Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

Kapitel 2

Funktionen und Stetigkeit

Inhalt

2.1 Funktionen

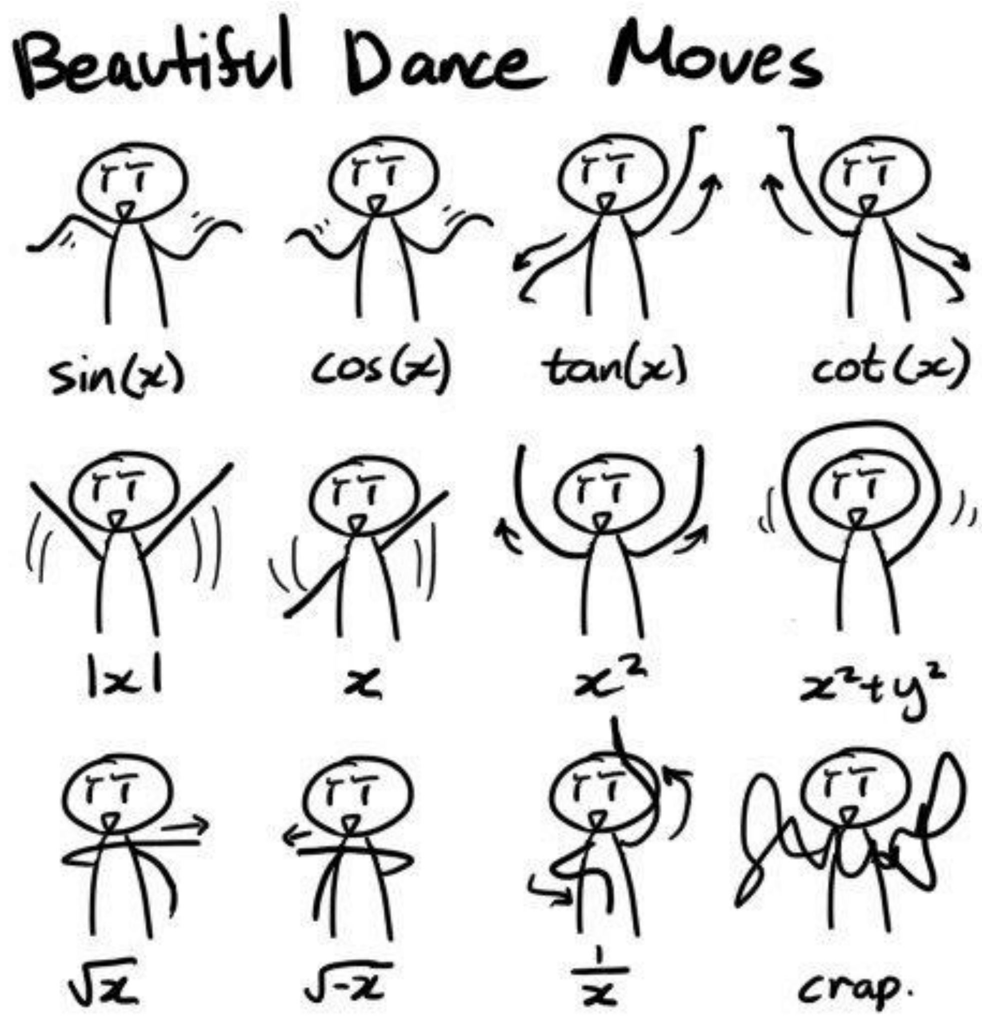
Definition, Eigenschaften, Wiederholung wichtiger Typen

2.2 Grenzwerte von Funktionen

$\lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to 5} f(x)$, …

2.3 Stetigkeit

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, Nullstellen: Bisektionsverfahren, …


Beautiful Dance Moves
sin(x)
cos(x)
tan(x)
cot(x)
|x|
x
x²
x²+y²
√x
√-x
1/x
crap.

Funktionen

- „Eine **Funktion** ist eine linkstotale und rechtseindeutige Relation.“

Funktionen als Zuordnungen

Definition. Seien X und Y Mengen.
Eine **Funktion** (auch: **Abbildung**) von X nach Y ist eine *Vorschrift*, die *jedem* Element von X *genau ein* Element von Y *zuordnet*.

Beispiel: Die Zuordnung **Ware** $\rightarrow$ **Preis** ist eine Funktion.
X: Menge aller Waren, Y: Menge der rationalen Zahlen.
Jede Ware hat einen Preis. Der Preis einer Ware ist *eindeutig*.
Es kann sein, dass mehrere Waren denselben Preis haben; das ist nicht verboten.

Exakte Definition über *Relationen*: Diskrete Strukturen!

Sprache der Funktionen

- Für eine Funktion f von X nach Y schreiben wir **$f: X \to Y$**.
- Jedem Element $x \in X$ wird genau ein $y \in Y$ zugeordnet. Dieses y bezeichnen wir mit **$f(x)$**.
- **Bezeichnung:**

$$f: X \to Y: y = f(x)$$

oder

$$f: X \to Y: x \to f(x).$$

X: **Definitionsbereich**, Y: **Bildbereich**.

Darstellungen von Funktionen

a) Wortvorschrift (verbale Beschreibung) — Jeder reellen Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet.

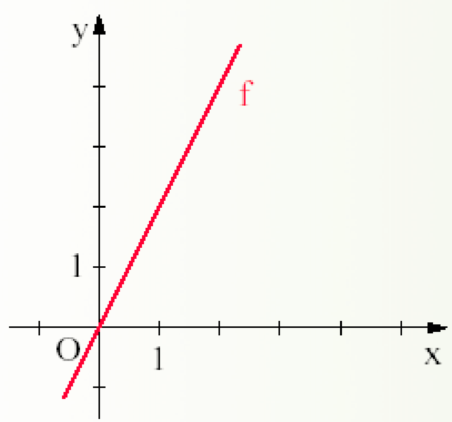
b) Funktionsgleichung — $y = 2 \cdot x$ oder $f(x) = 2 \cdot x$ oder $y = f(x) = 2 \cdot x$ oder $f\colon x \mapsto 2x$, jeweils $x \in \mathbb{R}$

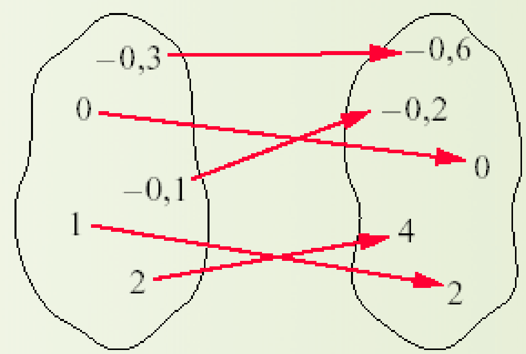
c) Wertetabelle

x	–0,3	–0,1	0	0,1	0,5	0,7	1	2	…
y	–0,6	–0,2	0	0,2	1	1,4	2	4	…

d) grafische Darstellung (im rechtwinkligen Koordinatensystem)/Graph der Funktion

e) Pfeildarstellung bzw. Pfeildiagramm

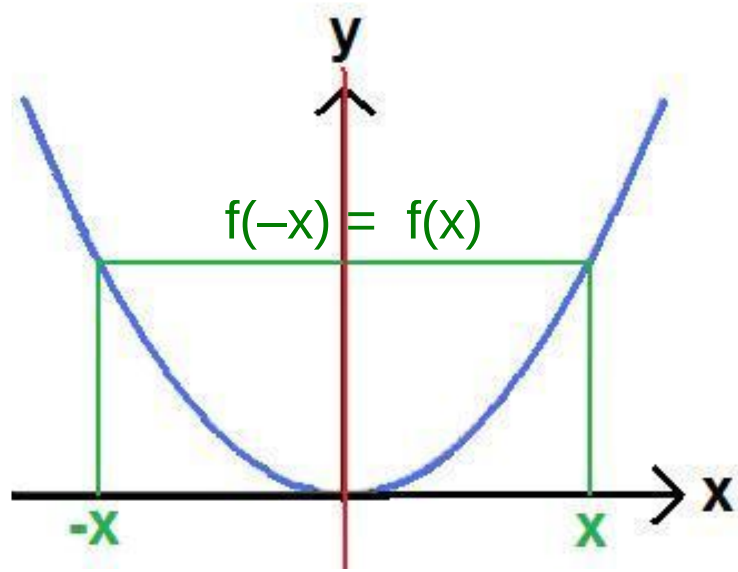




Achsensymmetrie

Der Graph einer Funktion f ist **achsensymmetrisch** zur y-Achse, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich gilt:

$$f(-x) = f(x).$$



Die Funktion f heißt dann **gerade**.

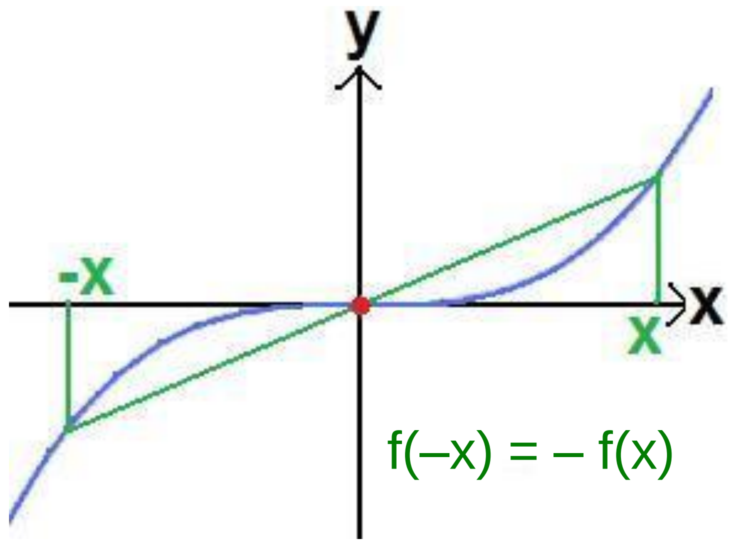
Beispiel: $f(x) = x^4$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, denn

$$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x).$$

Punktsymmetrie

Der Graph einer Funktion f ist **punktsymmetrisch** zum Ursprung, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich gilt:

$$f(-x) = -f(x).$$



Die Funktion f heißt dann **ungerade**.

Beispiel: $f(x) = x^3$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn

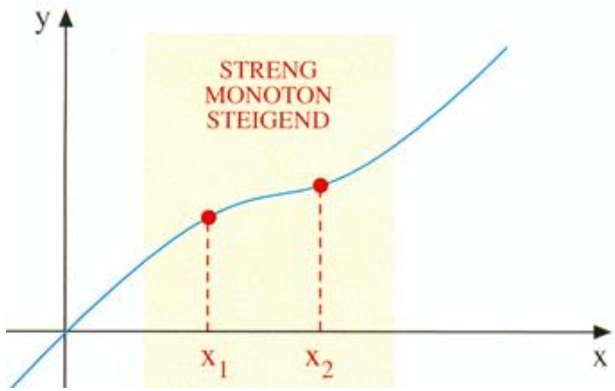
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

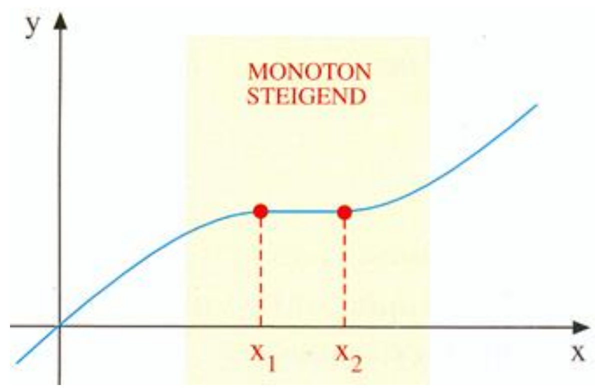
Monotonie

Eine Funktion f heißt **streng monoton steigend**, wenn gilt:

Aus $x_1 < x_2$ folgt stets $f(x_1) < f(x_2)$.

Wenn aus $x_1 < x_2$ lediglich $f(x_1) \leq f(x_2)$ folgt, so ist f **monoton steigend**.

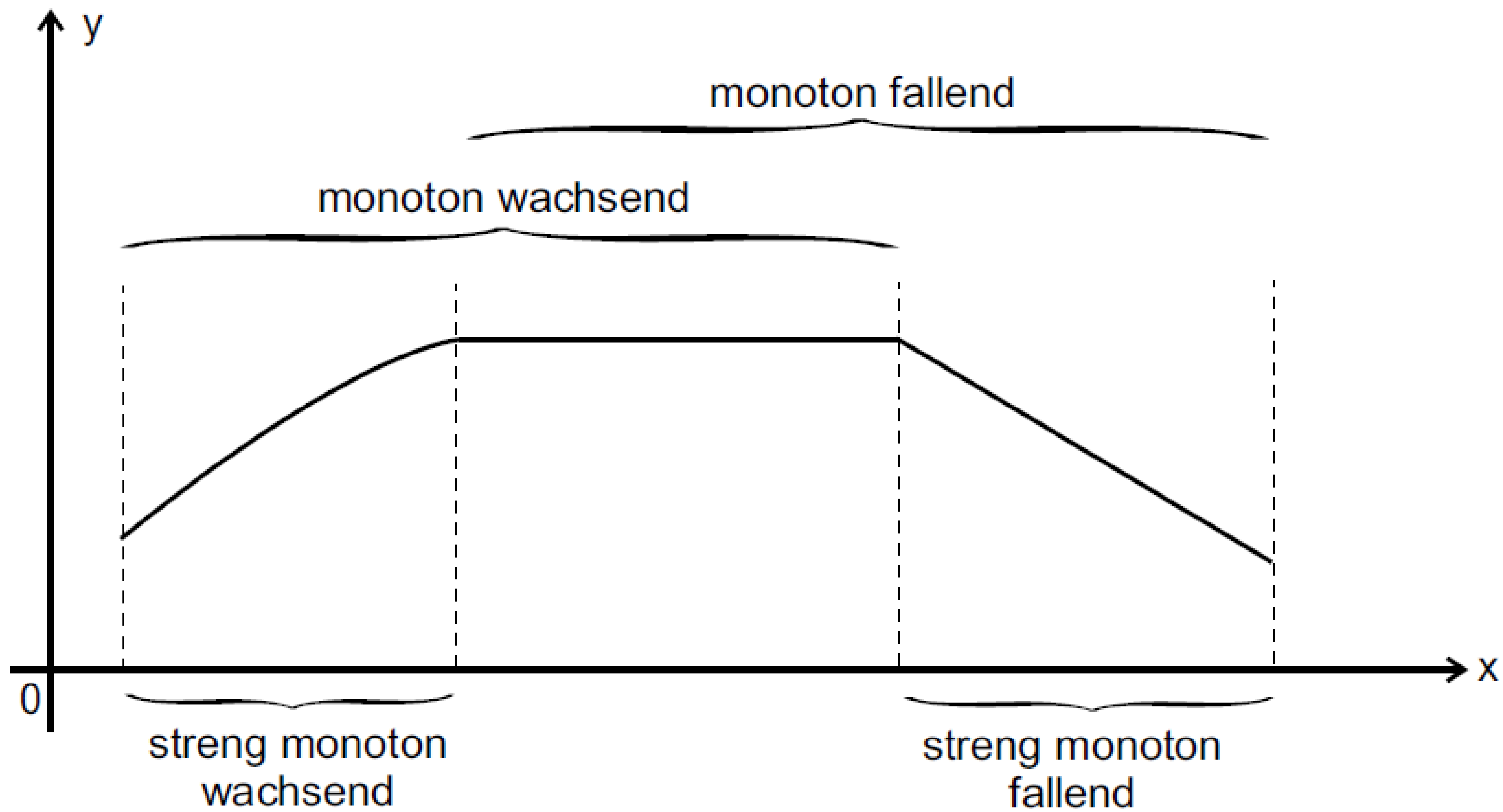




Folgt aus $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) > f(x_2)$, so ist f **streng monoton fallend**.

