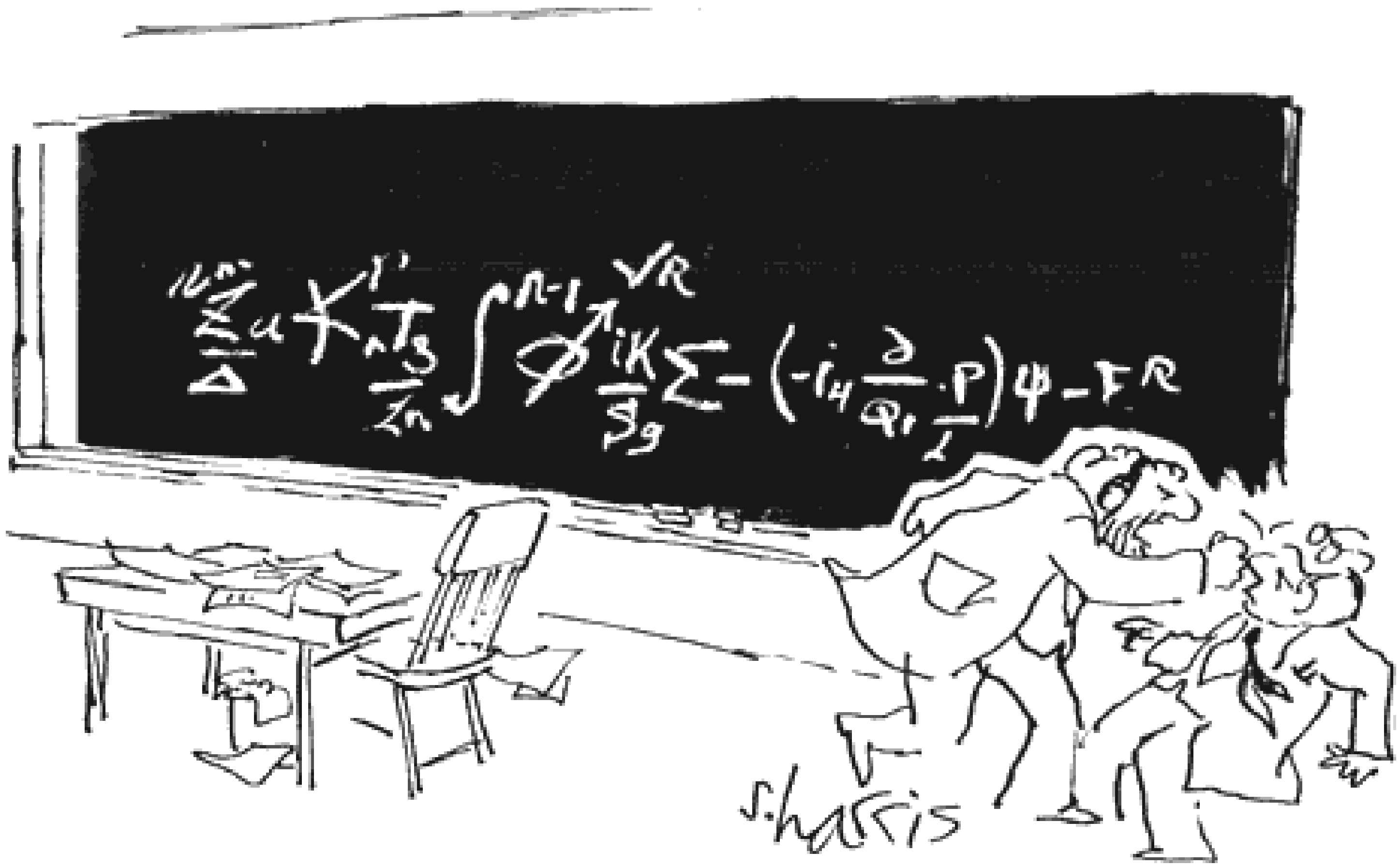
Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

Kapitel 4

Beweisen

Inhalt

4.1 Beweisarten



"You want proof? I'll give you proof!"

Wozu Beweise?

Ein **mathematischer Beweis** dient verschiedenen Zwecken:

Beweise

- ermöglichen die vollständige Überprüfung von Sachverhalten.
- helfen Kritik und Irrtümer auszuräumen.
- ermöglichen die selbstständige Einarbeitung in neue Gebiete.
- dienen der Gewinnung von neuem Wissen.

Beispiele genügen nicht!

Behauptung: Für jede natürliche Zahl n ist

$$n^2 + n + 41$$

eine Primzahl.

Ausprobieren: siehe Tabelle rechts

→ alles Primzahlen!

Also stimmt es, oder?

n	$n^2 + n + 41$
1	43
2	47
3	53
4	61
5	71
6	83
7	97
8	113
9	131
10	151
11	173
12	197
13	223
14	251
15	281
16	313
17	347
18	383
19	421
20	461
21	503
22	547
23	593
24	641
25	691
26	743
27	797
28	853
29	911
30	971

Beispiele genügen nicht!

Aber: Für $n = 40$ ergibt sich für $n^2 + n + 41$:

$$40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot 41.$$

Dies ist ein Vielfaches von 41, also *keine* Primzahl!

Mathematische Sätze müssen

- **allgemein bewiesen** werden (nicht nur an Beispielen überprüft)
- oder durch ein **Gegenbeispiel widerlegt** werden.

Beweise

Jeder mathematische Satz ist eine Wenn-Dann-Aussage:

$$A \to B.$$

Aus gewissen Aussagen A (der **Voraussetzung**) folgt eine andere Aussage B (die **Behauptung**).

