Quantencomputing

Modul 7270

Martin Rehberg

Hessen3C / Hochschule RheinMain

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ziele von Quantencomputing:

- Quantencomputer bauen
- Quantenalgorithmen entwickeln / untersuchen

Einleitung

Ziele von Quantencomputing:

- Quantencomputer bauen
- Quantenalgorithmen entwickeln / untersuchen

Ziel der Vorlesung:

- Einführung in die grundlegende Funktionsweise von Quantencomputern
  - physikalischen Grundlagen als *gegeben* annehmen
  - Mathematik werden wir nach Bedarf erarbeiten / wiederholen
- Anwendungen mit Blick auf Verschlüsselungsverfahren

Einleitung

Literatur:[1]

- Matthias Homeister - Quantencomputing verstehen (**Hauptquelle**), 5. Auflage, Springer, 2018.
- Artuhr Pittenger - An Indroduction to Quantum Computing Algorithms, Birkhäuser, 2001.
- Michael Nielsen, Isaac Chuang - Quantum Computation and Quantum Information, 10. Auflage, Cambridge University Press, 2010.
- Dirk Hoffmann - Theoretische Informatik, 2. Auflage, Hanser, 2011.

[1] verwendete Grafiken sind allesamt dem Buch von M. Hohmeister oder Wikipedia (public domain) entnommen

Einleitung

Klassische Welt

- mechanische Rechenmaschinen
  - Difference Engine, Analytical Engine - Charles Babbage
  - Schachmaschine - Leonardo Quevedo
- elektromechanische Rechenmaschinen
  - Z3, Z4 - Konrad Zuse
  - Kryptoanalyse - Colossus
- *moderne* Rechenmaschinen

Einleitung

Beobachtung

Ein **klassisches Bits** kann genau zwei unterschiedliche Zustände annehmen: 0 und 1. Sie haben zwei wesentliche Eigenschaften

- **Realismus:** Der Wert eines Bits ist zu jedem Zeitpunkt der Berechnung eindeutig bestimmt, d.h. entweder 0 oder 1. Er kann ausgelesen werden und der Prozess des Auslesens ändert den Wert des Bits nicht.
- **Lokalität:** Wird der Wert eines bestimmten einzelnen Bits verändert, so ändert das nicht den Wert *irgendeines* anderen Bits.

Einleitung

Quantenwelt

- Quantencomputer rechnen mit Quantenbits
- Quantenbits folgen den Gesetzen der Quantenmechanik
- Quantenbits sind in einem Zustand der *Superposition*, d.h. sind von der Form $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
- Quantenbits können in einem *verschränkten* Zustand sein

Einleitung

Beobachtung

Ein **Quantenbit** ist in einem Zustand der Superposition. Im Vergleich zum klassischen Bit stellen wir fest:

- **Veränderung beim Messen:** Wird ein Quantenbit gemessen, so wird der Zustand der Superposition aufgehoben und das Quantenbit wechselt in einen der beiden (klassischen) Zustände 0 oder 1. Durch den Messvorgang wird das Quantenbit mit dem entsprechenden Werte 0 oder 1 überschrieben.
- **Verschränkung:** Die Veränderung eines Quantenbits kann unmittelbar (also im selben Augenblick) die Eigenschaft eines anderen Quantenbits verändern.

Einleitung

Verschränkung von Quantenbits hat weitreichende Folgen, etwa

- Primfaktorisierung $\rightsquigarrow$ RSA-Verfahren
- diskreter Logarithmus $\rightsquigarrow$ Elliptic Curve Diffie-Hellman
- Suche in Datenbanken, u.v.m.

Einleitung

Verschränkung von Quantenbits hat weitreichende Folgen, etwa

- Primfaktorisierung $\rightsquigarrow$ RSA-Verfahren
- diskreter Logarithmus $\rightsquigarrow$ Elliptic Curve Diffie-Hellman
- Suche in Datenbanken, u.v.m.

Es gibt aber nicht nur Vorteile:

- No-Cloning Theorem
- (vermutlich) können Quantencomputer NP-vollständige Probleme nicht effizient lösen
- Fehlerkorrektur

Berechenbarkeit und Turingmaschinen

Berechnung (intuitiv)

Einem *Berechnungsgerät* wir eine Eingabe übergeben. Anschließend führt das Gerät deterministisch Berechnungen durch.
Eine *Berechnung* ist eine Folge von Zuständen des Berechnungsgerätes. Jeder Rechenschritt ist ein Übergang zwischen den Zuständen und hängt allein vom aktuellen Zustand ab.

Berechenbarkeit und Turingmaschinen

Definition: Alphabet, Zeichen, Wort, formale Sprache

- Ein *Alphabet* Σ ist eine endliche Menge von Symbolen.
- Ein Element $\sigma \in \Sigma$ heißt *Zeichen* des Alphabets.
- Ein Element $\omega \in \Sigma^* := \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$ wird *Wort* über Σ genannt, wobei $\Sigma^0 := \{\varepsilon\}$. Man nennt ε das *leere Wort*.
- Eine Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ wird *formale Sprache* über Σ genannt.

Berechenbarkeit und Turingmaschinen

Definition: Alphabet, Zeichen, Wort, formale Sprache

- Ein *Alphabet* Σ ist eine endliche Menge von Symbolen.
- Ein Element $\sigma \in \Sigma$ heißt *Zeichen* des Alphabets.
- Ein Element $\omega \in \Sigma^* := \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$ wird *Wort* über Σ genannt, wobei $\Sigma^0 := \{\varepsilon\}$. Man nennt ε das *leere Wort*.
- Eine Teilmenge L$\subseteq \Sigma^*$ wird *formale Sprache* über Σ genannt.

Beispiel Palindromsprache

Für $\Sigma = \{a, b, c, ..., x, y, z\}$ sei L die Menge aller spiegelbildlich angeordneten Zeichenketten. In dieser Sprache sind die Wörter *aabaa*, *anna* und *otto* enthalten. Nicht enthalten sind *abab*, *abc* oder *aaba*.

Berechenbarkeit und Turingmaschinen

Definition: Turingmaschine

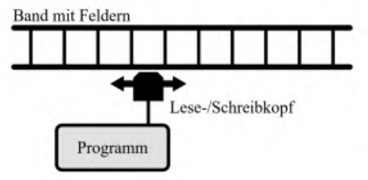
Eine (deterministische) *Turingmaschine* (TM) ist ein 7-Tupel $(S, \Sigma, \Pi, \delta, s_0, \square, E)$, bestehend aus

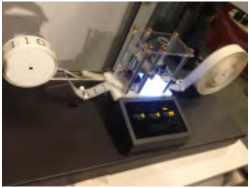
- der endlichen *Zustandsmenge* S,
- dem endlichen *Eingabealphabet* Σ,
- dem *Bandalphabet* Π mit $\Pi \supset \Sigma$,
- der *Zustandsübergangsfunktion* $\delta : S \times \Pi \to S \times \Pi \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$,
- dem *Startzustand* s_0,
- dem *Blank-Symbol* $\square \in \Pi \setminus \Sigma$,
- der Menge der *Endzustände* $E \subseteq S$.

Berechenbarkeit und Turingmaschinen

Startkonfiguration:

- TM ist im Startzustand s_0
- zu verarbeitendes Eingabewort $\omega \in \Sigma^*$ steht auf dem Band
- Lese-/Schreibkopf über dem ersten Eingabezeichen positioniert
- alle Felder links und rechts des Eingabewortes sind mit dem Blank-Symbol $\Box$ beschrieben

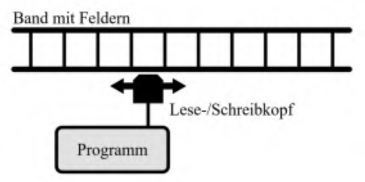


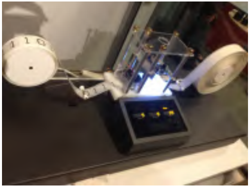


Berechenbarkeit und Turingmaschinen

Programmablauf:

- Der Lese-/Schreibkopf liest das aktuelle Bandzeichen σ ein
- Der Funktionswert $(s', \sigma', r) = \delta(s, \sigma)$ wird berechnet
- Das Bandzeichen wird durch σ' ersetzt
- Der Kopf wird nach links ($\leftarrow$) oder rechts ($\rightarrow$) bewegt
- Der Folgezustand s' wird angenommen





Berechenbarkeit und Turingmaschinen

Definition: (Turing-) Berechenbarkeit

Eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ heißt *(turing-) berechenbar*, wenn eine TM $T = (S, \Sigma, \Pi, \delta, s_0, \square, E)$ existiert, die für alle $\omega \in \Sigma^*$ mit $f(\omega)$ auf dem Band anhält oder in eine Endlosschleife gerät, wenn $f(\omega)$ nicht definiert ist.

