Hochschule RheinMain
Sommersemester 2017

Fachbereich DCSM
Prof. Dr. Adrian Ulges

Klausur zur Veranstaltung
Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung (AI)
03.08.2017

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ______________ Unterschrift: ____________________

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die Anmerkungen unten zur Kenntnis genommen, die Aufgaben eigenständig gelöst, sowie nur die zugelassenen Hilfsmittel verwendet habe.

- Die Klausurdauer beträgt **90 Minuten**.
- Bitte legen Sie **Studierendenausweis** und **Lichtbildausweis** auf Ihren Tisch.
- Bitte schreiben Sie **deutlich**. Unleserliche Lösungen werden nicht gewertet. Die **Bindung** der Blätter dieser Klausur **darf nicht entfernt** werden. Sie dürfen auch die **Rückseiten** der Blätter verwenden (weiteres Schmierpapier befindet sich am Ende).
- Es reicht, wenn Sie Ihre Lösungen mit einer Genauigkeit von **drei Nachkommastellen** (alternativ als **gekürzten Bruch**) angeben.
- Punkte können nur bei Angabe eines nachvollziehbaren **Lösungswegs** vergeben werden.
- Lesen Sie die Aufgabenstellungen **vollständig**. Sollten während der Klausur Unklarheiten bestehen, ist es möglich kurze **Fragen** zu stellen.
- Als Hilfsmittel sind lediglich zwei beidseitig beschriebene **Zettel mit Ihrem Namen** sowie ein nicht-grafischer **Taschenrechner** zugelassen. Entfernen Sie Mobiltelefone, Vorlesungsmitschriften, sonstige lose Blätter und Bücher von Ihrem Tisch.
- Täuschungsversuche aller Art werden mit der **Note 5** geahndet.
- Beachten Sie insbesondere, dass **elektronische Geräte** (z.B. Mobiltelefone, Smartwatches oder Kameras) **unerlaubte Hilfsmittel** sind! Bereits das **Berühren** eines nicht erlaubten Hilfsmittels während der Prüfung stellt einen Täuschungsversuch dar.
- **Toilettengänge** während der Prüfung kosten Ihre Zeit und schaffen für alle Unruhe. Erledigen Sie sie möglichst vor der Prüfung. Wenn es trotzdem sein muss: Es darf immer nur einer gleichzeitig. Melden Sie sich bei der Aufsicht an und warten Sie auf das OK.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Erreichbare Punkte	18	15	17	14	14	11	11	100
Erreichte Punkte								
Note								

Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe 1 (3+6+3+6 = 18 Punkte)
Wir erheben von 4 Personen Gewicht $x_1, \ldots, x_4$ (in kg) und monatliches Einkommen $y_1, \ldots, y_4$ (in 1000 EUR):

Person	1	2	3	4
Gewicht	93	96	86	85
Einkommen	2.4	2.7	3.1	3.8

a) Bestimmen Sie das **80%-Quantil** des Gewichts.

b) Bestimmen Sie die **Kovarianz** zwischen Gewicht und Einkommen.

c) Sind Gewicht und Einkommen positiv oder negativ korreliert? Begründen Sie kurz. Ein Ermitteln der Korrelation ist **nicht** gefordert.

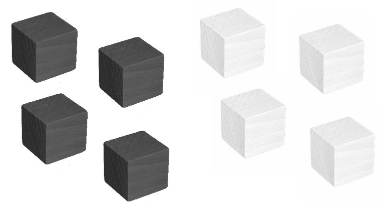
Matrikelnummer: ______________________________

d) Beweisen Sie den Verschiebungssatz für die Kovarianz:

$$s_{xy} = \left(\frac{1}{n}\sum_i x_i y_i\right) - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 2 (6+4+5 = 15 Punkte)
Wir stapeln 4 schwarze und 4 weiße Bauklötze zu einem Turm von 8 Klötzen Höhe.



a) Wieviele verschiedene Türme sind möglich? Begründen Sie mit einer Formel aus der Kombinatorik.

b) Wir bestimmen den Turm per Laplace-Eperiment und definieren das Ereignis A ("Die untersten beiden Klötze sind schwarz"). Bestimmen Sie $P(A)$.

c) Wir definieren das Ereignis B ("Der oberste Klotz ist weiß"). Sind die Ereignisse A und B **unabhängig**? Geben Sie eine kurze, informelle Begründung.