Beispiel: Der Satz des Pythagoras lautet nicht „$a^2 + b^2 = c^2$ “, sondern: „Wenn a, b, c die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sind, dann ...“

Die Behauptung ergibt sich aus der Voraussetzung durch die Gesetze der Logik und *nur* durch diese. Diese Ableitung nennt man **Beweis**.

Direkter Beweis

Direkter Beweis. Aus der Voraussetzung A wird „direkt“ die Behauptung B bewiesen. Die geschieht nach folgendem Muster:

> **Beweis.** Sei A erfüllt.
> Bla, bla, bla. (Hier braucht man Routine, manchmal auch geniale Gedanken ...)
> Also gilt B. □

Beispiel:

Satz. Wenn eine natürliche Zahl n durch 6 teilbar ist, dann ist n gerade.

Beweis. Sei n eine natürliche Zahl, die durch 6 teilbar ist. Dann gibt es eine natürliche Zahl k mit $n = 6 \cdot k$. Es folgt: $n = 6 \cdot k = 2 \cdot 3 \cdot k$. Sei $h = 3k$, dann folgt: $n = 2h$. Also ist n gerade. □

Beweis durch Kontraposition

Beweis durch Kontraposition. Statt „$A \rightarrow B$“, kann man genauso gut die Aussage „$\neg B \rightarrow \neg A$“ zeigen! Diese beiden Implikationen sind logisch äquivalent. Muster:

> **Beweis.** Es gelte die Aussage $\neg B$ („nicht B“).
>
> Bla, bla, bla. (Hier braucht man Routine, manchmal auch geniale Gedanken ...)
>
> Also gilt $\neg A$. □

Beispiel: **Satz.** Sei $n \in N$. Wenn n^2 ungerade ist, dann ist n ungerade.

Beweis. Wir zeigen stattdessen: Wenn n gerade ist, dann ist n^2 gerade.
Sei n gerade. Dann gibt es eine natürliche Zahl k mit $n = 2k$. Es folgt:
$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$. Also ist auch n^2 gerade. □

Widerspruchsbeweis

Widerspruchsbeweis. Um „$A \rightarrow B$“ zu zeigen, nimmt man an, B würde nicht gelten, und führt dies zu einem Widerspruch.

> **Beweis.** Es gelte die Aussage A. Angenommen, B wäre falsch. Bla, bla, bla. (Hier braucht man Routine, manchmal auch geniale Gedanken ...) Also ergäbe sich ein Widerspruch. Dieser zeigt, dass die Annahme falsch war. Also gilt die Aussage. □

Beispiel: Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen (Kapitel 3): Wir nehmen an, dass sich die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 abzählen lassen … Konstruktion einer Zahl t, die nicht der Liste liegt ... Widerspruch! Also lassen sich die reellen Zahlen nicht abzählen.

Beweis von Äquivalenzen

Äquivalenzen. Manche Sätze haben die Form „$A \leftrightarrow B$“ (A gilt genau dann, wenn B gilt). Dies ist logisch äquivalent zu „$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$“.

> **Beweis.** Wir zeigen zunächst „$\rightarrow$“: Es gelte die Aussage A.
>
> Bla, bla, bla. (Hier braucht man Routine, manchmal auch geniale Gedanken ...)
>
> Also gilt B.
>
> Wir zeigen jetzt „$\leftarrow$“: Es gelte die Aussage B.
>
> Bla, bla, bla. (Hier braucht man Routine, manchmal auch geniale Gedanken ...)
>
> Also gilt A. □

Beispiel: In Kapitel 3 haben wir so den folgenden Satz bewiesen:

Satz. Eine Relation R ist genau dann symmetrisch, wenn $R^{-1} = R$ ist.

4.2 Schubfachprinzip

Schubfachprinzip

Die folgenden Aussagen sind offenbar richtig:

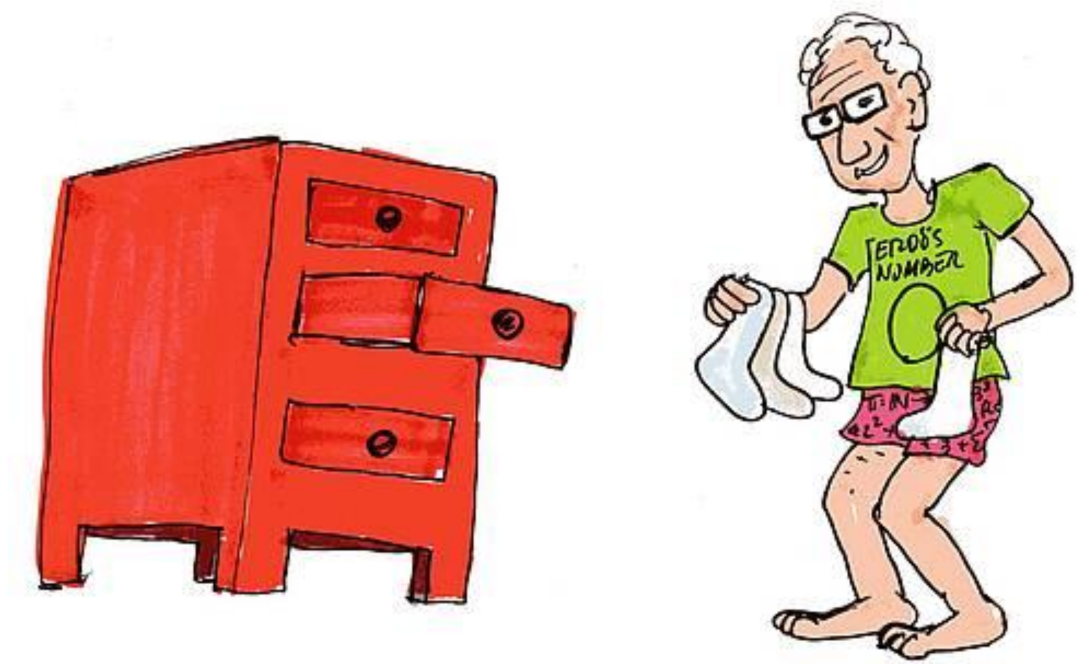
- Unter je 13 Personen gibt es mindestens zwei, die im selben Monat Geburtstag haben.
- Unter je drei Personen haben mindestens zwei dasselbe Geschlecht.
- Unter je vier Informatik-Studierenden (AI, TS, WI) gibt es mindestens zwei aus demselben Studiengang.