Variationen von TM:

- mehrere Bänder / Folgezustände
- Folgezustände per Münzwurf

Alan Turing

Berechenbarkeit und Turingmaschinen

These von Church (1936)

Jede im intuitiven Sinn berechenbare Funktion ist durch eine Turingmaschine berechenbar.

Mehr noch: Alles was mit einem QC berechenbar ist, kann auch mit einer TM berechnet werden.
Aber: Wahrscheinlich gibt es praktisch relevante Probleme, die mit QC *schneller* gelöst werden können.

Alonzo Church

Grundlagen der Quantenmechanik

Ziel: Eine Idee für die Beobachtungen der Physik gewinnen, nicht aber die physikalischen Beobachtungen in der Quantenwelt erklären.

Wir wollen die Begriffe *Superposition* und *Messen* veranschaulichen.

Gedankenexperiment:
Schrödingers Katze

Erwin Schrödinger

Grundlagen der Quantenmechanik

Klassisch: Eine Katze sitzt in einer undurchsichtigen Box. Diese enthält einen (klassischen) Mechanismus, der die Katze mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ sofort tötet.

Die Katze ist *entweder* tot *oder* lebendig.

Grundlagen der Quantenmechanik

Modifikation: Der Mechanismus wird mit einem quantenmechanischen Prozess gekoppelt, etwa dem Zerfall eines radioaktiven Atoms.

Quantenmechanisch: Das Atom ist *gleichzeitig* unverändert bzw. zerfallen, also ist die Katze *gleichzeitig* tot und lebendig (Zustand der Superposition).
Wird die Box geöffnet, dann ist die Katze *entweder* tot *oder* lebendig.
Das öffnen der Box entspricht dem Messen.

Grundlagen der Quantenmechanik

Für die Beschreibung quantenmechanischer Zustände verwendet man die auf Paul Dirac zurückgehende *ket-Notation*.

Definition: Quantenbit

Ein *Quantenbit* (*Qubit*) nimmt Zustände der Form $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ an. Die Zahlen α, β heißen *Amplituden* und genügen der Bedingung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Klassische Bits: $|0\rangle$, $|1\rangle$.

Paul Dirac

Grundlagen der Quantenmechanik

Beispiel: Zulässige Zustände sind $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ oder $\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle$, denn $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ bzw. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = 1$.

Während wir den Zustand klassischer Bits durch *lesen* feststellen können, ist das bei Qubits nicht ohne Weiteres möglich.
Bei Qubits müssen wir *messen* und das Messergebnis hängt von den Amplituden ab.

Grundlagen der Quantenmechanik

Messen eines Quantenbits

Messen wir ein Qubit im Zustand $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, wird die Superposition zerstört. Anschließend ist es mit Wahrscheinlichkeit $|\alpha|^2$ im Zustand $|0\rangle$ und mit Wahrscheinlichkeit $|\beta|^2$ im Zustand $|1\rangle$. Diesen Zustand nach dem Messen können wir beobachten.

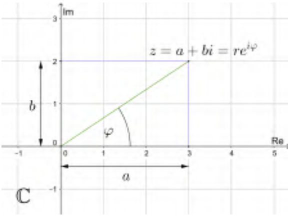
Beispiel: Das Qubit $\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle$ ist nach dem Messen mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ im Zustand $|0\rangle$ und mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ im Zustand $|1\rangle$.

Übung: Was beobachten Sie beim Messen der Qubits $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$?

Grundlagen der Quantenmechanik

Erinnerung: Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann in der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $i := \sqrt{-1}$ geschrieben werden. Die Zahl $\overline{z} := a - ib$ heißt die *Konjugierte* von z. Der *Betrag* einer komplexen Zahl ist $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

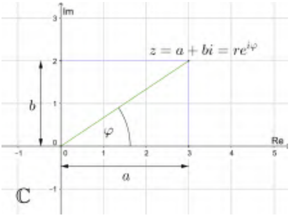
Die *Polarkoordinatendarstellung* einer komplexen Zahl ist $z = re^{i\varphi}$, wobei r der Betrag ist und φ die *Phase*.



Grundlagen der Quantenmechanik

Wissen: Gilt $|z| = |z'|$ für $z \neq z'$ mit $z, z' \in \mathbb{C}$, so unterscheiden sich die komplexen Zahlen nur in der Phase.

Wie selbstverständlich identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ mittels $\mathbf{1} = (1, 0)$ und $i = (0, 1)$.



Grundlagen der Quantenmechanik

Identifizieren wir $|0\rangle$ mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|1\rangle$ mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, können wir ein Qubit als Kombination linear unabhängiger Vektoren darstellen:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

Unter der Bedingung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ an die Amplituden $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ erhalten wir, dass ein Qubit ein *Vektor* aus $\mathbb{C}^2$ der Länge 1 ist.

D.h. die Superposition ist eine *Linearkombination* der klassischen (nicht überlagerten) Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$.

Achtung: $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, d.h. wie befinden uns im $\mathbb{C}^2$.

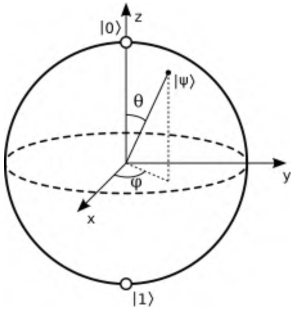
Grundlagen der Quantenmechanik

Mittels

$$\alpha = \cos\frac{\theta}{2}, \ \beta = e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}$$

können wir uns das Qubit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ auf der *Blochschen Sphäre* veranschaulichen.

Das Bild erinnert uns an die komplexen Zahlen mit der *Riemannschen Zahlenkugel*.



Grundlagen der Quantenmechanik

Rechenschritte auf Qubits: *unitäre* Matrizen (physikalisch begr.)

Definition (transponierte Matrix)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix (mit komplexen Einträgen), dann heißt

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

die *Transponierte* von A.

Grundlagen der Quantenmechanik

Definition (konjugierte und adjungierte Matrix)

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Die Matrix $\overline{A} := (\overline{a_{ij}}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ heißt die *Konjugierte* von A, und $A^\dagger := (\overline{A})^T$ die *Adjungierte* von A.

Definition (unitäre Matrix)

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *unitär*, wenn $A^\dagger = A^{-1}$ gilt.

Es folgt sofort das unitäre Matrizen *invertierbar* sind, denn nach Definition gilt $A^\dagger A = AA^\dagger = I_n$.

Grundlagen der Quantenmechanik

Erinnerung: Die Multiplikation eines Vektors mit einer (quadratischen) Matrix beschreibt eine lineare Abbildung.

In unserem Fall liefert die Multiplikation eines Vektors mit einer unitären Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine unitäre Transformation

$$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, v \mapsto Av.$$

Grundlagen der Quantenmechanik

Definition (Hadamard-Matrix)

Die Matrix

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

heißt *Hadamard-Matrix*.

Lemma

Die Hadamard-Matrix ist unitär.

Beweis: Übung.

