite errichten wir wieder gleichseitige Dreiecke (und lassen dann diese mittleren Drittel weg).

```
To Kurve :n :s
IfElse :n = 1 [fw :s]
[
Kurve :n-1 :s/3
Lt 60
Kurve :n-1 :s/3
Rt 120
Kurve :n-1 :s/3
Lt 60
Kurve :n-1 :s/3
]
End

Reset

Repeat 3 [Kurve 5 200 rt 120]
```



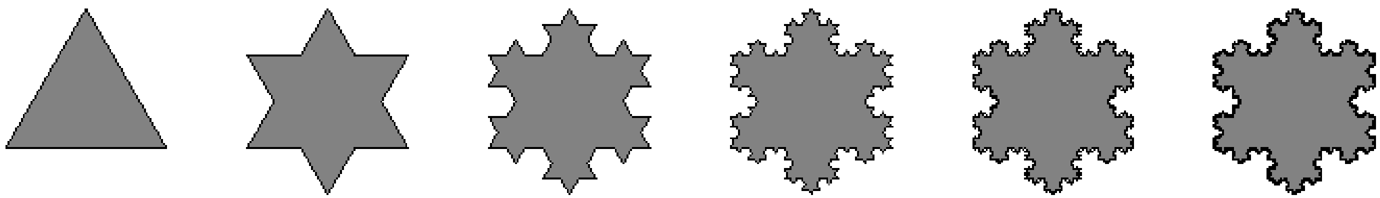


Web-Tipp:

logo.twentygototen.org

# Schneeflockenkurve

Starten wir mit einem gleichseitigen Dreieck, dann sehen die ersten Figuren $F_0, F_1, \ldots, F_5$ wie folgt aus:



Die n-te Folgefigur $F_n$ hat $3 \cdot 4^n$ Seiten. Das Startdreieck habe Seitenlänge 1.

Die n-te Folgefigur $F_n$ hat den Umfang $U_n = 3 \cdot 4^n \cdot (1/3)^n = 3 \cdot (4/3)^n$.

Es folgt: $U_0 = 3$, $U_1 = 4$, $U_2 \approx 5{,}33$, ..., $U_{10} \approx 53{,}27$, $U_{100} \approx 9 \cdot 10^{12}$, ...

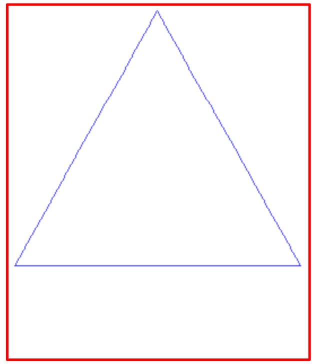
**Der Umfang der Schneeflockenkurve wird unendlich groß!**

# Flächeninhalt der Schneeflockenkurve

Die Fläche des Ausgangsdreiecks ist $A_0 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{3} \approx 0{,}433$.

Für die Fläche der n-ten Folgefigur ergibt sich die Rekursionsvorschrift

$$A_n = A_{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1} \cdot (1/9)^n \cdot A_0 = A_{n-1} + 3/16 \cdot \sqrt{3} \cdot (4/9)^n$$



Es ergibt sich: $A_1 \approx 0{,}577$, $A_2 \approx 0{,}641$,
$A_3 \approx 0{,}670$, $A_4 \approx 0{,}683$, $A_5 \approx 0{,}688$, $A_6 \approx 0{,}691$, ...

Diese Zahlen werden *nicht* unendlich groß!

**Der Flächeninhalt der Schneeflockenkurve ist endlich (sogar < 1)!**

Der genaue Wert ist übrigens $2/5 \cdot \sqrt{3}$.

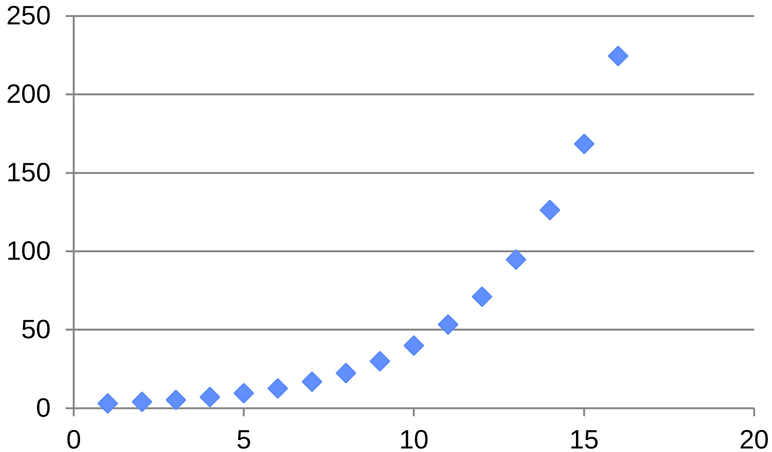
# Berechnungen mit Excel

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | n | Anzahl Seiten | Seitenlänge | Umfang U(n) | Fläche A(n) |
| 2 | 0 | 3 | 1 | 3 | 0,433012702 |
| 3 | 1 | 12 | 0,333333333 | 4 | 0,577350269 |
| 4 | 2 | 48 | 0,111111111 | 5,333333333 | 0,641500299 |
| 5 | 3 | 192 | 0,037037037 | 7,111111111 | 0,670011424 |
| 6 | 4 | 768 | 0,012345679 | 9,481481481 | 0,682683034 |
| 7 | 5 | 3072 | 0,004115226 | 12,64197531 | 0,688314861 |
| 8 | 6 | 12288 | 0,001371742 | 16,85596708 | 0,690817896 |
| 9 | 7 | 49152 | 0,000457247 | 22,47462277 | 0,691930355 |
| 10 | 8 | 196608 | 0,000152416 | 29,96616369 | 0,692424782 |
| 11 | 9 | 786432 | 5,08053E-05 | 39,95488493 | 0,692644527 |
| 12 | 10 | 3145728 | 1,69351E-05 | 53,2731799 | 0,692742191 |
| 13 | 11 | 12582912 | 5,64503E-06 | 71,03090654 | 0,692785598 |
| 14 | 12 | 50331648 | 1,88168E-06 | 94,70787538 | 0,69280489 |
| 15 | 13 | 201326592 | 6,27225E-07 | 126,2771672 | 0,692813464 |
| 16 | 14 | 805306368 | 2,09075E-07 | 168,3695562 | 0,692817274 |
| 17 | 15 | 3221225472 | 6,96917E-08 | 224,4927416 | 0,692818968 |