Dies können wir allgemein formulieren.

Schubfachprinzip. Seien m Objekte in n Kategorien („Schubfächer") eingeteilt. Wenn $m > n$ ist, so gibt es mindestens eine Kategorie, die mindestens zwei Objekte enthält.

Beispiel

Wenn man 4 Socken in 3 Schubfächer räumt, gibt es ein Schubfach, das mindestens 2 Socken enthält.

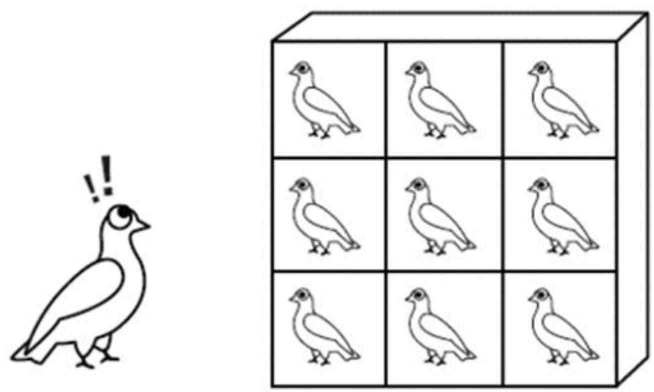


Veranschaulichung

Das Schubfachprinzip heißt manchmal auch „**Taubenschlagprinzip**"
(„pigeonhole principle").

Es wurde erstmals von L. Dirichlet (1805 - 1859) explizit formuliert.

Die **Veranschaulichung** ist auch klar:
Wenn viele Tauben sich auf wenige Taubenschlägen verteilen, dann sitzen in mindestens einem Taubenschlag mindestens zwei Tauben.



1. Anwendung: Die Socken des Professors

In der Sockenkiste von Professor X befinden sich 10 graue und 10 braune Socken. Der Professor nimmt – in Gedanken versunken – eine Reihe von Socken heraus. Wie viele muss er herausnehmen, um

(a) garantiert zwei gleichfarbige,

(b) garantiert zwei graue Socken zu erhalten?

Lösung: Einteilung der Socken in $n = 2$ Kategorien: grau und braun.

(a) Wenn der Professor $m = 3$ Socken seiner Kiste entnimmt, so sind nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei aus derselben Kategorie.

(b) Er muss im schlimmsten Fall 12 Socken ziehen, denn die ersten 10 könnten ja alle braun sein.

Übung

In einer Gruppe von mindestens ……. haben mindestens zwei am gleichen Wochentag Geburtstag.

2. Anwendung: Differenzen von Zahlen

Satz. Unter je sechs natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Differenz durch 5 teilbar ist.

Beispiel: Sind die Zahlen 8, 17, 21, 25, 33, 49, so ergibt sich, dass 33 – 5 = 25 durch 5 teilbar ist.

Beweis. Um das Schubfachprinzip anwenden zu können, müssen wir wissen, was die Objekte und was die Kategorien sind.
Die Objekte sind die 6 natürlichen Zahlen.
Diese werden nun in fünf Kategorien $K_0, K_1, ..., K_4$ eingeteilt:

Beweis

K_0: diejenigen Zahlen, die Vielfache von 5 sind,

K_1: diejenigen Zahlen, die bei Division durch 5 Rest 1 ergeben.

K_2: diejenigen Zahlen, die bei Division durch 5 Rest 2 ergeben.

...

K_4: diejenigen Zahlen, die bei Division durch 5 Rest 4 ergeben.

Da jede Zahl bei Division durch 5 den Rest 0, 1, 2, 3 oder 4 ergibt, ist jede Zahl in mindestens einer Kategorie enthalten.

Schubfachprinzip $\Rightarrow$ Es gibt eine Kategorie mit zwei Objekten.
Also gibt es zwei Zahlen, die bei Division durch 5 denselben Rest ergeben. Das bedeutet: Die Differenz ist durch 5 teilbar. $\square$

Verallgemeinertes Schubfachprinzip

Verallgemeinertes Schubfachprinzip. Seien m Objekte in n Kategorien eingeteilt. Wenn $m > r \cdot n$ ist, so enthält mindestens eine Kategorie mindestens $r+1$ Objekte.