Folgt aus $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \geq f(x_2)$, so ist f **monoton fallend**.

Beispiel


y
monoton fallend
monoton wachsend
x
0
streng monoton wachsend
streng monoton fallend

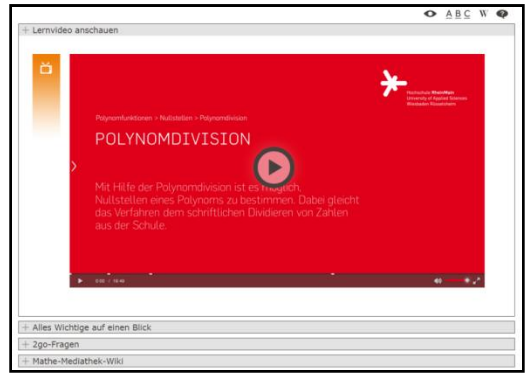
Selbststudium

Wir wiederholen im Folgenden nur kurz die wichtigsten Funktionstypen.
Erarbeiten Sie sich mehr zum Thema „Funktionen" im **Selbststudium**!

1. Mathe-Mediathek: www.hs-rm.de/mathe-mediathek

Arbeiten Sie diese Kapitel durch:

- Polynomfunktionen,
- trigonometrische Funktionen,
- Exponentialfunktionen,
- Logarithmusfunktionen



2. Mathe-Vorkurs: „Kapitel 2 - Funktionen" (StudIP und AMIGO)

Lineare Funktionen

Definition: Funktionen mit dem Definitionsbereich **R** und der Gleichung

$$f(x) = m \cdot x + b$$

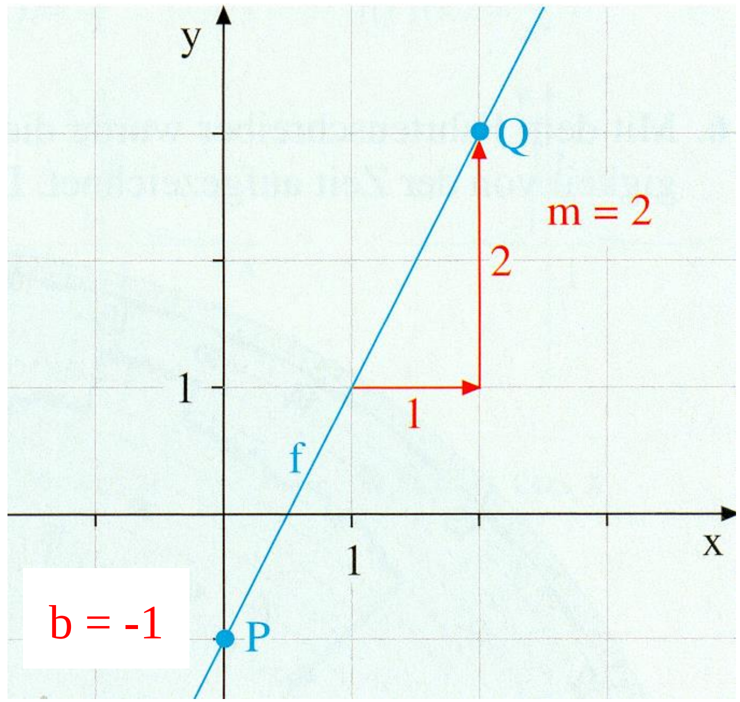
heißen **lineare Funktionen**.

Dabei haben die reellen Zahlen m und b folgende Bezeichnungen:

m = **Steigung**,

b = **y-Achsenabschnitt** (= f(0)),

Beispiel: $f(x) = 2x - 1$



Quadratische Funktionen

Funktionen mit der Gleichung

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

heißen **quadratische Funktionen**

(a, b, c $\in$ **R** mit a $\neq$ 0).

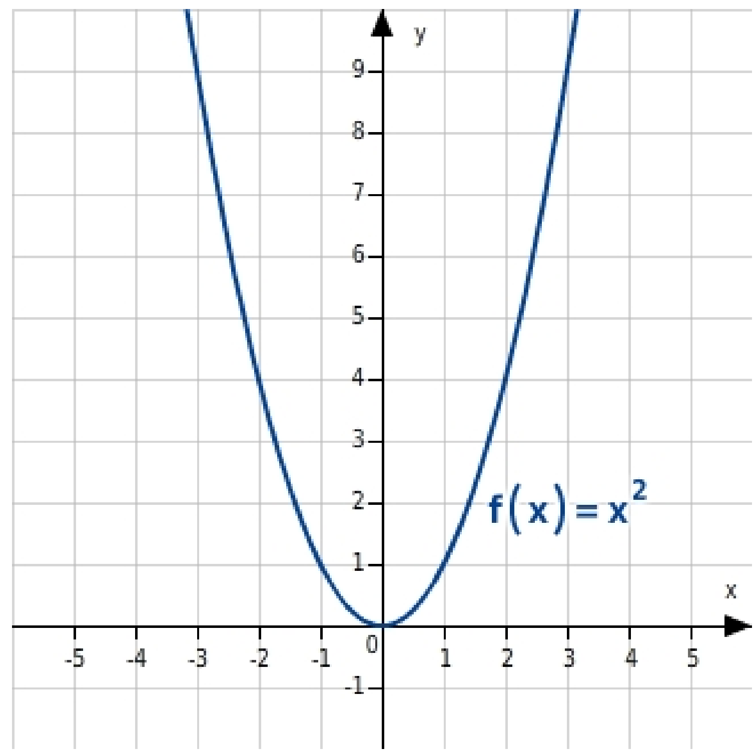
Ihre Graphen heißen **Parabeln**.

Die einfachste quadratische Funktion ist

$$f(x) = x^2.$$

Ihr Graph heißt **Normalparabel**.

Ihr **Scheitelpunkt** liegt bei (0, 0).



Scheitelpunktsform quadratischer Funktionen

Jede quadratische Funktion lässt sich auf die folgende **Scheitel-punktsform** bringen:

$$f(x) = a\cdot(x - d)^2 + e.$$

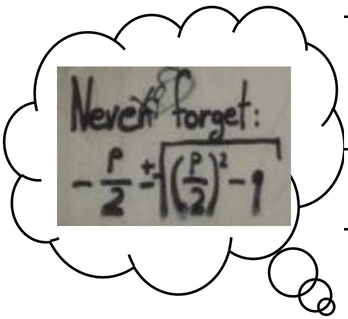
Der Graph dieser Funktion entsteht aus der Normalparabel durch

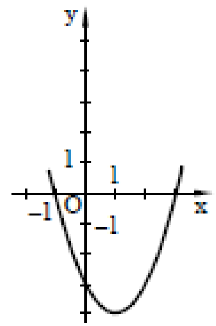
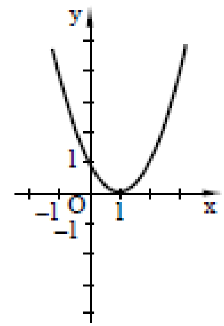
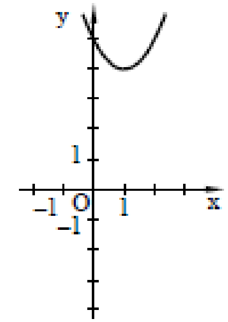
- Verschiebung um e nach oben,
- Verschiebung um d nach rechts,
- Streckung um den Faktor a.

Falls $a < 0$: zusätzlich Spiegelung an der x-Achse.

Es folgt: Der Scheitelpunkt liegt bei (d, e).

Nullstellen quadratischer Funktionen

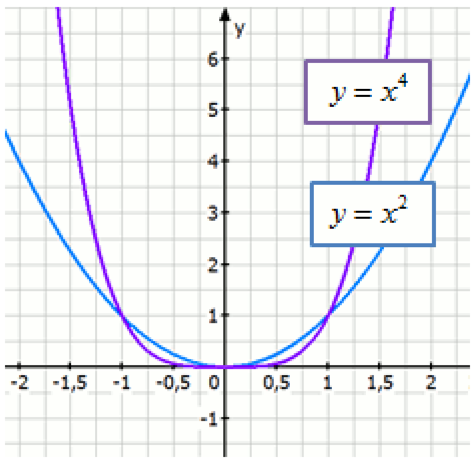


Funktionsgleichung	$f_1(x) = x^2 - 2x - 3$	$f_2(x) = x^2 - 2x + 1$	$f_3(x) = x^2 - 2x + 5$
grafische Darstellung			
Gleichung zur Nullstellenbestimmung	$0 = x^2 - 2x - 3$	$0 = x^2 - 2x + 1$	$0 = x^2 - 2x + 5$
p; q	$p = -2;\ q = -3$	$p = -2;\ q = 1$	$p = -2;\ q = 5$
Einsetzen in die Lösungsformel	$x_1 = 1 + \sqrt{4}$; $x_2 = 1 - \sqrt{4}$	$x_1 = 1 + \sqrt{0}$; $x_2 = 1 - \sqrt{0}$	$x_1 = 1 + \sqrt{-4}$; $x_2 = 1 - \sqrt{-4}$
reelle Lösungen	$x_1 = 3;\ x_2 = -1$	$x_1 = x_2 = 1$	keine
Anzahl reeller Nullstellen/Vielfachheit	2 einfache reelle Nullstellen	1 doppelte reelle Nullstelle	keine reelle Nullstelle

Potenzfunktionen

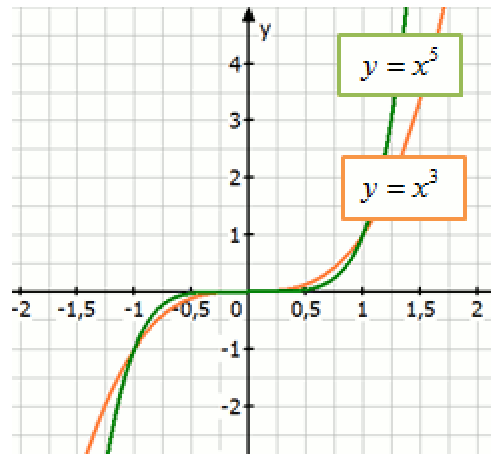
Die Funktion mit $f(x) = x^n$ heißt **Potenzfunktion** vom **Grad n** ($n \in \mathbf{N}$).

Beispiele: gerade Exponenten n



achsensymmetrisch
zur y-Achse

ungerade Exponenten n



punktsymmetrisch
zum Ursprung

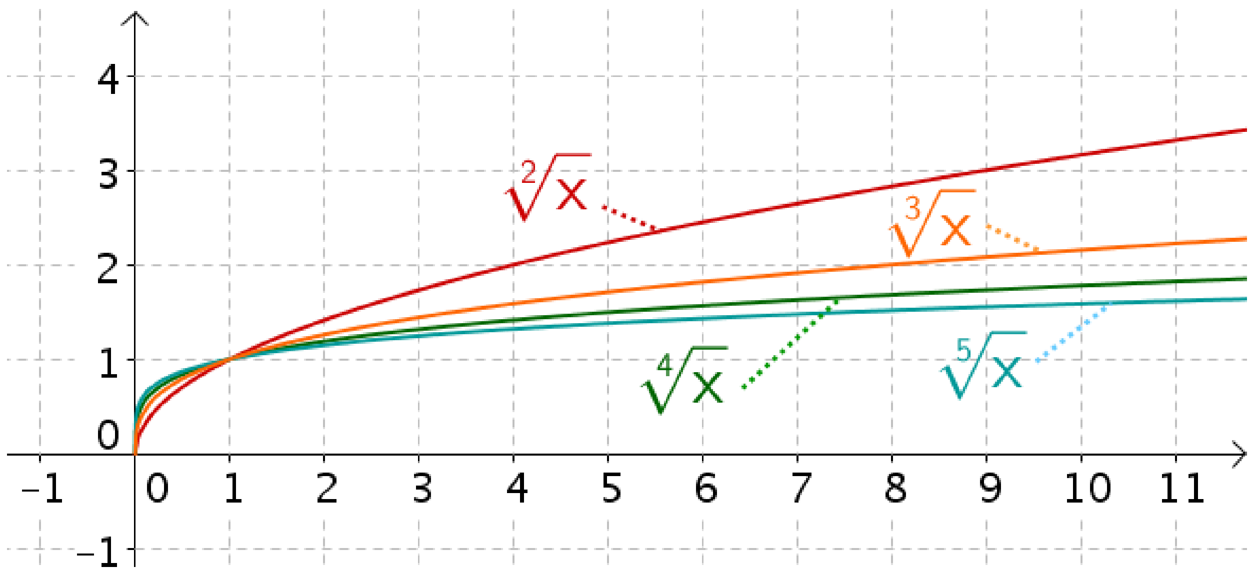
Wurzelfunktionen

Die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ für $x \geq 0$ ist die

Wurzelfunktion

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Beispiele:



Rationale Funktionen

Die **rationalen Funktionen** unterteilt man in

1. **Ganzrationale Funktionen** (= **Polynome**):

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

2. **Gebrochenrationale Funktionen** (= Quotienten zweier Polynome):

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

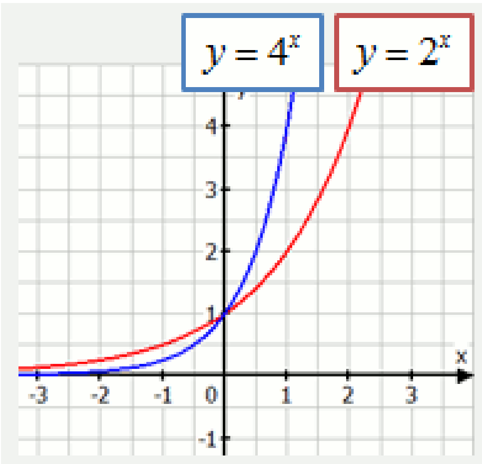
Die **Koeffizienten** a_i und b_i sind reelle Zahlen.