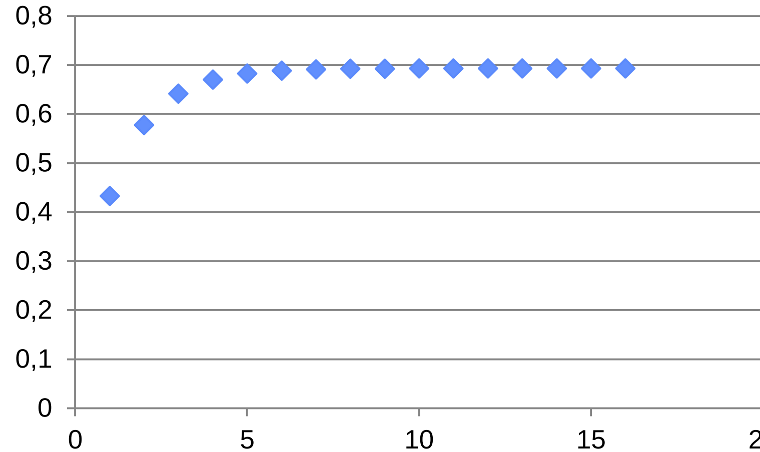
# Berechnungen mit Excel

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | n | Anzahl Seiten | Seitenlänge | Umfang U(n) | Fläche A(n) |
| 2 | 0 | 3 | 1 | =B2*C2 | =1/4*WURZEL(3) |
| 3 | 1 | =B2*4 | =1/3*C2 | =B3*C3 | =E2+B2*1/9^A3*$E$2 |
| 4 | 2 | =B3*4 | =1/3*C3 | =B4*C4 | =E3+B3*1/9^A4*$E$2 |
| 5 | 3 | =B4*4 | =1/3*C4 | =B5*C5 | =E4+B4*1/9^A5*$E$2 |
| 6 | 4 | =B5*4 | =1/3*C5 | =B6*C6 | =E5+B5*1/9^A6*$E$2 |
| 7 | 5 | =B6*4 | =1/3*C6 | =B7*C7 | =E6+B6*1/9^A7*$E$2 |
| 8 | 6 | =B7*4 | =1/3*C7 | =B8*C8 | =E7+B7*1/9^A8*$E$2 |
| 9 | 7 | =B8*4 | =1/3*C8 | =B9*C9 | =E8+B8*1/9^A9*$E$2 |
| 10 | 8 | =B9*4 | =1/3*C9 | =B10*C10 | =E9+B9*1/9^A10*$E$2 |
| 11 | 9 | =B10*4 | =1/3*C10 | =B11*C11 | =E10+B10*1/9^A11*$E$2 |
| 12 | 10 | =B11*4 | =1/3*C11 | =B12*C12 | =E11+B11*1/9^A12*$E$2 |
| 13 | 11 | =B12*4 | =1/3*C12 | =B13*C13 | =E12+B12*1/9^A13*$E$2 |
| 14 | 12 | =B13*4 | =1/3*C13 | =B14*C14 | =E13+B13*1/9^A14*$E$2 |
| 15 | 13 | =B14*4 | =1/3*C14 | =B15*C15 | =E14+B14*1/9^A15*$E$2 |
| 16 | 14 | =B15*4 | =1/3*C15 | =B16*C16 | =E15+B15*1/9^A16*$E$2 |
| 17 | 15 | =B16*4 | =1/3*C16 | =B17*C17 | =E16+B16*1/9^A17*$E$2 |

# Unendlicher Umfang – endliche Fläche!




Umfang $U_n$




Flächeninhalt $A_n$

**Die Schneeflockenkurve hat einen unendlichen Umfang aber einen endlichen Flächeninhalt.**

(Außerdem ist sie ist ein **Fraktal** mit der gebrochenen Dimension 1,26.)

# Grenzwert (Limes)

Für n $\rightarrow \infty$ („n gegen unendlich") gilt:

- Der **Grenzwert** der Folge $U_n$ ist unendlich:

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \infty$$

- Der **Grenzwert** der Folge $A_n$ ist endlich, nämlich $\frac{2}{5}\sqrt{3}$:

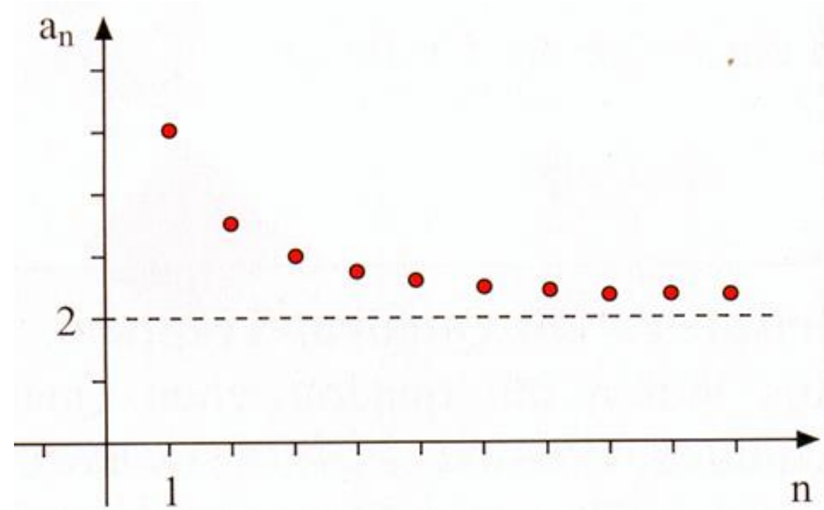
$$\lim_{n \to \infty} A_n = \frac{2}{5}\sqrt{3} \approx 0{,}691$$

Man sagt: „Der Limes von $A_n$ für n gegen unendlich ist gleich …"

# Grenzwert einer Folge

Auch „einfachere“ Folgen können einen Grenzwert haben.

**Beispiel:** $a_n = \dfrac{2n+3}{n}$




Mit wachsendem n nähern sich die Folgenglieder „beliebig dicht“ dem Grenzwert 2:

$a_1 = 5,\ a_2 = 3{,}5,\ \ldots,\ a_{10} = 2{,}3,\ \ldots,$
$a_{100} = 2{,}03,\ \ldots,\ a_{1000} = 2{,}003,\ \ldots,\ a_{10000} = 2{,}0003,\ \ldots$

# Definition des Grenzwerts

**Definition.** Die reelle Zahl g heißt **Grenzwert** der Folge $(a_n)$, wenn für jede Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|a_n - g| < \varepsilon$ von einer gewissen Indexzahl N an erfüllt ist.

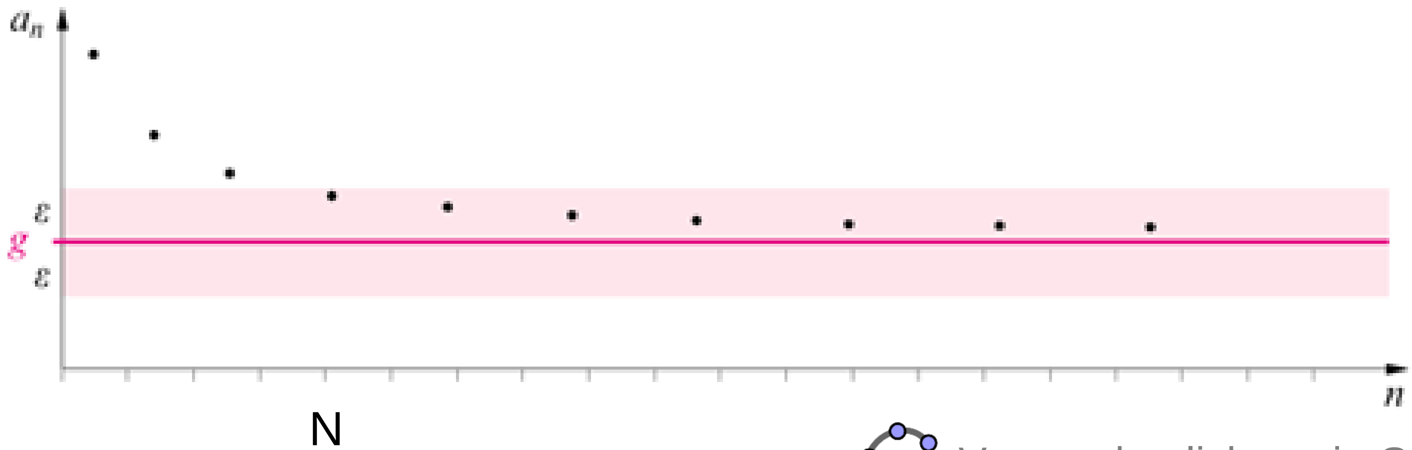
Dabei bedeutet $|a_n - g| < \varepsilon$, dass der Abstand von $a_n$ zu g kleiner als $\varepsilon$ ist.

Wenn eine Folge $(a_n)$ einen Grenzwert g besitzt, so bezeichnet man sie als **konvergent** und schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g.$$

# Konvergenz anschaulich

Die Folge $(a_n)$ konvergiert gegen den Grenzwert $g$, wenn für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ ab einer gewissen Nummer $N$ alle Folgenglieder höchsten den Abstand $\varepsilon$ von $g$ haben.