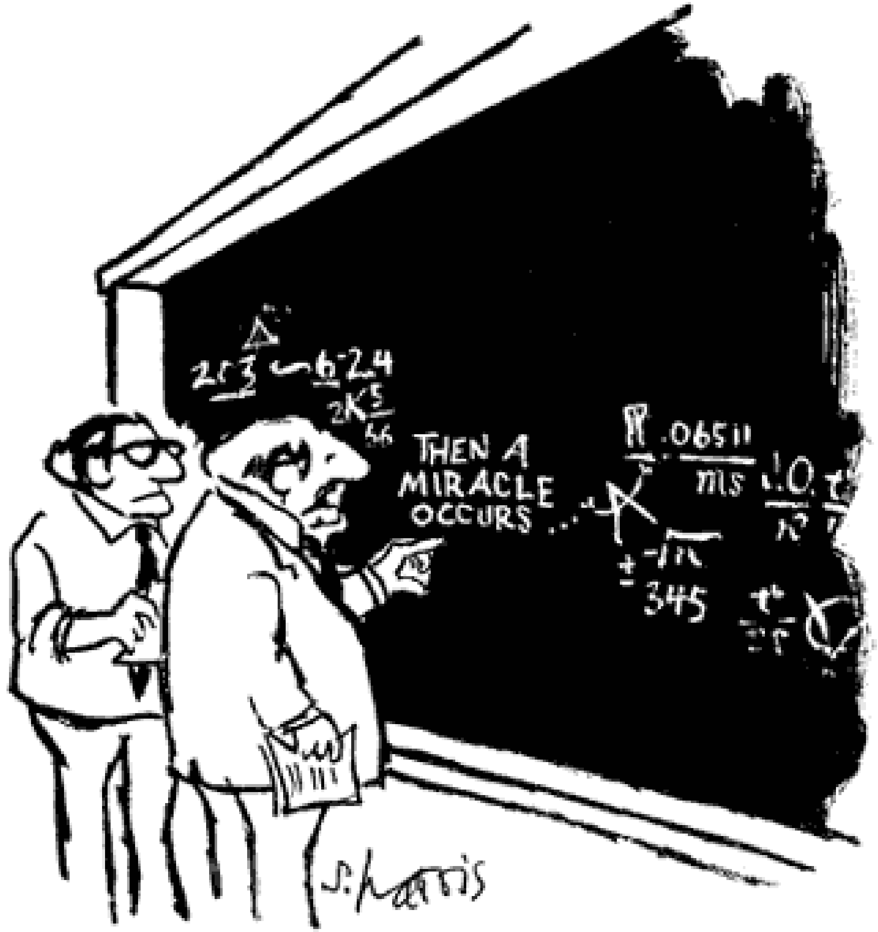
Beweis. Wenn jede Kategorie höchstens r Objekte enthalten würde, so gäbe es insgesamt höchstens $r \cdot n$ Objekte. ❑

Bemerkung. Das einfache Schubfachprinzip ergibt sich daraus, wenn man $r = 1$ setzt.

Übung

Wenn sich ……… Tauben auf 5 Taubenschläge verteilen, so gibt es mindestens einen Taubenschlag mit mindestens 4 Tauben.

4.3 Vollständige Induktion



"I think you should be more explicit here in step two."

A(n)

In der Mathematik und Informatik gibt es oft Aussagen, die von einer natürlichen Zahl n abhängen.

Beispiele:

A(n): Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $n(n+1)/2$.

A(n): Die Anzahl der Sitzordnungen von n Studierenden auf n Stühlen ist $n!$ (Fakultät).

A(n): Ein bestimmter Sortieralgorithmus für n Zahlen hat Laufzeit $O(n^2)$.

A(n): Wenn n Computer zu je zweien durch eine Leitung verbunden werden, so braucht man genau $n(n-1)/2$ Leitungen.

Beweis von A(n)?

Dass solche Aussagen A(n) für *alle* natürlichen Zahlen n gelten, kann man prinzipiell nicht dadurch beweisen, dass man alle Fälle einzeln ausprobiert.

Man muss die unendlich vielen Fälle sozusagen „auf einen Schlag“ erledigen. Dazu dient die **vollständige Induktion**.

Bemerkung: Unter „Induktion“ versteht man (im Gegensatz zur „Deduktion“) eigentlich das – logisch unzulässige – Schließen von Einzelfällen auf alle Fälle. Die „vollständige“ Induktion ist ein Werkzeug, mit dem man das sauber machen kann.

Das Prinzip der vollständigen Induktion

Sei A eine Aussage oder eine Eigenschaft, die von einer natürlichen Zahl n abhängt. Wir schreiben auch $A(n)$.

Wenn wir wissen, dass folgendes gilt:

> **(1) Induktionsbasis** (**Induktionsverankerung**): Die Aussage A gilt für $n = 1$ (das heißt, es gilt $A(1)$),
>
> **(2) Induktionsschritt:** Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: Wenn $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$,

dann gilt die Aussage A für alle natürlichen Zahlen ≥ 1.

Zum Prinzip der vollständigen Induktion

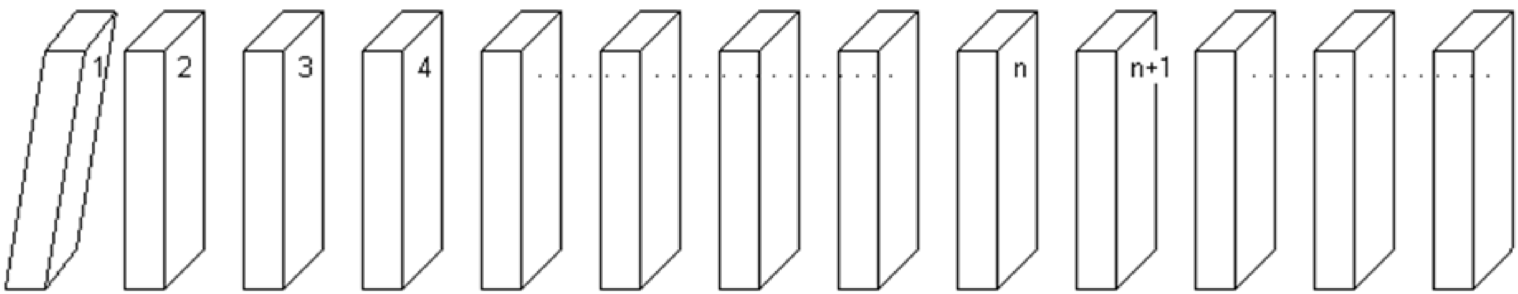
Zum Prinzip der vollständigen Induktion

Wenn wir wissen, dass folgendes gilt:

(1) „**Induktionsbasis**“: Der 1. Dominostein fällt um,

(2) „**Induktionsschritt**“: *Wenn* der n-te Dominostein umfällt, *dann* fällt auch der (n+1)-te Dominostein um,

dann fallen alle Dominosteine um.



