Kap. 4: Grundlagen der Codierung

Quellen

- M. Broy: "Informatik - Eine grundlegende Einführung", Teil II, Springer-Verlag, 1992 (Kap. 1)
- U. Rembold, P. Levi: "Einführung in die Informatik für Naturwissenschaftler und Ingenieure", 3. Auflage, Hanser-Verlag, 1999 (Kap. 2.1.)
- D. Werner u.a.: "Taschenbuch der Informatik", Fachbuchverlag Leipzig, 1995 (Kap. 2.2)
- F. Mayer-Lindenberg: "Konstruktion digitaler Systeme", Vieweg-Verlag, 1998 (Kap. 2)
- J. Plate: "Modem-Technik", Skript FH München, 1998
- H. Dispert, H.-G. Heuck: "Einführung in die Technische Informatik und Digitaltechnik", Vorlesungsskript FH Kiel, © 1995 (Kap. 8.7), http://www.e-technik.fh-kiel.de/~dispert/digital/digital/dig0_00.htm
- W. Görke: "Fehlertolerante Rechensysteme", Oldenbourg Verlag, 1989 (Kap. 4.1)

4.1 Einführung

Wiederholung (Kap. 2.4):

- *Codes* oder *Codierungen* sind Abbildungen $c:A \to B$ oder $c:A^* \to B^*$ zwischen Zeichenvorräten A und B oder zwischen Wörtern über Zeichenvorräten.
- Die Bildmenge $\{b \in B \mid b=c(a), a \in A\}$ unter c, d.h. die Menge der Codewörter von c, wird ebenfalls *Code* genannt.
- Die Ausgangszeichen heißen auch *Klarzeichen*, die Zielelemente *Codezeichen* und *Codewörter*.
- Besteht der Definitionsbereich einer Codierung aus Einzelzeichen, so heißt die Codierung auch *Chiffrierung* und die Bildmenge auch *Chiffren*.
- Eine Codierung erlaubt für dieselbe betrachtete Information den Übergang von Zeichen und Wörtern eines gegebenen Repräsentationssystems zu Zeichen und Wörtern eines neuen Repräsentationssystems.

Weitere Begriffe

- **In der Regel ist die Abbildung eines Codes injektiv, d.h. verschiedene Zeichen oder Wörter werden auf verschiedene Codewörter abgebildet. Damit ist die auf der Bildmenge umkehrbare Codierung beschrieben durch eine Abbildung**

  $$d: \{b \in B \mid b=c(a), a \in A\} \rightarrow A,$$

  die *Decodierung* genannt wird.
- **Codierung wird auch als *Verschlüsselung*, Decodierung als *Entschlüsselung* bezeichnet.**
- **Für die Informationsdarstellung in Rechensystemen werden fast ausschließlich *Binär-Codierungen (Binär-Codes) von Alphabeten* betrachtet. Dies sind Codierungen der Form**

  $$c: A \rightarrow \{0,1\}^*,$$

  wobei *A* ein vorgegebenes Alphabet ist.
- **Beispiele (vgl. Kap. 3):**
  Codierung ganzer Zahlen, Gleitkommazahlen, Text/Zeichenketten

Ziele von Codierungen

- **Funktionalität**
  - Repräsentationssysteme zur Speicherung, Verarbeitung und Übertragung von Information
  - Umkehrbarkeit (Decodierbarkeit)
  - Ordnungserhaltung nach Codierung (z.B. für Sortierung)
  - Änderung an nur einer Stelle beim Übergang zum nächsten Zahlenwert (Korrektheit bei Messwerterfassung)
- **Effizienz**
  - übersichtliche und wenig aufwändige Codierungsfunktion
  - einfache und wirtschaftliche Verarbeitung in der neuen Repräsentierung
  - einfache Komplementbildung (für Arithmetik)
  - einfache Realisierung arithmetischer Operationen
  - möglichst kurze Codewörter; Reduktion von Speicherbedarf, Übertragungszeit, Energiekosten usw.

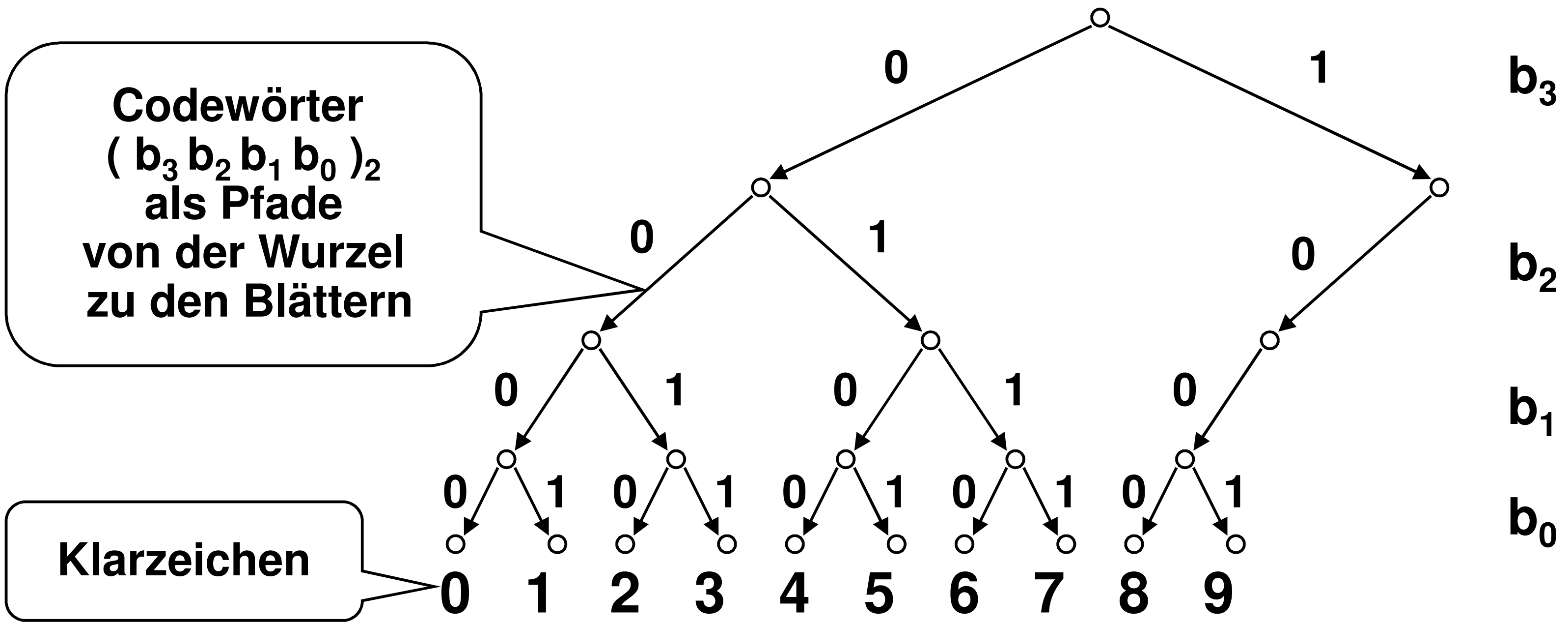
Ziele von Codierungen (2)

- Effizienz (Forts.)
  - Beispiele:
    - Codierung und Arithmetik ganzer Zahlen (vgl. Kap. 3.3)
    - UTF-8-Codierung von Unicode-Zeichen (vgl. Kap. 3.4.6)
- Sicherung gegen Verfälschung
  - Fehler können zu Veränderungen der Repräsentierung von Information während der Speicherung und Übertragung führen (Störung) !
  - Erkennen von Fehlern in "geringfügig" gestörten Codewörtern
  - Erkennen von Verarbeitungsfehlern
  - automatische Korrektur fehlerhafter Codewörter ohne Informationsverlust (korrekte Decodierung)
  - Maßnahmen konkurrieren mit Effizienz
- Geheimhaltung von Information
  - Verschlüsselung (kryptographische Methoden)

Codebaum

Def

- Jeder Binär-Code kann graphisch durch einen ***binären Codebaum*** dargestellt werden:
  - jeder Stelle im Codewort wird eine Schicht im Baum zugeordnet
  - jedem Binärwert wird ein linker und ein rechter Unterbaum zugeordnet
- Beispiel (Codebaum des BCD-Codes):



4.2 Blockcodes

Def

- Ein Code $c:A \rightarrow B^n$, dessen Codewörter alle die gleiche Länge n besitzen, heißt *(n-stelliger)* ***Blockcode***.
- Die Anzahl der möglichen Codewörter eines Blockcodes $c:A \rightarrow B^n$ beträgt $|B|^n$.
- Ein n-stelliger Blockcode $c:A \rightarrow B^n$ heißt ***dicht***, wenn c surjektiv ist, d.h. wenn alle $b \in B^n$ Codewörter unter c darstellen.
- Binäre Blockcodes $c:A \rightarrow \{0,1\}^n$ sind für Rechensysteme besonders geeignet, da die Codewörter n-Bit-Maschinenwörtern entsprechen.
- Ist $|A|=m$, d.h. A besteht aus m Zeichen, so benötigt man für einen binären Blockcode $c:A \rightarrow \{0,1\}^n$ mindestens $n = \lceil \log_2 m \rceil$ Stellen. ($\lceil x \rceil$ bedeutet "kleinste ganze Zahl größer gleich x".)

Beispiele

- Die Codierung ganzer Zahlen in 2er-Komplement-Darstellung in n-Bit-Maschinenwörtern (vgl. Kap. 3.3.3) stellt einen binären, dichten Blockcode dar.
- Der ASCII-Code ist ein dichter 7-Bit Blockcode.
- Die BCD-Codierung von Dezimalziffern in 4-Bit Nibbles (vgl. Kap. 3.3.4) ist nicht dicht.
- Die Anzahl der möglichen Codewörter in einem n-Bit-Maschinenwort beträgt 2^n.
- Zur Codierung der 10 Dezimalziffern in einem binären Blockcode benötigt man mindestens $n = \lceil \log_2 10 \rceil = 4$ Stellen.

Gewichtete Codes

Def

- Ein binärer Blockcode $c: A \rightarrow \{0,1\}^n$ zur Codierung von Zahlen heißt ***gewichtet*** oder ***bewertbar***, wenn den Stellen der Codewörter Gewichte W_i zugeordnet sind und sich der Wert der dargestellten Zahl z ergibt zu

$$z = \sum_{i=1}^{n} b_i W_i \quad ,$$

wobei $b_i \in \{0,1\}$, $i=1,\ldots,n$ die den Gewichten in der Codierung von z zugeordneten binären Ziffern entsprechen.

Andernfalls heißt der Code *Anordnungscode*.

Beispiele: gewichtete BCD-Codes

	üblicher BCD-Code	51111-Code
W_i	$2^3 2^2 2^1 2^0$	5 1 1 1 1
0	0 0 0 0	0 0 0 0 0
1	0 0 0 1	0 0 0 0 1
2	0 0 1 0	0 0 0 1 1
3	0 0 1 1	0 0 1 1 1
4	0 1 0 0	0 1 1 1 1
5	0 1 0 1	1 0 0 0 0
6	0 1 1 0	1 1 0 0 0
7	0 1 1 1	1 1 1 0 0
8	1 0 0 0	1 1 1 1 0
9	1 0 0 1	1 1 1 1 1

Beispiele: gewichtete BCD-Codes (2)

	Aiken-Code			
W_i	2	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	0	1
8	1	1	1	0
9	1	1	1	1

- Pseudotetraden liegen in der Mitte
- selbstkomplementierend (Vertauschen 0-1 ergibt Komplement)
- monoton wachsend
- Rundungserkennung (>=5, <5) am vordersten Bit
- Übertrag stimmt mit Dezimalübertrag überein

Beispiele: gewichtete BCD-Codes (3)

	2-aus-5-Code
W_i	7 4 2 1 0
0	1 1 0 0 0
1	0 0 0 1 1
2	0 0 1 0 1
3	0 0 1 1 0
4	0 1 0 0 1
5	0 1 0 1 0
6	0 1 1 0 0
7	1 0 0 0 1
8	1 0 0 1 0
9	1 0 1 0 0

- bis auf die Null monoton wachsend
- fehlererkennend (für alle 1-Bit-Fehler)
- Einsatz: Strichcode (5 Striche: 3 schmal, 2 breit) (Postleitzahlencodierung)

Beispiele: gewichtete BCD-Codes (4)

W_i	1-aus-10-Ring-Code 9876543210
0	0000000001
1	0000000010
2	0000000100
3	0000001000
4	0000010000
5	0000100000
6	0001000000
7	0010000000
8	0100000000
9	1000000000