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 3 (6+7+4 = 17 Punkte)
Bob besitzt **drei Beutel** mit je **100 Edelsteinen**. Beutel 1 enthält 75 Rubine (und 25 Saphire), Beutel 2 enthält 60 Rubine (und 40 Saphire), Beutel 3 enthält 20 Rubine (und 80 Saphire). Bob wählt zufällig einen Beutel und zieht einen zufälligen Edelstein. Es ist ein **Saphir**.

a) Wir definieren die Ereignisse B_1, B_2, B_3 (Es wurde Beutel 1/2/3 gewählt) und S (es wurde ein Saphir gezogen). Skizzieren Sie einen zugehörigen **Ereignisbaum**. Geben Sie an sämtlichen Kanten die zugehörigen **Wahrscheinlichkeiten** an.

b) Bestimmen Sie $P(B_1 \cup S)$.

Matrikelnummer: ______________________________

c) Es seien A und B zwei beliebige Ereignisse mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$. Ist die folgende Rechenregel korrekt? Begründen Sie.

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(A) \cdot P(\bar{B}|A)$$

Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe 4 (4+7+3 = 14 Punkte)
Im Finale um den Stanley Cup im US-Eishockey tragen Pittsburgh und Nashville **sieben Partien** gegeneinander aus (wir nehmen an die Partien seien **unabhängig**). Es gibt **keine Unentschieden**. Es ist bekannt, dass Pittsburgh je Partie eine Siegchance von 60% besitzt.
Hinweis: Wir nehmen an, dass alle sieben Spiele wirklich ausgetragen werden (in der Praxis wird abgebrochen sobald der Gesamtsieger feststeht).

a) Es sei X die Anzahl der Spiele, die Pittsburgh gewinnt. Geben Sie für X den **Verteilungstyp** und sämtliche **Parameter** an.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Pittsburgh mehr als 2 Spiele gewinnt.

c) Sobald ein Team vier Siege erreicht, gewinnt es den Stanley Cup. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinner des Stanley Cups (egal ob Pittsburgh oder Nashville) bereits nach **4 Partien** feststeht.

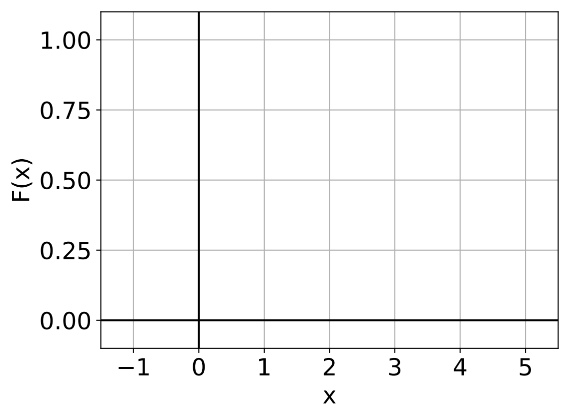
Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe 5 (6+3+5 = 14 Punkte)
Wir würfeln mit zwei **vierseitigen Würfeln**. Die resultierenden Augenzahlen lauten W_1 und W_2. Wir definieren die Zufallsvariable X als das Maximum der beiden Augenzahlen, d.h.

$$X = max(W_1, W_2).$$

a) Die Realisierungen von X lauten 1,2,3 und 4. Ermitteln Sie die zugehörigen **Wahrscheinlichkeiten** p_1, p_2, p_3, p_4 *(z.B. entspricht p_1 der Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert 1 annimmt).*

b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X. Markieren Sie hierbei deutlich den Wert von F an den Stellen 1, 2, 3 und 4. Hinweis: Sollten Sie (a) nicht gelöst haben, können Sie im Folgenden annehmen, dass $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0.125, 0.125, 0.125, 0.625)$.