Veranschaulichung in Geogebra

# Grenzwertnachweis

**Beispiel:** $a_n = \dfrac{n+1}{2n+4}$

Durch Einsetzen erhalten wir die Vermutung g = 0,5:

$$a_{10} = 0{,}4583,\ a_{100} = 0{,}4950,\ a_{1000} = 0{,}4995,\ a_{10000} = 0{,}4999$$

**Beweis**, dass g = 0,5 tatsächlich der Grenzwert ist:

$$|a_n - 0{,}5| = \left|\frac{n+1}{2n+4} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n+1}{2n+4} - \frac{n+2}{2(n+2)}\right| = \left|\frac{-1}{2n+4}\right| = \frac{1}{2n+4} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 1 < \varepsilon \cdot (2n+4) \Leftrightarrow \tfrac{1}{\varepsilon} < 2n+4 \Leftrightarrow \tfrac{1}{\varepsilon} - 4 < 2n \Leftrightarrow \tfrac{1}{2\varepsilon} - 2 < n$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ können wir so die Zahl N ausrechnen, ab der der Abstand $|a_n - 0{,}5| < \varepsilon$ ist. Für $\varepsilon = 1/100$ folgt z. B. $n > 48$, also $N = 49$.

# Grenzwertsätze

Zur einfacheren Berechnung von Grenzwerten gibt‘s zum Glück die

**Grenzwertsätze:** Es seien $(a_n)$ und $(b_n)$ konvergente Folgen mit den Grenzwerten a bzw. b. Dann gilt

$$\text{(1.)} \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$$

$$\text{(2.)} \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$$

$$\text{(3.)} \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\text{(4.)} \lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = a / b \quad (*)$$

(*) falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$.

# Anwenden der Grenzwertsätze

Mit den Grenzwertsätzen können die Grenzwerte von komplizierten Folgen auf elementarere Grenzwerte zurückgeführt werden.

**Beispiele:**

(a) $a_n = \dfrac{5n+2}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{5n+2}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{5n}{n} + \tfrac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(5 + \tfrac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 5 + \lim_{n\to\infty} \tfrac{2}{n} = 5 + 0 = 5$$

(b) $a_n = \dfrac{n+1}{2n+4}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(1+\frac{1}{n})}{n\cdot(2+\frac{4}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{4}{n}} = \frac{1}{2}$$

# Übung

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen mithilfe der Grenzwertsätze.

(a) $a_n = 2 + \frac{3}{n^2}$

(b) $b_n = \frac{3n-2}{2+n}$

(c) $c_n = \frac{3n+1}{n} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$

# Nullfolgen

Eine Folge mit dem Grenzwert 0 wird als **Nullfolge** bezeichnet.

**Beispiele:** $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2}{n^3}$, $c_n = \frac{n+1}{n^4} = \frac{n}{n^4} + \frac{1}{n^4} = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}$ sind Nullfolgen.

**Satz.** Die geometrische Folge

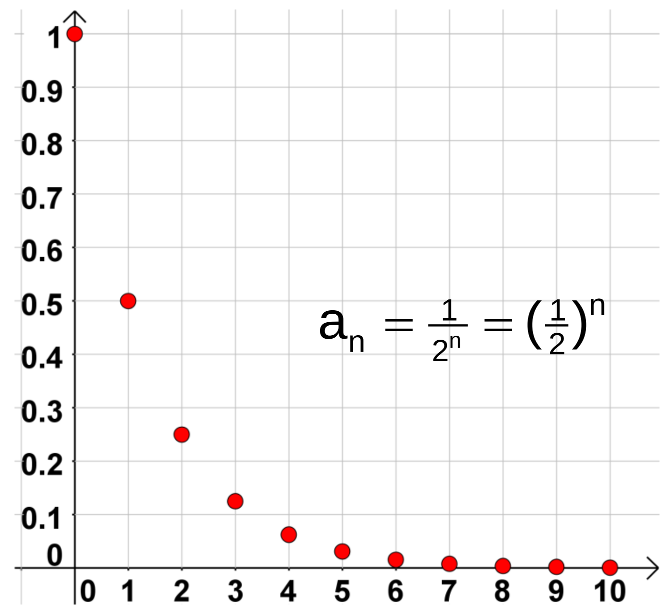
$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

ist für $|q| < 1$ eine Nullfolge.

**Beispiele:**

$$a_n = \frac{1}{2^n} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \quad b_n = \frac{7}{3^n} = 7 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$

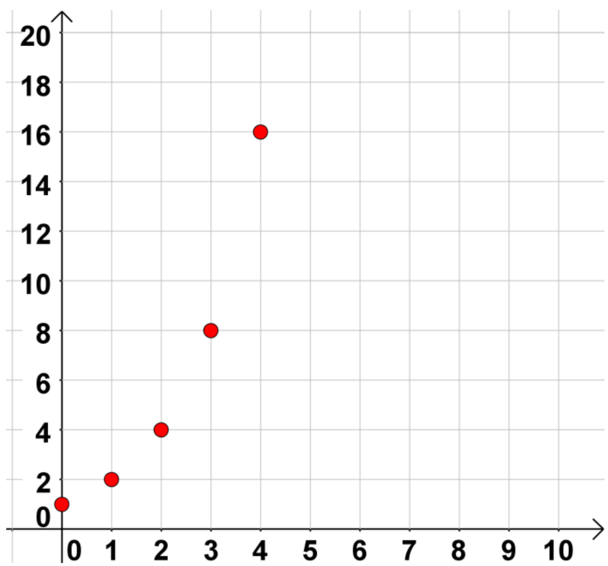
sind geometrische Nullfolgen.

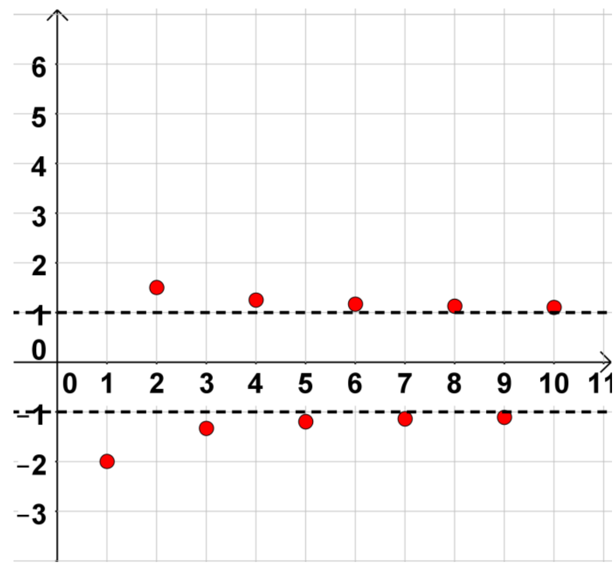


# Divergenz

Es gibt auch Folgen, die keinen Grenzwert haben. Diese Folgen heißen **divergent**.