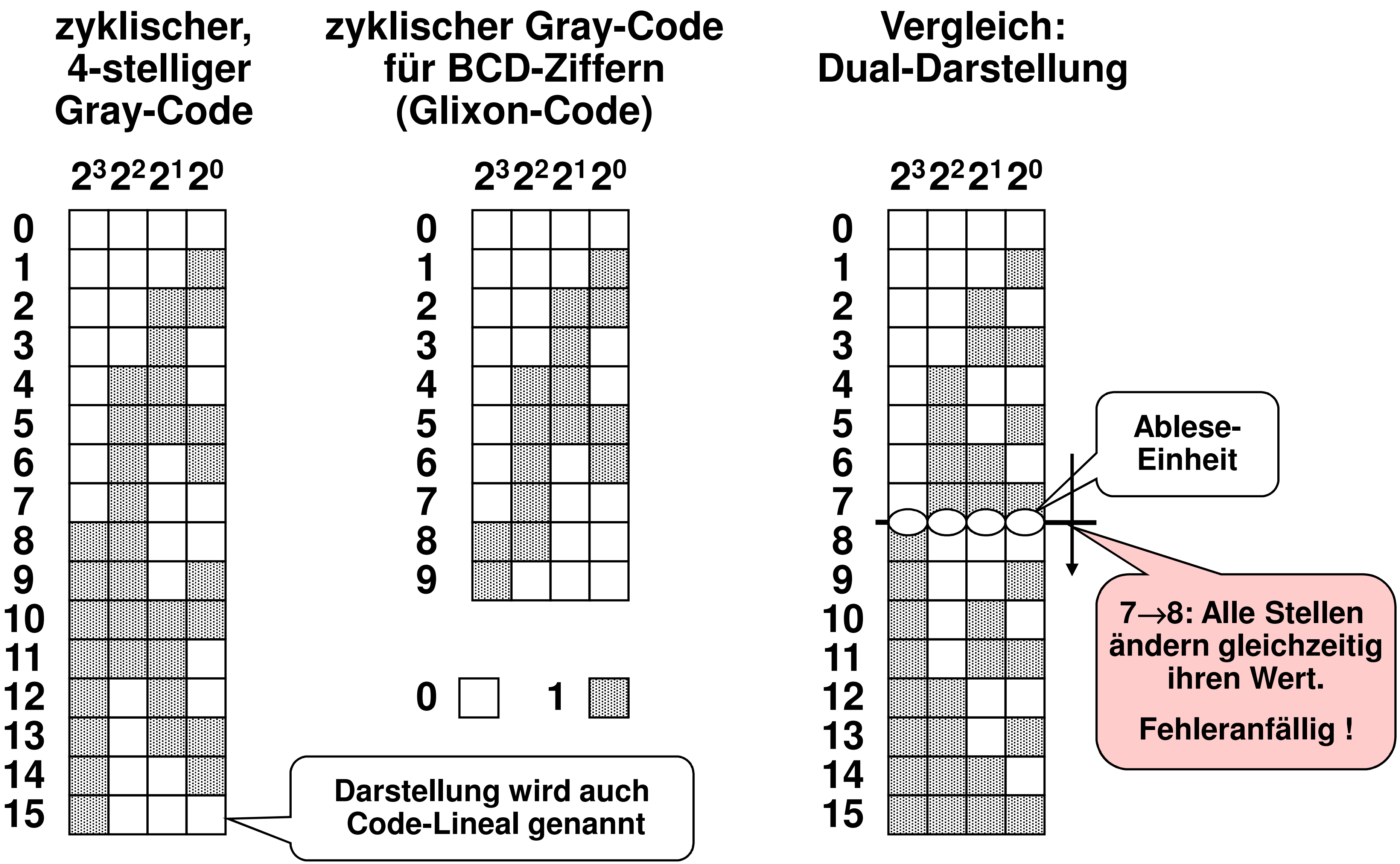
- monoton wachsend
- sehr übersichtlich
- großer Aufwand
- Einsatz: Anzeigen, numerische Tastaturen

Gray-Code

Def

- Sei A ein Alphabet. (Damit ist eine lineare Ordnung auf A definiert.) Ein binärer Blockcode $c: A \rightarrow \{0,1\}^n$ heißt ***Gray-Code*** oder ***einschrittiger Code***, wenn sich die Codierungen zweier in der Ordnung aufeinander folgender Zeichen in A stets in genau einer Bit-Stelle unterscheiden.
- Unterscheiden sich die Kodierung des ersten und des letzten Zeichens von A ebenfalls nur in einer Stelle, so spricht man von einem ***zyklischen Gray-Code***.
- Gray-Codes besitzen wegen ihrer Einschrittigkeit eine hohe Bedeutung bei der Messwerterfassung, z.B. bei der Analog/Digital-Wandlung in Drehwinkelgebern, da sie inkorrekte Messergebnisse vermeiden.

Beispiele

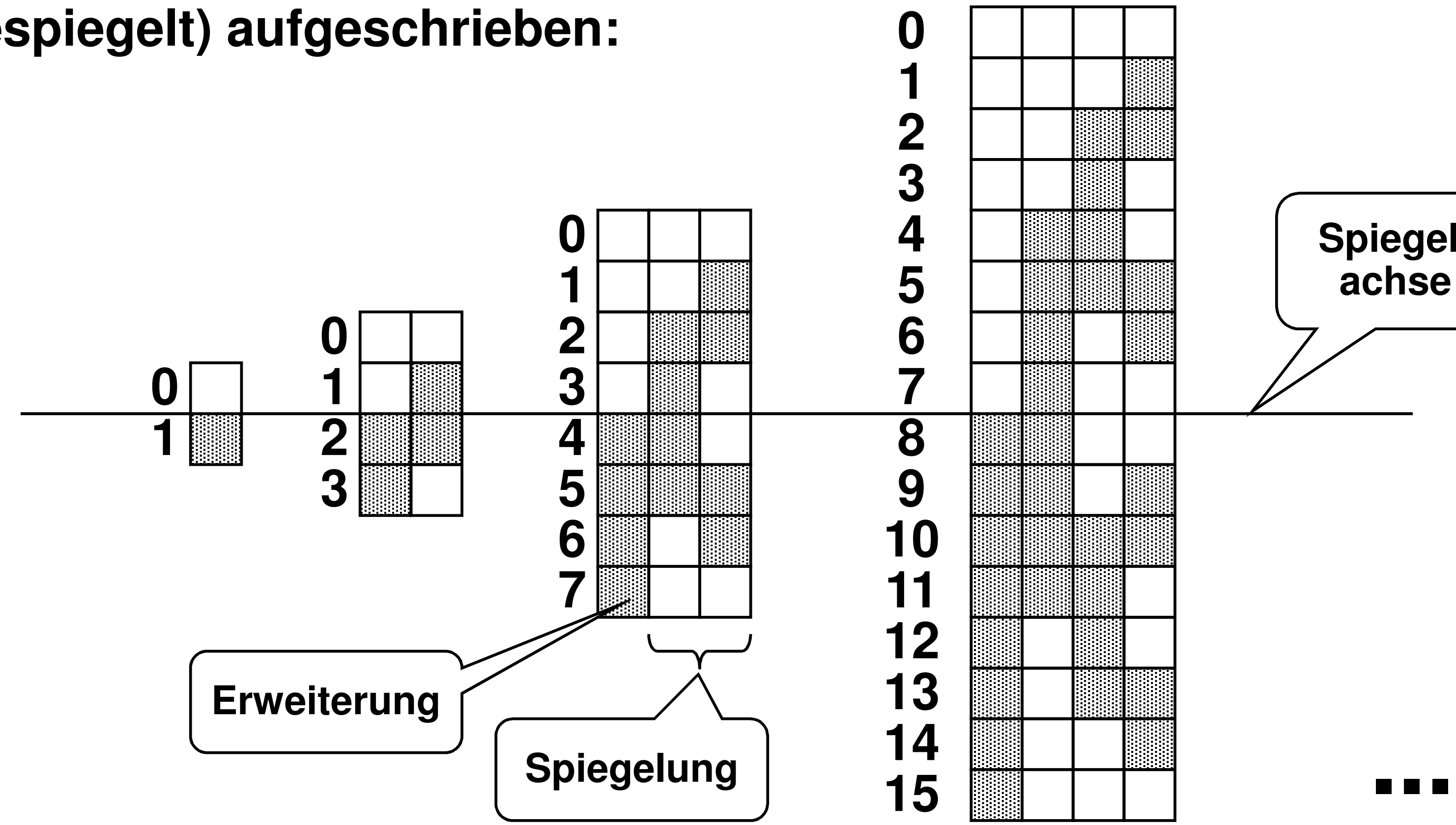


zyklischer, 4-stelliger Gray-Code
zyklischer Gray-Code für BCD-Ziffern (Glixon-Code)
Vergleich: Dual-Darstellung
$2^3\,2^2\,2^1\,2^0$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
0 1
Darstellung wird auch Code-Lineal genannt
Ablese-Einheit
7→8: Alle Stellen ändern gleichzeitig ihren Wert.
Fehleranfällig !

Bildung des n-stelligen Gray-Codes

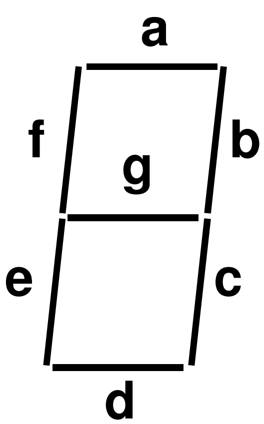
- **Bildungsgesetz (rekursiv):**
  - **0 und 1 werden mit den Dualzahlen 0 und 1 codiert.**
  - **Wenn eine neue Stelle gebraucht wird, wird sie mit 1 besetzt.**

    In den folgenden Stellen wird die bisherige Codierung rückwärts (gespiegelt) aufgeschrieben:



Blockcodes für spezielle Aufgaben

- **Beispiel: 7-Segment-Code für Dezimalziffern-Anzeigen:**



	a	b	c	d	e	f	g
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	1
3	1	1	1	1	0	0	1
4	0	1	1	0	0	1	1
5	1	0	1	1	0	1	1
6	1	0	1	1	1	1	1
7	1	1	1	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	0	1	1

4.3 Codes variierender Länge

Def

- Ein Code $c:A \rightarrow B^*$, dessen Codewörter verschiedene Längen besitzen können, heißt *variabel langer Code* oder *Code variierender Länge*.
- Beispiel (Impulswahlverfahren des Fernsprechsystems):

  $c:\{0, ..., 9\} \rightarrow \{O,L\}^*$

Ziffer	Code
1	LO
2	LLO
3	LLLO
4	LLLLO
5	LLLLLO
6	LLLLLLO
7	LLLLLLLO
8	LLLLLLLLO
9	LLLLLLLLLO
0	LLLLLLLLLLO

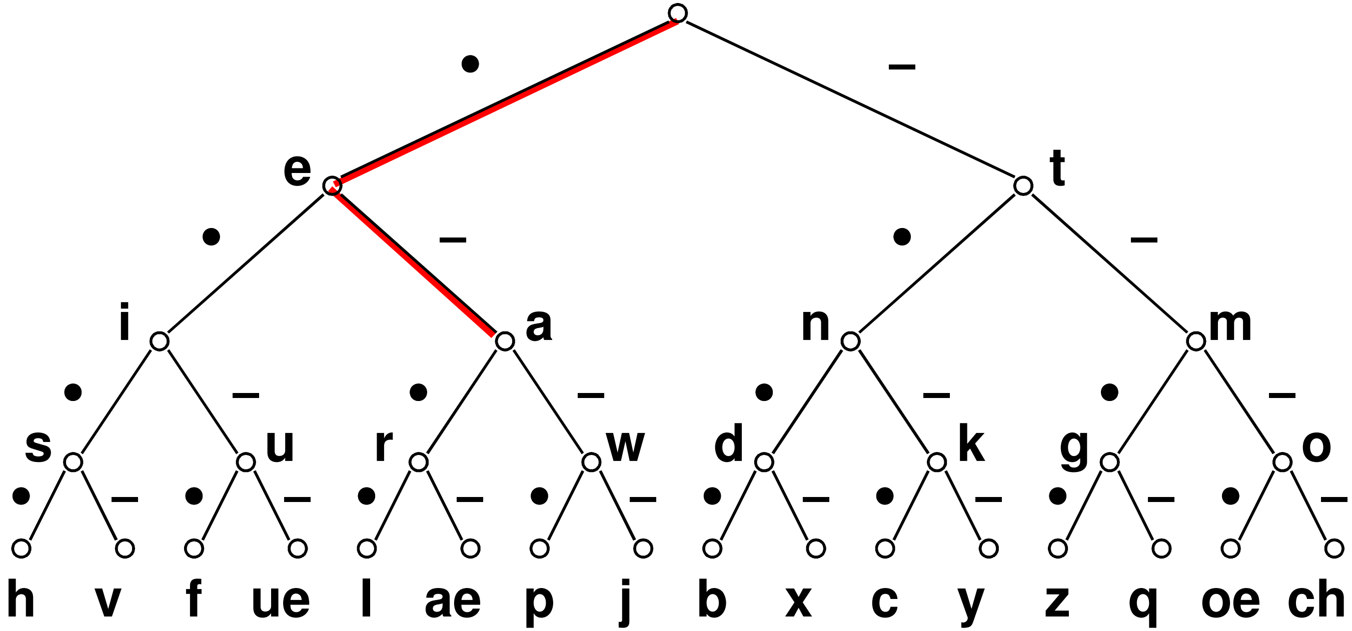
Codes variierender Länge in Rechensystemen

- **In heutigen Rechensystemen sind Codes variierender Länge für elementare Datentypen aufgrund der Maschinenwort-Struktur nicht sehr gebräuchlich.**

- **Beispiele:**
  - **Codierung von Maschinenbefehlen**
    - **z.B. 2, 4 oder 6 Bytes lange Befehle in IBM /360-Architektur**
    - **Bit-variabel lange Befehle im Prozessor Intel iAPX 432**
  - **UTF-8-Codierung von Unicode-Zeichen in 1, 2, …, 6 Bytes (vgl. Kap. 3.4.6)**
  - **Bitstream-Codierung in Abstract Syntax Notation One (ASN.1)**
    - **ASN.1: Eine formale Sprache zur abstrakten Beschreibung von Nachrichten für den Austausch zwischen Anwendungen.**
    - **Siehe auch** http://www.itu.int/ITU-T/asn1/
    - **Plattform-unabhängig, kompakt, schnell – und grundlegend.**

Beispiel: Morse-Code

- **Ausschnitt als Codebaum:**



• **kurz**
– **lang**

⇒ **Häufig vorkommende Schriftzeichen besitzen kurze Codewörter.**

Zur korrekten Decodierung wurde zur Trennung der Codewörter ein drittes Codezeichen "Pause" (□) eingeführt.