Erläuterung

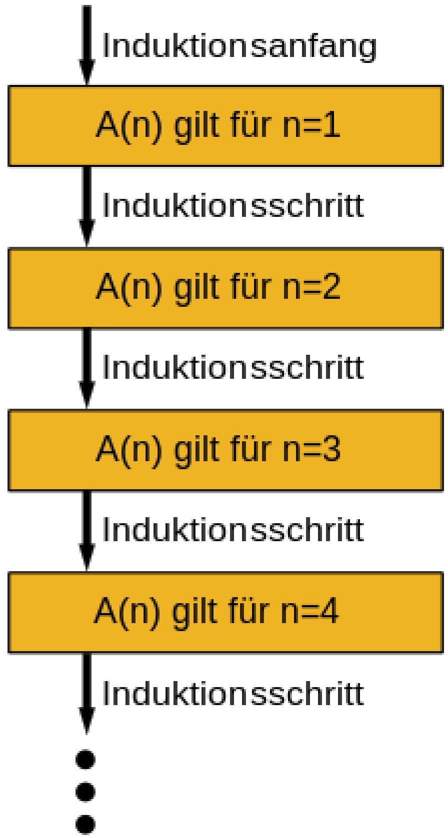
Bedeutung der vollständigen Induktion:

Um eine Aussage über *unendlich viele* Objekte nachzuweisen, muss man nur *zwei* Aussagen beweisen:

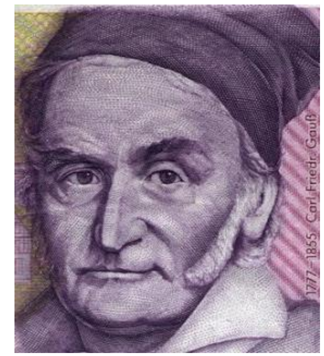
Induktionsbasis: A(1)

Induktionsschritt: A(n) $\rightarrow$ A(n+1)

Daraus folgt die Gültigkeit von A(n) für *alle* natürlichen Zahlen n $\geq$ 1 (siehe Abbildung).



Die Summe der ersten natürlichen Zahlen



Problem: Carl Friedrich Gauß wurde als 9-jährigem Schüler die Aufgabe gestellt: $1 + 2 + 3 + ... + 100 = ?$

Satz. Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:

$$1 + 2 + ... + n = n \cdot (n+1)/2.$$

In Worten: Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ≥ 1 ist gleich $n \cdot (n+1)/2$.

Konsequenz: Man kann die Summe $1 + 2 + 3 + ... + n$ ganz einfach direkt ausrechnen, und es passieren kaum Rechenfehler.

Beweis durch vollständige Induktion

Beweis durch vollständige Induktion nach n.

Die Aussage $A(n)$ sei die Aussage des Satzes, also:

$$A(n): \quad 1 + 2 + 3 + ... + n = n \cdot (n+1)/2.$$

Sowohl bei der Induktionsbasis als auch beim Induktionsschritt zeigen wir, dass in der entsprechenden Gleichung links und rechts das Gleiche steht.

Induktionsbasis: Sei $n = 1$. Dann steht auf der linken Seite nur der Summand 1, und auf der rechten Seite steht $1 \cdot 2/2$, also ebenfalls 1. Also gilt $A(1)$.

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsschritt: Sei n eine natürliche Zahl ≥ 1, und sei die Aussage richtig für n, d. h. es gelte $A(n)$ (**Induktionsvoraussetzung**). Wir müssen daraus $A(n+1)$ folgern, das heißt, zu zeigen ist

$$A(n+1)\colon\ 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) \overset{!}{=} (n+1)\cdot(n+2)/2.$$

Dies zeigen wir, indem wir ausnutzen, dass die Formel für n gilt:

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n} + (n+1) && \mid \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ = {} & \quad n\cdot(n+1)/2 \quad + (n+1) && \mid \text{Erweitern von } (n+1) \text{ mit } 2 \\ = {} & n\cdot(n+1)/2 + 2\cdot(n+1)/2 && \mid \text{Ausklammern von } (n+1)/2 \\ = {} & (n+2)(n+1)/2. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Aussage $A(n+1)$ bewiesen.

Der Trick von Gauß

Gauß hat die Summe 1 + 2 + 3 + ... + 100 nicht so bestimmt, sondern mit folgendem genialen Trick:

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\
+ & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
= & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \ldots & + & n+1 & + & n+1 & + & n+1
\end{array}
$$

$$= n \cdot (n+1).$$

Also gilt $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n \cdot (n+1)/2$.

Dreieckszahlen

Die Zahlen der Form 1 + 2 + 3 + … + n, also die Zahlen 1, 3, 6, 10, 15, ... heißen **Dreieckszahlen**.

1   1+2 = 3   1+2+3=6   1+2+3+4=10   1+2+3+4+5=15

Man kann den vorigen Satz also auch so ausdrücken:

Die n-te Dreieckszahl ist gleich $n \cdot (n+1)/2$.

Summe der ungeraden Zahlen

Satz. Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

In Worten: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist gleich der n-ten Quadratzahl.

Beispiele: $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + ... + 1999 = 1.000.000$

Beweis durch Induktion nach n. Die Aussage $A(n)$ sei die Aussage des Satzes, also $A(n)$: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Induktionsbasis: Sei $n = 1$. Dann steht auf der linken Seite nur der Summand 1, und auf der rechten Seite steht $1^2 = 1$. Somit gilt $A(1)$.