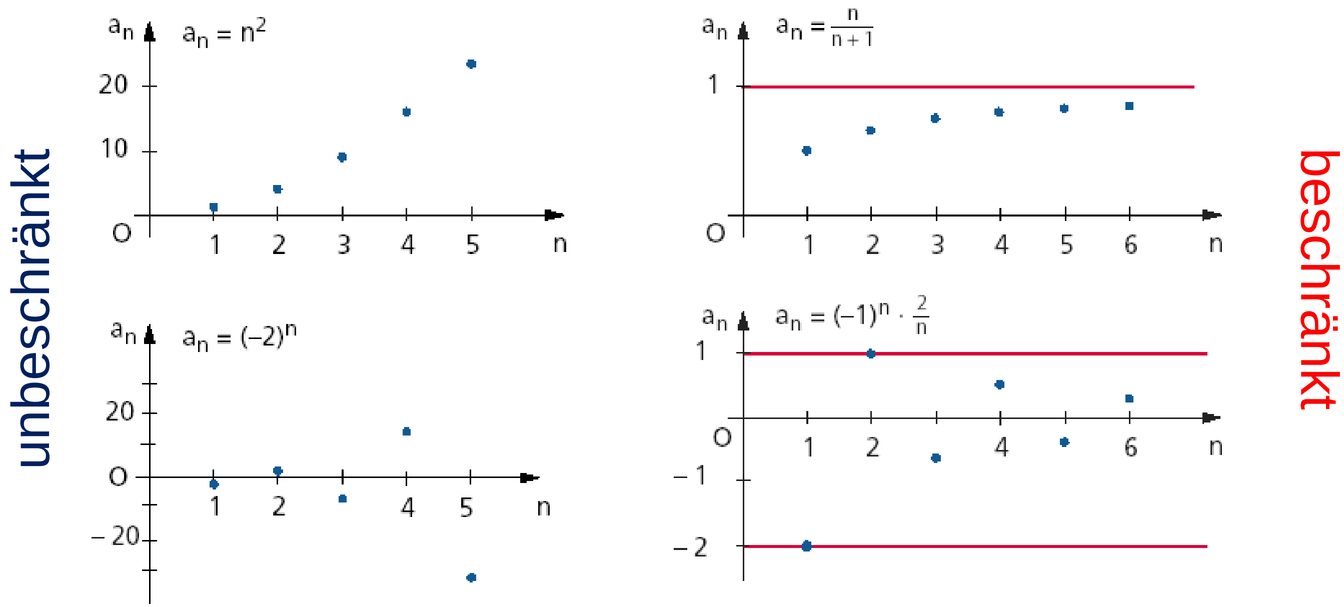
**Beispiele:** (a) $a_n = 2^n$ (b) $b_n = (-1)^n \cdot (1 + 1/n)$



**Definition.** Eine Folge $(a_n)$ heißt **nach oben [unten] beschränkt**, wenn es eine Zahl k gibt, so dass für alle Folgenglieder $a_n$ gilt: $a_n \leq k$ [bzw. $a_n \geq k$]. Ist sie nach oben und unten beschränkt, so heißt sie **beschränkt**.

**Beispiele:**



# Monotone Folgen

**Definition.** Eine Folge $(a_n)$ heißt **monoton wachsend**, falls für alle Folgenglieder gilt: $a_{n+1} \geq a_n$ (das heißt: $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$).

Sie heißt **monoton fallend**, falls für alle Folgenglieder gilt: $a_{n+1} \leq a_n$ (das heißt: $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$).

**Beispiele:**

(a) $a_n = n$ ist monoton wachsend.

(b) $b_n = 1/n$ ist monoton fallend.

(c) $c_n = n/(n + 1)$ ist monoton wachsend (siehe Abb. vorige Folie).

(b) $d_n = (-1)^n \cdot 2/n$ ist nicht monoton (siehe Abb. vorige Folie).

# Konvergenz von monotonen beschränkten Folgen

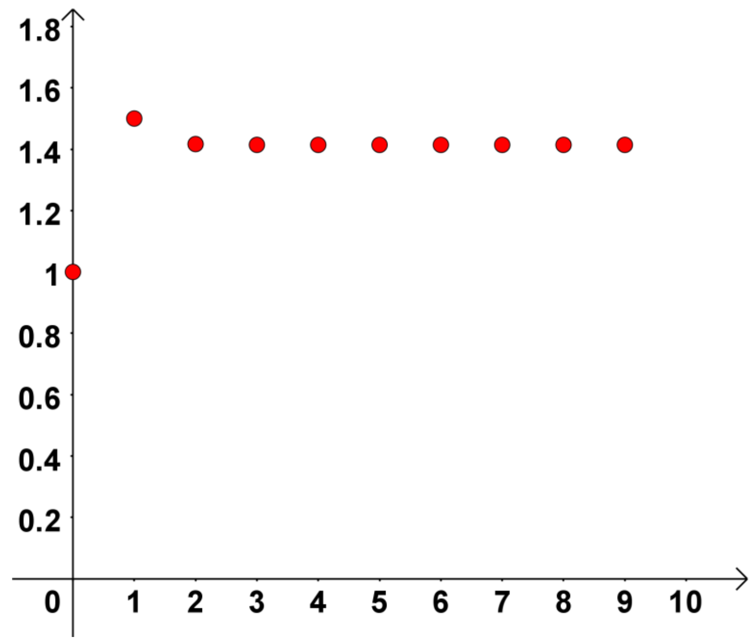
**Satz.** Jede monotone und beschränkte Folge hat einen Grenzwert.

Man kann somit die Konvergenz einer Folge feststellen, ohne den Grenzwert kennen zu müssen!

**Beispiel:** Die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = 1$$
$$x_n = \tfrac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$$

ist ab dem 2. Glied monoton (fallend) und beschränkt. Folglich muss sie einen Grenzwert besitzen.



# Grenzwert einer rekursiven Folge

**Beispiel (Forts.): Berechnung des Grenzwertes der obigen Folge:**

Wir wenden auf beiden Seiten der Rekursionsgleichung den Limes an:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}x_{n-1} + \tfrac{1}{x_{n-1}}\right) = \tfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty} x_{n-1} + \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{x_{n-1}} = \tfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty} x_{n-1} + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}}$$

Die Folgen $x_n$ und $x_{n-1}$ haben sicherlich den gleichen Grenzwert.

Bezeichnen wir diesen Grenzwert mit g, so folgt

$$g = \tfrac{1}{2}g + \tfrac{1}{g}, \quad \text{also} \quad \tfrac{1}{2}g = \tfrac{1}{g}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit g und mit 2, ergibt sich:

$$g^2 = 2.$$

Da alle Folgenglieder positiv sind, ist der Grenzwert gleich $\sqrt{\mathbf{2}}$.

# Wie berechnet der Taschenrechner √2 ?

Bei einem Taschenrechner lassen sich die Grundrechenarten durch elementare elektrische Schaltelemente in einem Chip realisieren.

Kompliziertere Berechnungen werden angenähert.

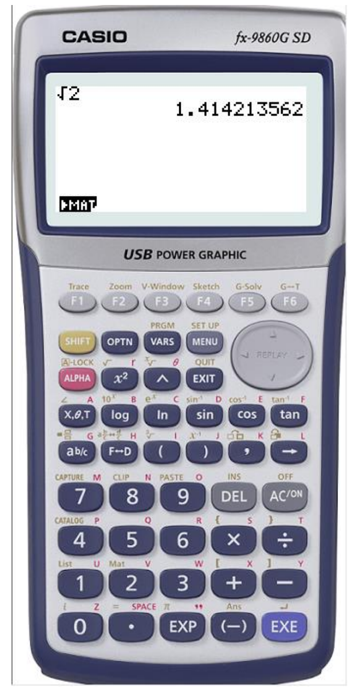
Für √2 z.B. werden so viele Glieder der Folge

$$x_0 = 1$$
$$x_n = \tfrac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$$

berechnet, bis die Genauigkeit ausreichend ist.

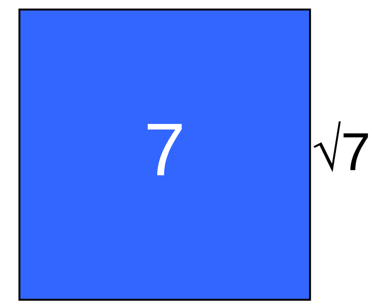
Wie kommt man auf diese rekursive Formel?

Wie lauten die Formeln für andere Wurzeln?



# Heron-Verfahren

Das **Heron-Verfahren** (1. Jh. n. Chr.), auch **Babylonisches Wurzelziehen**, ist ein effektives numerisches Verfahren, um Quadratwurzeln zu berechnen.