Beispiel: • – : a   • □ – : e t   • □ • • □ – – □ • □ • – • □: e i m e r

Fano-Bedingung

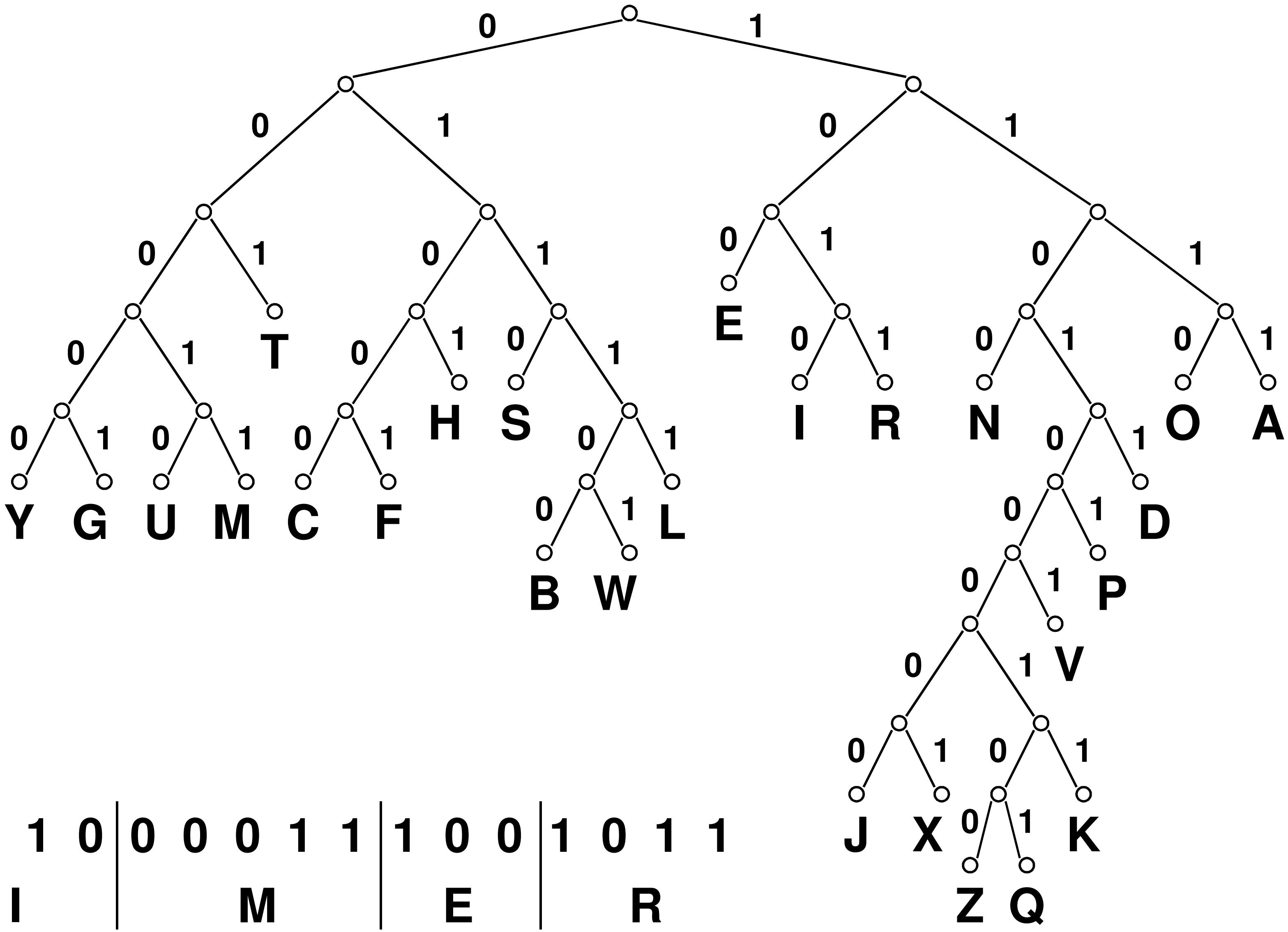
- **Vorteil von Codes variierender Länge:**
  Häufig vorkommende Zeichen aus A können durch kurze Codewörter dargestellt werden.
- **Problem:**
  Trennen der Codewörter voneinander ist schwieriger.
- **Die Eindeutigkeit der Decodierung eines Codes variierender Länge ist gegeben, wenn der Code die sogenannte *Fano-Bedingung* erfüllt: <u>Kein Codewort ist Präfix</u> (Anfangsstück) <u>eines anderen Codewortes</u>.**

Def

- **Bemerkungen:**
  - **Die Fano-Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass <u>im Code-baum zu codierende Zeichen nur als Blätter</u> des Baumes auftreten.**
  - **Codes mit erfüllter Fano-Bedingung heißen auch *präfixfrei*.**

Beispiel

Huffman-Code für das engl. Alphabet als präfixfreier Binär-Code variierender Länge



1 0 0	1 0 1 0	0 0 0 1 1	1 0 0	1 0 1 1
E	I	M	E	R

Beispiel (2)

- Jeder Blockcode der Länge n erfüllt die Fano-Bedingung automatisch. Zur Decodierung werden jeweils Blöcke von n Codezeichen gebildet und decodiert.

  Beispiel: BCD-Codierung der dezimalen Ziffern in Tetraden.

- Der Morse-Code erfüllt die Fano-Bedingung <u>nicht</u>.
  Zur sicheren Decodierung verwendet er ein Trennzeichen zwischen Codewörtern.

4.4 Komprimierende Codes

- Ziele komprimierender Codes
  - Reduktion der Länge der Repräsentierung von Information durch Kompression
  - Kostenersparnis
- Anwendungsbereich:
  Speicherung und Übertragung von Information.
- Hier besprochen:
  Verlustfreie Codierungen, die eine vollständige und korrekte Decodierung ermöglichen (z.B. für Text, Programme usw. notwendig)
- Überblick
  - Lauflängenkodierung (*Run Length Encoding, RLE*)
  - Wörterbuch-Kompression
  - Huffmann-Codierung
  - Shannon/Fano-Codierung

Lauflängenkodierung

- (engl.: *Run Length Encoding*, RLE)
- Viele Daten enthalten Läufe, d.h. Folgen identischer Zeichen.
- Idee:
  Folge identischer Zeichen durch (Anzahl, Zeichen) codieren.
- Problem:
  Unterscheidung des Zählers von Daten gleicher Repräsentierung

- RLE codiert Läufe beliebiger Zeichen typischerweise durch
  - (Zeichen, Marker, Anzahl)
  - Marker in Daten codiert durch (Marker, Marker)

Lauflängenkodierung (2)

- **Beispiel:**
  - **Marker: #**
  - **"ABBBBBBBCDEEEEEEEEEEEEF#34777777"   (31 Zeichen)**
  - **komprimiert: "AB#7CDE#11F##347#6"   (18 Zeichen)**

- **Vereinfachung in Sonderfällen möglich,**
  z.B. bei 7-Bit-Zeichen ⇒ MSB als Markierung des Zählers

- **Anwendungsspezialfall: Null-Unterdrückung**

Wörterbuchkompression (Lempel-Ziv)

- Wörterbuch mit Tupeln (Phrase, Codewort) wird schrittweise erzeugt
  - Phrase: Folgen von Eingabezeichen
  - erzeugte Codewörter enthalten Verweise in das Wörterbuch
- Vorteile
  - adaptiv (selbstanpassend)
  - optimal, wenn Tabelle beliebig groß und Eingabe unendlich lang sind
- Problem: Datenstruktur für das Wörterbuch
  - Tabelle, Baum, Hash-Funktion (vgl. 2. Semester: Datenstrukturen)
- Verfahren:
  - LZ77 (Lempel, Ziv, 1977), neuere Varianten `pkzip`, `gzip`
  - LZ78 (Lempel, Ziv, 1978), Baum statt Tabelle als Basis
  - LZW (Lempel, Ziv, Welch, 1984), komplexeres Tabellenverfahren, Basis von `compress` und dem Bildformat `gif`

Beispiel

- **Eingabe: AAABAABAABAAABB...**

1

A A A B A A B A A B A A A B B ...

⇧

Wörterbuch und erzeugter Code:

Eintrag #	**1**
Phrase	**A**
Codewort	**(0,A)**

2

A A A B A A B A A B A A A B B ...

⇧

Wörterbuch und erzeugter Code:

Eintrag #	**1**	**2**
Phrase	**A**	**AA**
Codewort	**(0,A)**	**(1,A)**

Beispiel (2)

3 **A A A B A A B A A B A A A B B ...**

⇧

Wörterbuch und erzeugter Code:

Eintrag #	1	2	3
Phrase	A	AA	B
Codewort	(0,A)	(1,A)	(0,B)

---

4 **A A A B A A B A A B A A A B B ...**

⇧

Wörterbuch und erzeugter Code:

Eintrag #	1	2	3	4
Phrase	A	AA	B	AAB
Codewort	(0,A)	(1,A)	(0,B)	(2,B)

Beispiel (3)

5 A A A B A A B A A B A A A B B ...

⇧

Wörterbuch und erzeugter Code:

Eintrag #	1	2	3	4	5
Phrase	A	AA	B	AAB	AABA
Codewort	(0,A)	(1,A)	(0,B)	(2,B)	(4,A)

---

6 A A A B A A B A A B A A A B B ...

⇧

Wörterbuch und erzeugter Code:

Eintrag #	1	2	3	4	5	6
Phrase	A	AA	B	AAB	AABA	AABB
Codewort	(0,A)	(1,A)	(0,B)	(2,B)	(4,A)	(4,B)

...

Häufigkeitsabhängige Codierungen

- Ein Code $c:A \rightarrow B^*$ mit variierender Länge kann ebenfalls zur Komprimierung von Wörtern $w \in A^*$ genutzt werden.

- Annahmen:
  - $A = \{ a_1, a_2, ..., a_m \}$.
  - Die relative Häufigkeit p_i jedes Zeichens $a_i \in A$ in w sei bekannt.
  - Abhängigkeiten zwischen Zeichen werden nicht betrachtet, d.h.: zu jedem Zeitpunkt entspricht die Wahrscheinlichkeit für ein neu zu kodierendes Zeichen genau der relativen Häufigkeit p_i des Zeichens (in der Informationstheorie als stochastische Quelle bezeichnet).
  - Es darf durch die Codierung kein Informationsverlust auftreten.

Häufigkeitsabhängige Codierungen (2)

- **Aufgabe:**
  Gesucht ist ein Binärcode $c:A\rightarrow\{0,1\}^*$ zur Codierung von $w\in A^*$, sodass die Gesamtlänge $L = |c(w)|$ des codierten Wortes minimal ist.

- **Idee:**
  – **Häufiger vorkommende Zeichen werden durch kurze Codewörter dargestellt, weniger wahrscheinliche durch längere.**
  $\Rightarrow$ **Die Gesamtlänge zur Repräsentation verkleinert sich.**

Anmerkung

- **Die Aufgabenstellung entspricht einem Optimierungsproblem:**

  Sei l_i die Länge des unbekannten Codeworts für $a_i \in A$,
  N_i die Anzahl der Vorkommen von a_i in w, N=|w|

  Dann ist:

$$L = |c(w)| = N_1 l_1 + N_2 l_2 + \ldots N_m l_m \overset{!}{=} \min$$

ist zu minimieren

  Division durch N liefert:

$$dl = L/N = \sum_{i=1}^{m} p_i \, l_i \overset{!}{=} \min$$

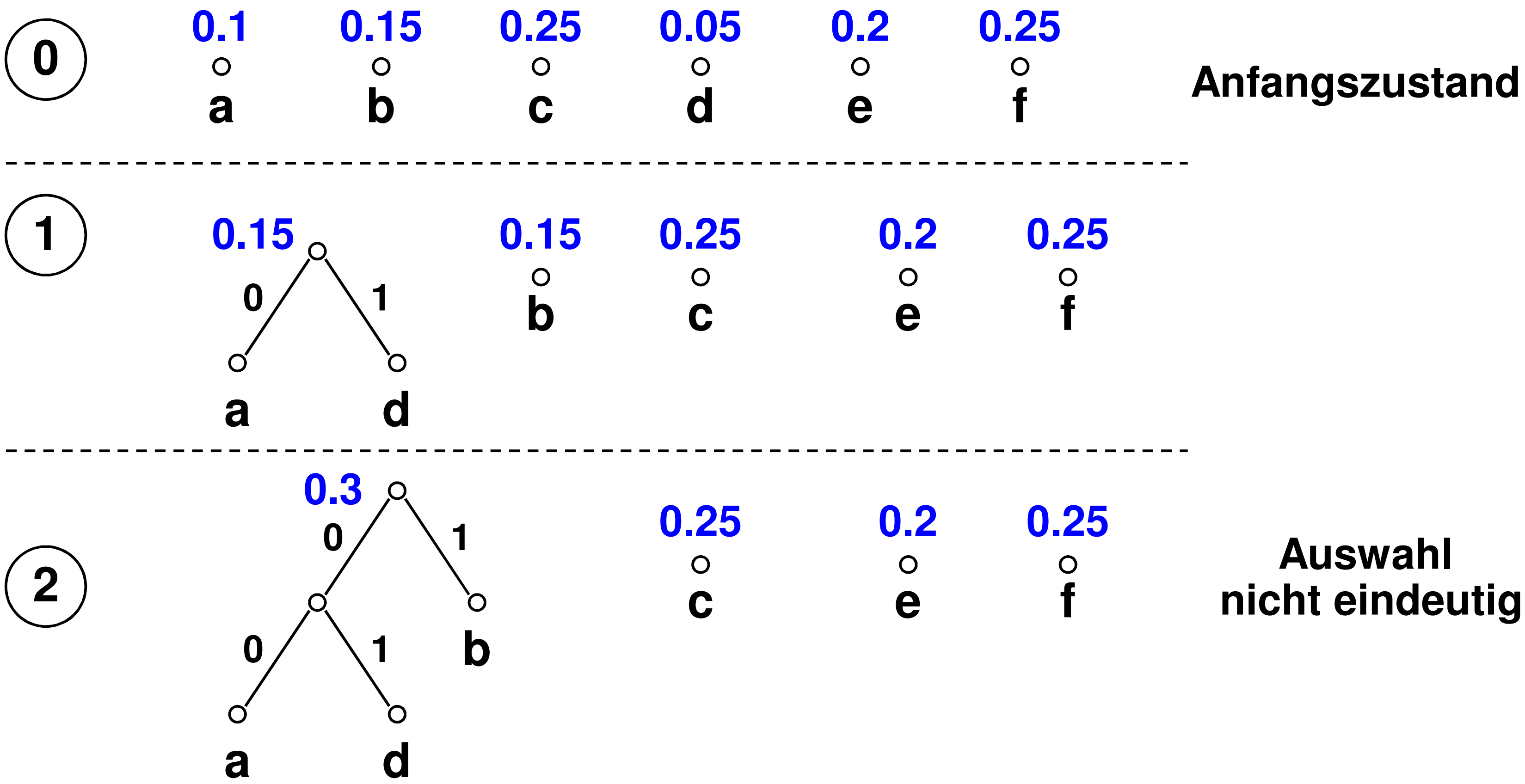
  Die Aufgabenstellung ist also gleichbedeutend mit der Minimierung der durchschnittlichen Länge dl der Codewörter.