Exponentialfunktionen

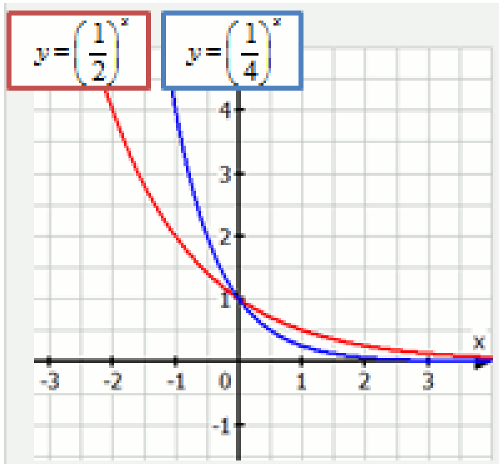
Definition: Funktionen mit dem Definitionsbereich **R** und der Gleichung

$$f(x) = a^x$$

($a > 0$, $a \neq 1$) heißen **Exponentialfunktionen** zur **Basis** a.



a > 1: Wachstumsfunktion



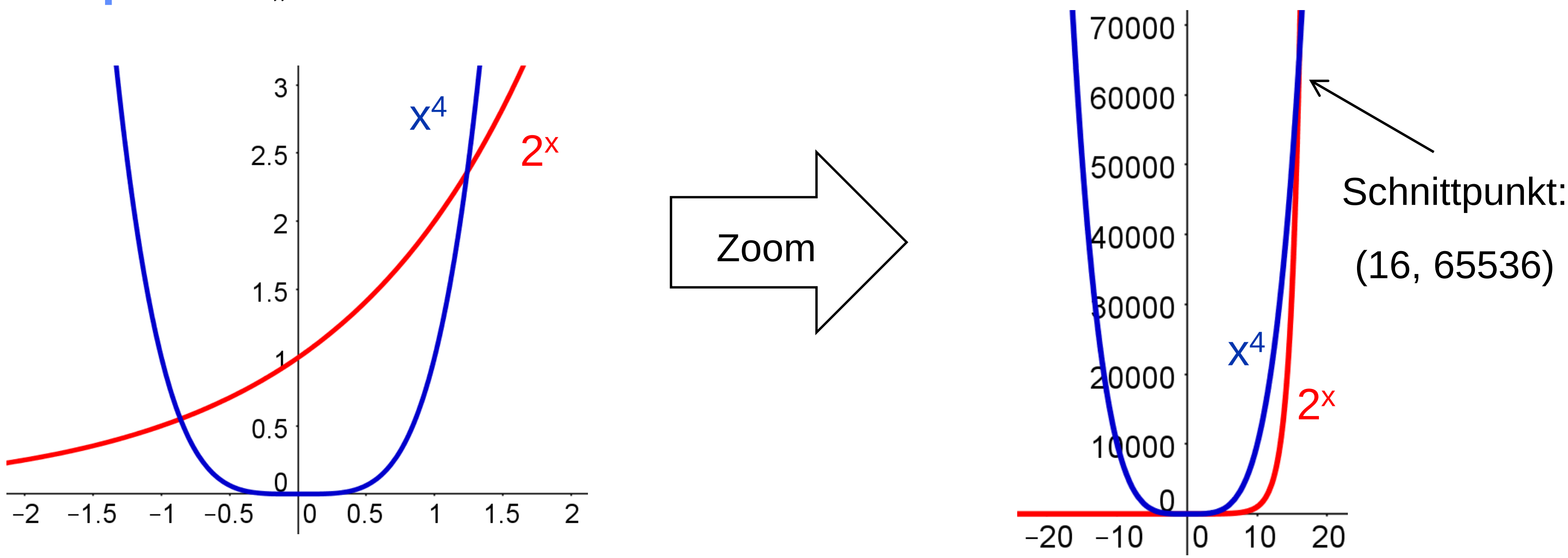
0 < a < 1: Zerfallsfunktion

Exponentielles vs. polynomiales Wachstum

Exponentialfunktionen wachsen stärker als jede Polynomfunktion!

„Langfristig“, d. h. für genügend großes x, wird stets $a^x > x^n$.

Beispiel: 2^x „überholt“ x^4 bei $x = 16$

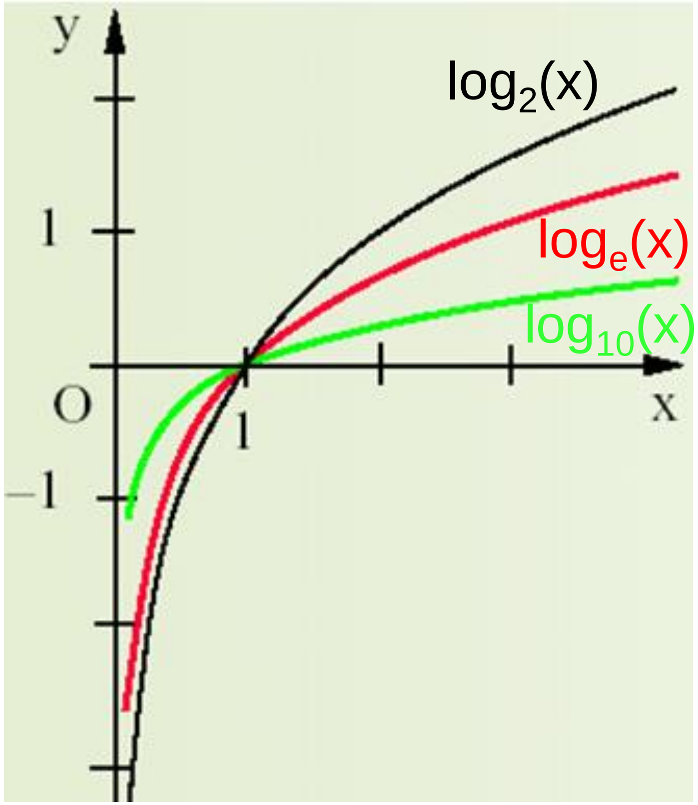


Logarithmusfunktionen

Definition: Funktionen mit der Gleichung

$$f(x) = \log_a(x)$$

heißen **Logarithmusfunktionen** zur **Basis** a ($a > 0$, $a \neq 1$) .
Sie sind nur für $x > 0$ definiert.



Spezielle Bezeichnungen:

$\mathrm{ld}(x) = \log_2(x)$ (Logarithmus dualis)

$\ln(x) = \log_e(x)$ (natürlicher Logarithmus)

$\lg(x) = \log_{10}(x)$ (dekadischer Logarithmus)

a^x und $\log_a(x)$ als Umkehrfunktionen

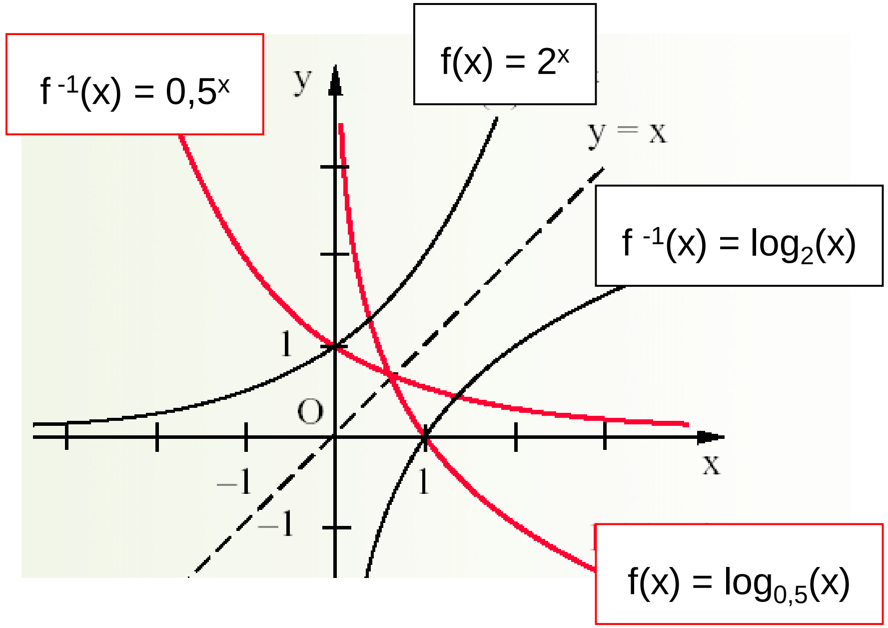
Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist die Logarithmusfunktion $f^{-1}(x) = \log_a(x)$.

Ihre Graphen gehen durch Spiegelung an der Gerade y = x auseinander hervor.

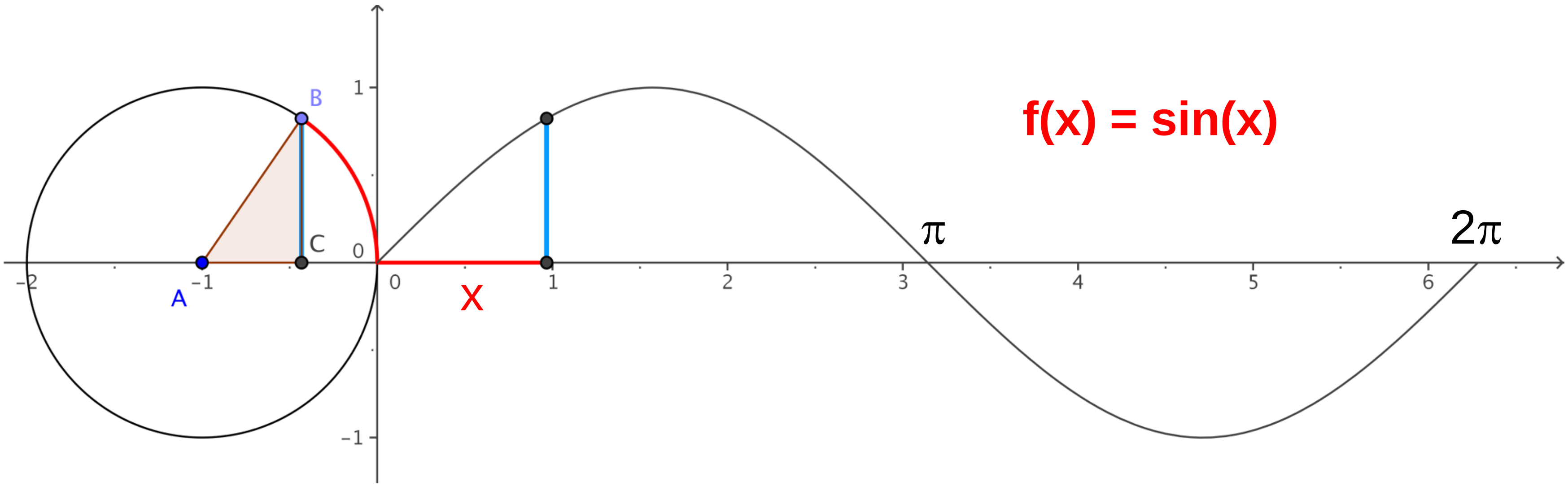
Beispiele (siehe Abb.):

(a) $f(x) = 2^x \quad \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2(x)$

(b) $f(x) = \log_{0,5}(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = 0{,}5^x$