Beweis

Induktionsschritt: Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$, und es gelte A(n). Wir müssen A(n+1) nachweisen, d. h. zu zeigen ist

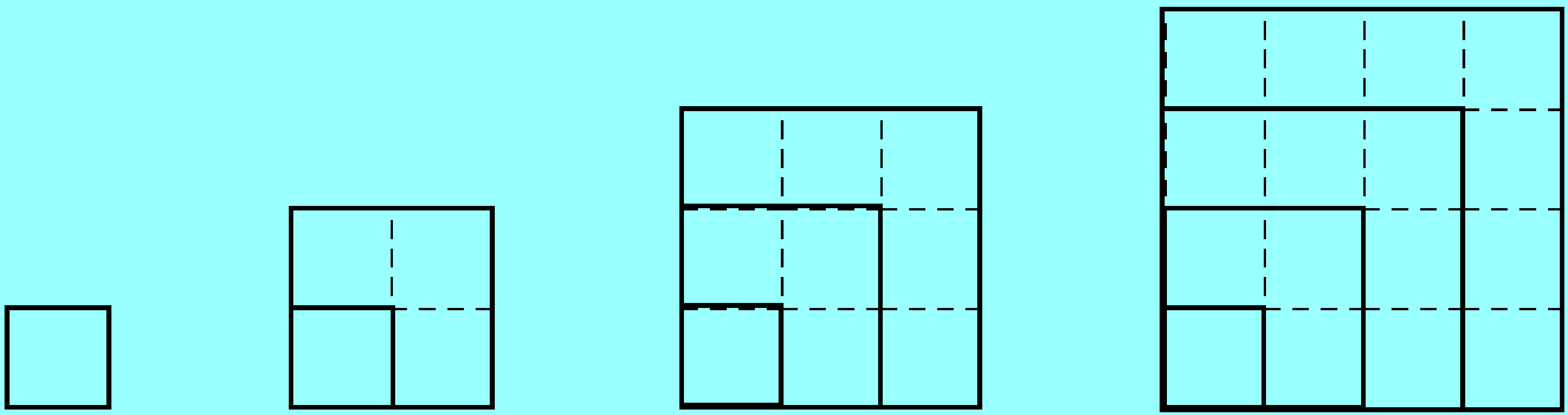
A(n+1): $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) \overset{!}{=} (n + 1)^2$.

Dies zeigen wir, indem wir ausnutzen, dass die Formel für n gilt:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)}_{} + (2n + 1) && \mid \text{nach Ind.voraus.} \\
&= n^2 + 2n + 1 && \mid \text{1. binomische Formel} \\
&= (n + 1)^2.
\end{aligned}$$

Damit haben wir A(n+1) und somit den gesamten Satz bewiesen.

„Beweis“ ohne Worte



$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

Beispiel

Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach n:

$$1 + 2 + 4 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Übung

Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach n:

$$3 + 7 + 11 + \ldots + (4n - 1) = n \cdot (2n + 1).$$

Induktion mit anderem Startwert

Man kann mit Induktion auch Aussagen $A(n)$ beweisen, die erst ab einer gewissen Zahl n_0 gelten.

Satz. Für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ gilt

$$n! > 2^n.$$

Beweis durch Induktion nach n.

Induktionsbasis: Sei $n = 4$. Dann ist

$$n! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ und}$$

$$2^n = 2^4 = 16.$$

Da $24 > 16$ ist, gilt die Behauptung in diesem Fall.

Beweis

Induktionsschritt: Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 4$, und sei die Behauptung richtig für n. Dann folgt

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

$$\geq (n+1) \cdot 2^n \qquad \text{(nach Induktion)}$$

$$\geq 2 \cdot 2^n \qquad \text{(da } n+1 \geq 5 \geq 2\text{)}$$

$$= 2^{n+1}.$$

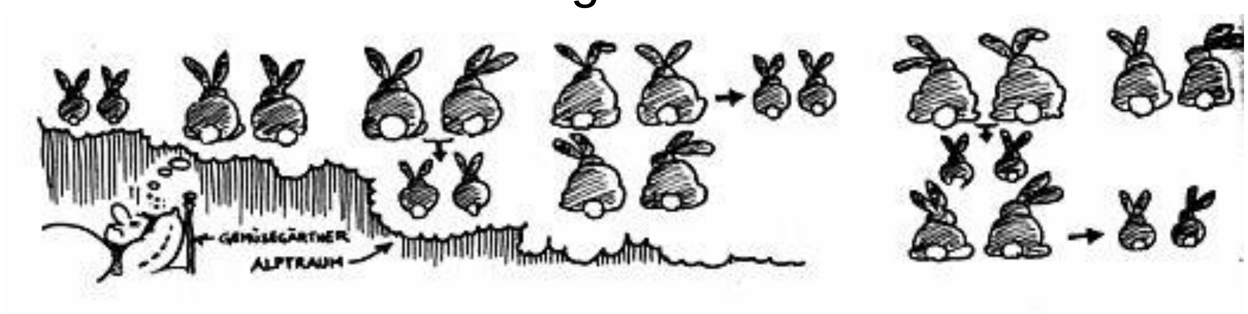
Also ist der Induktionsschritt richtig, und somit folgt die Behauptung. ❑