Huffman-Codierung

- Die Huffman-Codierung generiert anhand der relativen Häufigkeiten einen optimalen Code, der die mittlere Codewortlänge minimiert.
- Verfahren zur Konstruktion des Codebaums:
  (1) Ordne jedem Zeichen einen isolierten Knoten mit dem Gewicht der relativen Häufigkeit des Zeichens zu.
  (2) Suche die beiden Zeichen/Teilbäume mit dem geringsten Gewicht.
  (3) Gruppierung:
    - Bilde einen binären Teilbaum mit diesen Zeichen/Teilbäumen.
    - Ordne den beiden neuen Kanten die Codierungen 0 und 1 frei zu.
    - Ordne dem Teilbaum die Summe der Gewichte der beiden Zeichen/Teilbäume als Gewicht zu.
  (4) Wiederhole (2) und (3) so lange, bis ein einziger binärer Baum mit dem Gewicht 1 existiert.

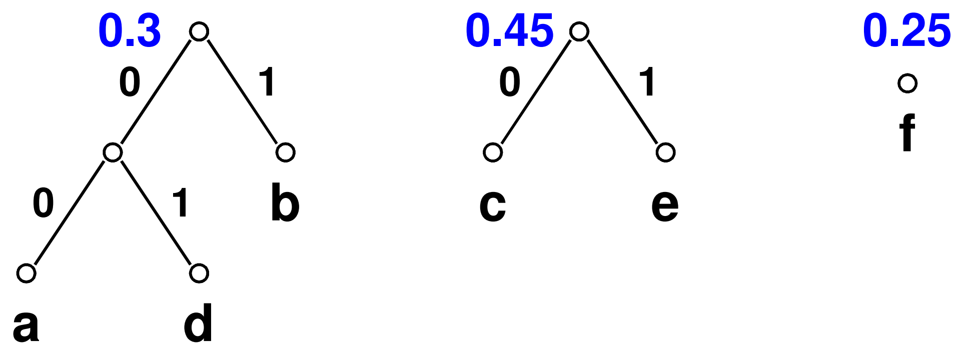
Beispiel

- A = { a, b, c, d, e, f }
- Gegebene relative Häufigkeiten:
  (0.1, 0.15, 0.25, 0.05, 0.2, 0.25)
- Entwicklung des Codebaums:

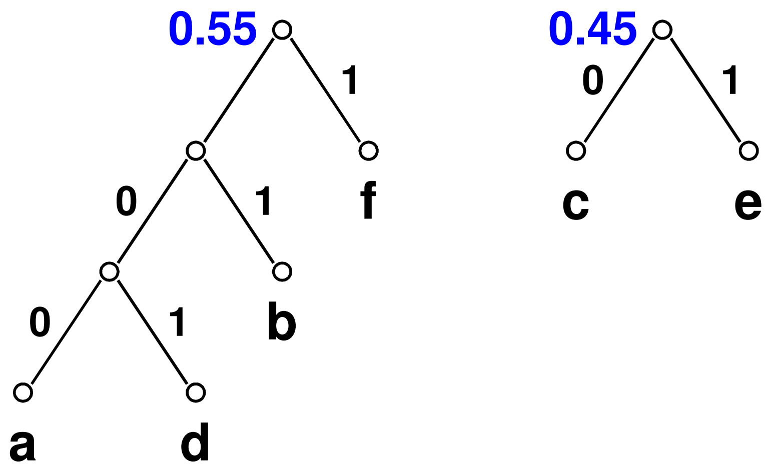


Beispiel (2)

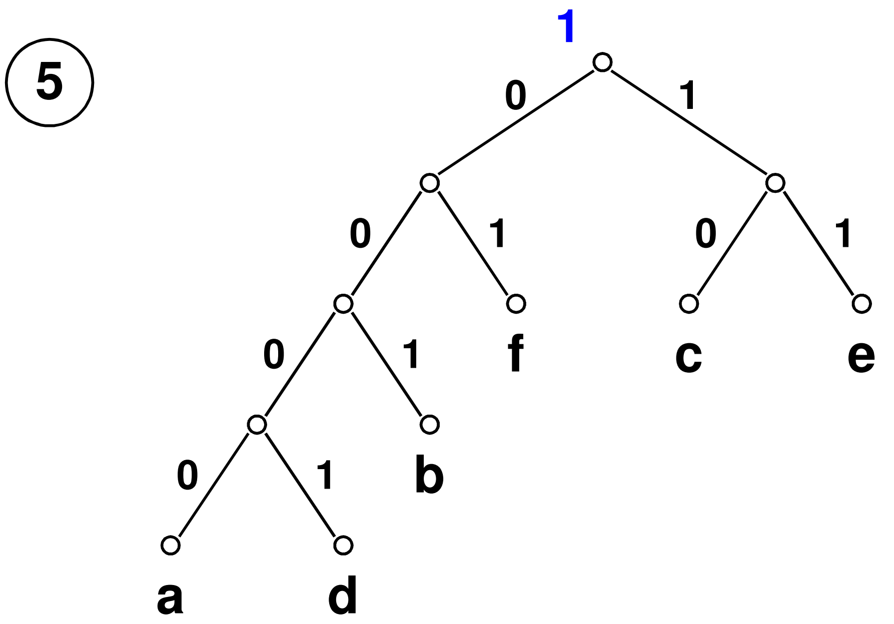
3



4



Beispiel (3)



endgültiger Codebaum

- **Bestimmung der mittleren Codewortlänge:**

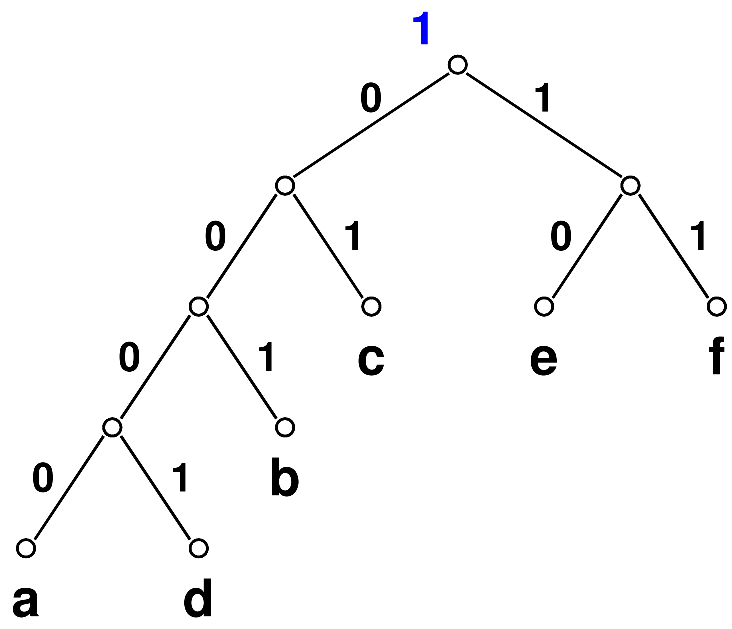
Zeichen	a	b	c	d	e	f
rel. Häufigkeit p_i	0.1	0.15	0.25	0.05	0.2	0.25
Länge l_i	4	3	2	4	2	2

$\Rightarrow$ **mittl. Codewortlänge dl = 0.4 + 0.45 + 0.5 + 0.2 + 0.4 + 0.5 = 2.45 Bit**

Unter Verwendung eines Blockcodes wären $\lceil \log_2 6 \rceil$ = 3 Bit notwendig

Beispiel (4)

- **Bei Wahl der anderen Alternative am Ende von Schritt 2 hätte sich der folgende Codebaum ergeben :**



... und damit die gleiche mittlere Codewortlänge.

Shannon/Fano-Codierung

- **Die Shannon/Fano-Codierung entwickelt den Codebaum im Gegensatz zur Huffman-Codierung <u>top-down</u>.**
- **Verfahren zur Konstruktion des Codebaums:**

  (1) Bilde die Wurzel des Baumes bestehend aus der Menge aller Zeichen und dem Gewicht aus der Summe aller relativen Häufigkeiten (1).

  (2) Wähle ein Blatt des Baumes, dessen zugeordnete Menge M von Zeichen nicht einelementig ist.

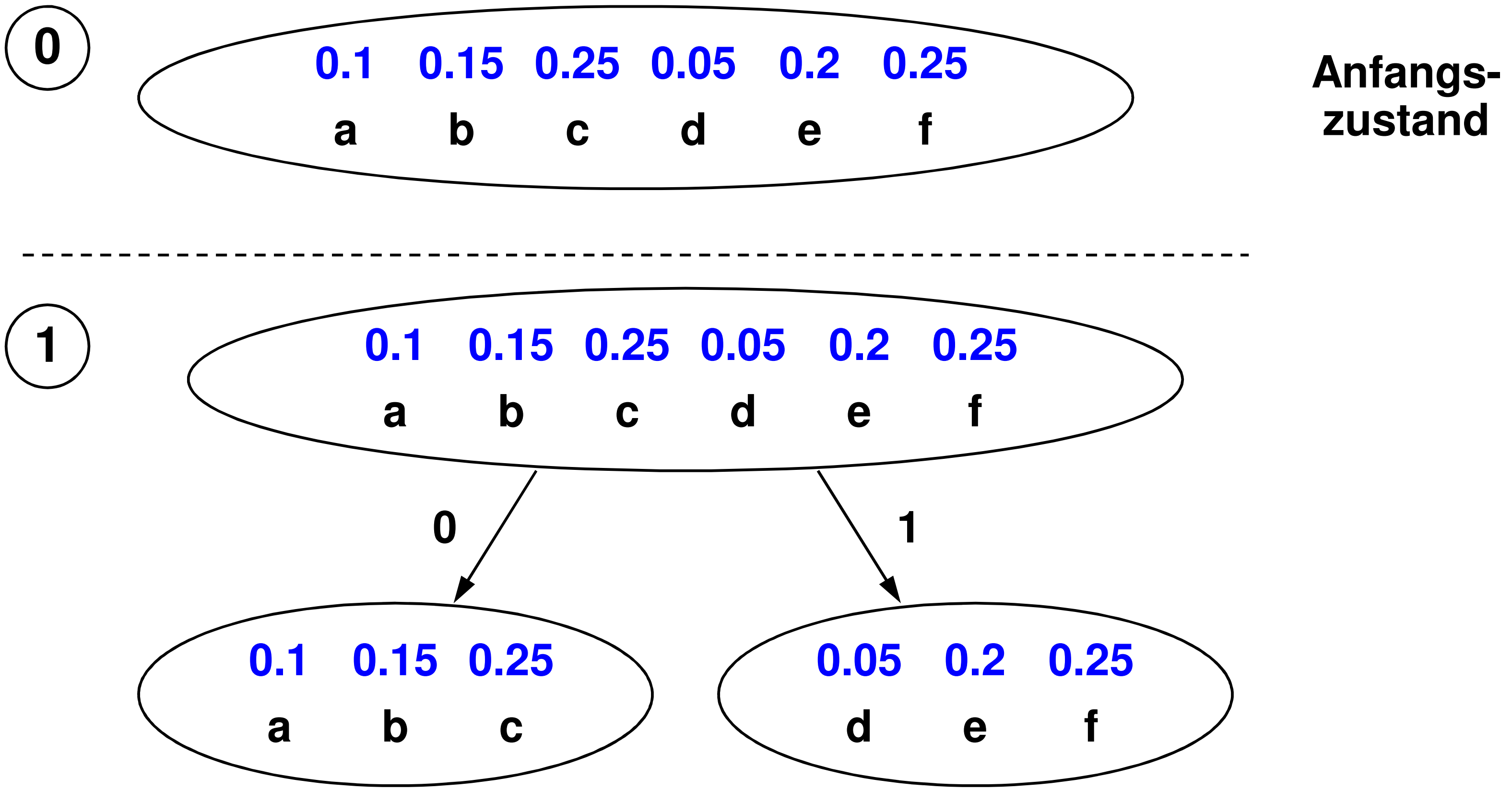
  (3) Teilung:

  - **Teile M in zwei möglichst gleichgewichtige Teilmengen M_0 und M_1.**
  - **Ordne M als linkes und rechtes Kind M_0 und M_1 zu sowie den neuen Kanten die Codierungen 0 und 1 zu.**

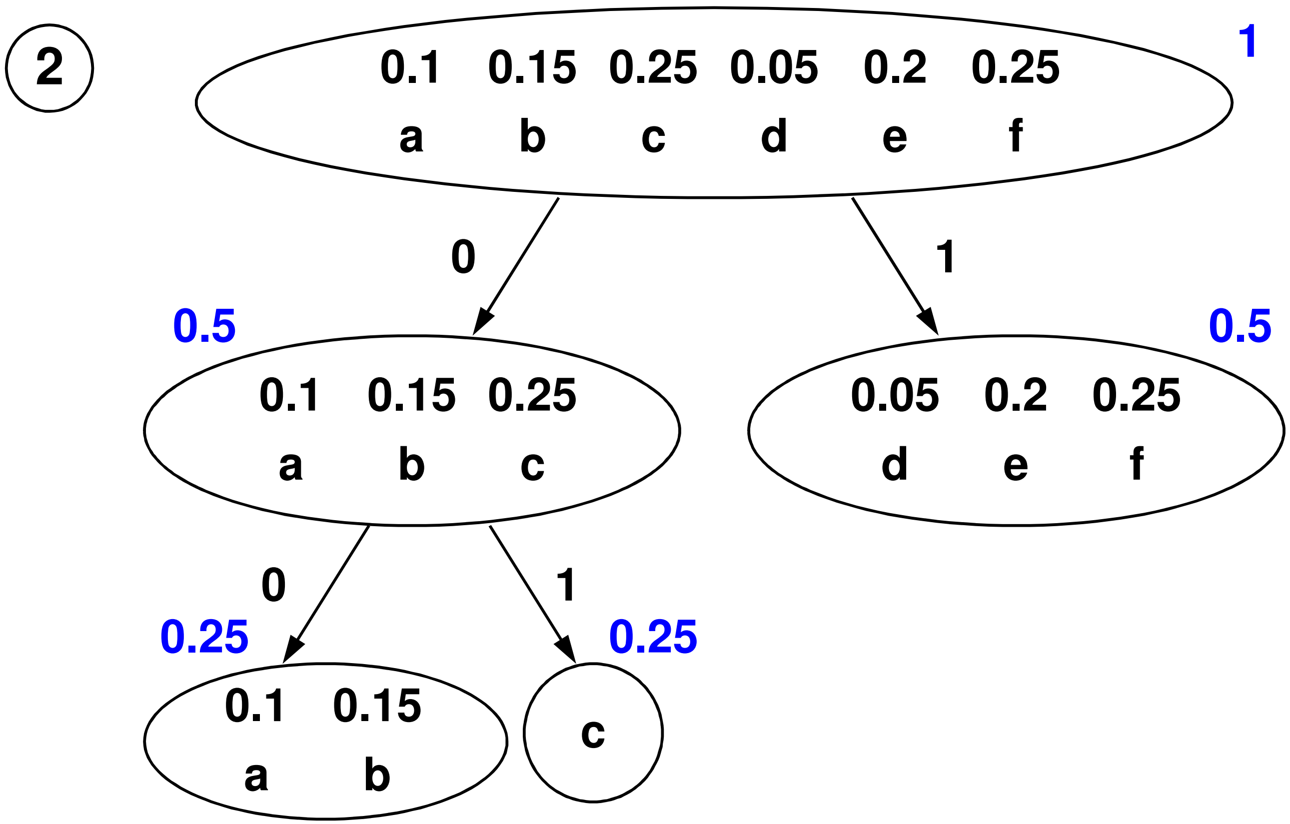
  (4) Wiederhole (2) und (3) so lange, bis alle Blätter des Baumes einelementig sind.