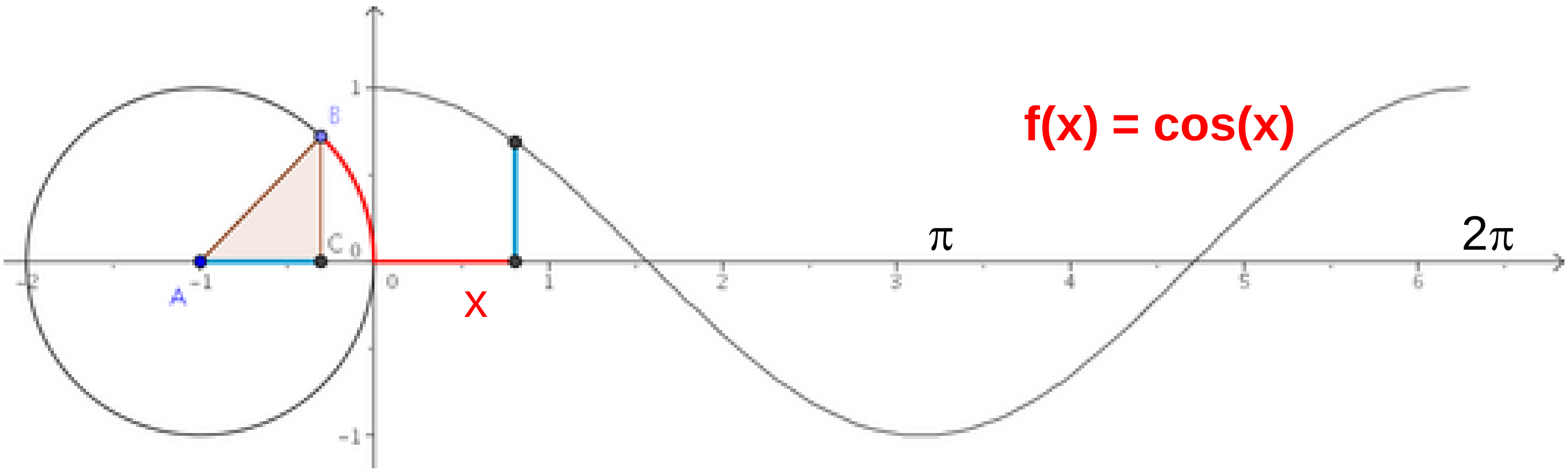


Die Sinusfunktion

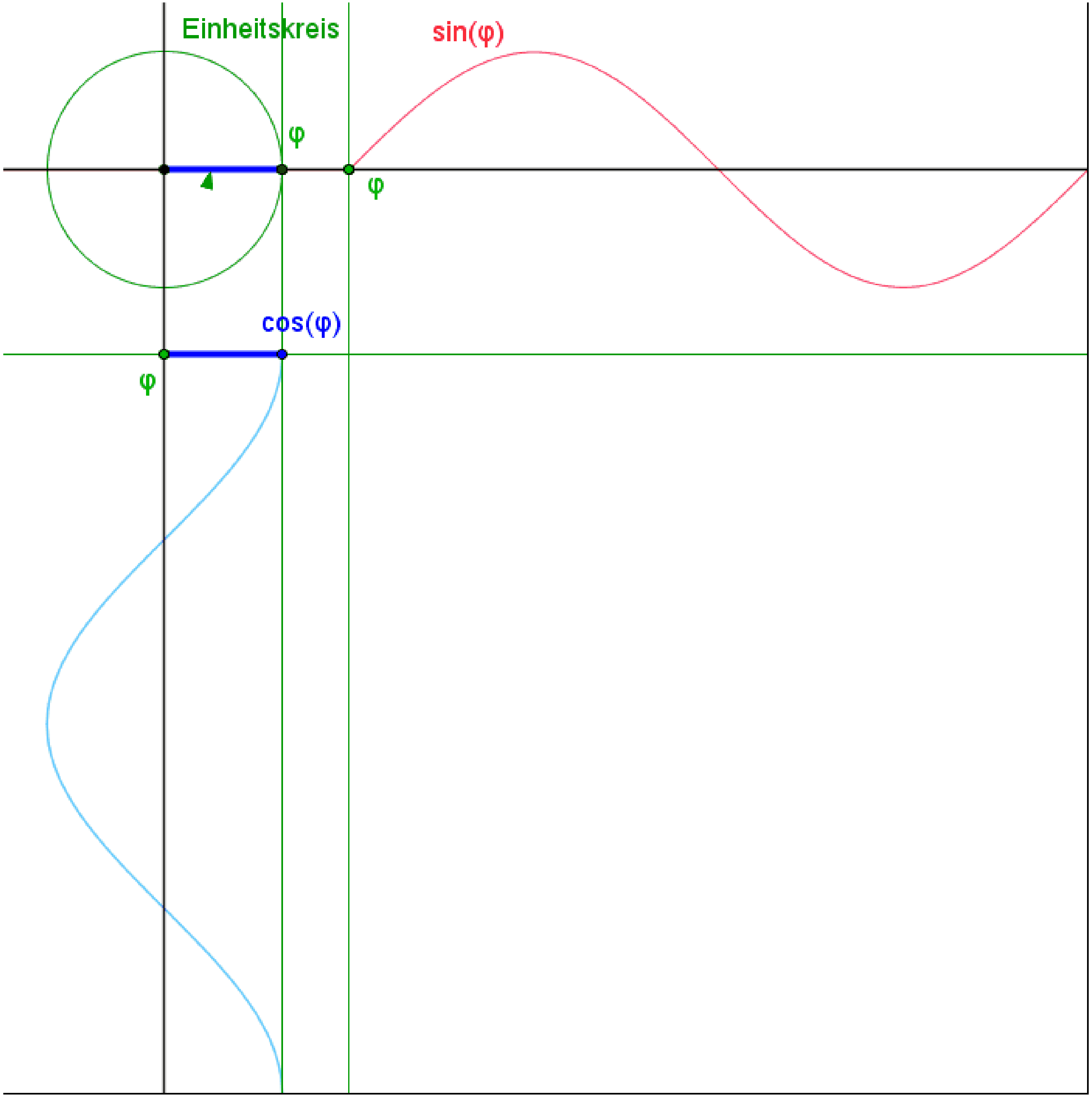


- Definitionsbereich: **R**, Wertebereich: [-1, 1]
- periodisch mit Periode 2π: $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- punktsymmetrisch zum Ursprung: $\sin(-x) = -\sin(x)$
- Nullstellen: $x = k \cdot \pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

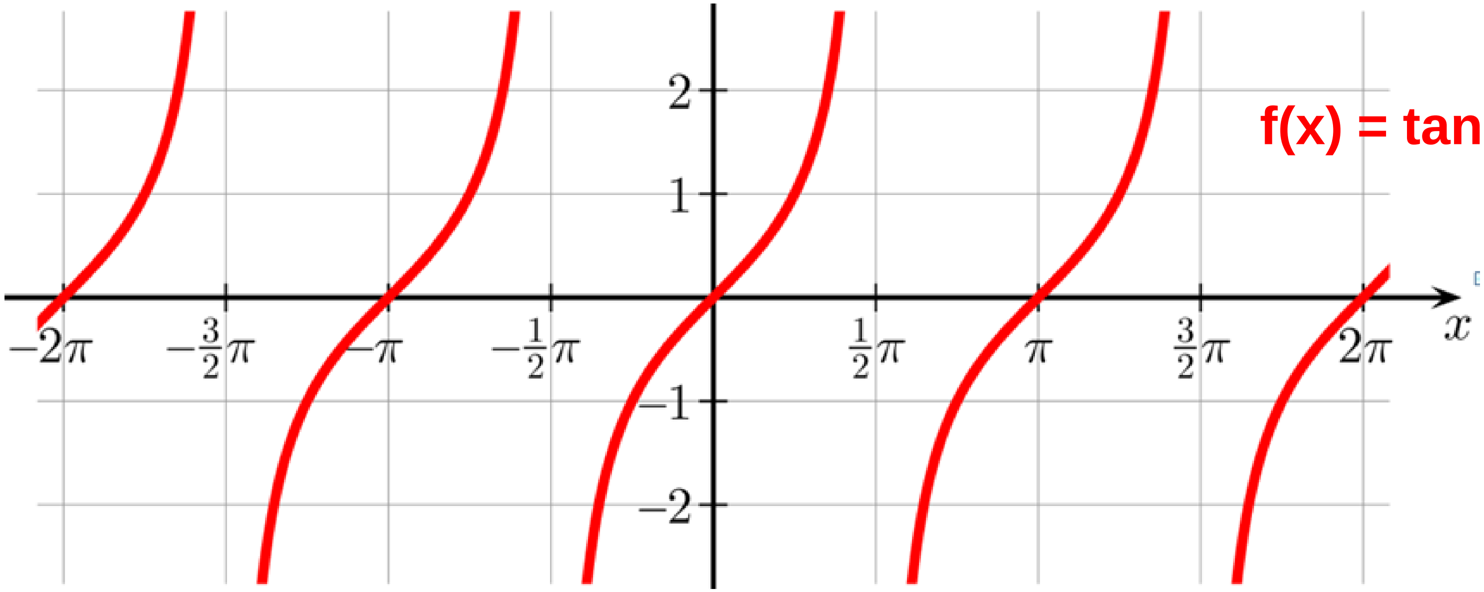
Die Kosinusfunktion



- Definitionsbereich: **R**, Wertebereich: [-1, 1]
- periodisch mit Periode 2π: cos(x + 2π) = cos(x)
- achsensymmetrisch zur y-Achse: cos(-x) = cos(x)
- Nullstellen: x = π/2 + k·π (k ∈ **Z**)


Einheitskreis
sin(φ)
φ
φ
cos(φ)
φ

Die Tangensfunktion



- Definitionsbereich: **R** \ {π/2+ k·π} (k ∈ **Z**), Wertebereich: **R**
- periodisch mit Periode π: tan(x + π) = tan(x)
- punktsymmetrisch zum Ursprung: tan(-x) = - tan(x)
- Nullstellen: x = k·π (k ∈ **Z**)

Modifizierung der Sinusfunktion

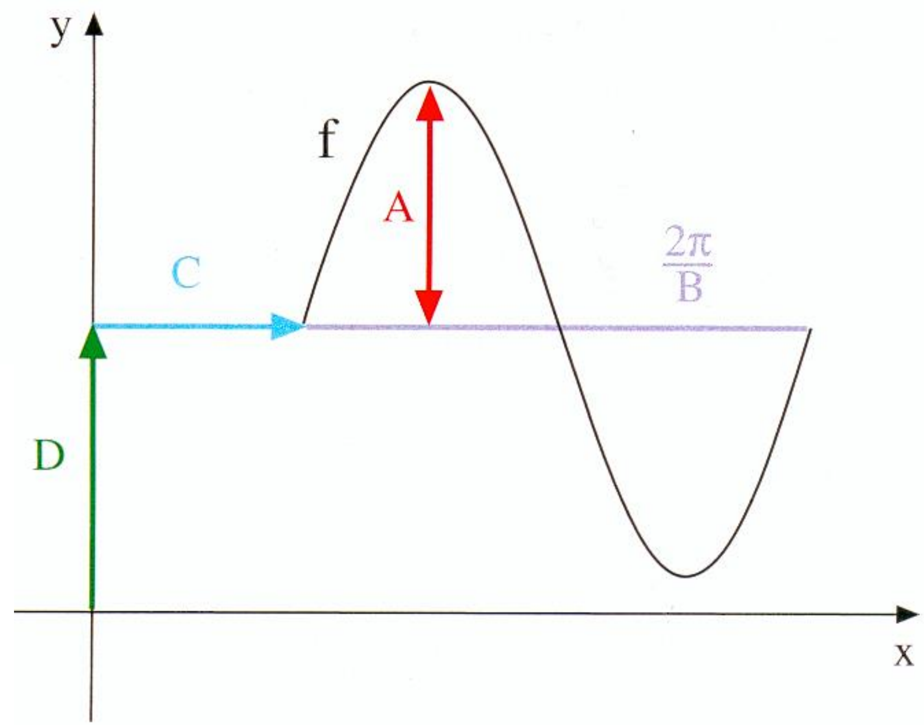
$$f(x) = A \cdot \sin[B \cdot (x - C)] + D$$

1 Verschiebung um +D in y-Richtung

2 Verschiebung um +C in x-Richtung

3 Die Periode beträgt $\frac{2\pi}{B}$

4 Die Amplitude beträgt A



Beispiel

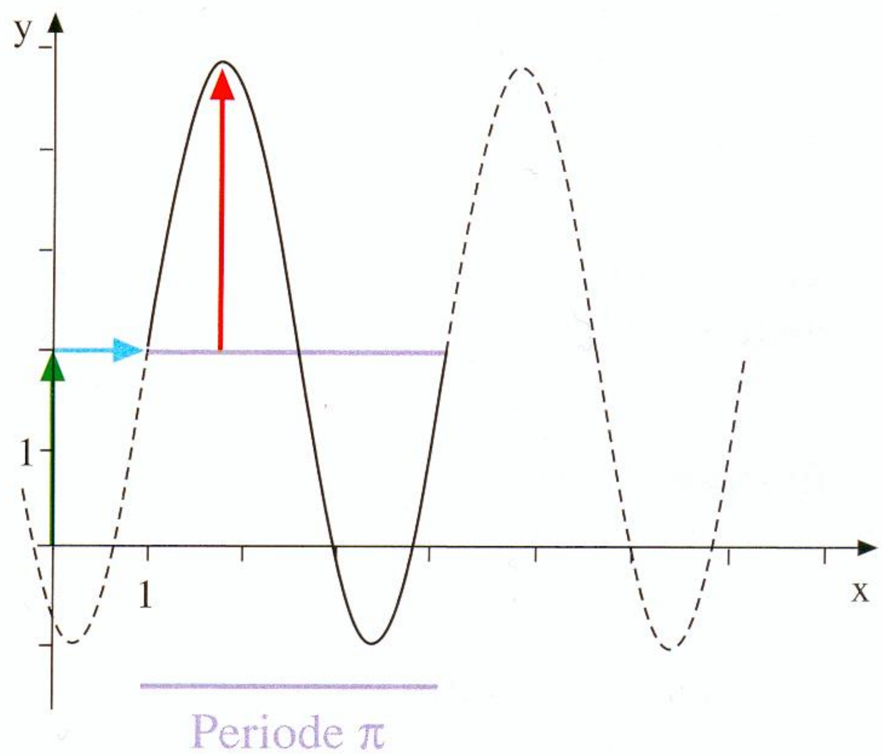
Beispiel: $f(x) = 3 \cdot \sin(2 \cdot (x - 1)) + 2$

Verschiebungen:

- um 2 nach oben,
- um 1 nach rechts.

Periode: $2\pi/2 = \pi$

Amplitude: 3

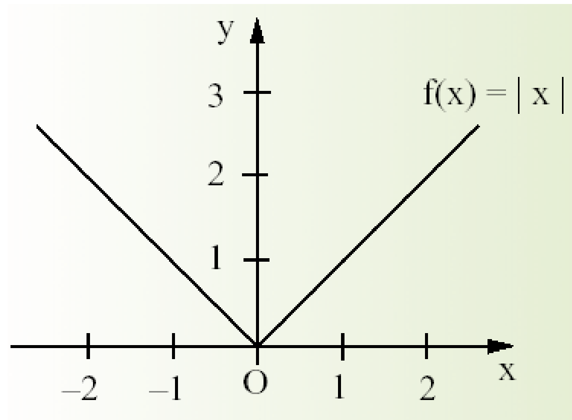


Allgemein: Funktionen modifizieren

Ersetzt man $y = f(x)$ durch …		**dann wird der Graph …**
(1.)	$y = f(x - C)$	um C in x-Richtung verschoben
(2.)	$y = f(x) + D$	um D in y-Richtung verschoben
(3.)	$y = -f(x)$	an der x-Achse gespiegelt
(4.)	$y = f(-x)$	an der y-Achse gespiegelt
(5.)	$x = f(y)$	an der Winkelhalb. $y = x$ gespiegelt
(6.)	$y = A \cdot f(x)$	in y-Richtung um A gestreckt
(7.)	$y = f(B \cdot x)$	in x-Richtung um 1/B gestreckt

Betragsfunktion

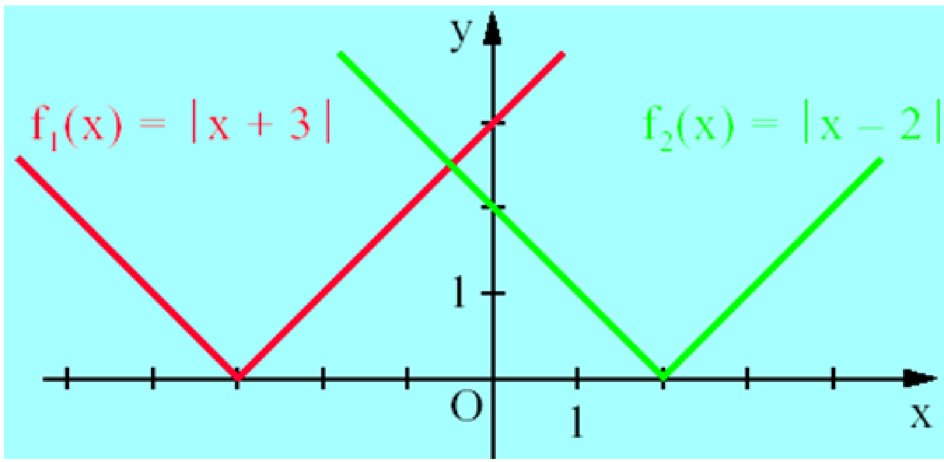
$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0; \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