Jacques Hadamard

Grundlagen der Quantenmechanik

Wir untersuchen die Wirkung der Hadamard-Transformation auf den Basiszuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$. Wegen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

gilt

$$|0\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right).$$

Analog:

$$|1\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right).$$

Grundlagen der Quantenmechanik

Da $H = H^{-1}$ gilt, erhalten wir nach wiederholter Anwendung

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \xrightarrow{H} |0\rangle$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \xrightarrow{H} |1\rangle.$$

Übung: Konstruieren Sie alle unitäten Transformationen A, für die gilt

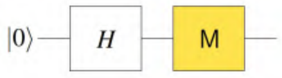
$$|0\rangle \xrightarrow{A} \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle.$$

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Erste Anwendung: Ein (echter) Zufallsgenerator

Algorithmus: Zufallsgenerator

1. $|x\rangle \leftarrow |0\rangle$
2. $|x\rangle \leftarrow H|x\rangle$
3. Messe $|x\rangle$



Analyse:

- Schritt 1: Qubit wird in den Anfangszustand $|0\rangle$ versetzt.
- Schritt 2: Anwenden der Hadamard-Transformation. Das Qubit befindet sich dann im Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$.
- Messen des Qubits liefert mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ den Zustand $|0\rangle$ und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ den Zustand $|1\rangle$.

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Übung: Ersetzen Sie die erste Zeile des Algorithmus durch

- $|x\rangle \leftarrow |1\rangle$, bzw.
- $|x\rangle \leftarrow \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Welches Verhalten ergibt sich dann?

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Übung: Ersetzen Sie die erste Zeile des Algorithmus durch

- $|x\rangle \leftarrow |1\rangle$, bzw.
- $|x\rangle \leftarrow \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Welches Verhalten ergibt sich dann?

Eine Hadwareumsetzung eines solchen Zufallsgenerators vertreibt etwa die Schweizer Firma ID Quantique. Dabei sendet eine Einzelphotonenquelle Lichtteilchen aus, die auf einen halbtransparenten Spiegel treffen. Mit jeweils Wahrscheinlichkeit $1/2$ passiert das Photon dieses Bauteil oder wird reflektiert.

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Ein Bit ist für komplexere Anwendungen nicht ausreichend
$\Rightarrow$ Quantenregister

Der Inhalt eines n-Bit Registers ist ein n-Bit String, d.h. es sind 2^n Inhalte möglich. Ein n-Qubit Register befindet sich in Superposition all dieser Zustände.

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Beispiel: 2-Qubit Register

$R = |x_1\rangle|x_0\rangle$ mit $|x_0\rangle = \gamma_0|0\rangle + \gamma_1|1\rangle$ und $|x_1\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$. Dann ist

$$\begin{aligned} R &= |x_1\rangle|x_0\rangle \\ &= \beta_0\gamma_0|0\rangle|0\rangle + \beta_0\gamma_1|0\rangle|1\rangle + \beta_1\gamma_0|1\rangle|0\rangle + \beta_1\gamma_1|1\rangle|1\rangle. \end{aligned}$$

Kurzschreibweise: $\alpha_{ij} = \beta_i\gamma_j$ und $|i\rangle|j\rangle = |ij\rangle$. Der Bitstring wird durch die in der Binärdarstellung repräsentierte Zahl ersetzt:

$$\begin{aligned} R &= \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle \\ &= \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + \alpha_2|2\rangle + \alpha_3|3\rangle. \end{aligned}$$

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Beobachtung: Die Amplituden $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ergeben sich als Produkt der Amplituden der ursprünglichen Qubits $|x_0\rangle = \gamma_0|0\rangle + \gamma_1|1\rangle$ und $|x_1\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$.

Übung: Zeige: Aus $|\gamma_0|^2 + |\gamma_1|^2 = 1$ und $|\beta_0|^2 + |\beta_1|^2 = 1$ folgt $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1$.

Übung: Betrachten Sie das 2-Qubit Register $R = |x_1\rangle|x_0\rangle$ mit $|x_0\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$ und $|x_1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$. Bestimmen Sie die Amplituden $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Definition (Quantenregister)

Ein *Quantenregister* R der Länge $n \geq 1$ hat die Form $R = |x_{n-1}\rangle|x_{n-2}\rangle \dots |x_0\rangle = |x_{n-1}x_{n-2}\dots x_0\rangle$. Es kann sich in einem Zustand der Form $\sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i|i\rangle$ befinden, wobei $|i\rangle = |\,\mathrm{bin}(i)\rangle$ und $\alpha_i \in \mathbb{C}$ für $i = 0, \dots, 2^n - 1$ gelte.
Es gilt $\sum_{i=0}^{2^n-1} |\alpha_i|^2 = 1$ und beim Messen des Quantenregisters beobachtet man den Zustand $|i\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $|\alpha_i|^2$.

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Die Zustände eines Quantenregisters mit n-Bits entsprechen Vektoren in einem 2^n-dimensionalen komplexen Vektorraum. Die Basis bilden die einzelnen Komponenten der Superposition, also

$$|0...00\rangle, |0...01\rangle, ..., |1...11\rangle$$

bzw. $|0\rangle, |1\rangle, ..., |2^n - 1\rangle$.

Beispiel: Für ein 2-Qubit Register ist $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ eine Basis mit der entsprechenden Zuordnung

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

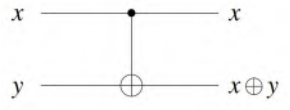
Da die Zustandsvektoren eines n-Bit Quantenregisters je 2^n Komponenten besitzen, entsprechen die einzelnen Rechenschritte einer Quantenmaschine unitären Transformationen, die durch unitäre $2^n \times 2^n$-Matrizen darstellbar sind.

Beispiel: Für $n = 2$ betrachte die *controlled not* Operation

$$\mathrm{CNOT} : |x, y\rangle \mapsto |x, x \oplus y\rangle.$$

Matrixdarstellung:

$$A_{\mathrm{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Übung:

1. Zeigen Sie, dass A_{CNOT} unitär ist.
2. Sei P eine quadratische Matrix die in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen Eintrag 1 und sonst nur Nullen enthält (solche Matrizen heißen *Permutationsmatrizen*). Zeigen Sie, dass P unitär ist.

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Unitäre Transformationen (Matrizen) sind für uns von wesentlicher Bedeutung.

Erinnerung: Eine Matrix A ist unitär, wenn $A^{-1} = A^{\dagger}$ gilt.

Definition (Skalarprodukt, Norm)

Seien $|u\rangle = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})^T$ und $|v\rangle = (\beta_0, \ldots, \beta_{n-1})^T$ komplexe Vektoren mit n Komponenten. Das *Skalarprodukt* $\langle u, v\rangle$ (*Braket*-Notation) ist definiert durch

$$\langle u|v\rangle := \overline{\alpha_0}\beta_0 + \ldots + \overline{\alpha_{n-1}}\beta_{n-1}.$$

Die *Norm* des Vektors $|u\rangle$ ist $\||u\rangle\| := \sqrt{\langle u|u\rangle}$.

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Eigenschaften unitärer Transformationen

Sei U eine unitäre Transformation und $|\varphi\rangle, |\psi\rangle$ zwei Vektoren.

1. Unitäre Transformationen sind längenerhaltend, d.h.
$$\|U|\varphi\rangle\| = \||\varphi\rangle\|.$$
2. Unitäre Transformationen ändern das Skalarprodukt nicht, d.h.
$$\langle U\varphi|U\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle.$$
3. Unitäre Transformationen sind umkehrbar, d.h. jeder Schritt in einer Berechnung durch einen Quantencomputer kann rückgängig gemacht werden.

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Das Problem von Deutsch (nach David Deutsch, geb. 1953)

Ziel: Eine echte Münze (Kopf und Zahl) von einer gefälschten Münze (beide Seiten Kopf) unterscheiden.

Klassisch: Die Münze muss zweimal betrachtet werden, je einmal von jeder Seite.

Frage: Bietet uns ein Quantencomputer in einer solchen (oder ähnlichen) Situation Vorteile?