Matrikelnummer: ______________________________

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 6 (7+4 = 11 Punkte)
In einer Fabrik werden Tüten mit Kartoffelchips befüllt. Das Füllgewicht sei normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 200g$ und Standardabweichung 5g.

a) Wieviele Prozent aller Tüten besitzen ein Füllgewicht von mehr als 208g?

b) In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert liegen 90% aller Chipstüten?

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 7 (7+4 = 11 Punkte)
Ein Autohersteller gibt an, sein Modell *Monstrosity* stoße im Mittel nicht mehr als 80 Milligram Stickoxide je Kilometer aus. In einer Stichprobe mit sechs Exemplaren des Modells wurden folgende Stickoxid-Emmission ermittelt (die Standardabweichung betrage 4 mg/km):

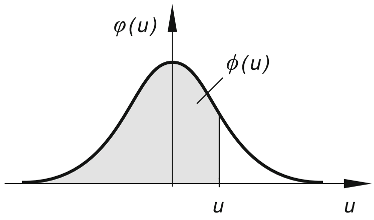
$$78, \quad 82, \quad 91, \quad 84, \quad 81, \quad 82 \quad \text{(mg / km)}$$

a) Führen Sie einen einseitigen Parametertest für den mittleren Verbrauch durch. Formulieren Sie zuerst die Hypothese des Herstellers $\mathcal{H}_0$ und wählen Sie $\alpha = 10\%$. Ist die Hypothese abzulehnen?

b) Gegeben seien die Hypothesen $\mathcal{H}_0$ $(\mu \geq 19)$ und $\mathcal{H}_0'$ $(\mu \leq 17)$. Gibt es eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$, bei der beide Hypothesen akzeptiert werden? Begründen Sie.

Matrikelnummer: ______________________________

Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung



Schrittweite: $\Delta u = 0{,}01$

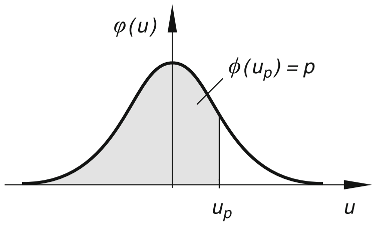
Für *negative* Argumente verwende man die Formel

$$\phi(-u) = 1 - \phi(u) \qquad (u > 0)$$

Für $u \geq 4$ ist $\phi(u) \approx 1$.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5639	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8398
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0.9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabelle 2: Quantile der Standardnormalverteilung



p: Vorgegebene Wahrscheinlichkeit
$(0 < p < 1)$

u_p: Zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil (*obere* Schranke)

Die Tabelle enthält für spezielle Werte von p das jeweils zugehörige Quantil u_p (*einseitige* Abgrenzung nach *oben*).

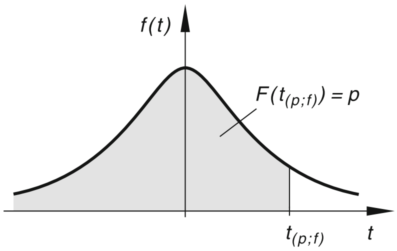
p	u_p	p	u_p
0,90	1,282	0,1	−1,282
0,95	1,645	0,05	−1,645
0,975	1,960	0,025	−1,960
0,99	2,326	0,01	−2,326
0,995	2,576	0,005	−2,576
0,999	3,090	0,001	−3,090

Formeln:

$u_{1-p} = -u_p$

$u_p = -u_{1-p}$

Tabelle 4: Quantile der t-Verteilung von „Student“



p: Vorgegebene Wahrscheinlichkeit ($0 < p < 1$)

f: Anzahl der Freiheitsgrade

$t_{(p;f)}$: Zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil bei f Freiheitsgraden (*obere* Schranke)

Die Tabelle enthält für spezielle Werte von p das jeweils zugehörige Quantil $t_{(p;f)}$ in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad f (*einseitige* Abgrenzung nach *oben*).

	p				
f	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,707	31,820	63,654
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
200	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Formeln:

$$t_{(1-p;f)} = -t_{(p;f)}$$

$$t_{(p;f)} = -t_{(1-p;f)}$$