Beispiele:

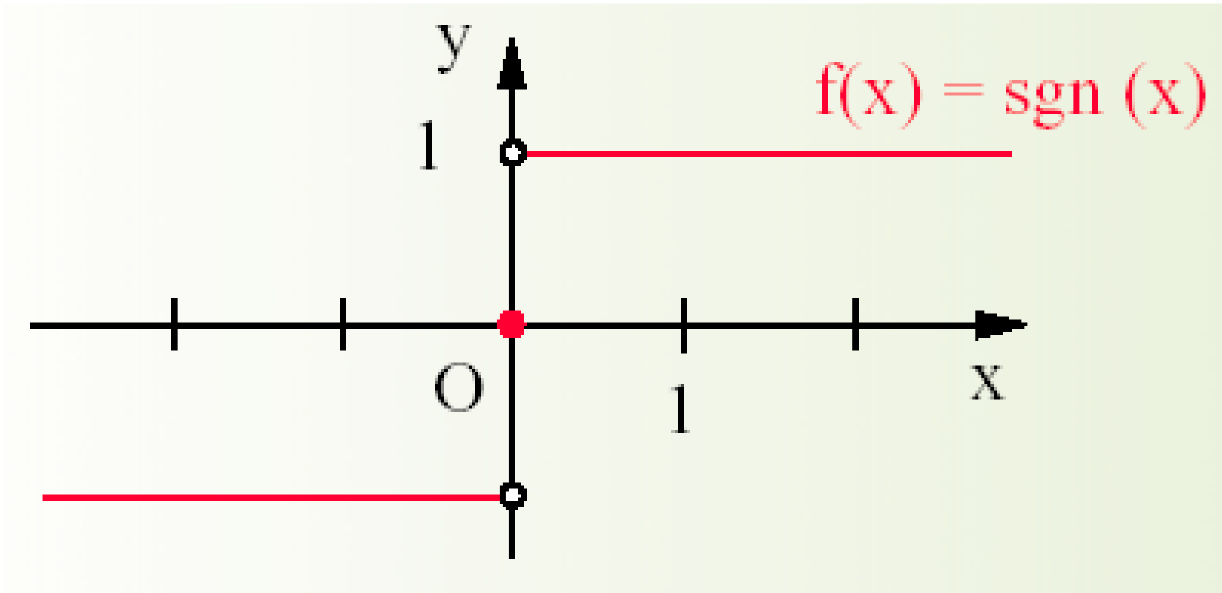
$f_1(x) = |x + 3|$

$f_2(x) = |x - 2|$



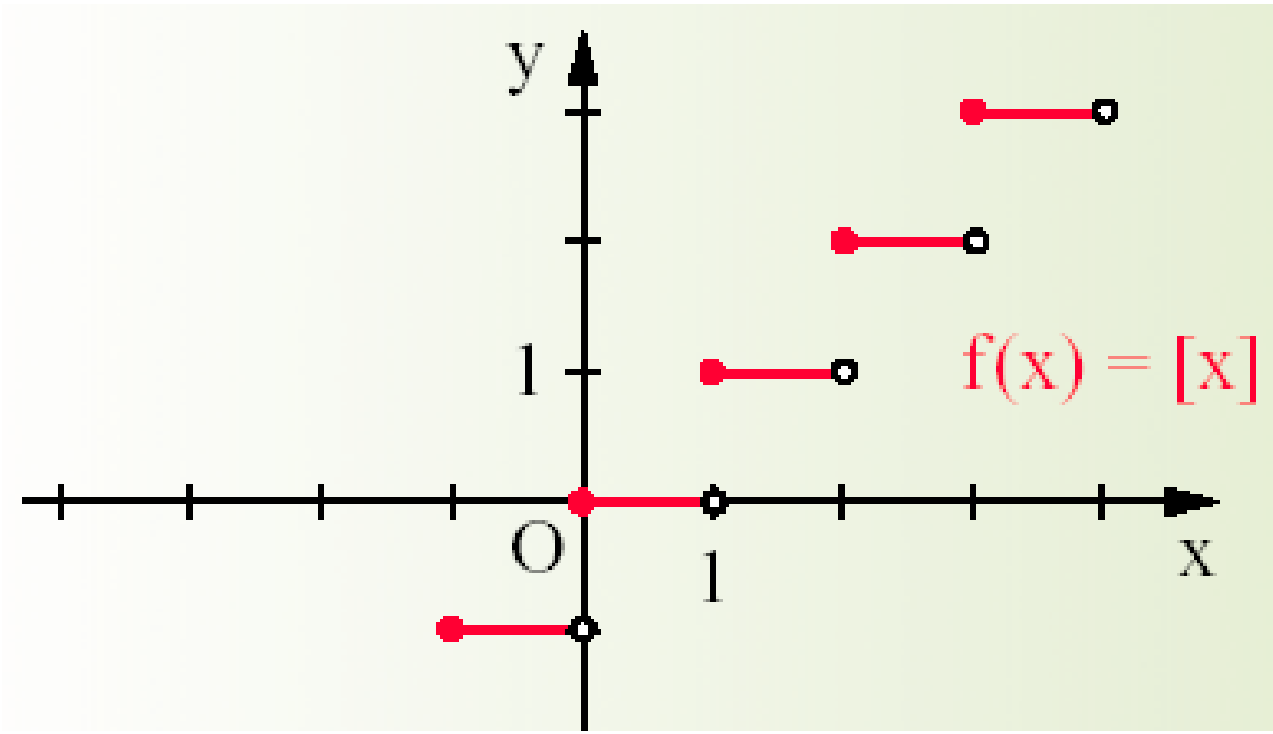
Signum-Funktion (Vorzeichenfunktion)

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

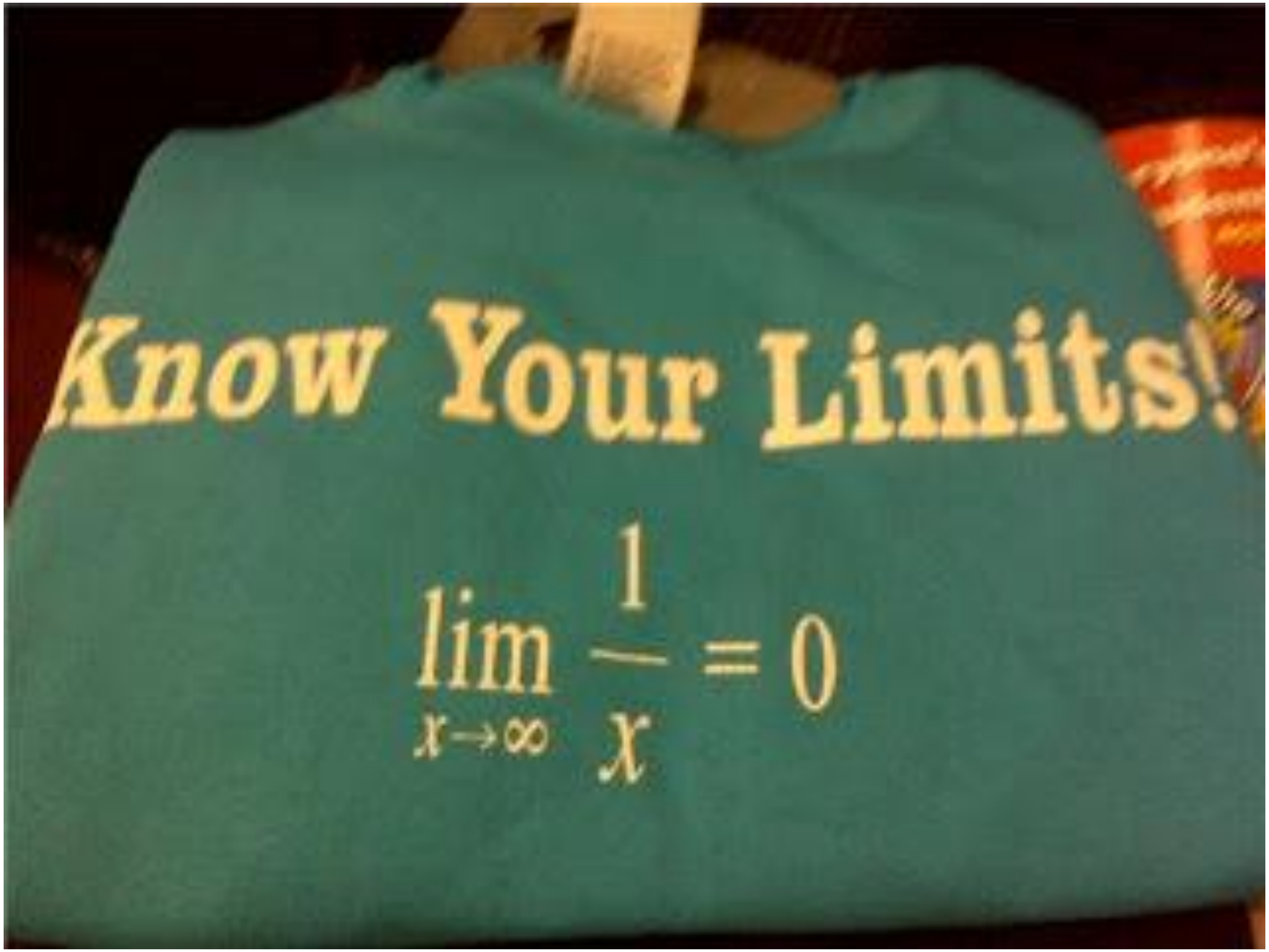


Gauß-Klammerfunktion

$$\mathrm{INT}(x) = [x] = \begin{cases} x, \text{ falls } x \text{ ganzzahlig ist;} \\ \text{die zu } x \text{ nächstkleinere ganze Zahl, falls } x \text{ nicht ganzzahlig ist.} \end{cases}$$



2.2 Grenzwerte von Funktionen

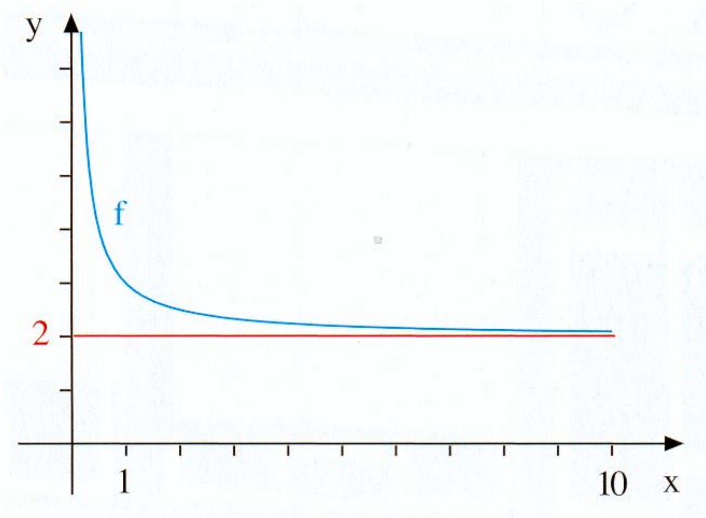


Grenzwerte von Funktionen

Beispiel: Wie verhält sich $f(x) = \frac{2x+1}{x}$, wenn x immer größer wird?

Testeinsetzungen:

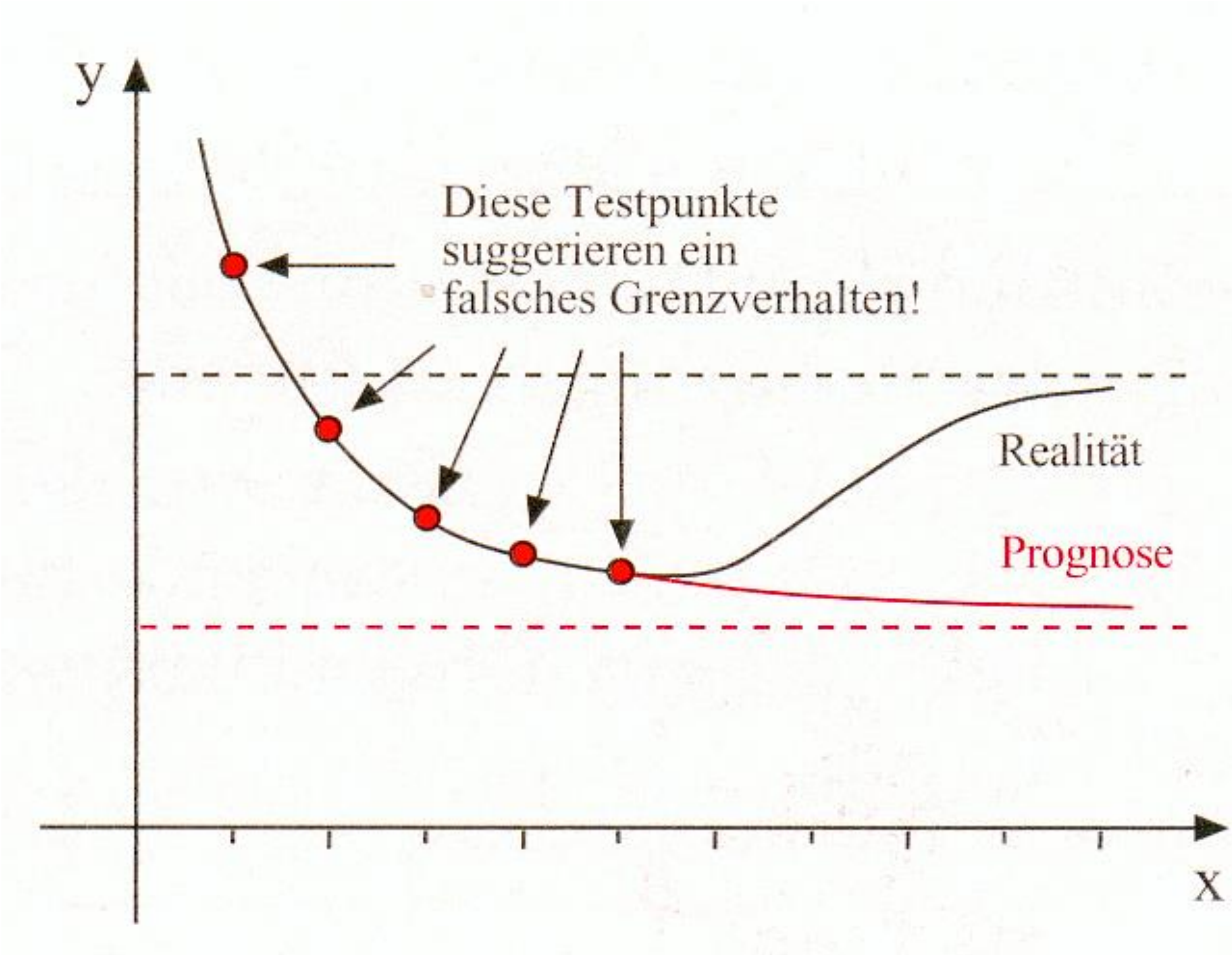
x	$f(x) = \frac{2x+1}{x}$
1	3
10	2,1
100	2,01
1000	2,001
$\downarrow$	$\downarrow$
∞	2



Die Funktion strebt **für x gegen unendlich** gegen den **Grenzwert** 2.