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Abstrakt: Gegeben sei eine Funktion $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ und es gibt ein *Orakel* das uns zu einem Bit $b \in \{0,1\}$ den Wert $f(b)$ liefert. Das Orakel sagt immer die Wahrheit.
Die Funktion f heißt *konstant*, wenn $f(0) = f(1)$ gilt. Im Fall $f(0) \neq f(1)$ heißt f *balanciert*.

Frage: Ist f konstant oder balanciert?

Klassisch: Zwei Anfragen an das Orakel, nämlich $f(0)$ und $f(1)$.

Idee QC: Versetze ein Qubit in eine Superposition über die möglichen Eingaben 0 und 1 von f.

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Achtung: f ist möglicherweise nicht umkehrbar (f konstant).
Rechenschritte auf Quantencomputern müssen aber umkehrbar sein.

Wir verwenden

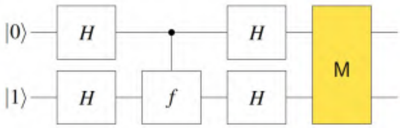
$$\mathrm{U_f} : |x, y\rangle \mapsto |x, y \oplus f(x)\rangle.$$

Übung: Zeige, das $\mathrm{U_f}$ unitär ist.

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Algorithmus: Problem von Deutsch

1. $|x\rangle|y\rangle \leftarrow |0\rangle|1\rangle$
2. $|x\rangle|y\rangle \leftarrow H|x\rangle H|y\rangle$
3. $|x\rangle|y\rangle \leftarrow \mathrm{U_f}\,|x\rangle|y\rangle$
4. $|x\rangle|y\rangle \leftarrow H|x\rangle H|y\rangle$
5. Messe das Register $|x\rangle|y\rangle$:
   - $|0\rangle|1\rangle$: f ist konstant
   - $|1\rangle|1\rangle$: f ist balanciert



Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Analyse des Algorithmus: In **Schritt 2** wird $|x\rangle|y\rangle$ durch Hadamard-Transformation auf $|0\rangle|1\rangle$ in

$$
\begin{aligned}
|\phi_2\rangle = H|0\rangle H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle)
\end{aligned}
$$

überführt. Das ist eine Superposition über alle Basiszustände des Registers.

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

In **Schritt 3** wird $U_f : |x, y\rangle \mapsto |x, y \oplus f(x)\rangle$ angewandt:

$$
\begin{aligned}
|\phi_3\rangle = U_f\,|\phi_2\rangle &= \frac{1}{2}\left(U_f\,|0\rangle|0\rangle - U_f\,|0\rangle|1\rangle + U_f\,|1\rangle|0\rangle - U_f\,|1\rangle|1\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(|0\rangle|f(0)\rangle - |0\rangle|1 \oplus f(0)\rangle + |1\rangle|f(1)\rangle - |1\rangle|1 \oplus f(1)\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(|0\rangle\left(|f(0)\rangle - |1 \oplus f(0)\rangle\right) + |1\rangle\left(|f(1)\rangle - |1 \oplus f(1)\rangle\right)\right).
\end{aligned}
$$

Beobachtung: Bei einer Messung zum jetzigen Zeitpunkt ist jeder der Werte $|0\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle, |1\rangle|0\rangle, |1\rangle|1\rangle$ mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/4$ gleichwahrscheinlich.

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Wir können die Terme weiter vereinfachen...

Übung: Für $x \in \{0,1\}$ ist $|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle = (-1)^{f(x)}(|0\rangle - |1\rangle)$.

... und erhalten

$$
\begin{aligned}
|\phi_3\rangle &= \frac{1}{2}\Big((-1)^{f(0)}|0\rangle(|0\rangle - |1\rangle) + (-1)^{f(1)}|0\rangle(|0\rangle - |1\rangle)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big((-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle\Big)(|0\rangle - |1\rangle).
\end{aligned}
$$

Der Funktionswert wurde in das Vorzeichen der Amplituden des ersten Bits $|x\rangle$ von $|\phi_3\rangle$ verlagert, wobei

$$
|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle\Big).
$$

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

In **Schritt 4** erfolgt die Fallunterscheidung für die Funktion f:

1. Möglichkeit: f ist konstant, also $f(0) = f(1)$. Dann ist $(-1)^{f(0)} = (-1)^{f(1)}$ und entweder

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \xrightarrow{H} |0\rangle$$

für $f(0) = f(1) = 0$ oder

$$|x\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \xrightarrow{H} -|0\rangle$$

für $f(0) = f(1) = 1$.

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

Für das zweite Qubit in $|\phi_3\rangle$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \xrightarrow{H} |1\rangle.$$

Damit enthält das Register $\pm|0\rangle|1\rangle$.

2. Möglichkeit: f ist balanciert, also $f(0) \neq f(1)$. Dann ist

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \xrightarrow{H} |1\rangle$$

für $f(0) = 0, f(1) = 1$;

Quantenzufallsgenerator und das Problem von Deutsch

oder

$$|x\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \xrightarrow{H} -|1\rangle$$

für $f(0) = 1, f(1) = 0$. Das Register enthält dann $\pm|1\rangle|1\rangle$.

Damit wird im Fall f *konstant* $|0\rangle|1\rangle$ und im Fall f *balanciert* $|1\rangle|1\rangle$ gemessen.

Übung: Vollziehen Sie die Überlegungen für die Fälle

- $f(0) = 1, f(1) = 0$, d.h. f ist die Negation, und
- $f(0) = f(1) = 1$, d.h. f ist die 1-Funktion

nach.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Bisher haben wir mehrere Bits (naiv) zu einem Register zusammengefügt. Um auch mehrere Rechenschritte zu *Operationen auf einem Register* zusammenzufügen, müssen wir unser bisheriges Sichtweise präzisieren.

Vorgehen: Wir überlegen uns wie wir Register aus einzelnen Bits (formal) zusammensetzen. Damit wollen wir Operationen auf einem Register durch Operationen auf einzelnen Bits zusammensetzen.

Erinnerung: Der Zustand eines Quantenregisters aus n Bits wird durch einen 2^n-dimesionalen Vektor beschrieben.
Wir wissen auch: Bits sind Linearkombinationen von Basisvektoren.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Definition (Tensorprodukt von Vektorräumen - Teil 1)

Sei V_1 ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $\{e_0, \ldots, e_{m-1}\}$ und V_2 ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $\{f_0, \ldots, f_{n-1}\}$. Das *Tensorprodukt* $V_1 \otimes V_2$ dieser Räume ist ein mn-dimensionaler Vektorraum, dessen Basisvektoren mit

$$\begin{array}{cccc} e_0 \otimes f_0 & e_0 \otimes f_1 & \ldots & e_0 \otimes f_{n-1} \\ e_1 \otimes f_0 & e_1 \otimes f_1 & \ldots & e_1 \otimes f_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{m-1} \otimes f_0 & e_{m-1} \otimes f_1 & \ldots & e_{m-1} \otimes f_{n-1} \end{array}$$

bezeichnet werden.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Definition (Tensorprodukt von Vektorräumen - Teil 2)

Ist

$$v_1 = \alpha_0 e_0 + \ldots + \alpha_{m-1} e_{m-1} \in V_1$$

und

$$v_2 = \beta_0 f_0 + \ldots + \beta_{n-1} f_{n-1} \in V_2,$$

dann ist ihr Tensorprodukt

$$v_1 \otimes v_2 = \left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i e_i \right) \otimes \left(\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j f_j \right) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_i \beta_j (e_i \otimes f_j).$$

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Beispiel: Für $m = n = 2$ ist

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0\beta_0 \\ \alpha_0\beta_1 \\ \alpha_1\beta_0 \\ \alpha_1\beta_1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit (wie bisher) $|1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle$. Analog zeigt man $|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$, $|0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle$ und $|1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Allgemeiner liefert die Definition des Tensorproduktes für $|\phi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ und $|\psi\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$, dass

$$|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle = \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle.$$

Das ergibt sich (wie bisher) auch durch „Ausmultiplizieren“ von

$$(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \cdot (\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle) .$$

Übung: Berechnen Sie

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) .$$

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Lemma (Produkt von Zuständen)

Die Beschreibung eines Registers aus m Bits lässt sich aus dem m-fachen Tensorprodukt der Beschreibung eines Bits erzeugen. Sind die Bits $|x_1\rangle, \ldots, |x_m\rangle$ in den Zuständen $|\phi_1\rangle, \ldots, |\phi_m\rangle$, so befindet sich das Register $|x_1 \ldots x_m\rangle$ im Zustand $|\phi_1\rangle \otimes \ldots \otimes |\phi_m\rangle$.