**Idee:** Konstruiere ein Quadrat mit einem bestimmten Flächeninhalt a. Dessen Seitenlängen sind dann $\sqrt{a}$.

**Beispiel:** Berechnung von $\sqrt{7}$.

- Ziel: Quadrat mit Flächeninhalt 7. Dieses hat die Seitenlänge $\sqrt{7}$.
- Idee: Starte mit einem Rechteck der Fläche 7 (z. B. Seitenlängen 1 und 7) und mache dieses schrittweise immer „quadratischer“.

# $\sqrt{7}$ mit dem Heron-Verfahren

**Start:** Rechteck mit einer Seite $\mathbf{x_0 = 1}$.

Damit sich als Fläche 7 ergibt, muss die andere Seite $y_0 = 7/x_0 = 7$ sein.

Neue Seite x = Mittelwert der vorherigen beiden:

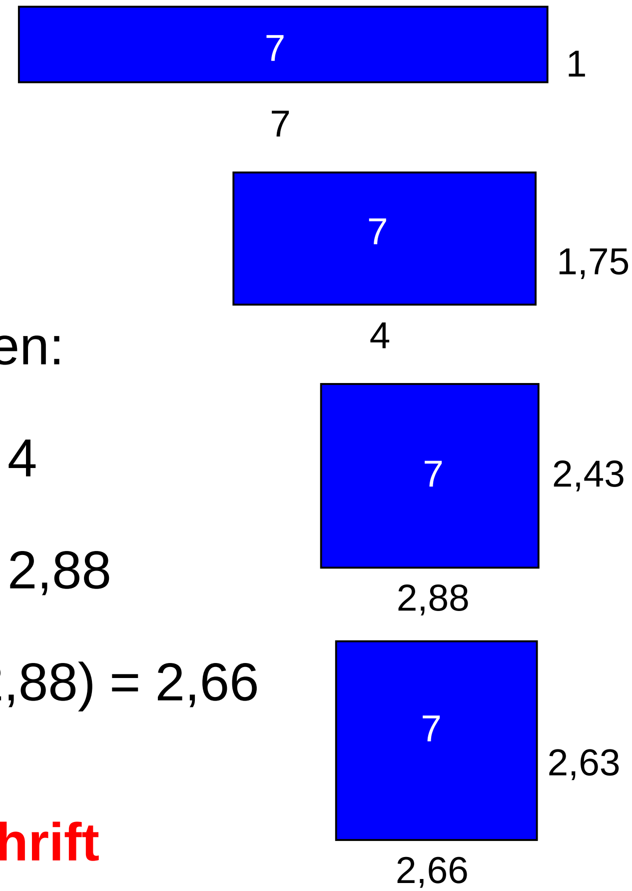
$x_1 = ½\,(x_0 + y_0) = ½\,(x_0 + 7/x_0) = ½\,(1 + 7/1) = 4$

$x_2 = ½\,(x_1 + y_1) = ½\,(x_1 + 7/x_1) = ½\,(4 + 7/4) = 2{,}88$

$x_3 = ½\,(x_2 + y_2) = ½\,(x_2 + 7/x_2) = ½\,(2{,}88 + 7/2{,}88) = 2{,}66$

…

$\mathbf{x_n = ½\,(x_{n-1} + 7/x_{n-1})}$ **Rekursionsvorschrift**



# √a mit dem Heron-Verfahren

**Start:** Rechteck mit einer Seite $\mathbf{x_0 = 1}$.

Damit sich als Fläche **a** ergibt, muss die andere Seite $y_0 = a/x_0 = a$ sein.

Neue Seite x = Mittelwert der vorherigen beiden:

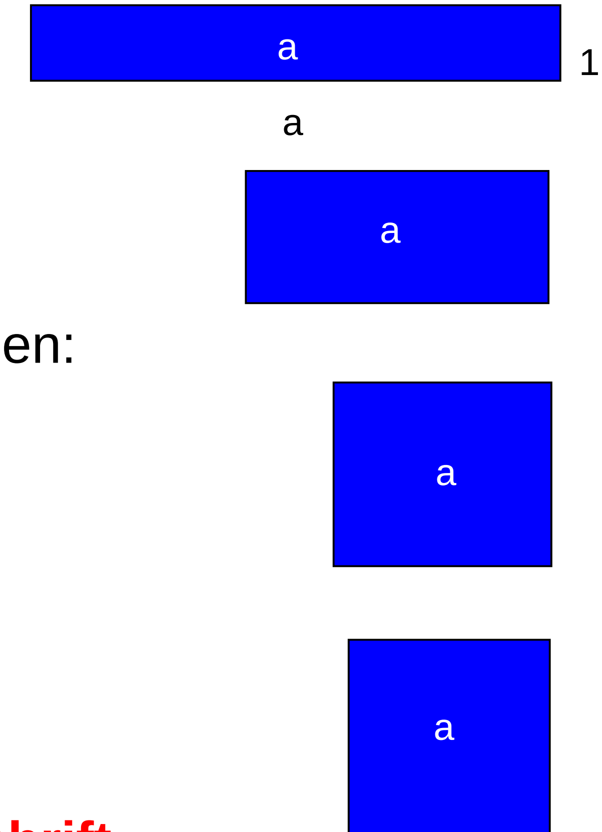
$x_1 = ½ (x_0 + y_0) = ½ (x_0 + a/x_0)$

$x_2 = ½ (x_1 + y_1) = ½ (x_1 + a/x_1)$

$x_3 = ½ (x_2 + y_2) = ½ (x_2 + a/x_2)$

…

$\mathbf{x_n = ½ (x_{n-1} + a/x_{n-1})}$ **Rekursionsvorschrift**



# Quadratische Konvergenz

Das Heron-Verfahren konvergiert sehr schnell.

Pro Schritt verdoppelt sich in etwa die Anzahl der genauen Stellen (siehe rechts).

Dies nennt man auch **quadratische Konvergenz**.

**Beispiel:** Berechnung von $\sqrt{7}$:

$x_0 = 1$

$x_1 = 4$

$x_2 = 2{,}875$

$x_3 = 2{,}654891304$

$x_4 = 2{,}64567044$

$x_5 = 2{,}645751311$

$x_6 = 2{,}645751311$

Nach 5 Schritten ist das Ergebnis auf 10 Stellen (TR) genau.

# e

Nicht nur Quadratwurzeln kann man mit Folgen annähern.