Beispiel

- A = { a, b, c, d, e, f }
- Gegebene relative Häufigkeiten: (0.1, 0.15, 0.25, 0.05, 0.2, 0.25)
- Entwicklung des Codebaums:

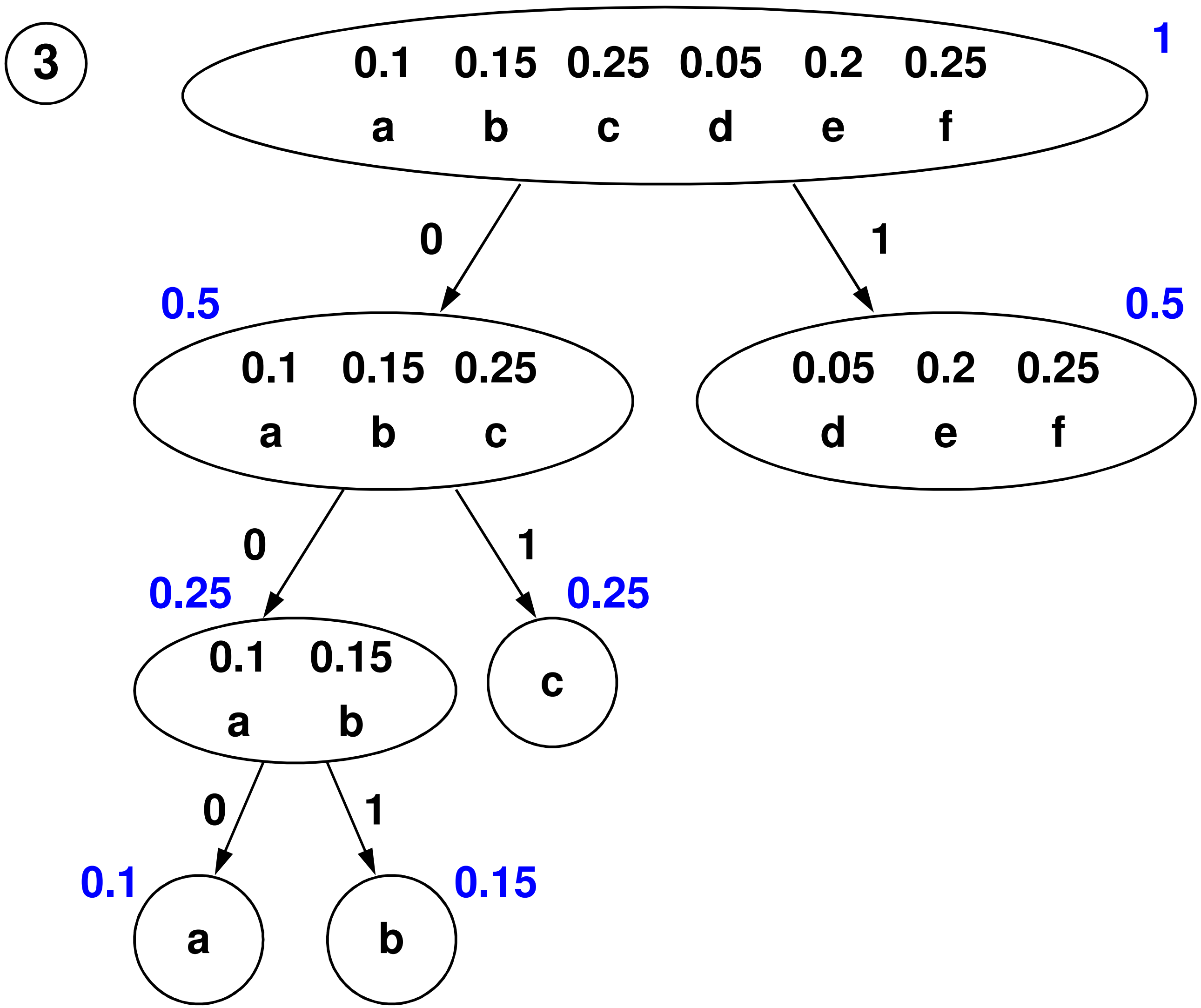


Beispiel (2)



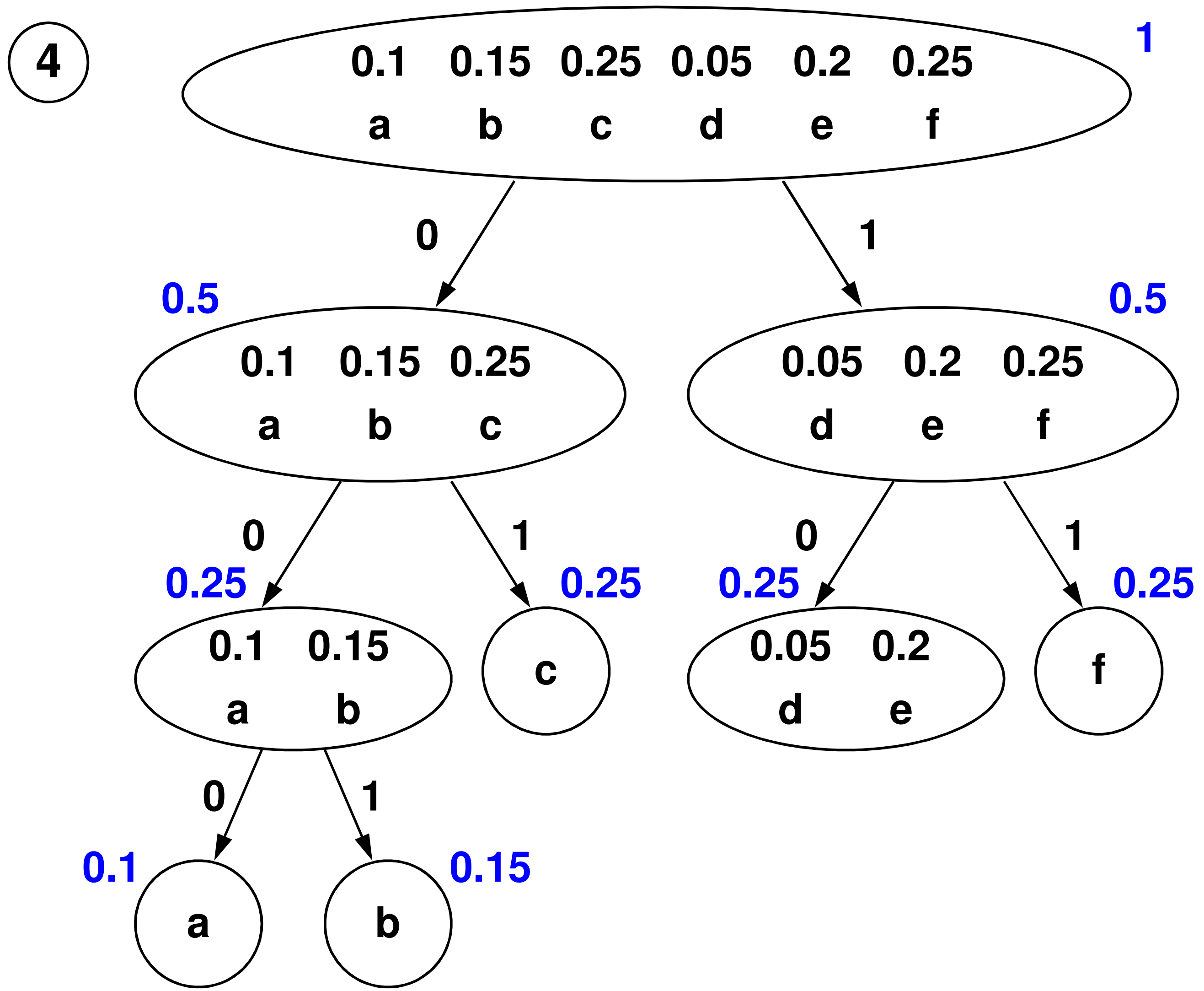
2
0.1 0.15 0.25 0.05 0.2 0.25
a b c d e f
1
0
1
0.5
0.1 0.15 0.25
a b c
0.5
0.05 0.2 0.25
d e f
0
1
0.25
0.1 0.15
a b
0.25
c

Beispiel (3)

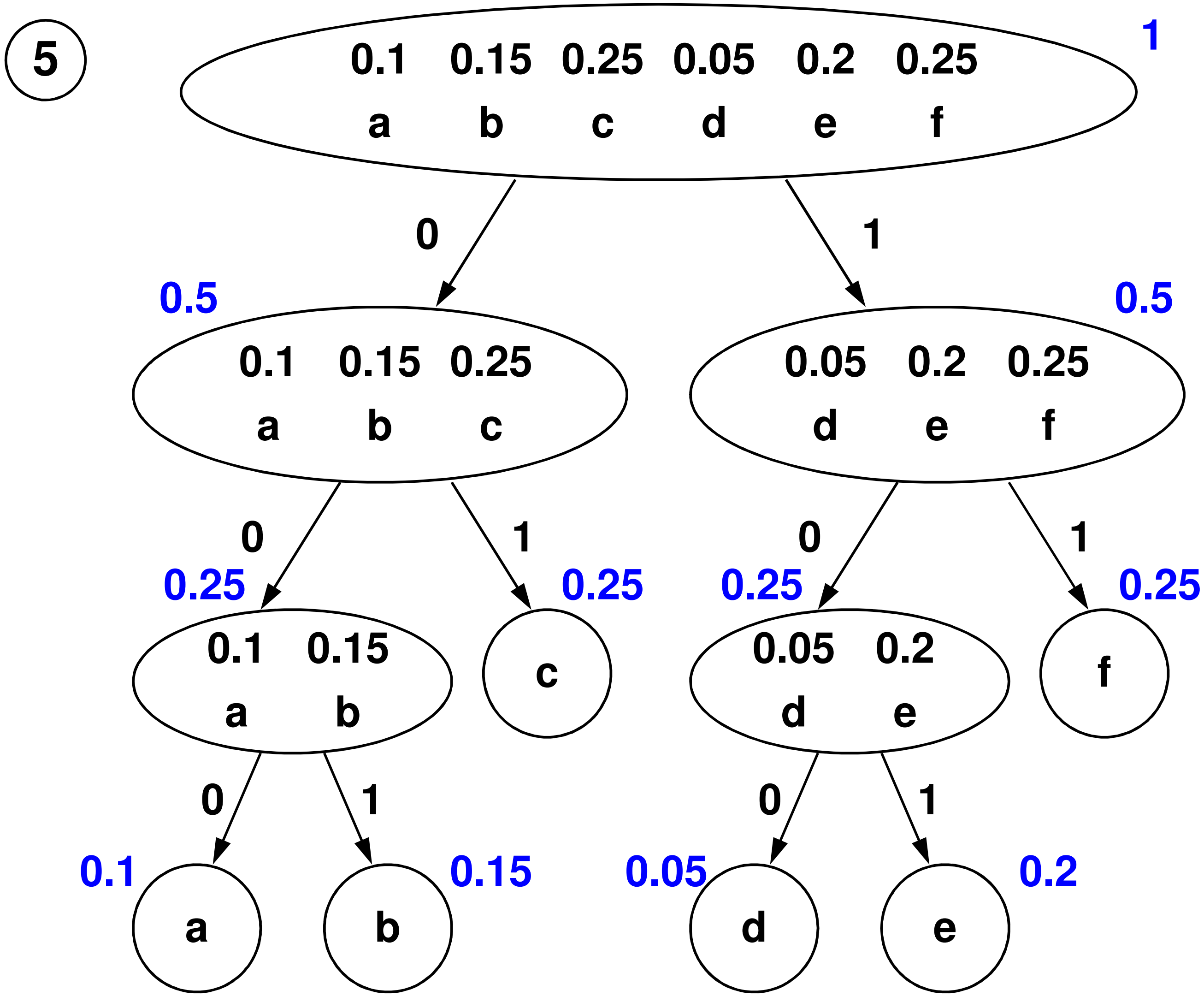


3
0.1 0.15 0.25 0.05 0.2 0.25
a b c d e f
1
0
1
0.5
0.1 0.15 0.25
a b c
0.5
0.05 0.2 0.25
d e f
0
1
0.25
0.1 0.15
a b
0.25
c
0
1
0.1
a
b
0.15

Beispiel (4)


4
1
0.1 0.15 0.25 0.05 0.2 0.25
a b c d e f
0
1
0.5
0.1 0.15 0.25
a b c
0.5
0.05 0.2 0.25
d e f
0
1
0
1
0.25
0.1 0.15
a b
0.25
c
0.25
0.05 0.2
d e
0.25
f
0
1
0.1
a
0.15
b