Die Amplituden können (wie bisher) durch Ausmultiplizieren berechnet werden (weshalb wir häufig $\cdot$ statt $\otimes$ schreiben werden, auch wenn es unpräzise ist).

Uns interessieren unitäre Transformationen, also unitäre Matrizen.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Definition (Tensorprodukt von Matrizen)

Seien A und B Matrizen mit komplexen Einträgen, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m-1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Das *Tensorprodukt* $A \otimes B$ von A und B ist

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot B & \dots & a_{1n} \cdot B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m-1} \cdot B & \dots & a_{mn} \cdot B \end{pmatrix}.$$

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Beispiel:

$$I_2 \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

Als Verallgemeinerung ergibt sich

Definition (H_n)

Die 2^n-dimensionale Hadamard-Transformation H_n ist definiert durch

$$H_n = \bigotimes_{i=1}^{n} H.$$

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Übung: Berechnen Sie H_2.

Wir beobachten, dass die folgenden Aktionen auf dasselbe Resultat führen

- Anwendung der durch die Matrizen $A_1, \ldots, A_m$ beschriebenen Transformationen auf die Bits $|x_1\rangle, \ldots, |x_m\rangle$. Dabei wird jeweils A_i auf $|x_i\rangle$ angewandt.
- Anwendung der Transformation $A_1 \otimes \ldots \otimes A_m$ auf das Register $|x_1 \ldots x_m\rangle$.

Damit haben wir (wie gewünscht) die Möglichkeit, Operationen auf Registern (statt auf einzelnen Bits) auszuführen.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Beispiel: Betrachte $R = |x\rangle|y\rangle$

- $H \otimes H = H_2$ beschreibt auf Registerebene die Anwendung von H auf $|x\rangle$ und auf $|y\rangle$
- $H \otimes I_2$ beschreibt die Anwendung von H auf $|x\rangle$ und lässt $|y\rangle$ unverändert

Übung: Berechnen Sie $H \otimes I_2$ und $I_2 \otimes H$. Ist das Tensorprodukt kommutativ?

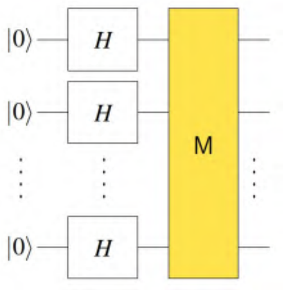
Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Mit den neuen Möglichkeiten können wir den Algorithmus zur Erzeugung eines Zufallsbits erweitern:

Algorithmus: n-Bit Zufallsgenerator

Ausgabe: Zufallszahl zwischen 0 und $2^n - 1$

1. $R = |x_{n-1} \dots x_0\rangle \leftarrow |0 \dots 0\rangle$
2. $R \leftarrow H_n R$
3. Messe R



Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Analyse des Algorithmus: In **Schritt 2** wird H_n auf das Register angewandt; d.h. H wirkt auf jedes einzelne Bit, sodass

$$|0\rangle ... |0\rangle \xrightarrow{H_n} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \cdots \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

Für das Produkt zweier Faktoren beobachten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle). \end{aligned}$$

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Insgesamt liefert die Produktbildung

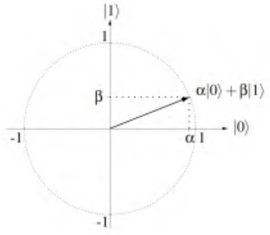
$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(|0...00\rangle + |0...01\rangle + ... + |1...1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{i=0}^{2^n-1}|i\rangle.$$

Bei der Messung in **Schritt 3** wird jeder Basiszustand des Registers mit Wahrscheinlichkeit $\left(1/\sqrt{2^n}\right)^2 = 1/2^n$ angenommen. Jeder dieser Basiszustände repräsentiert eine der Zahlen 0 bis $2^n - 1$.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Auch unser bisheriges Verständnis des *Messung* eines Quantenbits war ein Spezialfall, der immer auf ein klassisches Bit geführt hat.

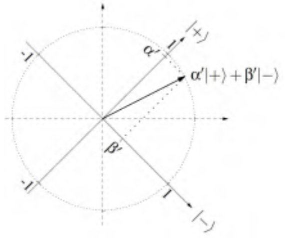
Dabei wurde ein Quantenbit $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ bzgl. der Standardbasis $|0\rangle, |1\rangle$ dargestellt.



Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Es können auch andere Basen gewählt werden, etwa

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),$$
$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$



Dabei ändert sich der Zustandsvektor nicht, sondern nur dessen Projektion auf die Koordinatenachse.

Übung: Zeigen Sie, dass $|+\rangle, |-\rangle$ eine Orthogonalbasis ist.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Der Übergang

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightsquigarrow \alpha'|+\rangle + \beta'|-\rangle$$

bleibt nicht ohne Konsequenzen.

Messen wir bezüglich der Basis $|+\rangle, |-\rangle$, so beobachten wir

- $|+\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $|\alpha'|^2$, und
- $|-\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $|\beta'|^2$.

Wie zuvor können wir nicht die Superposition als Ganzes ermitteln und die Superposition wird bei der Messung zerstört.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Um α', β' konkret zu bestimmen, müssen wir die Gleichung

$$\begin{aligned}\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle &= \alpha'|+\rangle + \beta'|-\rangle \\ &= \alpha'\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \beta'\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\end{aligned}$$

lösen.

Übung: Zeigen Sie durch lösen der Gleichung

$$\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta), \quad \beta' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta).$$

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Die bisherigen Überlegungen können wir allgemeiner formulieren:

Sei R ein Register aus n Quantenbits, das sich im Zustand $|\phi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i |i\rangle$ befinde. Die orthogonalen Vektoren $|0'\rangle, |1'\rangle, \ldots, |(2^n-1)'\rangle$ der Länge 1 seien die Messbasis von $|\phi\rangle$, d.h.

$$|\phi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i' |i'\rangle.$$

Dann befindet sich das Register nach Messung mit Wahrscheinlichkeit $|\alpha_i'|^2$ im Zustand $|i'\rangle$.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Es können auch einzelne Bits eines Registers gemessen werden:

Für $R = |xy\rangle$ im Zustand

$$|\phi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$$

kann bspw. das erste Bit gemessen werden. Das Ergebnis ist $|0\rangle$ oder $|1\rangle$.

1. Fall: Messen nach $|x\rangle = |0\rangle$
Das Register geht in eine Superposition von $|00\rangle$ und $|01\rangle$, genauer,

$$|\phi'\rangle = \frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}$$

über. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

2. Fall: Messen nach $|x\rangle = |1\rangle$
Das Register geht in eine Superposition von $|10\rangle$ und $|11\rangle$, genauer, den Zustand

$$|\phi'\rangle = \frac{\alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle}{\sqrt{|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2}}$$

über. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2$.

Um einen zulässigen Quantenzustand zu erhalten, musste *normiert* werden.

Hier ist durch Messung ein Übergang von einer Superposition in eine andere Superposition (Folgezustand) entstanden. Im Vergleich dazu hat eine Messung bisher zu einer Auflösung der Superposition geführt.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Allgemein gilt:

Ist R ein Register aus n Quantenbits im Zustand $|\phi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i |i\rangle$ und für $j \in \{1, ..., n\}$ sei
$I_{0,j} = \{i \in \{0, ..., 2^n - 1\}$: j-tes Bit von links in bin(i) von i ist $|0\rangle\}$,
$I_{1,j} = \{i \in \{0, ..., 2^n - 1\}$: j-tes Bit von links in bin(i) von i ist $|1\rangle\}$.
Wird das j-te Bit des Registers gemessen, so nimmt es mit Wahrscheinlichkeit $\sum_{i \in I_{j,0}} |\alpha_i|^2$ den Wert $|0\rangle$ an. Das Register ist dann im Zustand

$$\frac{\sum_{i \in I_{j,0}} \alpha_i |i\rangle}{\sqrt{\sum_{i \in I_{j,0}} |\alpha_i|^2}}.$$

(Beachte: Alle $|i\rangle$ die hier auftreten, haben an Position j eine $|0\rangle$.)