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x} = 2$

Problem bei Testeinsetzungen



Grenzwertuntersuchung mit Testfolgen

Anstelle nur einiger Testwerte verwenden wir eine **allgemeine Testfolge**, die gegen unendlich konvergiert.

Sei (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Im vorigen Beispiel gilt dann für die Funktionswerte:

$$f(x_n) = \frac{2x_n + 1}{x_n} = \frac{2x_n}{x_n} + \frac{1}{x_n} = 2 + \frac{1}{x_n}.$$

Für den Grenzwert der Funktionswerte folgt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to\infty} (2 + \frac{1}{x_n}) = 2.$$

Grenzwert für $x \to \infty$: Die Definition

Wir können also den Grenzwert einer Funktion auf den Grenzwert von Folgen zurückführen.

Definition. Die Funktion f hat **für $x \to \infty$** genau dann den **Grenzwert** g, wenn gilt: Für jede gegen ∞ strebende Folge (x_n) konvergiert die Folge der Funktionswerte $f(x_n)$ gegen g.

Wir schreiben dann:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g.$$

Analog definieren wir den Grenzwert von f für $x \to -\infty$.

Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$

Beispiel: Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ist an $x_0 = 2$ nicht definiert.

Wie verhält sich f, wenn man sich dieser Definitionslücke nähert?

Annäherung von links ($x < 2$):

x	f(x)
1,5	3,5
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
↓	↓
2	4

x	f(x)
2,5	4,5
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001
↓	↓
2	4

Annäherung von rechts ($x > 2$):

Da rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert übereinstimmen, hat f **für x gegen 2** insgesamt den **Grenzwert** 4: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

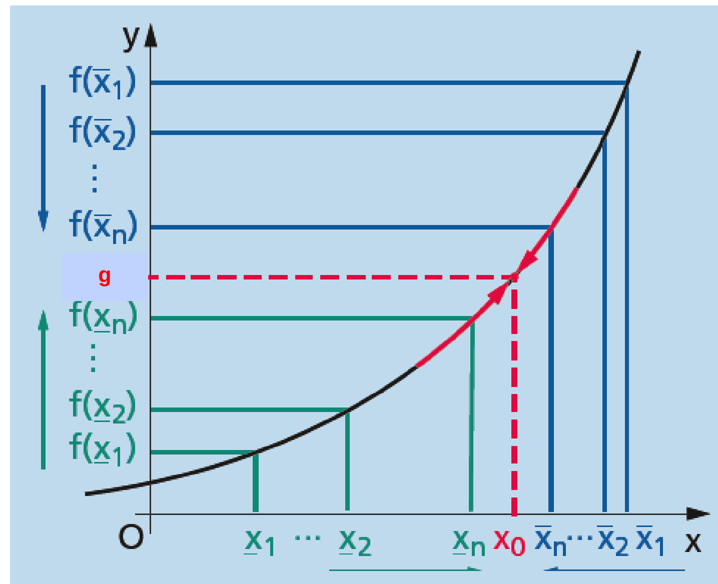
Grenzwert für $x \to x_0$: Die Definition

Analog zum Grenzwert für $x \to \infty$ können wir den Grenzwert für $x \to x_0$ mit Hilfe von Folgen präzise definieren.

Definition. Die Funktion f hat **für $x \to x_0$** genau dann den **Grenzwert** g, wenn gilt: Für jede gegen x_0 strebende Folge (x_n) konvergiert die Folge der Funktionswerte $f(x_n)$ gegen g.

Wir schreiben dann:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g.$$



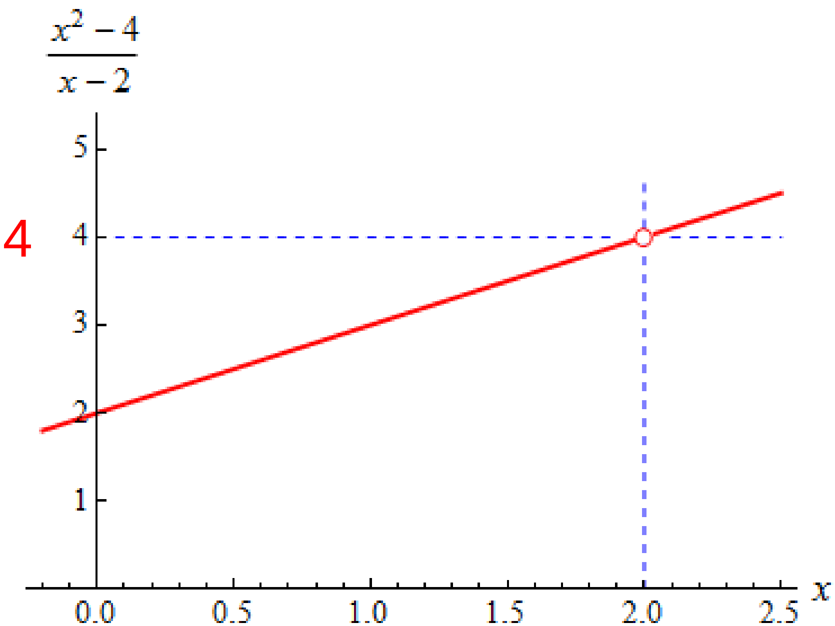
Beispiel

Beispiel: Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ hat für $x \to 2$ den Grenzwert 4, denn:

Sei (x_n) eine beliebige Folge,
die gegen 2 konvergiert.
Dann konvergieren die
Funktionswerte gegen 4:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 4}{x_n - 2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(x_n - 2)(x_n + 2)}{x_n - 2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}(x_n + 2) = 2 + 2 = 4.$$

$f(x_n) \to 4$



$x_n \to 2$

Grenzwertsätze

Zu praktischen Berechnung von Funktionsgrenzwerten sind Grenzwertsätze nützlich. Sie ergeben sich direkt aus denjenigen für Folgen.

f und g seien Funktionen, die für x gegen x_0 die reellen Zahlen A bzw. B als Grenzwert haben. Dann gilt

$$(1.)\ \lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = A + B$$

$$(2.)\ \lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = A - B$$

$$(3.)\ \lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B$$

$$(4.)\ \lim_{x\to x_0}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) / \lim_{x\to x_0} g(x) = A / B$$

falls $B \neq 0$, $g(x) \neq 0$.

Entsprechendes gilt auch für Grenzwerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

Anwendung der Grenzwertsätze

Mit Hilfe der Grenzwertsätze kann man den Grenzwert oft nach einfachen Termumformungen erkennen:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}2+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=2+0=2$$

Auch Grenzwerte für $x \to x_0$ kann man mit Termumformungen berechnen (z. B. 3. binomische Formel anwenden und dann kürzen):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}(x+2)=\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2=2+2=4$$

Übung

Bestimmen Sie die Grenzwerte:

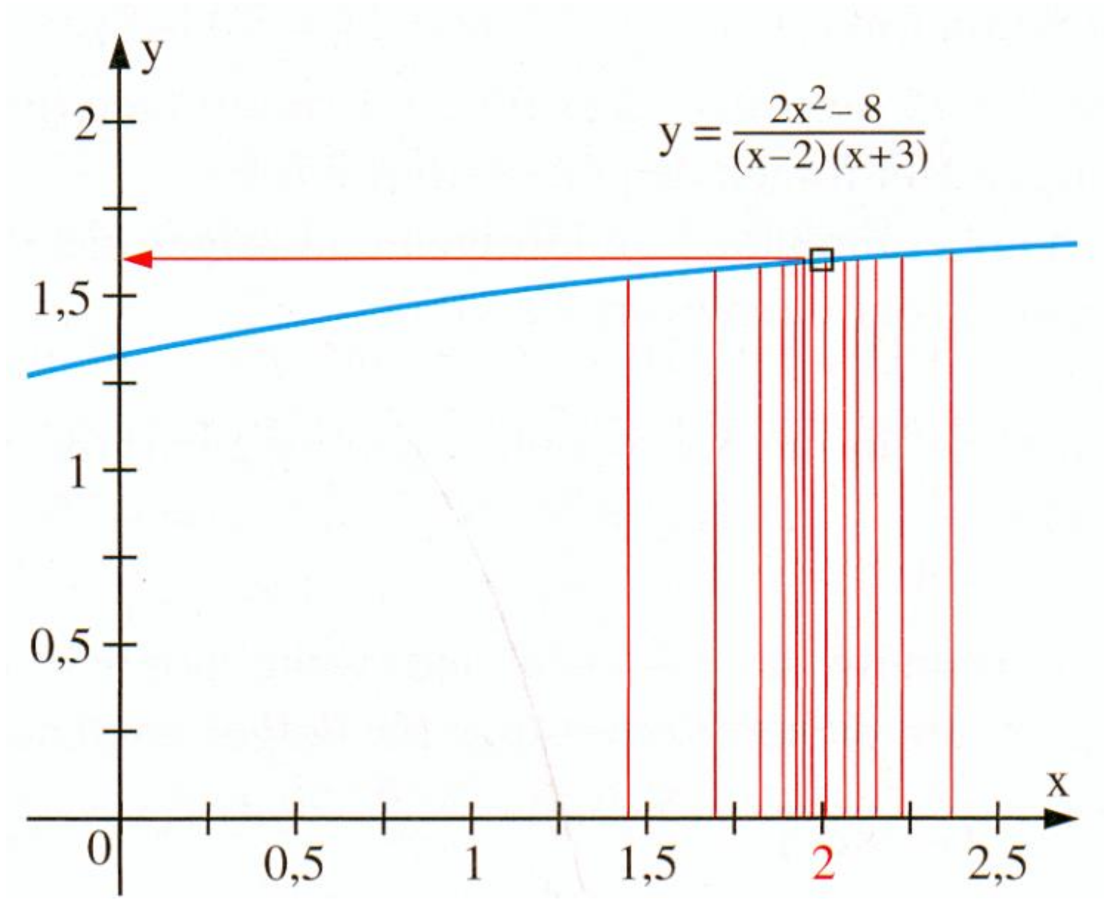
(a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x - 3}{x}$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x + 2x^2}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

Übung

Berechnen Sie den Grenzwert für $x \to 2$.



Uneigentliche Grenzwerte

Strebt eine Funktion für $x \to x_0$ gegen ∞ (oder $-\infty$), so spricht man von einem **uneigentlichen Grenzwert.**

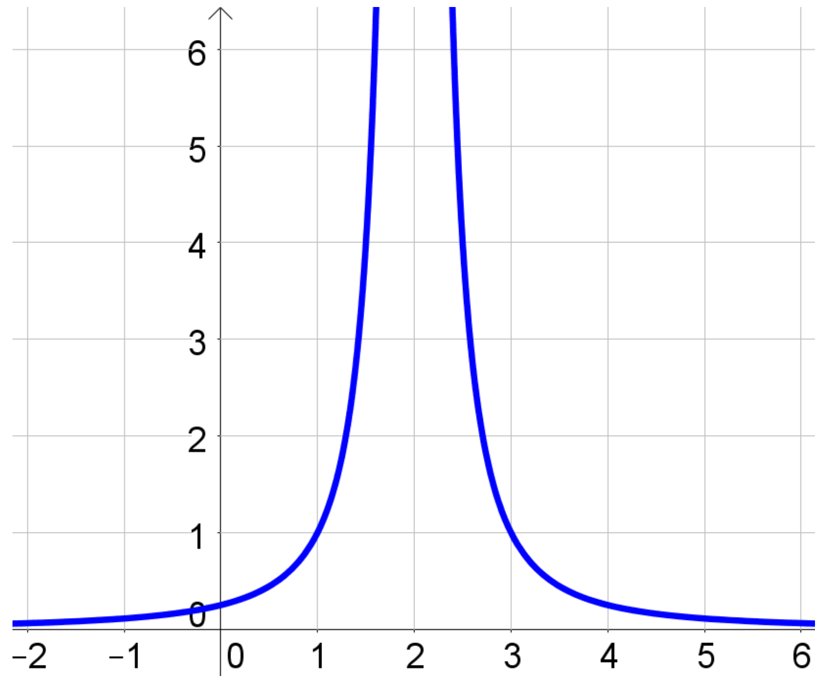
Beispiel:

Die verschobene Hyperbelfunktion

$$f(x) = 1/(x-2)^2$$

hat für $x \to 2$ den uneigentlichen Grenzwert ∞:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$



After explaining to a student through various lessons and examples that:

$$\lim_{x \to 8} \frac{1}{x-8} = \infty$$

I tried to check if she really understood that, so I gave her a different example. This was the result:

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{x-5} = 5$$

Funktionen ohne Grenzwert

Wenn der Graph eine **Sprungstelle** hat, sind dort der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert unterschiedlich. Die Funktion besitzt dort keinen Grenzwert.