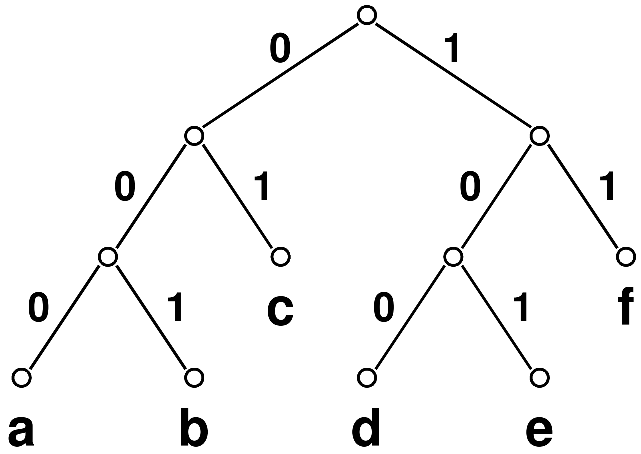
Beispiel (5)



5
1
0.1 0.15 0.25 0.05 0.2 0.25
a b c d e f
0
1
0.5
0.5
0.1 0.15 0.25
a b c
0.05 0.2 0.25
d e f
0
1
0
1
0.25
0.25
0.25
0.25
0.1 0.15
a b
c
0.05 0.2
d e
f
0
1
0
1
0.1
0.15
0.05
0.2
a
b
d
e

Beispiel (6)

- **Endgültiger Codebaum:**



- **Bestimmung der mittleren Codewortlänge:**

Zeichen	a	b	c	d	e	f
rel. Häufigkeit p_i	0.1	0.15	0.25	0.05	0.2	0.25
Länge l_i	3	3	2	3	3	2

$\Rightarrow$ **mittl. Codewortlänge dl = 0.3 + 0.45 + 0.5 + 0.15 + 0.6 + 0.5 = 2.5 Bit**

Anmerkungen

- Die Suche nach optimalen Codes wird im Rahmen der Vorlesung "Informations- und Systemtheorie" (2. Semester) auf eine informationstheoretische Basis gestellt.
- Das dort besprochene Codierungstheorem von Shannon besagt,
  - dass es eine <u>untere Grenze für die mittlere Codewortlänge dl</u> gibt, die durch den mittleren "Informationsgehalt" der Nachrichtenquelle bestimmt ist. Diese wird als Entropie H bezeichnet und in Bit gemessen.

    H bestimmt sich für die hier betrachtete gedächtnislose Quelle mit den Zeichenwahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ zu

    $$H = -\sum_{i=1}^{m} p_i * \log_2 p_i$$

    Unser Huffman-Bsp.:
    R = 2,45 – 2,42321…
    = 0,02678...

    Formal kann dann der Begriff der Code-Redundanz R als R = dl - H bzw. der relativen Code-Redundanz r als r = R / dl = 1 - H/dl eingeführt werden.
  - dass sich jede Nachrichtenquelle so codieren lässt, dass die Redundanz des Codes beliebig klein wird.
- Komprimierende Codes verkleinern also die Code-Redundanz.

Anmerkungen (2)

- **Eine weitere Verkleinerung der mittleren Codewortlänge dl gegenüber der Huffman- oder der Shannon/Fano-Codierung kann erreicht werden, indem nicht einzelne Zeichen aus A codiert werden, sondern Gruppen von k aufeinander folgenden Zeichen.**

  (In der Informationstheorie lässt sich zeigen, dass mit wachsendem k die mittlere Codewortlänge bezogen auf ein Zeichen gegen die Entropie konvergiert).

Anwendungsbeispiel

- **Fax-Komprimierung CCITT T4**
  - Das Scannen eines Seite führt zu Zeilen aus 1728 einzelnen schwarzen und weißen Punkten (Pixeln) (bei 3,85 oder 7,7 Zeilen/mm (fein)).
  - Für jede Bildzeile werden die Längen der Folgen von schwarzen und weißen Pixeln bestimmt (Lauflängenbestimmung).
  - Die Zahlenfolge wird durch speziellen Huffman-Code komprimiert:

weiß: Länge	Codewort	schwarz: Länge	Codewort
0	00110101	0	0000110111
1	000111	1	010
2	0111	2	11
3	1000	3	10
4	1011	4	011
5	1100	5	0011
6	1110	6	0010
7	1111	7	00011
8	10011	8	000101
9	10100	9	000100
10	00111	10	0000100
11	01000	11	0000101
12	001000	12	0000111
....		....	

Nicht verlustfreie Codierungen

- Nicht verlustfreie Codierungen nehmen einen Informationsverlust in Kauf, um einen höheren Komprimierungsgrad zu erreichen.
- Typische Anwendungsbereiche:
  - Audio-Daten
  - Bilddaten
- Typische Kompressionsverfahren:
  - MPEG-Audio
    - Verlustminimierung auf Basis eines psycho-akustischen Modells
    - Lauflängenkodierung
    - Huffman-Codierung der Lauflängenbeschreibung
  - MP3 für Audio-Daten
  - JPEG (Joint Photographic Expert Group) für Bilddaten
    - dem Auge angepasste Bildtransformationen (Informationsverlust)
    - Lauflängenkodierung von quantisierten Werten
    - Huffman-Codierung der Lauflängenbeschreibung
    - JPEG2000: Basis „Wavelet“-Transformation
  - MPEG/MPEG2/MPEG4 Videostrom-Kompression

Überblick

1. Einführung
2. Fehlererkennende Codes
3. Fehlerkorrigierende Codes
4. Zyklische Codes zur Fehlererkennung

4.5.1 Einführung

- **Bei der Eingabe, Verarbeitung, Übertragung und Speicherung von Informationen können Fehler auftreten, die zu Störungen in der Repräsentierung führen.**

Def

- **Ein *Bitfehler* eines binären Signals ist seine Umkehrung (0→1, 1→0).**
  - **typisches Maß: Bitfehler-Wahrscheinlichkeit**
  - **Beispiel: Für ISDN semipermanente Verbindungen wird eine Bitfehler-Wahrscheinlichkeit von 10^{-7} angegeben.**
- **Störungen führen zur *Verfälschung* von Codewörtern.**
- **Fehlererkennung ist nur möglich, wenn die durch Bitfehler entstehenden Binärwörter keine gültigen Codewörter sind.**
- **Bitfehler, die ein Codewort in ein anderes gültiges Codewort verfälschen, sind nicht erkennbar.**
- **_Codesicherung_ beinhaltet alle Maßnahmen der Erkennung oder Korrektur von Bitfehlern in Codewörtern oder Blöcken von Codewörtern.**

Beispiele

- **bei Eingabe durch den Menschen:**
  - **vertauschte Zeichen ("Zahlendreher")**
  - **ausgelassene oder verdoppelte Zeichen**
- **bei Übertragung:**
  - **Übertragungsstörung kann zu einzelnen oder mehreren aufeinander folgenden fehlerhaften Bits (*Burst*-Fehler oder *Bündel*-Fehler) führen.**
- **bei Speicherung:**
  - **"Umkippen" von einzelnen Datenbits eines Maschinenworts im Hauptspeicher durch fehlerhaften Speicherchip oder Strahlung**
    - **DRAM: Entladung des Speicherkondensators durch ionisierende Strahlung, insb. Alphateilchen.**
  - **Mängel in der Magnetisierung einer Plattenoberfläche können zu *Burst*-Fehlern führen.**

Redundanz

- Unter Code-Redundanz soll im folgenden jeglicher Zusatzaufwand in einem Code verstanden werden, der über die reine Darstellung der gewünschten Codewörter hinausgeht.
- Beispiele:
  - Im BCD-Code stellen nur 10 der 16 möglichen Tetraden gültige Codewörter dar.
  - Die gesprochene deutsche Sprache enthält etwa 80% Redundanz.
- Das Vorhandensein von Redundanz kann benutzt werden, um aufgetretene Fehler zu erkennen und evtl. sogar zu korrigieren.
- Zusätzliche Redundanz entsteht z.B., wenn einem Code zusätzliche Bitstellen hinzugefügt werden.
- <u>Kompression und Fehlererkennung konkurrieren miteinander</u> ! Bei der Festlegung von Codierungen ist zu prüfen, inwieweit Redundanz wünschenswert oder erforderlich ist.

Konsequenzen bei der Decodierung

- **Je nach Umfang der Störung und der vorhandenen Redundanz sind unterschiedliche Fälle bei der Decodierung möglich:**
  - **keine Störung ⇒ fehlerfreie Decodierung**
  - **"geringe" Störung ⇒**
    Decodierung der ursprünglichen Nachricht ist möglich,
    der aufgetretene Fehler wird *maskiert* (d.h. tritt nach außen nicht in Erscheinung).
  - **"stärkere" Störung ⇒**
    Decodierung der ursprünglichen Nachricht ist nicht möglich,
    aber Vorhandensein eines Fehlers wird erkannt.
  - **"sehr starke" Störung ⇒**
    Decodierung führt zu einer fehlerhaften ursprünglichen Nachricht (Katastrophe).

Hamming-Gewicht, Hamming-Abstand

Def

- Sei c:A→{0,1}* ein binärer Code. Das ***Hamming-Gewicht*** g(w) eines Codewortes w∈{0,1}* ist die Anzahl der Stellen des Codeworts mit dem Wert "1".
  - Beispiel: g(01000101) = 3

- Seien a,b∈{0,1}^{n} zwei n-stellige Codewörter. Der ***Hamming-Abstand*** oder die ***Hamming-Distanz*** h(a,b) von a und b gibt die Anzahl der Stellen an, in denen sich die Codewörter a und b unterscheiden.
  - Beispiel: h(01000101, 00010111) = 3

01000101 00010111

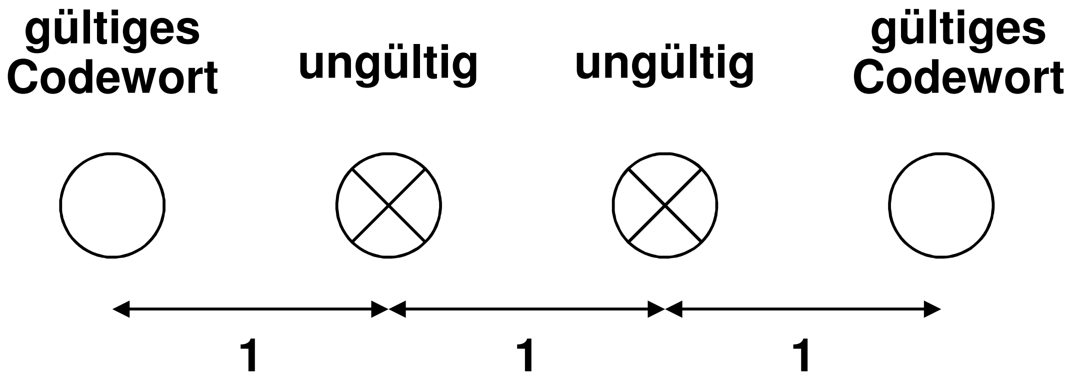
- Sei c:A→{0,1}^{n} ein binärer Blockcode. Der ***Hamming-Abstand des Codes c*** ist als der <u>kleinste</u> Hamming-Abstand h(a,b) zwischen zwei verschiedenen Codewörtern a und b definiert.

Hamming-Abstand von Codes

- **Beispiele (Hamming-Abstand von Codes):**
  - ASCII-Code: 1
  - jeder dichte Code 1
  - BCD-Code 1 , auch wenn Redundanz vorhanden.
  - 2-aus-5-Code 2

4.5.2 Fehlererkennende Codes

- **<u>Satz:</u>**
  Hat ein Code den Hamming-Abstand d, so können alle Störungen, die höchstens d-1 Bits betreffen, sicher erkannt werden.
- **Beispiel: d = 3**



⇒ **Dichte Codes mit Hamming-Abstand 1 können keine Fehler erkennen.**

⇒ **Zur Erkennung von 1-Bit-Fehlern ist mindestens ein Hamming-Abstand von d=2 erforderlich.**

Beispiel: 2-aus-5-Code

- **Hamming-Abstand: d=2**

	7	4	2	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	1	0	0	0	1
8	1	0	0	1	0
9	1	0	1	0	0

2	0	0	1	0	1
X	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0

⇒ **1-Bit-Fehler werden sicher erkannt**

Paritätsbit

- **Ein ungesicherter Code (d=1) kann durch die Hinzunahme eines Prüfbits (Paritätsbit, *parity bit*) auf d=2 erweitert werden. Diese Erweiterung eines Codewortes wird auch *Querparität* oder *Zeichenparität* genannt.**

  ⇒ 1-Bit-Fehler werden erkannt.

- **Alternativen zur Festlegung des Paritätsbits:**
  - **gerade Parität (*even parity*): Das Codewort wird auf ein gerades Gewicht (gerade Anzahl von 1-Bits) erweitert.**
  - **ungerade Parität (*odd parity*): Das Codewort wird auf ein ungerades Gewicht (ungerade Anzahl von 1-Bits) erweitert.**

Paritätsbit (2)

- **Fehlererkennung durch Paritätsprüfung auf Empfängerseite (*parity check*):**
  - **Bildung der Quersumme modulo 2 über das gesamte Datenwort einschließlich Paritätsbit.**
  - **Dabei Addition modulo 2 (Restklassenaddition):**
    0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=0 (XOR)

⇒ Jede ungeradzahlige Anzahl von 1-Bit-Fehlern wird erkannt, keine geradzahlige Anzahl von Bitfehlern wird erkannt.

Beispiele:

- **ASCII-Code (vgl. Kap. 3.4.2)**
  - 7-Bit-Zeichen
  - MSB zur Speicherung des Paritätsbits
  - gerade oder ungerade Parität möglich
  - Beispiel (gerade Parität):
Codewort:	"A": 1000001	"W": 1010111
Paritätsbit:	0	1
Erweit. Codewort:	01000001	11010111

- **Arbeitsspeicher mit Parität**
  - je Byte ein Parity-Bit
  - gerade oder ungerade Parität möglich
  - bei PCs für den Massenmarkt aus Kostengründen häufig weggelassen, Fehlererkennung als nebensächlich angesehen.