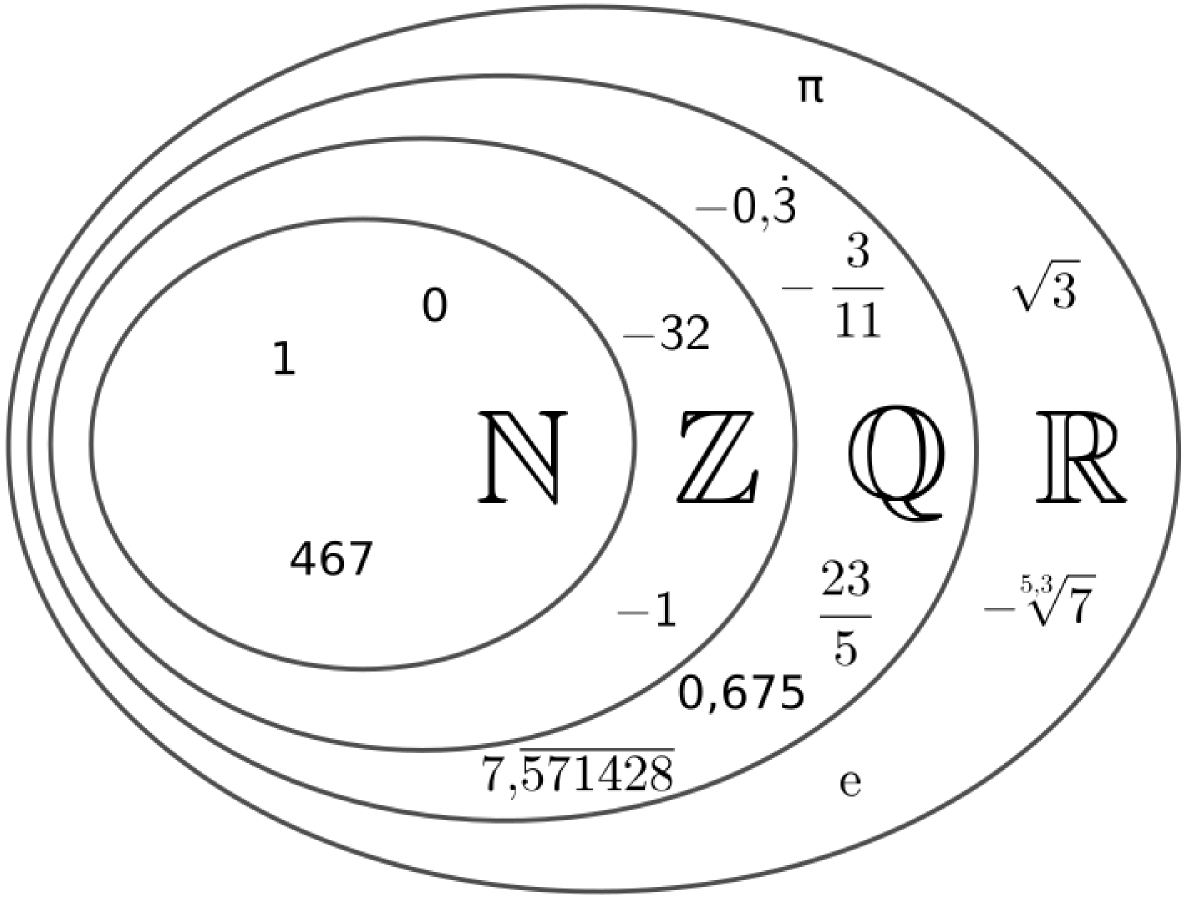
**Beispiel:** Die Folge $a_n = (1 + 1/n)^n$ ist monoton wachsend und beschränkt, muss also konvergieren.

Ihr Grenzwert heißt **Eulersche Zahl e**:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818285\ldots$$

*Jede* reelle (insbesondere jede irrationale) Zahl kann durch eine Folge von rationalen Zahlen beliebig genau angenähert werden. (Dies kann man auch als **Definition der reellen Zahlen** interpretieren.)

# Zahlenmengen




SEHR WOHL
HERR OBER - ZAHLEN BITTE!

# 1.3 Reihen


ALF Folge 1
ALF Folge 2
ALF Folge 3
ALF Folge 4
ALF Folge 5
ALF Folge 6
ALF Folge 7
ALF Folge 9
ALF Folge 10
ALF Folge 11
ALF Folge 12
ALF Folge 22

# Schreibweisen von Summen

Wir werden oft viele reelle Zahlen addieren. Zum **Beispiel:**

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n,$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n,$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Diese Summen kann man auf zwei Arten darstellen:

**1. Drei-Pünktchen-Schreibweise.** Diese Schreibweise ist einfach zu verstehen. **Nachteil:** Das „Muster" der einzelnen Terme ist nicht explizit klar. Zum Beispiel ist nicht klar, ob bei der Summe

$$1 + 2 + \ldots + 2^n$$

der dritte Summand eine 3 (Summe aller Zahlen bis $2^n$) oder eine 4 (Summe aller Zweierpotenzen bis $2^n$) ist.

# Die Σ-Notation

**2. Die Σ- Notation („sigma“).** Diese ist eine Abkürzung für eine Summe. Wir definieren

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Das bedeutet: In den Index k werden nacheinander die Werte 0, 1, 2, …, n eingesetzt und die entstehenden Terme addiert.

**Vorteil:** Man kann den allgemeinen Term durch eine Formel angeben. Zum Beispiel können wir ohne weiteres unterscheiden zwischen

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{2^n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots 2^n$$

# Der Summationsindex

Die Variable $k$ wird als **Summationsindex** bezeichnet. Statt $k$ wird oft auch $i$ oder $n$ geschrieben.

Der Summationsindex muss nicht bei $1$ anfangen – und nicht bei $n$ aufhören. Auch Ausdrücke der Form

$$\sum_{k=3}^{5} a_k \ , \ \sum_{k=10}^{\infty} b_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k$$

haben ihren Sinn.

Man kann den Summationsindex auch durch eine Bedingung unter den $\Sigma$-Zeichen angeben. **Beispiel:**

$$\sum_{0 \le k \le n} 2^k \ \text{statt} \ \sum_{k=0}^{n} 2^k.$$

# Übung

Schreiben Sie folgende Summen in Σ-Notation:

(a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 10$

(b) $1 + 5 + 25 + 125 + \ldots + 5^n$

Schreiben Sie folgende Summe mit 3-Pünktchen-Schreibweise:

(c) $\sum_{k=1}^{10} (2k - 1)$

# Von Folgen zu Summen

**Beispiel:** Monatsumsatz eines Unternehmens:

| Monat | Jan. | Feb. | März | April | Mai | Juni | Juli | Aug. | Sept. | Okt. | Nov. | Dez. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Umsatz in Mio. Euro | 3,4 | 3,2 | 5,1 | 4,7 | 4,5 | 3,7 | 2,9 | 2,6 | 3,9 | 4,8 | 5,3 | 3,5 |

Folge: $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$

Gesamtumsatz („kummulativ") bis zum jeweiligen Monat aufsummiert:

| Monat | Jan. | Feb. | März | April | Mai | Juni | Juli | Aug. | Sept. | Okt. | Nov. | Dez. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| kum. Umsatz, in Mio. Euro | 3,4 | 6,6 | 11,7 | 16,4 | 20,9 | 24,6 | 27,5 | 30,1 | 34,0 | 38,8 | 44,1 | 47,6 |

Neue Folge: $s_0, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad \ldots$

$= a_0 \quad = a_0+a_1 \quad = a_0+a_1+a_2 \quad = a_0+a_1+a_2+a_3, \quad \ldots$

# Partialsummen

Sei $(a_k)$ eine Folge. Wir beobachten den Summationsprozess in jedem Schritt. Dann ergibt sich eine neue Folge, die Folge der **Partialsummen** (**Teilsummen**) $s_n$ :

$$s_0 = a_0,$$
$$s_1 = a_0 + a_1,$$
$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2,$$
$$\ldots$$
$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

bzw. $$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

# Geometrische Summe

Wenn man die Glieder der geometrischen Folge $a_k = q^k$ (mit $q \in \mathbf{R}$) bis zum n-ten Glied aufsummiert, erhält man die **geometrische Summe**

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

**Satz.** Für die geometrische Summe (mit $q \neq 1$) gilt das Bildungsgesetz:

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Der Vorteil dieser Formel ist, dass man das n-te Glied der geometrischen Summe direkt – ohne Summation – ausrechnen kann.

# Beweis der geometrischen Summenformel

**Beweis:** Multiplizieren wir $s_n$ mit q, so folgt

$$q \cdot s_n = q \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n) = q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{n+1}.$$

Subtrahieren wir dies von $s_n$, so folgt

$$\begin{aligned} s_n - q \cdot s_n &= (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{n+1}) \\ &= 1 - q^{n+1}\ . \end{aligned}$$

Durch Ausklammern von $s_n$ auf der linken Seite ergibt sich

$$(1 - q) \cdot s_n = 1 - q^{n+1},$$

also $s_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

# Reihen

**Definition.** Die (unendliche) Folge der Partialsummen bezeichnet man auch als **Reihe** und schreibt dafür

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

**Beispiele:**

**Geometrische Reihe:** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

oder allgemeiner: $1+q+q^2+q^3+q^4+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}q^k$

**Harmonische Reihe**: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$

# Konvergenz von Reihen

Ob der Wert der Reihe endlich ist, hängt davon ab, ob die Folge der Partialsummen $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ gegen einen Grenzwert konvergiert oder nicht.