Beispiel:

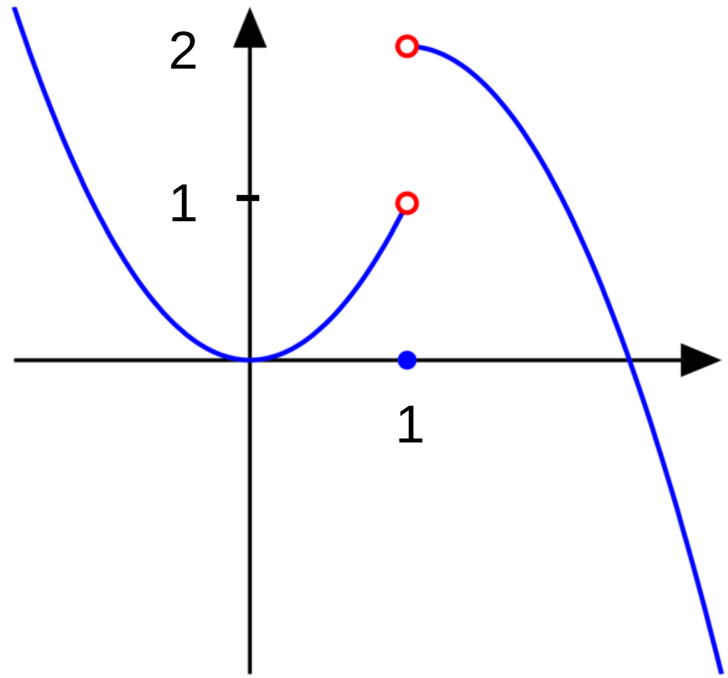
linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 1$$

rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 2$$

f(x) besitzt *keinen* Grenzwert für $x \to 1$.

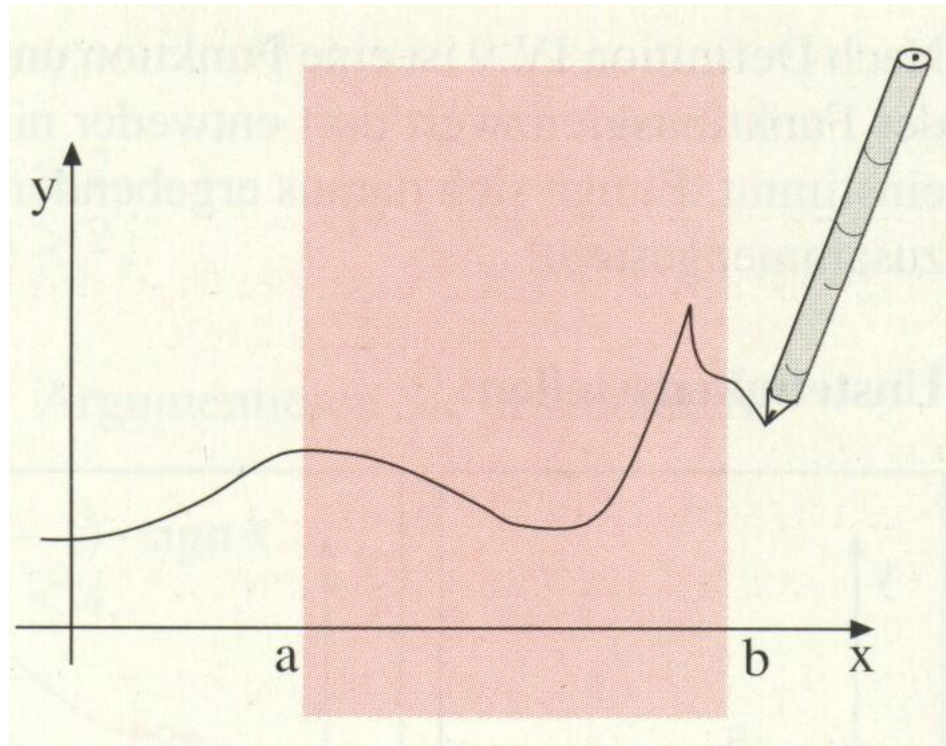


2.3 Stetigkeit von Funktionen

Stetigkeit anschaulich

Anschauliche Vorstellung:

Eine Funktion ist **stetig**, wenn man ihren Graph in einem Zug zeichnen kann, ohne den Stift absetzen zu müssen.



Stetigkeit

Definition. Eine Funktion f heißt **stetig an der Stelle x_0**, wenn folgende drei Bedingungen gelten:

(1.) f ist an x_0 definiert und

(2.) der Grenzwert von f an der Stelle x_0 existiert und

(3.) der Grenzwert ist gleich dem Funktionswert an der Stelle x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Die Funktion heißt **stetig auf einem Intervall** [a, b], wenn sie an jeder Stelle von [a, b] stetig ist. Sie heißt **stetig**, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig ist.

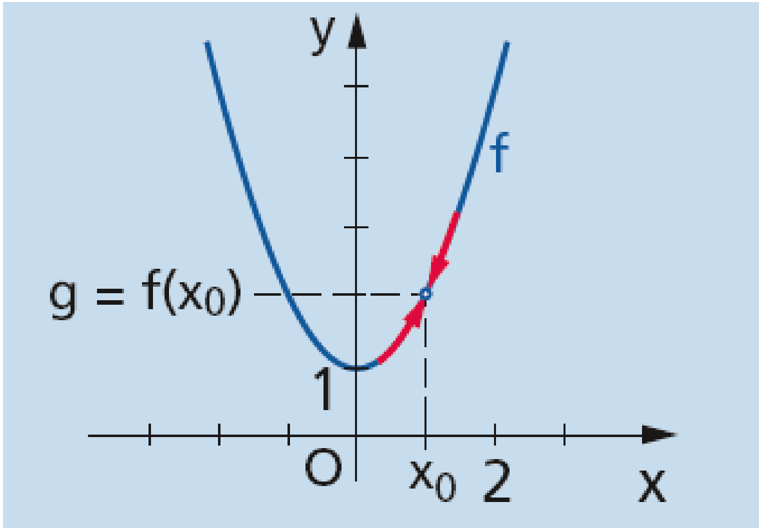
Beispiele

Beispiel: Die Funktion f(x) = x^2 + 1 ist an der Stelle x_0 = 1 stetig, denn der Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + 1) = 1 + 1 = 2$$

existiert und ist gleich dem Funktionswert

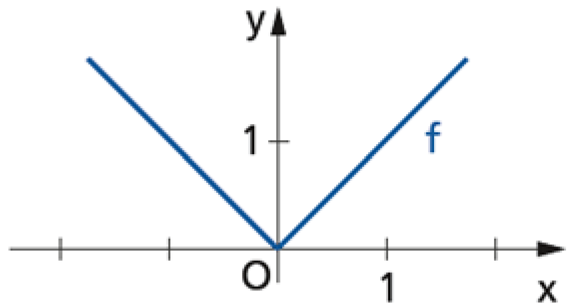
$$f(1) = 1^2 + 1 = 2.$$



Beispiele: Betragsfunktion und Sprungstelle

(a) Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig, denn

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

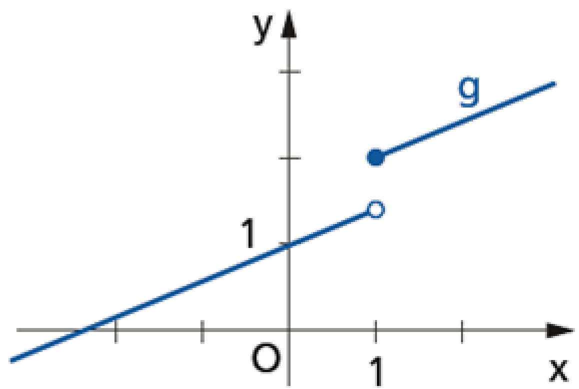


(b) Die abschnittsweise definierte Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

hat an der Stelle $x_0 = 1$ zwar einen Funktionswert $g(1) = 2$, aber keinen Grenzwert.

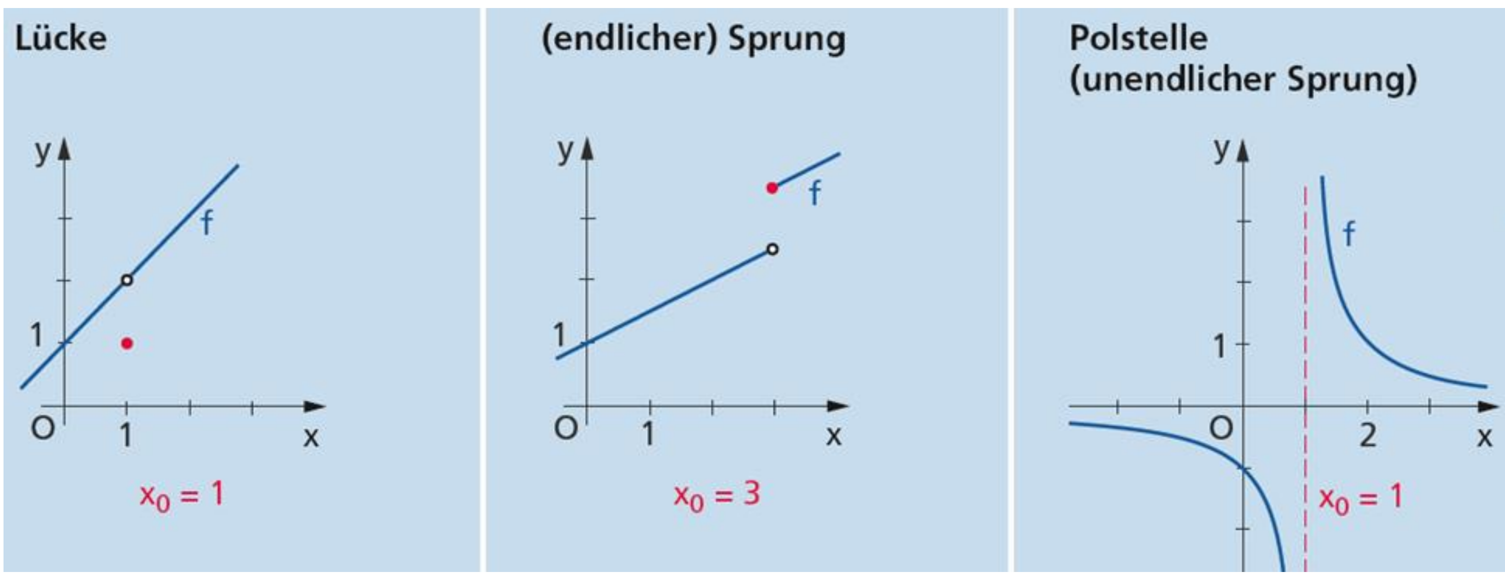
Sie ist an der Stelle 1 nicht stetig.



Unstetigkeitsstellen

Eine Stelle x_0 heißt **Unstetigkeitsstelle** einer Funktion f, wenn f in x_0 nicht definiert ist oder zwar in x_0 definiert, aber dort nicht stetig ist.

Beispiele:



Verknüpfung von stetigen Funktionen

Zum Glück sind die „gängigen“ Funktionen alle stetig:

Ganzrationale Funktionen, gebrochenrationale Funktionen, Wurzelfunktionen, trigonometrische Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen sind *auf ihrem Definitionsbereich* stetig.

Auch die Verknüpfung stetiger Funktion ist wieder stetig:

Wenn f und g stetige Funktionen sind, dann sind auch die Verknüpfungen $f \pm g$, $r \cdot f$ (mit $r \in \mathbf{R}$), $f \cdot g$, f / g und die Verkettung $f(g(x))$ stetige Funktionen.

Stetige Ergänzung

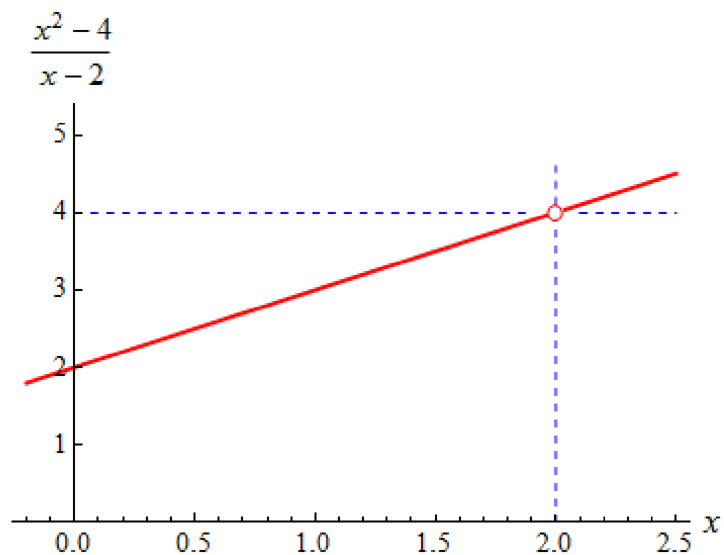
Beispiel: Die Funktion $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert, hat aber dort einen Grenzwert:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4.$$

Durch eine zusätzliche Definition kann diese Definitionslücke behoben werden:

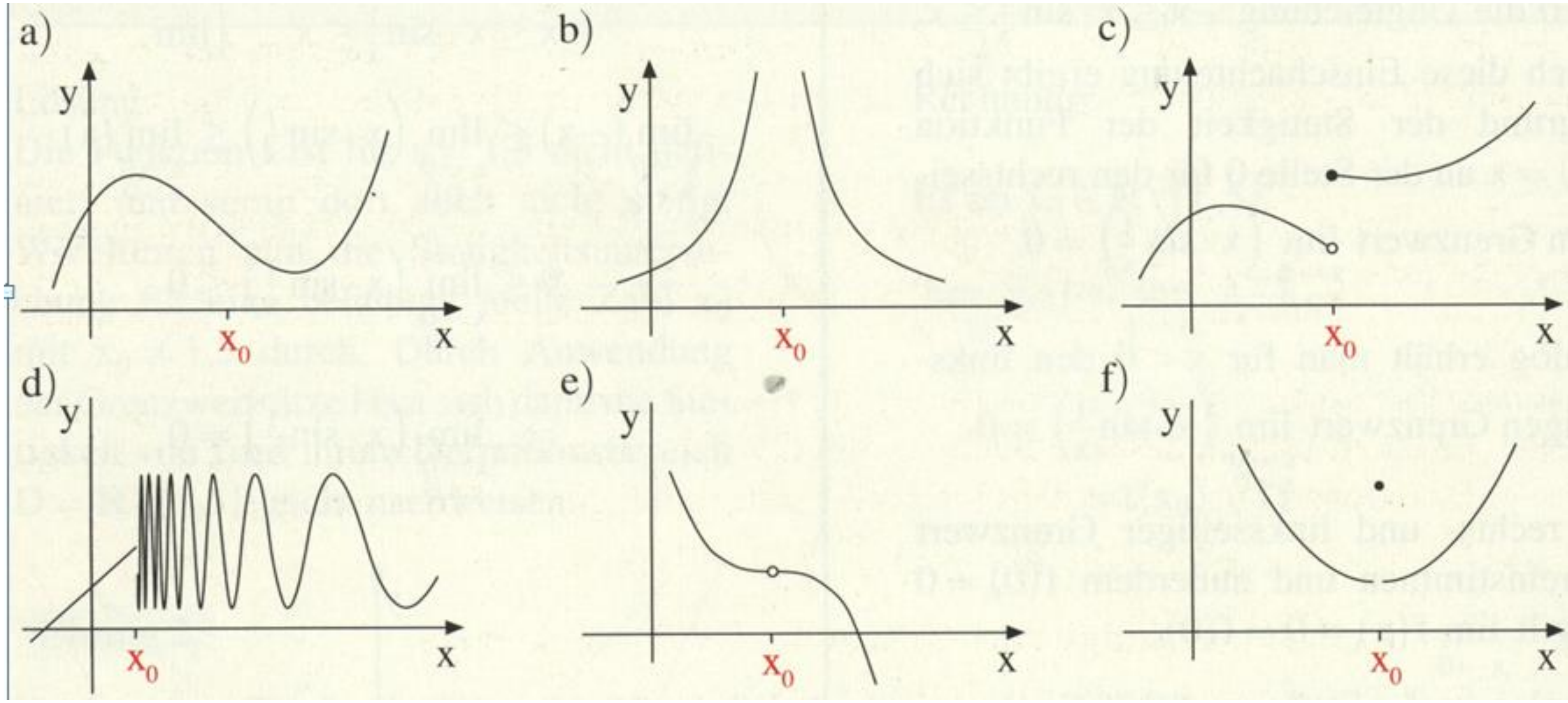
Die **stetige Ergänzung** von f(x) ist

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{für } x \neq 2 \\ 4 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$



Übung

Stetig in x_0?