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Wird das j-te Bit des Registers gemessen, so nimmt es mit Wahrscheinlichkeit $\sum_{i \in I_{j,1}} |\alpha_i|^2$ den Wert $|1\rangle$ an. Das Register ist dann im Zustand

$$\frac{\sum_{i \in I_{j,1}} \alpha_i |i\rangle}{\sqrt{\sum_{i \in I_{j,1}} |\alpha_i|^2}}.$$

(Beachte: Alle $|i\rangle$ die hier auftreten, haben an Position j eine $|1\rangle$.)

Übung: Das 3-Qubit Register R sei im Zustand

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{2}|101\rangle + \frac{1}{2}|111\rangle.$$

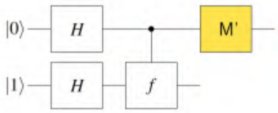
Bestimmen Sie für das zweite Qubit die Wahrscheinlichkeiten mit denen $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ angenommen wird, sowie die Zustände.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Bezeichnet M' die Messung bzgl. $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, dann ergibt sich eine alternative Version des Algorithmus für das Problem von Deutsch.

Algorithmus: Problem von Deutsch (Alternative Version)

1. $R = |xy\rangle \leftarrow |01\rangle$
2. $|x\rangle|y\rangle \leftarrow H_2 R$
3. $|x\rangle|y\rangle \leftarrow \mathrm{U_f}\ R$
4. Messe das erste Bit $|x\rangle$ bzgl. der Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:
   - $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$: f ist konstant
   - $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$: f ist balanciert



Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Mittels Tensorprodukt kann auch eine wesentliches Merkmal der Quantenmechanik beschrieben werden: die Verschränkung.

Beispiel: Auf das Register $|b_1 b_2\rangle$ im Zustand $|00\rangle$ wird zuerst die Operation $H \otimes I_2$ und dann $\mathrm{CNOT} : |xy\rangle \mapsto |x, y \oplus x\rangle$ angewandt:

$$|00\rangle \xrightarrow{H \otimes I_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$
$$\xrightarrow{\mathrm{CNOT}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Wird das erste Bit gemessen, ist das Ergebnis $|0\rangle$ oder $|1\rangle$, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$.

- **1.Fall** Wird $|0\rangle$ gemessen, ist der Folgezustand $|00\rangle$.
- **2.Fall** Wird $|1\rangle$ gemessen, ist der Folgezustand $|11\rangle$.

Wird das zweite Bit gemessen, ergeben sich wieder $|0\rangle$ oder $|1\rangle$, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$.

- **1.Fall** Wird $|0\rangle$ gemessen, ist der Folgezustand $|00\rangle$.
- **2.Fall** Wird $|1\rangle$ gemessen, ist der Folgezustand $|11\rangle$.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Wir beobachten:

Bevor $|b_1\rangle$ gemessen wurde, war der Ausgang der Messung an $|b_2\rangle$ noch offen, d.h. beide Ergebnisse waren gleich wahrscheinlich.

Ist $|b_1\rangle$ (bzw. $|b_2\rangle$) schon gemessen worden, steht das Ergebnis an $|b_2\rangle$ (bzw. $|b_1\rangle$) fest. Man sagt, die Zustände sind verschränkt.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Definition (Verschränkung)

Sei $|\phi\rangle$ der Zustand eines Quantenregisters aus n Bits. Der Zustand $|\phi\rangle$ heißt *unverschränkt*, wenn er das Produkt von Zuständen der einzelnen Bits ist:

$$|\phi\rangle = |\phi_{n-1}\rangle \otimes |\phi_{n-2}\rangle \otimes \ldots \otimes |\phi_1\rangle.$$

Ein Zustand heißt *verschränkt*, wenn es keine solche Zerlegung gibt.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
H_2|11\rangle &= \frac{1}{2}\left(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|0\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) - |1\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\
&= H|1\rangle \otimes H|1\rangle
\end{aligned}
$$

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Übung: Die Zustände

$$\Phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad \Phi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$
$$\Psi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad \Psi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

heißen *Bell-Zustände*. Zeigen Sie, dass Φ^+ nicht in das Produkt zweier Zustände jeweils eines Bits zerlegt werden kann.

Um Φ^+ zu erzeugen, kann man CNOT auf den unverschränkten Zustand ${}^1/\sqrt{2}(|00\rangle + |10\rangle)$ anwenden, und so einen verschränkten Zustand erhalten.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Übung: Zerlegen Sie $1/2(|0\rangle + |3\rangle + |12\rangle + |15\rangle)$ in ein Produkt von Bell-Zuständen.

Man kann (formal) ein Maß an Verschränkung definieren. Dabei lässt sich beobachten, dass die Bell-Zustände *maximal verschränkt* sind. Andererseits ist ein Zustand der Form

$$\frac{1}{\sqrt{k}}|00\rangle + \sqrt{\frac{k-1}{k}}|11\rangle$$

für wachsendes $k \geq 2$ „immer weniger verschränkt“.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Zum Abschluss des Abschnitts soll noch einmal die Hadamard-Transformation aufgegriffen werden:

Aus der Analyse des n-Bit Zufallsgenerators ist

$$H_n|0...0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} |i\rangle$$

bekannt. Das ist offensichtlich der Spezialfall für das Register $R = |0...0\rangle$ der Länge n.

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Wir untersuchen die Wirkung von H_n auf ein Register $R = |x_{n-1}...x_0\rangle$ mit $x_i \in \{0,1\}$ für $i = 0, ..., n-1$ und beginnen mit dem Fall $n = 2$:

$$\begin{aligned} H_2|x_1 x_0\rangle &= (H \otimes H)|x_1 x_0\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle + (-1)^{x_1}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + (-1)^{x_0}|1\rangle\right) \end{aligned}$$

und mit $(-1)^{x_0}(-1)^{x_1} = (-1)^{x_0 \oplus x_1}$ folgt für $\mathbf{x} = (x_1, x_0)^T$

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

$$\begin{aligned} H_2|x_1x_0\rangle &= \frac{1}{2}\left(|00\rangle + (-1)^{x_0}|01\rangle + (-1)^{x_1}|10\rangle + (-1)^{x_0 \oplus x_1}|11\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}((-1)^{(0,0)\cdot\mathbf{x}}|00\rangle + (-1)^{(0,1)\cdot\mathbf{x}}|01\rangle + (-1)^{(1,0)\cdot\mathbf{x}}|10\rangle + \\ &\quad + (-1)^{(1,1)\cdot\mathbf{x}}|11\rangle), \end{aligned}$$

wenn $\cdot$ das Skalarprodukt zweier Vektoren bezeichnet.

Allgemein ist für zwei Vektoren $x, y \in \{0,1\}^n$ das Skalarprodukt $x \cdot y$ durch $\oplus_{i=1}^{n} x_i y_i$ gegeben. Auf ein n-Bit Register im Zustand $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ hat die Hadamard-Transformation H_n die Wirkung

$$H_n|\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{\mathbf{y} \in \{0,1\}^n} (-1)^{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}|\mathbf{y}\rangle.$$

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

Es entsteht eine Superposition über alle klassischen Zustände des Registers. Die Information über $|\mathbf{x}\rangle$ wird in die Amplitude verlagert.