**Definition.** Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiert**, falls die Folge $(s_n)$ der Partialsummen konvergiert.

Falls sogar $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, so nennt man die Reihe **absolut konvergent**.

Wenn eine Reihe nicht konvergiert, sagt man, dass sie **divergiert**.

# Geometrische Reihe

Eine der wichtigsten konvergenten Reihen ist die geometrische Reihe.

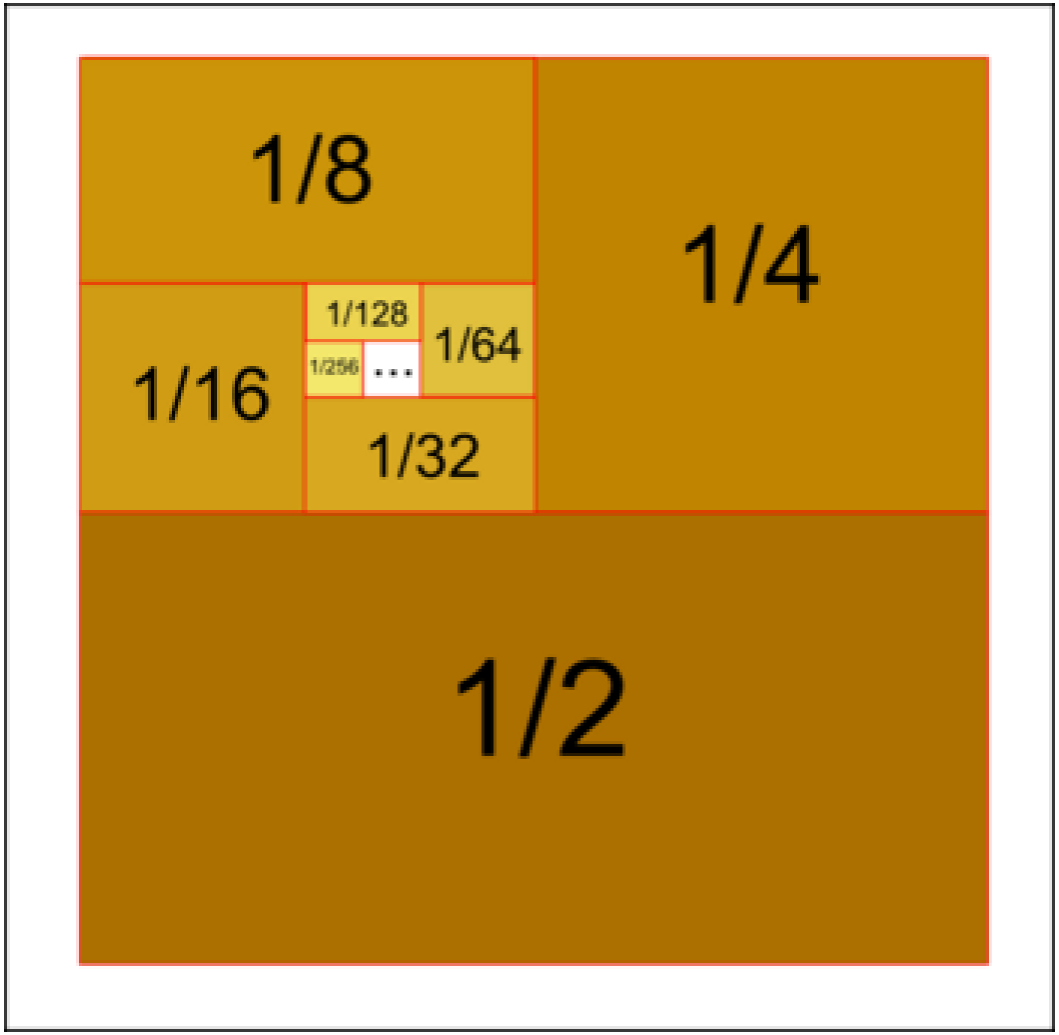
**Satz.** Sei $q$ eine reelle Zahl mit $-1 < q < 1$. Dann konvergiert die geometrische Reihe $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$ gegen den Grenzwert $1/(1-q)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

**Beispiel:** Die geometrische Reihe mit $q = ½$ konvergiert gegen 2:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

# $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 1$



# Beweis des Grenzwertes der geometrischen Reihe

**Beweis.** Wir kennen bereits die geometrische Summenformel:

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Die geometrische Reihe ergibt sich daraus für $n \to \infty$.

Für $-1 < q < 1$ ist $(q^{n+1})$ eine Nullfolge:

$$q^{n+1} \to 0.$$

Also konvergiert die geometrische Reihe wie folgt:

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}.$$

# Übung

Berechnen Sie die Werte folgender geometrischer Reihen:

(a) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{k}$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{100^{k}}$

# Periodische Dezimalzahlen

Periodische Dezimalzahlen sind Grenzwerte geometrischer Reihen!

**Beispiel:**

$$0,\overline{2} = 0,2 + 0,02 + 0,002 + 0,0002 + \ldots = 0,2 \cdot (1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \ldots)$$

$$= 0,2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{10}\right)^k$$

$$= 0,2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 0,2 \cdot \frac{10}{9} = \frac{2}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{2}{9}$$

Auf diese Weise können wir also die **Bruchdarstellung von periodischen Dezimalzahlen** finden.

# 0,999999… = 1

0,999999… ist exakt gleich 1 (und nicht nur „ungefähr gleich“),

**denn:**

$$0,\overline{9} = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \ldots = 0,9 \cdot (1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \ldots)$$

$$= 0,9 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{10}\right)^k$$

$$= 0,9 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 0,9 \cdot \frac{10}{9} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1$$

Analoges gilt für alle „**Neunerperioden**“, zum **Beispiel** ist

$$0,41\overline{9} = 0,42.$$

# **Das Paradoxon von Zenon** (ca. 495 - 430 v. Chr.)

Achilles, als Schnellläufer berühmt gewordener Held des Trojanischen Krieges, startet einen Wettlauf mit einer Schildkröte. Da Achilles 10 mal so schnell läuft, gewährt er der Schildkröte einen Vorsprung von einem Stadion (etwa 129,27 m).

Hat Achilles das eine Stadion, also den Vorsprung der Schildkröte, zurückgelegt, so ist diese bereits 1/10 Stadion weiter; absolviert Achilles nun diese Strecke, so ist die Schildkröte erneut weiter, und zwar um 1/100 Stadion usw. Immer dann also, wenn Achilles dort ankommt, wie die Schildkröte war, ist diese schon wieder an einem anderen Ort. *Folglich holt er sie nie ein!?!*

# Auflösung des Paradoxons

Dies widerspricht jeglicher praktischen Erfahrung widerspricht. Daher glaubte Zenon, die Unzulänglichkeit der Mathematik nachgewiesen zu haben. Tatsachlich war das Paradoxon mit der griechischen Mathematik nicht zu widerlegen, da der Begriff des Grenzwertes, insbesondere von unendlichen Reihen, nicht bekannt war.

Die Paradoxie löst sich auf, wenn man beachtet, dass die einzelnen Strecken immer kleiner werden, also Achilles dafür auch immer weniger Zeit braucht. Der Punkt, an dem die Schildkröte überholt wird, ergibt sich aus dem Grenzwert einer geometrischen Reihe zu

$$1 + 1/\ 10 + 1/100 + \ldots = 1{,}111...\ \text{Stadien.}$$

# Weitere Beispiele für konvergente Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad (\rightarrow \pi \text{ annähern})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} = \ln(2)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \qquad (\rightarrow e \text{ annähern})$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \qquad (\rightarrow e^x \text{ annähern})$$

Diese sog. **Potenzreihe** konvergiert für jedes $x \in \mathbf{R}$. Siehe Kapitel 4.