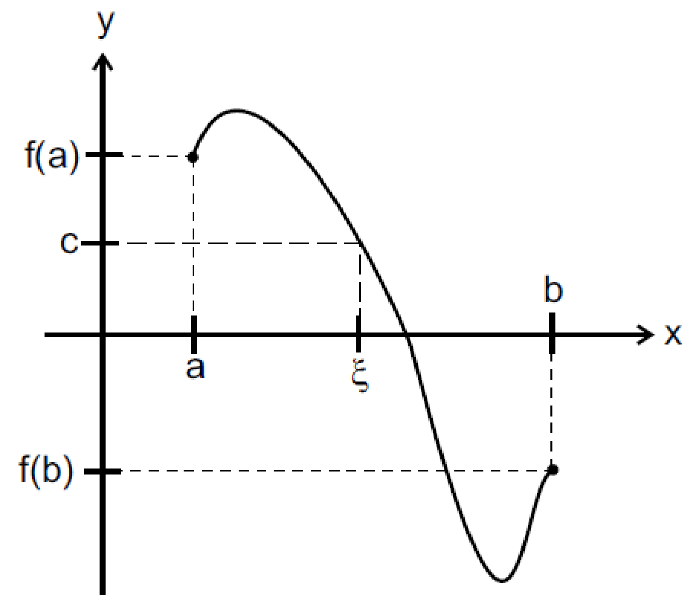


Zwischenwertsatz

Stetige Funktionen haben – da sie keine Sprünge machen oder Lücken haben – die schöne Eigenschaft, jeden „Zwischenwert“ zwischen zwei Funktionswerten anzunehmen.

Zwischenwertsatz: Sei f eine auf dem Intervall [a, b] stetige Funktion. Dann gibt es für jede Zahl c zwischen f(a) und f(b) mindestens eine Zahl $\xi \in (a, b)$ mit

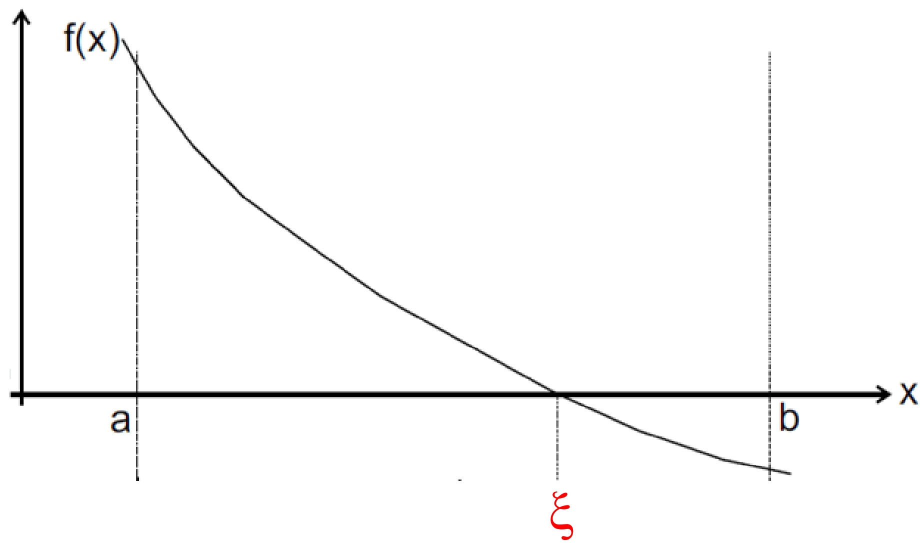
$$f(\xi) = c.$$



Nullstellensatz von Bolzano

Eine Folgerung aus dem Zwischenwertsatz ist der folgende

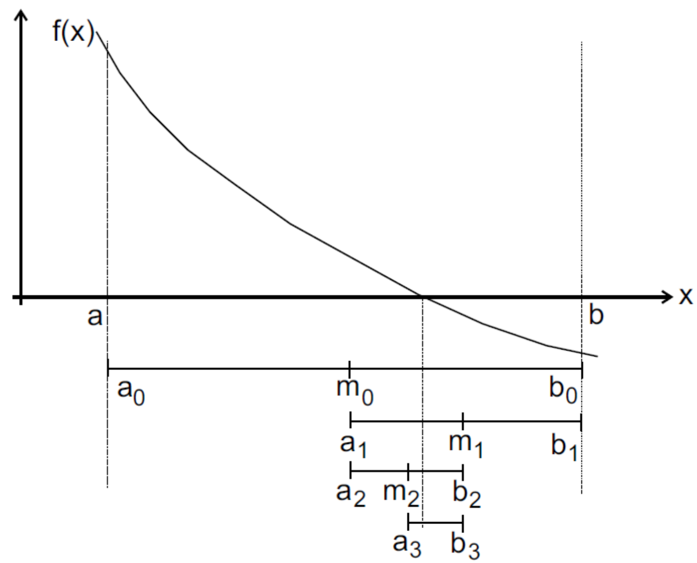
Nullstellensatz von Bolzano: Wenn f(a) und f(b) unterschiedliche Vorzeichen haben, dann hat f in [a, b] mindestens eine Nullstelle.



Bisektionsverfahren

Auf dem Nullstellensatz beruht das folgende **Bisektionsverfahren**, um eine Nullstelle einer stetigen Funktion numerisch zu bestimmen.

Start: Wähle zwei Startwerte a und b, deren Funktionswerte unterschiedliche Vorzeichen haben.

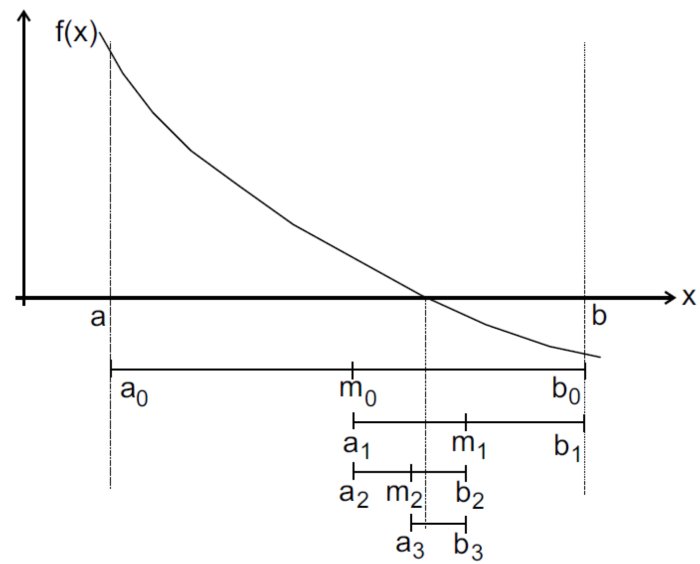


Idee: Teile das Intervall in der Mitte m.

- Wenn f(a) und f(m) unterschiedliche Vorzeichen haben, suche in der linken Hälfte weiter nach der Nullstelle.
- Sonst suche in der rechten Hälfte weiter.

Bisektionsverfahren

Etwas algorithmischer ausgedrückt:



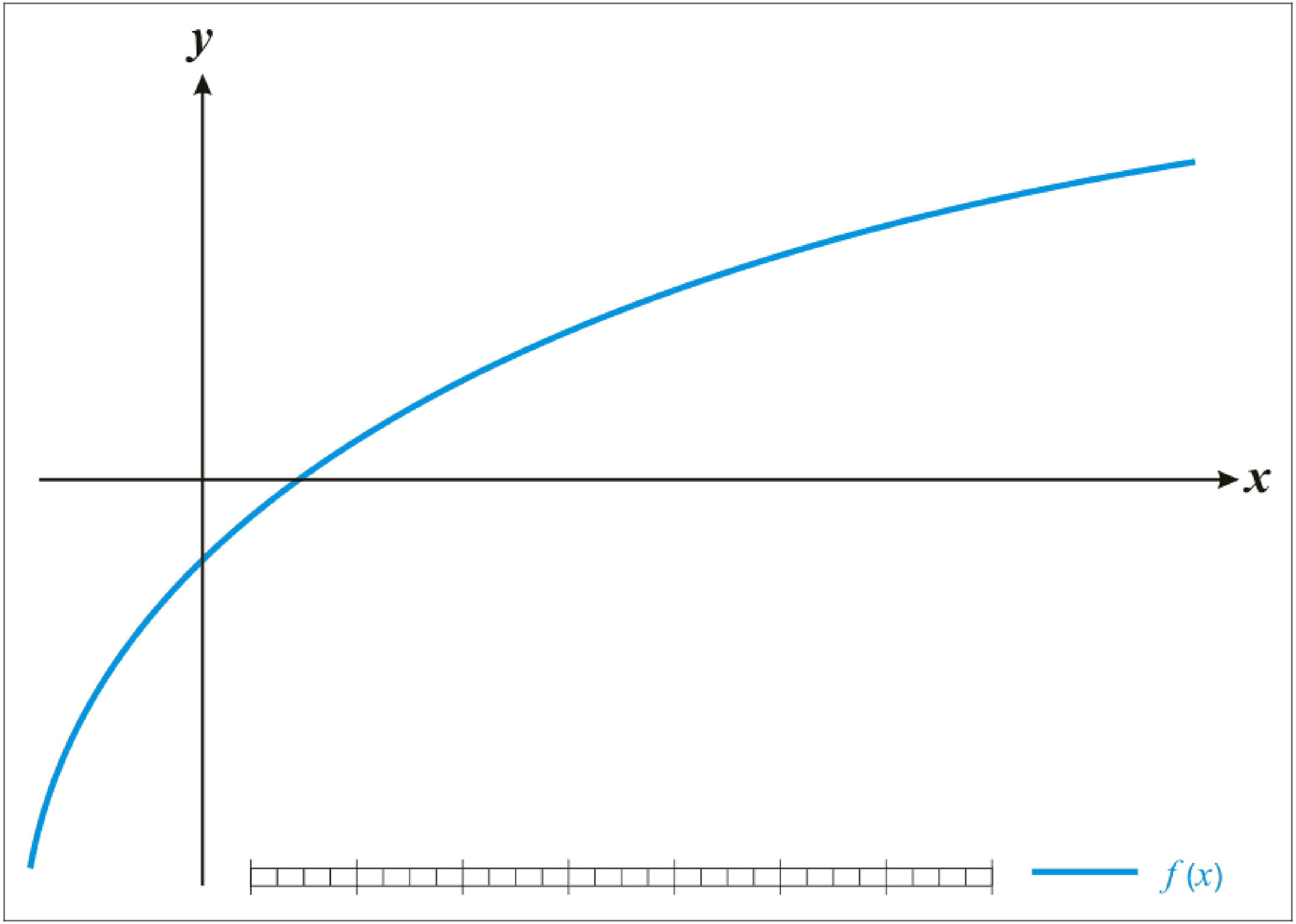
Start: Wähle zwei Startwerte $a = a_0$ und $b = b_0$ mit $\mathrm{sgn}(f(a)) \neq \mathrm{sgn}(f(b))$.

Wiederhole, bis $b_k - a_k < \varepsilon$ (vorgegebene Genauigkeit):

Berechne $m_k = (a_k + b_k)/2$.

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, m_k] & \text{falls } \mathrm{sgn}(f(a_k)) \neq \mathrm{sgn}(f(m_k)) \\ [m_k, b_k] & \text{sonst} \end{cases}$$

Bisektionsverfahren anschaulich



Beispiel

Gesucht ist eine Nullstelle des Polynoms $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 2x + 2$.

Startwerte: $a_0 = 0$ und $b_0 = 1$. (Dann haben $f(0) = 2$ und $f(1) = -1$ unterschiedliche Vorzeichen.)

Es ergeben Sie die folgenden Werte:

k	$[a_k, b_k]$
0	$[0, 1]$
1	$[0.5, 1]$
2	$[0.5, 0.75]$
3	$[0.5, 0.625]$
4	$[0.5625, 0.625]$

k	$[a_k, b_k]$
$\vdots$	$\vdots$
17	$[0.602249146, 0.602256775]$
18	$[0.602249146, 0.602252960]$
19	$[0.602249146, 0.602251053]$
20	$[0.602249146, 0.602250099]$

Nach 20 Iterationen sind 5 Nachkommastellen genau berechnet.

Bisektionsverfahren in Java

```
public double f(double x) {
  return 3*x*x*x - 4*x*x - 2*x + 2;               // Funktion f(x)
}

public void jButton1_ActionPerformed(ActionEvent evt) {
  double a = jNumberField1.getDouble();           // Eingabe Startintervall
  double b = jNumberField2.getDouble();
  double m;
  while (b-a>0.00001) {                           // Solange Intervall zu groß
    m = (a+b)/2;                                  // Berechne Mittelpunkt
    if (f(a)*f(m)<0) {                            // Untersuche Vorzeichen...
      b = m;                                      // nimm linkes bzw.
    } else {                                      // nimm rechtes Teilintervall
      a = m;
    }
    jTextArea1.append(String.valueOf(a)+"\n");    // Ausgabe eines Intervalls
    jTextArea2.append(String.valueOf(b)+"\n");
  }
}
```


Sie berühren sich im Unendlichen!
Wie romantisch!
y
x
KRIKI