Fibonaccis Aufgabe

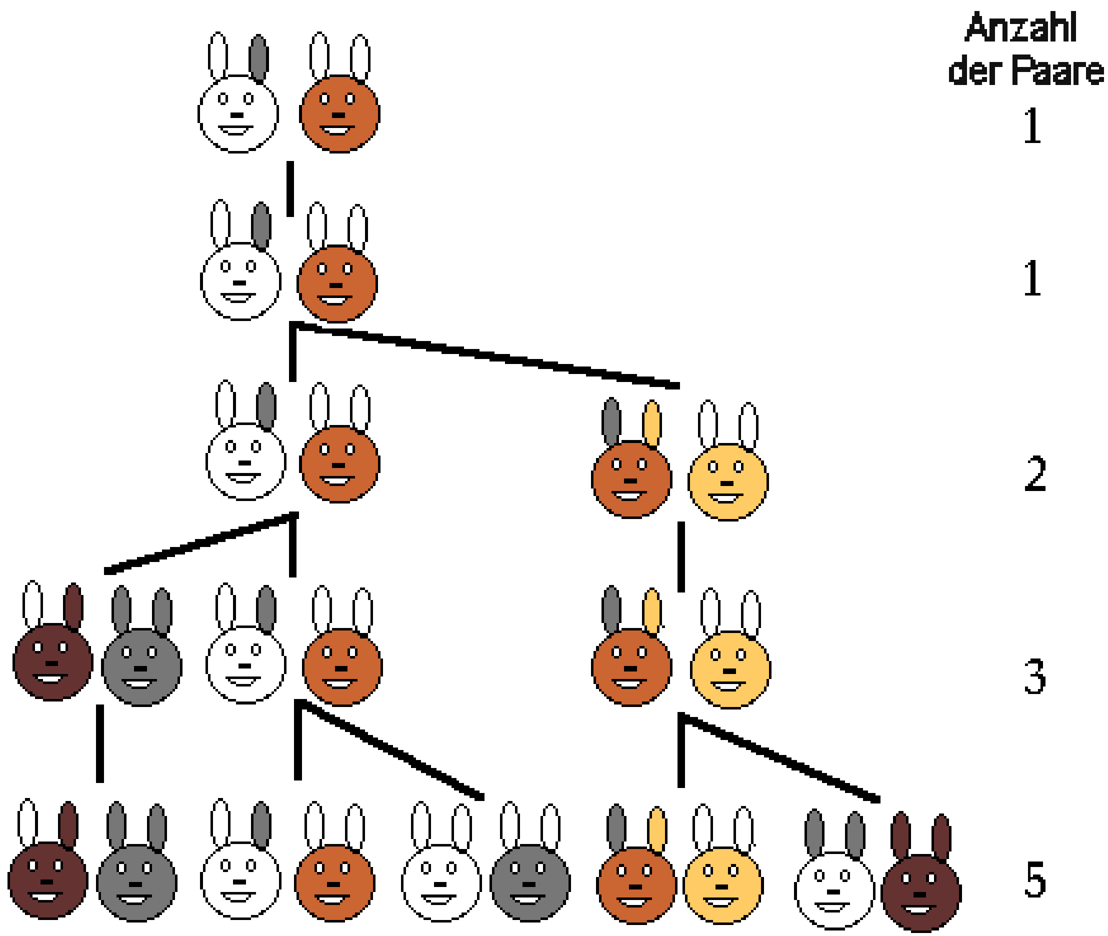
Fibonacci (= Leonardo von Pisa) stellte um 1200 die Aufgabe:

Kaninchen (jedenfalls mathematische) vermehren sich nach folgenden Regeln:

- Jedes Kaninchenpaar braucht nach seiner Geburt zwei Monate, bis es geschlechtsreif ist.
- Von da an gebiert es in jedem Monat ein neues Paar.
- Alle Kaninchen leben ewig.



Kaninchenvermehrung



Fibonacci-Zahlen

Wenn f_n die Anzahl der Kaninchen zu Beginn des n-ten Monats bezeichnet, dann sind die f_n genau die Fibonacci-Zahlen:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

(Rekursive) Definition der Fibonacci-Zahlen:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1$$

und

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

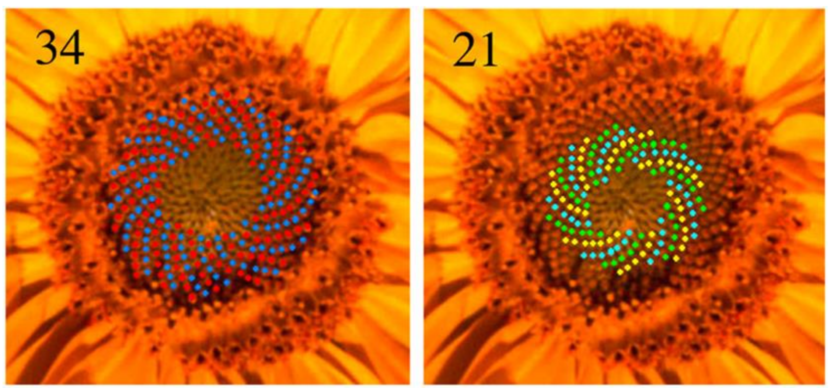
Kurz: Jedes Folgenglied ist die Summe seiner beiden Vorgänger.

Hier wird das Induktionsprinzip für eine (rekursive) Definition benutzt.

Fibonacci-Zahlen in der Natur

Fibonacci-Zahlen kommen in der Natur häufig vor.

Beispiel: Bei Sonnenblumen sind die Kerne in Spiralen angeordnet, die nach links und nach rechts drehen. Die Anzahlen der linksdrehenden und der rechtsdrehenden Spiralen sind aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen.



Wie kann man Fibonacci-Zahlen ausrechnen?

Für die Fibonacci-Zahlen gibt es eine explizite Formel, in die man n einsetzen kann, um f_n direkt auszurechnen.