# Notwendiges Kriterium für Konvergenz

Es ist kein Zufall, dass bei allen konvergenten Reihen die Folgen $(a_k)$ Nullfolge sind. Dies ist notwendig für die Konvergenz der Reihe.

**Satz.** Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist $(a_k)$ eine Nullfolge.

Diesen Satz kann man benutzen, um Divergenz nachzuweisen.

**Beispiel:** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+10}$ ist divergent, weil $\frac{k}{k+10}$ *keine* Nullfolge ist.

Die Umkehrung des Satzes gilt i. A. *nicht.* Wenn $(a_k)$ eine Nullfolge ist, muss die zugehörige Reihe noch lange nicht konvergieren. Dies zeigt das Beispiel der folgenden „harmonischen Reihe“.

# Die harmonische Reihe

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ heißt **harmonische Reihe**.

**Satz.** Die harmonische Reihe divergiert.

**Beweis.** Wir fassen jeweils genügend viele Glieder zusammen, so dass deren Summe mindestens ½ ist.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + \cdots \\
&\geq 1 + 1/2 + (1/4 + 1/4) + (1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8) + \cdots \\
&= 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \cdots
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass die Partialsummen nicht beschränkt sein können.

# Anwendung: Platten stapeln

**Problem:** Fünf quadratische Platten sollen so aufeinander geschichtet werden, dass die oberste Platte möglichst weit übersteht.

- Kann die oberste Platte sogar ganz über dem Abgrund schweben?
- Wie weit kommt man mit noch mehr Platten?

mathematikum
Mathematik zum Anfassen.

# Anwendung: Platten stapeln

Zunächst werden alle Platten übereinander gestapelt.

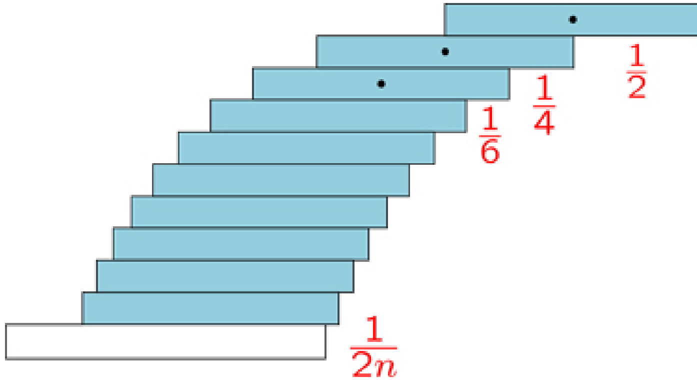
Die oberste Platte kann zur Hälfte heraus geschoben werden.

Die zweitoberste noch zu ¼.

Die dritte zu 1/6, die vierte zu 1/8.

Dann steht die oberste bereits um 1/24

über, denn ½ + ¼ + 1/6 + 1/8 = 25/24.




Hat man beliebig viele Platten, dann ist die oberste verschoben um

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

Da die harmonische Reihe divergiert, kommt man so unendlich weit!

# Leibniz-Kriterium

Wenn man die harmonische Reihe abwechselnd mit + und – versieht, dann konvergiert diese neue („**alternierende**") Reihe. Dies garantiert der folgende

**Satz (Leibniz-Kriterium).** Wenn $(a_n)$ eine monoton fallende Nullfolge ist, dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_n.$$

**Beispiel:** Die **alternierende harmonische Reihe** konvergiert. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots = \ln(2)$$

# Weitere Konvergenzkriterien

Oft kann der Grenzwert einer Reihe nicht explizit ausgerechnet werden. Dann kann man ihn mit Computerhilfe beliebig genau annähern, indem man ausreichend große Teilsummen berechnet.

Um sicherzustellen, *dass* die Reihe tatsächlich konvergiert, gibt es verschiedene Kriterien:

- Majorantenkriterium,
- Quotientenkriterium,
- Wurzelkriterium.

Diese Kriterien ermöglichen es in gewissen Fällen, die Konvergenz an den Folgengliedern $a_k$ direkt abzulesen.

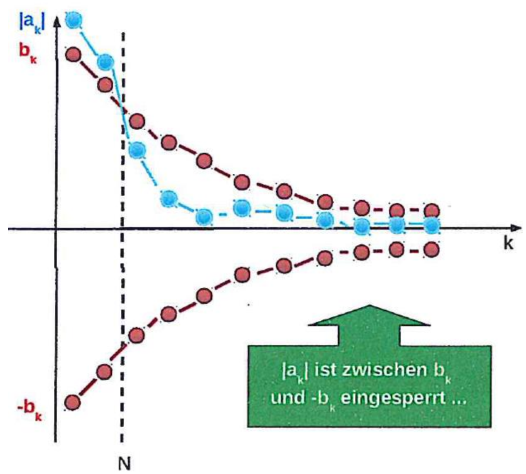
# Majorantenkriterium

Folgendes Kriterium führt die Konvergenz einer Reihe auf die bekannte Konvergenz einer anderen Reihe zurück.

**Satz.** Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe, und sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern $b_i$. Wenn $|a_i| \leq b_i$ für alle hinreichend großen i gilt, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Die Reihe $\Sigma b_k$ ist die "**konvergente Majorante**" der Reihe $\Sigma a_k$.

Die Folgenglieder von $a_k$ sind zwischen $-b_k$ und $b_k$ "eingesperrt".



# Beispiel

**Beispiel:** Sei $a_k = \dfrac{1}{2^k+1}$ und $b_k = \dfrac{1}{2^k}$. Aus $2^k < 2^k+1$ folgt

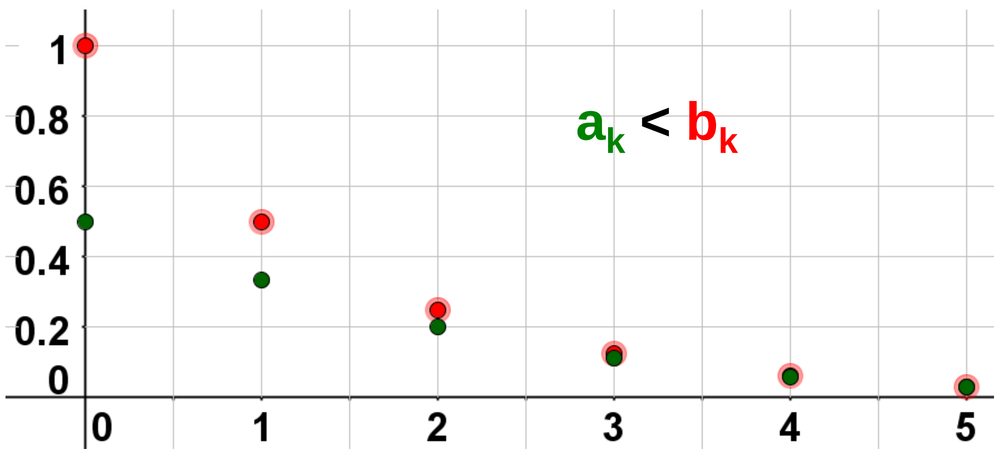
$$a_k = \frac{1}{2^k+1} < \frac{1}{2^k} = b_k$$

Aus der Konvergenz der geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

folgt die Konvergenz von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k+1}.$$



# Quotienten- und Wurzelkriterium

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe.

**Quotientenkriterium.** Wenn $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ gilt, dann konvergiert die Reihe.

**Beispiel:** Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert, weil lim $|a_{k+1}/a_k| = 0 < 1$ ist:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}}\right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(k+1)\cdot k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{k+1} \to 0.$$

**Wurzelkriterium.** Wenn $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ gilt, dann konvergiert die Reihe.

# Übung

Konvergent oder divergent?

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{5k+2}{k^2}$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!+7}$

# Reihenkonvergenz: Cheat Sheet