Beispiel: Als *gleichgewichtete* Superposition bezeichnet man

$$H_n|0\dots0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^0 |y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} |y\rangle.$$

Die *alternierende* Superposition ist für $y = (y_{n-1}, \dots, y_0)$

$$H_n|0\dots01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{y_0} |y\rangle,$$

Tensorprodukt, Messen von Registern & Verschränkung

wobei

$$\sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{y_0} |y\rangle = (-1)^0 |0\ldots00\rangle + (-1)^1 |0\ldots01\rangle +$$

$$+ (-1)^0 |0\ldots010\rangle + (-1)^1 |0\ldots011\rangle + \ldots$$

$$+ (-1)^0 |1\ldots10\rangle + (-1)^1 |1\ldots11\rangle$$

$$= |0\ldots00\rangle - |0\ldots01\rangle + |0\ldots010\rangle - |0\ldots011\rangle + \ldots$$

$$+ |1\ldots10\rangle - |1\ldots11\rangle.$$

Wir werden dies im nächsten Abschnitt verwenden.

Inhaltsverzeichnis

Das RSA-Verfahren & periodische Funktionen

Ausgangssituation: Alice möchte Bob etwas Wichtiges mitteilen. Eve interessiert sich ebenfalls für den Inhalt der Nachricht. Es soll verhindert werden das Eve den Inhalt der Nachricht erfährt.

Public Key Kryptographie: Bob erwartet eine vertrauliche Nachricht.

1. Bob erzeugt zwei Schlüssel: einen geheimen, den er für sich behält, und einen öffentlichen, den er Alice zukommen lässt.
2. Alice verschlüsselt die Nachricht an Bob mit dem öffentlichen Schlüssel (von Bob).
3. Bob verwendet seinen geheimen Schlüssel um die Nachricht von Alice zu entschlüsseln.

Das RSA-Verfahren & periodische Funktionen

Schlüsselerzeugung bei RSA

1. Wähle zwei Primzahlen $p \neq q$.
2. Berechne $n = pq$ und $\phi(n) = (p-1)(q-1)$.
3. Wähle eine kleine Zahl e mit $ggT(e, \phi(n)) = 1$.
4. Löse $ed \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$.

Das Paar (e, n) ist der *öffentlicher Schlüssel* und das Paar (d, n) der *geheime Schlüssel*.

Für jeden der oben genannten Schritte gibt es effiziente Algorithmen.

Das RSA-Verfahren & periodische Funktionen

Ver- und Entschlüsselung bei RSA

- Verschlüsselung einer Nachricht m: Löse $c \equiv m^e \pmod{n}$
- Entschlüsselung einer Nachricht c: Löse $m \equiv c^d \pmod{n}$

Beobachtung: Das Paar (e, n) ist als öffentlicher Schlüssel auch für Eve zugänglich; ebenso die übertragene Nachricht. Um den Klartext m zu bestimmen, benötigt Eve den geheimen Schlüssel d und muss dafür

$$ed \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$$

lösen. Dafür benötigt Eve das Produkt $(p-1)(q-1) = \phi(n)$. Sie kann versuchen $n = pq$ zu faktorisieren.

Das RSA-Verfahren & periodische Funktionen

Aber: Ist n groß genug gewählt, dann ist die Faktorisierung von n (bisher) nicht effizient möglich.
Natürlich wählt Bob n von entsprechender Größe.

Verfügt Eve über einen Quantencomputer (mit ausreichend vielen Qubits), dann kann Sie n effizient faktorisieren

$\rightsquigarrow$ *Algorithmus von Shor* (Perioden von Funktionen)

Das RSA-Verfahren & periodische Funktionen

Definition (Periode einer Funktion)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in \mathbb{R}^+$ die kleinste Zahl, sodass $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Dann heißt p die *Periode* von f.

Beispiel:

- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- $f(x) = 2^x \pmod 5$ hat die Periode $p = 4$, denn $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 3, f(4) = 1, \ldots$

Das RSA-Verfahren & periodische Funktionen

Ziel: n $(= pq)$ aus dem RSA-Verfahren faktorisieren, d.h. einen echten Teiler $1 < a < n$ bestimmen.

O.B.d.A. kann n als ungerade angenommen werden (sonst sind 2 und $n/2$ echte Teiler).

Randomisierter Ansatz (so nicht)

- Idee: nutze den Euklidischen Algorithmus
- wähle zufällig $a \in \{2, ..., n-1\}$ und bestimme einen Teiler durch Berechnung des $ggT(a, n)$
- dabei wird oft 1 als gemeinsamer Teiler auftreten, denn $n = pq$ ist das Produkt *großer* Primzahlen p, q und $\phi(n) = \#\{1 \leq a \leq n | ggT(a, n) = 1\} = (p-1)(q-1)$; d.h. *fast alle* Zahlen $\{2, ..., n-1\}$ sind teilerfremd zu n

Das RSA-Verfahren & periodische Funktionen

Angenommen wir verfügen über folgende

Basisfähigkeit: Für $1 < a < n$ können wir die Periode p von $f(x) = a^x \pmod{n}$ bestimmen.

Da p die Periode ist, folgt

$$\begin{aligned} f(x+p) = f(x) &\Rightarrow f(p) = f(0) \\ &\Rightarrow a^p \equiv 1 \pmod{n} \\ &\Rightarrow a^p = 1 + kn \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Also ist n ein Teiler von $a^p - 1$.

Das RSA-Verfahren & periodische Funktionen

Nehmen wir weiter an das die Periode p gerade ist, folgt

$$a^p - 1 = (a^{p/2} - 1)(a^{p/2} + 1) = kn.$$

Daraus folgt $ggT\left(a^{p/2} - 1, n\right) > 1$ oder $ggT\left(a^{p/2} + 1, n\right) > 1$.

Denn: Angenommen $ggT\left(a^{p/2} - 1, n\right) = ggT\left(a^{p/2} + 1, n\right) = 1$. *Dann sind wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung die Faktoren* $a^{p/2} \pm 1$ *beide Teiler von* k*, also*

$$(a^{p/2} - 1)(a^{p/2} + 1) = kn = k'(a^{p/2} - 1)(a^{p/2} + 1)n$$

für $k' \in \mathbb{Z}$*. Insbesondere folgt* $n = 1$*, im Widerspruch zu* $n > 1$*.*

Das RSA-Verfahren & periodische Funktionen

Also gilt $ggT\left(a^{p/2}-1,n\right)>1$ oder $ggT\left(a^{p/2}+1,n\right)>1$.

Das beinhaltet auch die Möglichkeit das $a^{p/2}+1$ ein Vielfaches von n ist. Dann ist $ggT\left(a^{p/2}+1,n\right)=n$ und wir erhalten <u>keine</u> Information.

Übung: Zeigen Sie, dass $a^{p/2}-1$ kein Vielfaches von n ist.

Damit ist $ggT\left(a^{p/2}-1,n\right)$ oder $ggT\left(a^{p/2}+1,n\right)$ ein echter Teiler von n, außer

- $ggT\left(a^{p/2}-1,n\right)=1$, und
- $a^{p/2}+1$ ist ein Vielfaches von n.

Das RSA-Verfahren & periodische Funktionen

Proposition

Sei n ungerade und keine Primzahlpotenz. Dann gilt für mindestens die Hälfte der Fälle der Zahlen $0 \leq a \leq n-1$ mit $ggT(a,n) = 1$

1. die Periode p der Funktion $f(x) = a^x \pmod{n}$ ist gerade,
2. n teilt nicht $a^{p/2} + 1$, d.h. $a^{p/2} \not\equiv -1 \pmod{n}$.

Unsere Überlegungen können wir als Algorithmus festhalten. Dabei haben wir (bisher) noch keinen Quantencomputer eingesetzt.

Das RSA-Verfahren & periodische Funktionen

Faktorisierungsalgorithmus - klassischer Teil

Eingabe: Eine ungerade ganze Zahl n, die keine Primzahlpotenz ist.
Ausgabe: Ein echter Teiler von n.