Allgemeine Prüfziffern

- **Praxisproblem: Ziffernvertauschungen bei Eingabe können durch einfache Quersummenbildung nicht erkannt werden.**
- **Abhilfe: Quersummenbildung mit gewichtetem Code**
- **Beispiel (Internationale ISBN-Buchnummern):**

3-343-00892-3

Land 3=D | **Verlag** | **Titel** | **Prüfziffer**

Werner et al:
Taschenbuch der Informatik,
Fachbuchverlag Leipzig

  – **Prüfziffernbestimmung:**
    - **Wichtung der Stellen <u>von rechts</u> beginnend mit 1, 2, 3, ...**
    - **Prüfziffer: gewichtete Quersumme modulo 11 = 0**
    - **Der mögliche Rest 10 wird codiert durch die Prüfziffer X.**
  – **Probe:**

3	3	4	3	0	0	8	9	2	3	
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	**Gewichte**

3*10+3*9+4*8+3*7+0*6+0*5+8*4+9*3+2*2+3 = 176 176:11 = 16 Rest 0 ⇒ gültig!

Allgemeine Prüfziffern (2)

- **Beispiel GTIN (Global Trade Item Number, früher „EAN“):**

4388440041323

Land 40-44=D | Unternehmen | Artikel | Prüfziffer

Quelle: EAN / GS1

- **Prüfziffernbestimmung:**
  - Wichtung der Stellen <u>von rechts</u> beginnend mit 1, 3, 1, 3, 1, ...
  - Prüfziffer: gewichtete Quersumme modulo 10 = 0

- **Probe:**

4	3	8	8	4	4	0	0	4	1	3	2	3	
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	Gewichte
4	9	8	4	4	2	0	0	4	3	3	6	3	Produkte modulo 10

4 + 9 + 8 + 4 + 4 + 2 + 0 + 0 + 4 + 3 + 3 + 6 + 3 = 50. 50:10 = 5 Rest 0 $\Rightarrow$ gültig!

Codewort-Verdopplung

- Ein Code mit Hamming-Abstand d wird durch Verdoppeln der Codewörter ($w \rightarrow w||w$) zu einem Code mit Hamming-Abstand 2*d.

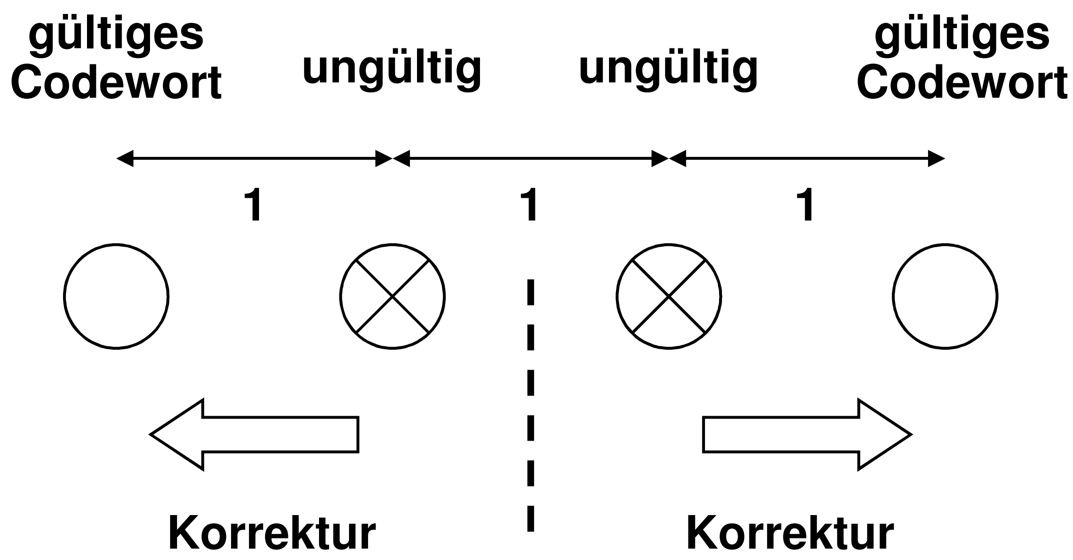
  $\Rightarrow$ Für d=1 werden damit 1-Bit-Fehler erkannt.

- Bemerkungen:
  - Anwendungsbeispiel: Wiederholung von Zahlen in Telegrammen.
  - In Rechensystemen relativ unüblich, bei der Verarbeitung von Information als Zeitredundanz (zweimalige Nacheinanderausführung) vorkommend.
  - Einfach, aber u.U. verschwenderisch

4.5.3 Fehlerkorrigierende Codes

- <u>Satz</u>:
  Hat ein Code den Hamming-Abstand d = 2*k+1, so können alle Störungen, die höchstens k Bits betreffen, sicher korrigiert werden.
- **Beispiel:**

  d = 3 ⇒ k = 1

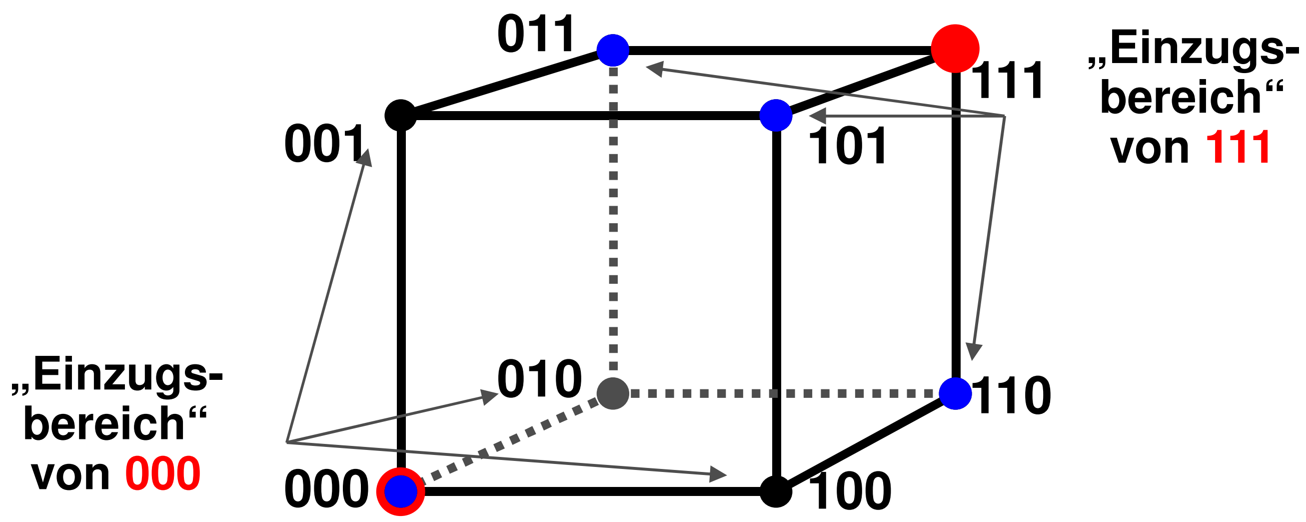


  ⇒ **Zur Korrektur von 1-Bit-Fehlern ist ein Hamming-Abstand von d=3 notwendig.**

- **Der Hamming-Abstand 2*k+1 ist minimal zur Korrektur von k-Bit-Fehlern.**

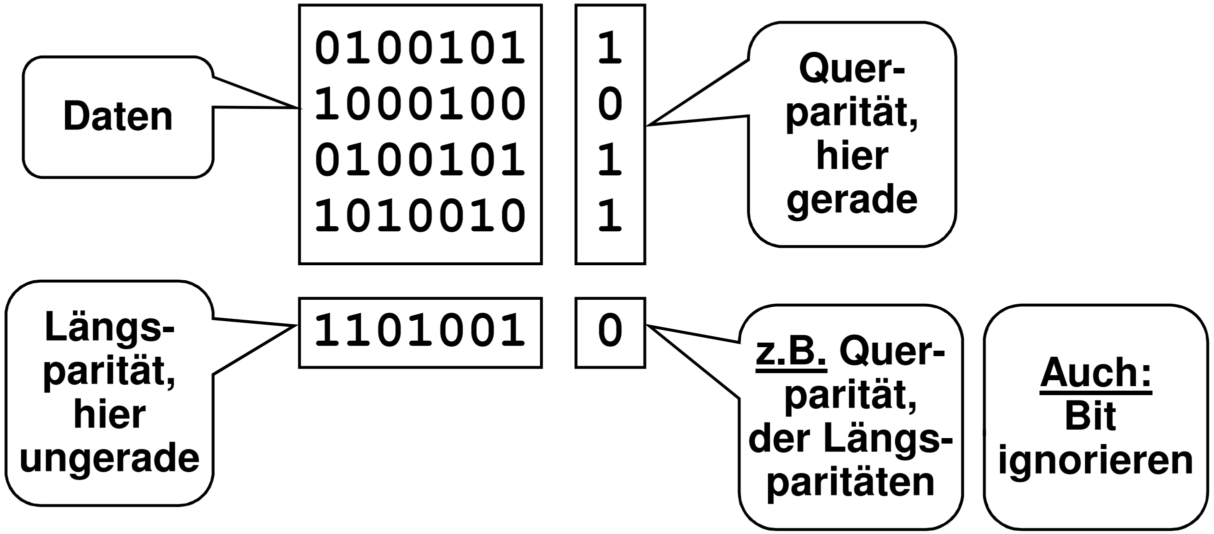
Fehlerkorrigierende Codes (2)

- **Visualisierung am n-Würfel**
  - **Beispiel: Die Code-Wörter des Code c:A→{0,1}^{n} für n=3 entsprechen den Ecken eines Würfels.**
  - **Liegt zwischen je zwei Codewörtern (blau) jeweils mindestens <u>eine</u> „ungenutzte“ Ecke, so gilt d=2 und (d-1=) 1-Bit-Fehler lassen sich erkennen.**
  - **Liegen mindestens <u>zwei</u> ungenutzte Ecken zwischen den Code-wörtern (rot), gilt d=3 = 2*k+1 für k=1, also: 1-Bit-Fehler lassen sich korrigieren:**



Binärer Rechteck-Code

- **Rechteck-Code:**
  - Binärer Block-Code als Ausgangsbasis
  - Paritätsbit je Codewort (Querparität) wie bisher
  - Paritätsbit je Spalte für einen Block von Codewörtern (z.B. 16 oder 64) (Längsparität)



- **Hamming-Abstand für einen Codewort-Block wird auf 3 erhöht.**

⇒ **1-Bit-Fehler für den Codewort-Block können korrigiert werden.**

Beispiel

1 **Gesendet werde:**

0100101	1
1000100	0
0100101	1
1010010	1
1101001	0

2 **Empfangen werde:**

0100101	1
1000100	0
0110101	1
1010010	1
1101001	0

3 **Kontrollbestimmung der Quer- und Längsparität:**

0100101	1
1000100	0
0110101	0
1010010	1
1111001	1

verschiedener Wert

verschiedener Wert

3 **Vergleich: gesendet - empfangen**

4 **Rückschluss auf verfälschte Bitstelle und Korrektur:**

0100101	1
1000100	0
0110101	0
1010010	1
1111001	1

verfälschte Stelle: 1→0

Beispiel (2)

1 **Gesendet werde:**

0100101	1
1000100	0
0100101	1
1010010	1
1101001	0

2 **Empfangen werde:**

0100101	1
1000100	0
0100101	0
1010010	1
1101001	0

3 **Kontrollbestimmung der Quer- und Längsparität:**

0100101	1
1000100	0
0100101	1
1010010	1
1101001	0

verschiedener Wert

Alle Längsparitäten stimmen!

3 Vergleich: gesendet - empfangen

4 **Rückschluss auf verfälschte Bitstelle und Korrektur:**

0100101	1
1000100	0
0100101	0
1010010	1
1101001	0

verfälschte Stelle: 0→1

Beispiel (3)

1 **Gesendet werde:**

```
0100101   1
1000100   0
0100101   1
1010010   1

1101001   0
```

2 **Empfangen werde:**

```
0100101   1
1000100   0
0100101   1
1010010   1

1101011   0
```

3 **Kontrollbestimmung der Quer- und Längsparität:**

```
0100101   1
1000100   0
0100101   1
1010010   1

1101001   1
```

Alle Querparitäten stimmen

Verschiedene Werte

3 **Vergleich: gesendet - empfangen**

4 **Rückschluss auf verfälschte Bitstelle und Korrektur:**

```
0100101   1
1000100   0
0100101   1
1010010   1

1101001   0
```

verfälschte Stelle: $1 \rightarrow 0$

Lineare Codes, systematische Codes

Def

- **Es seien ausschließlich Binär-Codes betrachtet. Ein *linearer* Code oder *Gruppencode* ist ein Blockcode der Länge n, der 2^m, $m \leq n$, Codewörter besitzt.**
- **Lineare Algebra als Math. Grundlage**
  - **hier naiverer Zugang**
- ***Systematische lineare Codes* sind solche, bei denen jede der n Codewortstellen eindeutig als eine der m *Informationsstellen* oder als eine der r:=n-m *Prüfstellen* identifiziert werden kann.**
- **Systematische lineare Codes werden auch als *(n,m,d)-Codes* mit d als Hamming-Distanz des Codes bezeichnet.**

Hamming-Code

Def

- Ein ***Hamming-Code*** **ist ein systematischer linearer Code, der k Bit-Fehler bei minimaler Redundanz korrigieren kann.**
  Im engeren Sinne sind Hamming-Codes solche, die 1-Bit-Fehler korrigieren können.
- **Grundidee:**
  - **Den m Datenbits eines Codeworts werden r Prüfbits zugeordnet.**
    $\Rightarrow$ Codewortlänge: n=m+r Bits. <u>**Bedingung für r**</u>**: $2^{r-1} < m+r < 2^r$**
  - **Prüfbits werden an den Positionen $1=2^0$, $2=2^1$, $4=2^2$, ..., 2^{r-1} angenommen, Datenbits dazwischen und danach.**
  - **Jedes Prüfbit enthält damit in der dualen Darstellung seiner Position genau eine 1.**
  - **Jedes Prüfbit ist das Paritätsbit (gerade Parität, Addition modulo 2) für alle Datenbits, deren Position an dieser Stelle eine 1 besitzt.**
- **Vorteil:**
  - **Aufwand für Prüfbits wächst nur logarithmisch!**

Details am Beispiel

- **(7,4,3)-Hamming Code**
  - 4 Daten- und 3 Prüfbits, Hamming-Abstand = 3
  - betrachtetes Datenwort sei 1011

P	P		P			
001	010	011	100	101	110	111
		1		0	1	1

- **Bestimmung der Prüfbits**
  - $P_{100} = D_{101} + D_{110} + D_{111} = 0+1+1 = 0$
  - $P_{010} = D_{011} + D_{110} + D_{111} = 1+1+1 = 1$
  - $P_{001} = D_{011} + D_{101} + D_{111} = 1+0+1 = 0$

P	P		P			
001	010	011	100	101	110	111
0	1	1	0	0	1	1

Details am Beispiel (2)

- Störung führe zu verfälschtem Codewort (Fehler in Datenbit)
  - 1-Bit-Fehler an Stelle 110

P	P		P			
001	010	011	100	101	110	111
0	1	1	0	0	0	1
					~~1~~	

- Bestimmung des *Fehlersyndroms* aus Prüfbit und zugehörigen Datenbits (Quersumme modulo 2) nach Auslesen/Übertragung
  - $S_{100} = P_{100} + D_{101} + D_{110} + D_{111} = 0 + 0 + 0 + 1 = 1$
  - $S_{010} = P_{010} + D_{011} + D_{110} + D_{111} = 1 + 1 + 0 + 1 = 1$
  - $S_{001} = P_{001} + D_{011} + D_{101} + D_{111} = 0 + 1 + 0 + 1 = 0$
- Entscheidung:
  - Ist das Fehlersyndrom $(S_{100}S_{010}S_{001})=000$, liegt kein Fehler vor.
  - Andernfalls gibt $(S_{100}S_{010}S_{001})_2$ als Dualzahl die verfälschte Stelle an.
  - Hier: 110_2 ist die verfälschte Stelle.

