Lösung - Serie 6

Aufgabe Quantenteleportation

Wir betrachten das Register $|x\rangle|a\rangle|b\rangle$ mit $|x\rangle$ im Zustand $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ und $|ab\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$.
Dieses befindet sich zu Beginn im Zustand

$$|\phi_0\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$
$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |011\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|100\rangle + |111\rangle)$$

Alice wendet im ersten Schritt CNOT: $|x\rangle|a\rangle \mapsto |x\rangle|a\oplus x\rangle$ an und es ergibt sich

$$|\phi_1\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\oplus 0\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\oplus 0\rangle|1\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|1\rangle|0\oplus 1\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\oplus 1\rangle|1\rangle)$$
$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |011\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|110\rangle + |101\rangle)$$

Im zweiten Schritt wird die Hadamard-Transformation auf $|x\rangle$ angewendet:

$$|\phi_2\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(H|0\rangle|00\rangle + H|0\rangle|11\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(H|1\rangle|10\rangle + H|1\rangle|01\rangle)$$
$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} H|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}} H|1\rangle(|10\rangle + |01\rangle)$$
$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)(|10\rangle + |01\rangle)$$
$$= \frac{\alpha}{2}(|000\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |111\rangle) + \frac{\beta}{2}(|010\rangle + |001\rangle - |110\rangle - |101\rangle)$$

Da im nächsten Schritt gemessen werden soll, stellen wir noch bzgl. der ersten beiden Qubits $|x\rangle|a\rangle$ (Alice' Qubits) um:

$$|\phi_2\rangle = \frac{1}{2}\Big(|00\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle) + |01\rangle(\beta|0\rangle+\alpha|1\rangle) + \\ + |10\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle) - |11\rangle(\beta|0\rangle-\alpha|1\rangle)\Big)$$

Alice misst im dritten Schritt und jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ergibt sich $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ oder $|11\rangle$.
Das dritte Qubit $|b\rangle$ (von Bob) geht dabei in einen an Alice' Ergebnis gekoppelten Zustand über. Wir beobachten

Alice' Ergebnis	Zustand von Bobs Qubit
$\|00\rangle$	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$
$\|01\rangle$	$\beta\|0\rangle+\alpha\|1\rangle$
$\|10\rangle$	$\alpha\|0\rangle-\beta\|1\rangle$
$\|11\rangle$	$-\beta\|0\rangle+\alpha\|1\rangle$

Ziel des Verfahrens ist es, $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ von Alice an Bob zu übertragen. Im vierten Schritt werden vier Fälle unterschieden:

1. Fall: Alice übermittelt $|00\rangle$. Dann ist Bobs Qubit bereits im Zustand $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ und er muss nichts mehr machen

2. Fall: Alice übermittelt $|01\rangle = |x\rangle|a\rangle$, d.h. $a=1$. Dann wendet Bob X an und erhält

$$X(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle) = \alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$$

3. Fall Alice übermittelt $|10\rangle = |x\rangle|a\rangle$, d.h. $x=1$.
Bob wendet nun Z an:

$$Z(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

4. Fall Alice übermittelt $|11\rangle$, d.h. $x=a=1$.
Bob wendet zuerst X an:

$$X(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

Anschließend wendet Bob Z an:

$$Z(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

Aufgabe 1

Bestimme $U: |x\rangle \otimes |x\rangle \longmapsto |x\rangle \otimes |\overline{x}\rangle \quad , x \in \{0,1\}$

Beobachtung: U soll auf dem ersten Qubit die Identität sein und auf dem zweiten Qubit die Negation.

Nach Serie 1, Aufgabe 2 wissen wir

$$X|0\rangle = |1\rangle = |\overline{0}\rangle,$$
$$X|1\rangle = |0\rangle = |\overline{1}\rangle, \quad \text{für } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also folgt

$$U = I_2 \otimes X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

U ist eine Permutationsmatrix, also unitär.

Ein Vergleich mit CNOT: $|\beta\rangle \otimes |x\rangle \longmapsto |\beta\rangle \otimes |\beta \oplus x\rangle$
für $\beta = 1$ zeigt

$$|1\rangle \otimes |x\rangle \xmapsto{\text{CNOT}} |1\rangle \otimes |x \oplus 1\rangle = |1\rangle \otimes |\overline{x}\rangle$$

Aufgabe 2

Betrachte $\mathrm{CNOT}_2 : |x, y\rangle \longmapsto |x \oplus y, y\rangle$

zu (i) Es gilt

$$\mathrm{CNOT}_2 : \begin{cases} |0\rangle|0\rangle \longmapsto |0\rangle|0\rangle \\ |0\rangle|1\rangle \longmapsto |1\rangle|1\rangle \\ |1\rangle|0\rangle \longmapsto |1\rangle|0\rangle \\ |1\rangle|1\rangle \longmapsto |0\rangle|1\rangle \end{cases}$$

und damit

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} |00\rangle & |01\rangle & |10\rangle & |11\rangle \end{array} \\ \begin{array}{c} |00\rangle \\ |01\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = A_{\mathrm{CNOT}_2}$$

A_{CNOT_2} ist eine Permutationsmatrix, also unitär.

zu (ii) In dem abgebildeten Register $R = |q_2 q_1 q_0\rangle$ wird auf $|q_2\rangle$ die Identität I_2 und auf $|q_1 q_0\rangle$ das CNOT_2 angewendet, d.h. die Transformation ist

$$I_2 \otimes A_{\mathrm{CNOT}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes A_{\mathrm{CNOT}_2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu (iii) $R = |q_2 q_1 q_0\rangle$ mit $|q_2\rangle = |1\rangle$ und

$|q_1 q_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle$

Entsprechend der Schaltung ist

$$(H \otimes A_{CNOT_2})|q_2 q_1 q_0\rangle =$$

$$= H|1\rangle \otimes A_{CNOT_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}|000\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|010\rangle$$

$$- \frac{1}{2}|100\rangle - \frac{1}{2\sqrt{2}}|111\rangle - \frac{1}{2\sqrt{2}}|110\rangle$$