Prof. Dr. R. Dörner
Graphische Datenverarbeitung u. Virtuelle Realität
FH Wiesbaden

Matrizenrechnung - Formelsammlung

1. Begriff

Eine Matrix (Mehrzahl: Matrizen) ist ein rechteckig angeordnetes Schema von Zahlen. Die Beispielmatrix *A*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4{,}5 & 2 & \sqrt{2} \\ 7 & 4 & 8 & 122 \end{bmatrix}$$

besteht aus 2 Zeilen und 4 Spalten. Die Skalare (einzelnen Zahlen) in der Matrix heißen Einträge.

2. Matrizen und Vektoren

Ein Vektor kann als ein Spezialfall einer Matrix aufgefasst werden, die nur eine Spalte hat. Ein 3D Vektor beispielsweise ist eine Matrix mit 3 Zeilen und einer Spalte:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Addition von Matrizen

Zwei Matrizen werden addiert, indem die jeweils entsprechenden Einträge addiert werden. Haben die beiden zu addierenden Matrizen nicht die gleiche Zeilen und Spaltenzahl, dann können sie nicht addiert werden. Beispiel:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Bei der Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar ("einfache Zahl") wird jeder Eintrag der Matrix mit dem Skalar multipliziert. Beispiel:

$$k \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4{,}5 & 2 & \sqrt{2} \\ 7 & 4 & 8 & 122 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 & 2\sqrt{2} \\ 14 & 8 & 16 & 244 \end{bmatrix}$$

5. Multiplikation einer Matrix mit einer Matrix

Matrizen können nicht multipliziert werden, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix nicht gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix ist. Beispiel:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g & j \\ h & k \\ i & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ag + bh + ci & aj + bk + cl \\ dg + eh + fi & dj + ek + fl \end{bmatrix}$$

6. Rechenregel für die Multiplikation von Matrizen

Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ, d.h. für zwei Matrizen A und B kann gelten: $A \cdot B \neq B \cdot A$. Man unterscheidet daher eine "Multiplikation von links" von einer "Multiplikation von rechts".

7. Multiplikation einer quadratischen Matrix mit einem Vektor

Multipliziert man eine quadratische Matrix (d.h. Anzahl Zeilen = Anzahl Spalten) mit einem Vektor passender Größe, erhält man einen Vektor derselben Dimension. So realisiert im Beispiel die Matrix eine Rotation um die x-Achse um den Winkel φ: multipliziert man einen Vektor mit dieser Matrix, so erhält man die Koordinaten des gedrehten Vektors.

$$A \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \vec{v}\,'$$

8. Die Einheitsmatrix

Die Einheitsmatrix ist eine quadratische Matrix (d.h. Anzahl Zeilen = Anzahl Spalten), die auf der Hauptdiagonalen nur Einsen, in allen anderen Einträgen Nullen stehen hat. Die Multiplikation einer Matrix mit der Einheitsmatrix ändert die Matrix nicht (ähnlich wie die Multiplikation einer Zahl mit 1 die Zahl nicht verändert). Beispiel: Einheitsmatrix für Anzahl Zeilen = Anzahl Spalten = 3:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Die inverse Matrix

Die inverse Matrix A^{-1} ist die Matrix, die mit der Matrix A von rechts multipliziert die Einheitsmatrix ergibt.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

10. Rechenregel für inverse Matrizen

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

11. Die transponierte Matrix

Die transponierte Matrix A^Terhält man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten. Beispiel:

$$A^{T} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

12. Rechenregel für transponierte Matrizen

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

13. Orthogonale und orthonormale Matrizen

Eine quadratische Matrix ist orthogonal, wenn man sich zwei beliebige Zeilenvektoren (oder zwei beliebige Spaltenvektoren) nehmen kann und diese miteinander multipliziert null ergeben. Eine orthogonale Matrix ist orthonormal, wenn alle Zeilenvektoren und Spaltenvektoren die Länge 1 haben. Ein wichtiges Beispiel ist eine Rotationsmatrix (siehe 7.). Sie ist orthonormal.

14. Rechenregel für orthogonale Matrizen

Orthogonale Matrizen lassen sich besonders leicht durch Transposition invertieren, denn bei ihnen ist die inverse Matrix und die transponierte Matrix gleich.