Details am Beispiel (3)

- **Störung führe zu verfälschtem Codewort (Fehler in Prüfbit)**
  - **1-Bit-Fehler an Stelle 010**

P	P		P			
001	010	011	100	101	110	111
0	0	1	0	0	1	1
	$\cancel{1}$					

- **Bestimmung des *Fehlersyndroms***
  - $S_{100} = P_{100} + D_{101} + D_{110} + D_{111} = 0 + 0 + 1 + 1 = 0$
  - $S_{010} = P_{010} + D_{011} + D_{110} + D_{111} = 0 + 1 + 1 + 1 = 1$
  - $S_{001} = P_{001} + D_{011} + D_{101} + D_{111} = 0 + 1 + 0 + 1 = 0$
- **Entscheidung:**
  - **Gleiches Verfahren.**
  - **010_2 ist die verfälschte Stelle.**

Optimalität des Hamming-Codes

- Satz: Für einen Block-Code mit m Datenbits und r Prüfbits und Hamming-Distanz $d \geq 3$ gilt: $m+r+1 \leq 2^r$.
- Da der Hamming-Code die Bedingung erfüllt ($m+r < 2^r$), stellt er einen optimalen Code mit minimal notwendiger Anzahl von Prüfbits für die Korrektur von 1-Bit-Fehlern dar.
- Satz ist einsichtig, denn:
  - Codewortlänge: $n=m+r$ Bits
  - 2^m Datenwörter, eingebettet in 2^{m+r} Codewörter
  - Jedes Datenwort hat m+r Nachbarn mit Hamming-Abstand 1. Keiner dieser Nachbarn kann Nachbar eines anderen Datenworts sein (sonst gäbe es Codeworte mit Hamming-Distanz kleiner als 3).
  - Also belegt jedes Datenwort mit seinen Nachbarn m+r+1 Codeworte.
  - Also insgesamt für die Anzahl der Datenworte:
    $2^m (m+r+1) \leq 2^{m+r}$ und damit $m+r+1 \leq 2^r$

SEC/DED-Codes

- SEC/DED: Single Error Correction / Double Error Detection
- Erweiterung von Hamming-Codes auf Hamming-Distanz d=4 durch weiteres Paritätsbit P über alle Stellen.

$\Rightarrow$ Korrektur aller 1-Bit-Fehler und Erkennung aller 2-Bit-Fehler.

- Unterscheidung in der Decodierung
  - Syndrom und P korrekt $\Rightarrow$ kein Fehler
  - Syndrom und P falsch $\Rightarrow$ 1-Bit-Fehler korrigierbar
  - Syndrom falsch und P korrekt $\Rightarrow$ 2-Bit-Fehler erkannt, nicht korrigieren.
- Anwendung:
  - Basis für betriebssichere Arbeitsspeicher von Rechensystemen

Maintenance (M)-Codes

- Varianten von SEC/DED-Hamming-Codes
- zusätzliche Ziele:
  - möglichst geringer technischer Aufwand, z.B. möglichst wenige Stellen nehmen an der Quersummenprüfung teil.
  - Überprüfung der korrekten Funktion der Erzeugung der Prüfbits.
  - Erweiterbarkeit auf verschiedene Maschinenwortlängen (Kaskadierbarkeit der Logik-Schaltkreise).
- Basis des käuflichen ECC Memory (Error Correcting Code) für hochverfügbare Rechensysteme
- Typische M-Codes (n,m,d) für die üblichen Maschinenwortlängen:
  - (13,8,4)
  - (22,16,4)
  - (39,32,4)
  - (72,64,4)

Prüfen Sie die Bedingung
$2^{r-1} < m+r < 2^r$
an diesen Werten nach!

Überführung von k-Bit-Fehler in 1-Bit-Fehler

- **Hamming-Codes sind unbrauchbar zur Behandlung von Burst-Fehlern, wie sie z.B. bei der Datenübertragung auftreten.**

- **Idee: Vertauschung der Übertragungsreihenfolge**
  - **k Worte werden mit Hamming-Codierung für 1-Bit-Fehler-Korrektur <u>zeilenweise</u> in eine Tabelle <u>geschrieben</u>.**
  - **Die Tabelle wird <u>spaltenweise gesendet</u>.**
  - **Tritt während der Übertragung ein k-Burst-Fehler auf (der k aufeinander folgende Bits betrifft), so liegt in jeder Zeile nur ein 1-Bit-Fehler vor.**
  - **Aufgrund des Hamming-Codes ist eine vollständige Korrektur aller k Worte beim Empfänger möglich.**

4.5.4 Zyklische Codes

- **Die in 4.5.3 besprochenen Codes erkennen und korrigieren Einzelfehler oder eine geringe Anzahl von Fehlern (z.B. SEC/DED).**
- **In bestimmten Anwendungsbereichen, wie**
  - **Datenübertragung durch serielle Bitströme (z.B. Modem, LAN),**
  - **serielle Datenspeicherung auf magnetisierten Oberflächen (z.B. Diskette, Festplatte),**

  treten im Falle einer Störung aber <u>Burst-Fehler</u>, d.h. Folgen verfälschter Bitstellen, auf.
- **Zur Sicherung gegenüber solchen Fehlern werden *zyklische Codes* eingesetzt (auch *Polynom-Codes* genannt).**
- **Zyklische Codes sind die Basis der zyklischen Blocksicherung *CRC* (*Cyclic Redundancy Check*).**
- **Einfache technische Realisierung mittels Schieberegisterschaltungen (vgl. LV Digitaltechnik) möglich.**

Grundlage: Polynomdivision

- **Die n Bits eines Datenblocks B der Länge n werden als Koeffizienten eines Polynoms P(x) vom Grad ≤ n-1 interpretiert.**
- **Beispiel:**
  `B=1011    P(x) = 1*x³ + 0*x² + 1*x¹ + 1*x⁰ = x³+x+1`
  $B=1011 \quad P(x) = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 = x^3+x+1$

- **Polynom-Addition modulo 2**
  - Addition der Koeffizienten gleicher Exponenten modulo 2
  - Rechenregeln: 0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=0 (XOR)
  - Subtraktion entspricht hier Addition (!)
- **Beispiel:**

$$
\begin{array}{lllll}
B=1011 & P(x) & = 1*x^3 + 0*x^2 + 1*x^1 + 1*x^0 & = x^3 & +x+1 \\
C=1101 & Q(x) & = 1*x^3 + 1*x^2 + 0*x^1 + 1*x^0 & = x^3+x^2 & +1 \\
\sum=0110 & & & & \\
 & P(x)+Q(x) & = 0*x^3 + 1*x^2 + 1*x^1 + 0*x^0 & = & x^2+x
\end{array}
$$

Grundlage: Polynomdivision (2)

- **Polynom-Division modulo 2**
  - P(x) = D(x)*Q(x) + R(x)
  - Restpolynom R(x) besitzt einen Grad, der kleiner als der von Q(x) ist
  - Für CRC interessiert nur R(x), nicht D(x)
- **Beispiel:**

$$P(x) = 1*x^5+0*x^4+1*x^3+1*x^2+0*x^1+1*x^0 = x^5 \quad +x^3+x^2 \quad +1$$

$$Q(x) = 1*x^3+1*x^2+0*x^1+1*x^0 = x^3+x^2 \quad +1$$

```
P(x):Q(x) = (x^5     +x^3+x^2   +1) : (x^3+x^2   +1) = x^2+x
             x^5+x^4     +x^2
             ------------
                 x^4+x^3
                 x^4+x^3     +x
                 ------------
                             x+1
```

$\Rightarrow$ D(x) = x^2+x,   R(x) = $x+1$

Vorgehensweise

- Ein zyklischer Code mit m Datenbits und r CRC-Prüfbits wird durch ein Generator-Polynom G(x) vom Grad r festgelegt.
- Codierung:
  - Der Nutzdatenblock definiert ein Polynom M(x) vom Grad $\leq$ m-1
  - An die Nutzinformation werden r Nullbits angehängt. Die Nachricht einschließlich CRC-Feld ist dann n=m+r Bits lang und entspricht dem Polynom $x^r * M(x)$.
  - Dieses Polynom wird durch das Generator-Polynom G(x) dividiert. Es entsteht ein Restpolynom R(x) vom Grad $\leq$ r-1, das die Gleichung

    $$x^r * M(x) = D(x) * G(x) + R(x)$$ erfüllt.
  - Die Koeffizienten von R(x) werden in das CRC-Feld eingetragen. Das gesendete Codewort aus Nutzdatenblock und CRC-Feld entspricht damit dem Polynom $P(x) = x^r * M(x) + R(x)$.
  - P(x) ist nach Konstruktion durch G(x) ohne Rest teilbar! (Beachte: $x^r * M(x) + R(x) = x^r * M(x) - R(x)$ wg. Addition modulo 2).

Vorgehensweise (2)

- **Überprüfung/Fehlererkennung:**
  - **Auf Empfängerseite wird P(x) wieder durch G(x) mit Rest R'(x) dividiert.**
  - **Fehlerfreiheit ⇔ Restpolynom R'(x)=0**

Beispiel

- Generator-Polynom $G(x)=x^3+1$ vom Grad $r=3$
- Datenblock mit $m=4$: 0110, d.h. $M(x)=x^2+x$

Daten				CRC		
0	1	1	0			

- $x^r * M(x) = x^5+x^4$
- $x^r * M(x) : G(x)$

$$
\begin{array}{lllll}
(x^5+x^4 & &) : (x^3 & +1) & = x^2+x \\
\;x^5 & +x^2 & & & \\
\hline
\;\;x^4 & +x^2 & & & \\
\;\;x^4 & \quad +x & & & \\
\hline
 & x^2+x & & &
\end{array}
$$

$\Rightarrow R(x) = x^2+x$

versendet

Daten				CRC		
0	1	1	0	1	1	0

Beispiel (2)

- **Überprüfung beim Empfänger: (a) ohne Verfälschung**

Daten				CRC		
0	1	1	0	1	1	0

- **P(x) : G(x)**

```
(x⁵+x⁴    +x²+x   ) : (x³      +1) = x²+x
 x⁵       +x²
 -----------
    x⁴        +x
    x⁴        +x
    ----------
              0
```

- **R(x) = 0 $\Rightarrow$ Daten unverfälscht.**

Beispiel (3)

- **Überprüfung beim Empfänger: (b) mit Verfälschung**

Daten				CRC		
0	1	0	0	1	1	0
		~~1~~				

- **P(x) : G(x)**

$$
\begin{array}{llllll}
x^5 & +x^2+x & : & x^3 & +1 & = x^2 \\
x^5 & +x^2 & & & & \\
\hline
 & \quad\;\; x & & & &
\end{array}
$$

- **R(x) = x ≠ 0 ⇒ Fehler erkannt. Daten verfälscht!**

Anmerkungen

- **Erkannte Fehler:**
  - Sei F(x) ein Fehlerpolynom, und P'(x) = P(x) + F(x) werde empfangen. Der zyklische Code mit Generator-Polynom G(x) erkennt einen Fehler genau dann, wenn G(x) das Fehlerwort F(x) nicht ohne Rest teilt.
  - Wenn der Grad des Fehlerpolynoms kleiner ist als der Grad r des erzeugenden Polynoms G(x), ist G(x) kein Teiler von F(x).

  $\Rightarrow$ Eine beliebige Störung im CRC-Feld wird erkannt, da der Grad des Restpolynoms R(x) $\leq$ r-1 ist.

  $\Rightarrow$ Bei einem r-Bit-CRC werden (r-1)-Burst-Fehler immer erkannt, längere Fehler können <u>bei geeigneter Wahl</u> des Generator-Polynoms <u>mit hoher Wahrscheinlichkeit erkannt</u> werden.

Standardisierte Generator-Polynome

- **CRC-16:** $x^{16}+x^{15}+x^{2}+1$

- **CRC-CCITT:** $x^{16}+x^{12}+x^{5}+1$ **(auch ISO 2111, ISO 3309)**

- **CRC-32:** $x^{32}+x^{26}+x^{23}+x^{22}+x^{16}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^{8}+x^{7}+x^{5}+x^{4}+x^{2}+x+1$
  (Ethernet)