Satz (Binet-Formel). *Für jede natürliche Zahl* $n \geq 1$ *gilt*

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Bemerkung. Das Erstaunliche an dieser Formel ist, dass sich für jedes n die Wurzelterme so weg heben, dass nur eine natürliche Zahl, nämlich f_n stehenbleibt.

Beweis (Induktionsbasis)

Beweis durch Induktion nach n. Die Aussage A(n) ist

A(n): $f_n = [((1+\sqrt{5})/2)^{\mathbf{n}} - ((1-\sqrt{5})/2)^{\mathbf{n}}] / \sqrt{5}$.

Induktionsbasis: Sei n = 1. Wir müssen die Aussage A(1) beweisen. Dazu rechnen wir einfach die Formel für den Fall n = 1 aus:

$$\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1 = f_1.$$

Auch A(2) gilt:

$$\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = 1 = f_2.$$

Beweis (Induktionsschritt)

Induktionsschritt: Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$, und es mögen die Aussagen $A(n)$ und $A(n-1)$ gelten.

Wir müssen zeigen, dass dann auch $A(n+1)$ gilt. Dazu verwenden wir die Rekursionsformel $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, und wenden sowohl auf f_n also auch auf f_{n-1} die Induktionsvoraussetzung an:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right]}{\sqrt{5}}.$$

Wie kann man diese monströse Formel auflösen???

Beweis (das Wunder)

Wir können die eckigen Klammern günstig umformen:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}+1=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Man sieht beide Formeln sofort ein, wenn man die jeweiligen rechten Seiten ausrechnet.

Nun kann uns aber nichts mehr hindern, weiterzurechnen:

$$\ldots = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^2}{\sqrt{5}}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

... und damit ist die Aussage $A(n+1)$ und somit der Satz bewiesen.

Der goldene Schnitt

Wie in der Binet-Formel bereits deutlich wurde, stehen die Fibonacci-Zahlen in engem Zusammenhang mit der Zahl

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618.$$

Diese Zahl („phi") heißt **goldener Schnitt** und ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$.

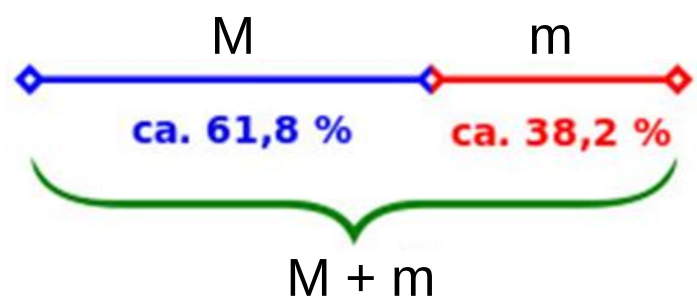
Man kann zeigen, dass die Folge f_{n+1} / f_n der Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen φ konvergiert.

Der goldene Schnitt

Der goldene Schnitt hat folgende schöne Eigenschaft:

Wenn man eine Strecke so teilt, dass sich die größere Teilstrecke M zur kleineren Teilstrecke m so verhält wie die Gesamtstrecke M + m zum größeren Teil M, das heißt

$$\frac{M}{m} = \frac{M+m}{M},$$



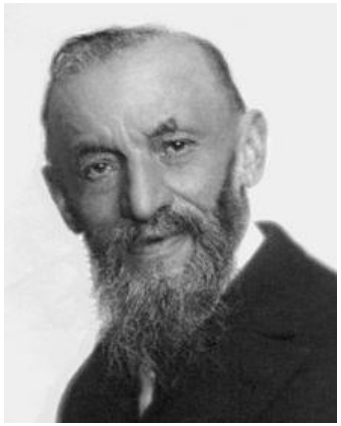
so ist dieses Verhältnis gleich φ.

φ in der Kunst

Viele Künstler verwendeten den goldenen Schnitt bewusst, da sich dieses Verhältnis als besonders ästhetisch erwiesen hat.

Die Peano-Axiome

Die **natürlichen Zahlen** kann man **induktiv definieren**. Giuseppe Peano hat 1889 die **Peano-Axiome** für die natürlichen Zahlen formuliert:



1. 0 ist eine (natürliche) Zahl.
2. Jede Zahl n hat genau einen Nachfolger n'.
3. 0 ist nicht Nachfolger einer Zahl.
4. Jede Zahl ist höchstens Nachfolger einer Zahl.
   Das heißt aus n' = m' folgt n = m.
5. (Induktionsaxiom) Jede Menge von natürlichen Zahlen, die die Zahl 0 enthält und die zu jeder Zahl n auch deren Nachfolger n' enthält, enthält alle natürlichen Zahlen.

Was kann man mit den Peano-Axiomen machen?

- Alle natürlichen Zahlen definieren
  - 1 := 0‘, 2 := 1‘ (= 0‘‘), 3 := 2‘ (= 0‘‘‘), und so weiter.
- Rechenoperationen definieren
  - n+1 := n‘, n+2 := (n+1)‘ (= n‘‘), n+3 := …
  - Multiplikation ist fortgesetzte Addition: $3 \cdot 5 := 5+5+5$
- Rechengesetze beweisen:
  - Kommutativität: n+m = m+n
    - » Beweis durch Induktion nach m:
    - » Induktionsbasis: m = 1, d.h. n+1 = 1+n. Beweis durch Induktion nach n: n = 1: 1+1 = 1+1. „n $\Rightarrow$ n+1“: LS = (n+1)+1 = n‘+1 = n‘‘ = n+2; RS = 1+(n+1) = 1‘‘‘‘‘ (n+1 Striche) = 0‘‘‘‘‘ (n+2 Striche) = n+2.
„m $\Rightarrow$ m+1“ ähnlich.

"THIS MUST BE FIBONACCI'S."