1. Wähle zufällig eine Zahl $a \in \{2, ..., n-1\}$.
2. $z \leftarrow ggT(a, n)$.
   Falls $z > 1$: Ausgabe von z. Abbruch
3. Ermittle die Periode p von $a^x \pmod{n}$.
4. Falls p ungerade ist: Beginne erneut mit *Schritt 1*.
5. Ermittle $ggT\left(a^{p/2} - 1, n\right)$ und $ggT\left(a^{p/2} + 1, n\right)$. Hat sich kein echter Teiler ergeben, beginne erneut mit *Schritt 1*.
   Sonst: Ausgabe z.

Das RSA-Verfahren & periodische Funktionen

Schritt 3 des Algorithmus werden wir (später) mit einem Quantenalgorithmus lösen $\rightsquigarrow$ *Shor-Algorithmus*

Fehlerwahrscheinlichkeit

Ist n ungerade und nicht die Potenz einer Primzahl, d.h. $n \neq p^k$ für $p \in \mathbb{P}$ und $k \geq 1$. Dann führt der klassische Teil des Algorithmus mit einer Wahrscheinlichkeit größer $1/2$ im ersten Anlauf zum Erfolg.

Die Wahrscheinlichkeit, nach k Versuchen noch keine Lösung gefunden zu haben, ist demnach kleiner $1/2^k$.

Das RSA-Verfahren & periodische Funktionen

Mit $ggT(x, n) = ggT(x \pmod{n}, n)$ für $x, n \in \mathbb{Z}$ folgt

Laufzeitbetrachtung:

- Schritt 1: zufällige Auswahl: konstante Laufzeit $\rightsquigarrow O(1)$
- Schritt 2: Euklidischer Algorithmus $\rightsquigarrow O\left((\log n)^3\right)$
- Schritt 3: Periodenbestimmung: unbekannte Laufzeit $T(n)$
- Schritt 4: prüfe gerade, ungerade: konstante Laufzeit $\rightsquigarrow O(1)$
- Schritt 5: Euklidischer Algorithmus $\rightsquigarrow O\left((\log n)^3\right)$

Das RSA-Verfahren & periodische Funktionen

Wir wissen bereits, dass die Wahrscheinlichkeit nach k Versuchen keine Lösung gefunden zu haben, kleiner als $1/2^k$ ist. Die erwartete Laufzeit ist also

$$\sum_{k\geq 1} \frac{k}{2^k} \cdot O\left((\log n)^3\right) = O\left((\log n)^3\right).$$

Übung: Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{k\geq 1} \frac{k}{2^k}$.

Das RSA-Verfahren & periodische Funktionen

Gesamtlaufzeit

Sei n ungerade und nicht die Potenz einer Primzahl, d.h. $n \neq p^k$ für $p \in \mathbb{P}$ und $k \geq 1$. Ein echter Teiler von n kann mit einer Laufzeit von

$$O\left((\log n)^3\right) + T(n)$$

bestimmt werden, wenn $T(n)$ die Laufzeit zur Bestimmung einer Periode der Funktion $a^x \pmod{n}$ für gegebenes $a \in \{2, ..., n-1\}$ bezeichnet.

Frage: Wie bestimmt man die Periode?

Schnelle Fouriertransformation

Aufgabe: Multiplikation von Polynomen

Definition: Koeffizientendarstellung

Sei $A(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad $n-1$. Dann heißt $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ die *Koeffizientendarstellung* von A.

Proposition: Multiplikation („Schulmethode")

Seien $A(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, \ B(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ Polynome.
Dann gilt für das Produkt der Polynome
$A(x) \cdot B(x) = C(x) = \sum_{i=0}^{2n-2} c_i x^i$, wobei $c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$.
Die Berechnung benötigt eine Laufzeit von $O(n^2)$.

Schnelle Fouriertransformation

Wir wollen uns überlegen wie das schneller geht:

Proposition (Stützstellendarstellung, Interpolationspolynom)

Seien $(x_0, y_0), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}) \in \mathbb{C}^2$ n paarweise verschiedene Punkte. Dann gibt es genau ein Polynom A vom Grad $n-1$ mit

$$A(x_i) = y_i, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Die Punkte (x_i, y_i) heißen *Stützstellen* von A und $(x_0, y_0), ..., (x_{n-1}, y_{n-1})$ die *Stützstellendarstellung* von A. Das Polynom A nennt man *Interpolationspolynom*.

Schnelle Fouriertransformation

Das lässt sich auch mit der *Vandermonde Matrix* $V(x)$ beschreiben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}}_{=V(x)} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Die Vandermonde Matrix ist invertierbar, d.h. die Koeffizienten-darstellung $\mathbf{a} = (a_0, ..., a_{n-1})^T$ lässt sich eindeutig aus $\mathbf{y} = (y_0, ..., y_{n-1})^T$ berechnen: $\mathbf{a} = V(x)^{-1}\mathbf{y}$.

Schnelle Fouriertransformation

Für uns sind die folgende Beobachtungen interessant:

- Ist $(x_0, A(x_0))$ Stützstelle von A und $(x_0, B(x_0))$ Stützstelle von B, dann ist $(x_0, A(x_0)B(x_0))$ Stützstelle des Produktes C, wobei $C(x) = A(x)B(x)$.
- Sind A und B jeweils vom Grad $n-1$, dann hat C den Grad $2n-2$; d.h. wir benötigen $2n-1$ Stützstellen.
- Die Berechnung der Stützstellen dieses Produktes benötigt eine Laufzeit von $O(n)$.

Schnelle Fouriertransformation

Zusammen:

- Schulmultiplikation $\rightsquigarrow$ Laufzeit $O(n^2)$
- punktweise Multiplikation mittels Stützstellen $\rightsquigarrow$ Laufzeit $O(n)$
- Laufzeiten L_1 (punktweise Auswertung) und L_2 (Interpolation) sind uns (noch) unbekannt
  Ziel: $L_1,\ L_2$ in Laufzeit $O(n \log n)$

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Koeffizientendarstellung} & \xrightarrow{O(n^2)} & \text{Koeffizientendarstellung} \\
{\scriptstyle L_1}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle L_2} \\
\text{Stützstellendarstellung} & \xrightarrow{O(n)} & \text{Stützstellendarstellung}
\end{array}
$$

Schnelle Fouriertransformation

Definition (Einheitswurzel)

Die (komplexen) Lösungen der Gleichung $x^n = 1$ heißen n-te *Einheitswurzeln.*

Es gibt genau n Einheitswurzeln. Diese sind die Potenzen von

$$\omega_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right),$$

also $1 = \omega_n^0, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$, wobei $\omega_n^n = \exp(2\pi i) = 1$.

Schnelle Fouriertransformation

Polynome lassen sich an Einheitswurzeln leicht auswerten. Auch Zwischenergebnisse solcher Auswertungen können weiter verwendet werden (etwa $\omega_n \rightsquigarrow \omega_n^2$).

Definition (diskrete Fouriertransformation, DFT)

Sei A ein Polynom vom Grad $n-1$, gegeben in Koeffizientendarstellung $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})^T$. Dann heißt $\mathbf{y} = (y_0, \ldots, y_{n-1})^T$ mit

$$y_k = A(\omega_n^k), \quad 0 \leq k \leq n-1$$

diskrete Fouriertransformation von $\mathbf{a}$. Bezeichnung: $\mathbf{y} = DFT_n(\mathbf{a})$.

Schnelle Fouriertransformation

Die DFT eines Polynoms A vom Grad $n-1$ ist also dessen Stützstellendarstellung bzgl. der n-ten Einheitswurzel.

Die zu ω_n^k gehörende Komponente ist gegeben durch $y_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj}$, bzw.

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Schnelle Fouriertransformation

Die angegeben Matrix ist invertierbar, d.h. auch DFT_n ist invertierbar und in der entsprechenden Matrix zu DFT_n^{-1} ist $\frac{1}{n}\omega_n^{-(j-1)(k-1)}$ der Eintrag an Stelle (j,k).

Wir betrachten die Einheitswurzeln genauer:

Beobachtung: Ist $n > 1$ gerade, dann sind die Quadrate n-ter Einheitswurzeln selbst $n/2$-te Einheitswurzeln. Also

$$\left\{1, (\omega_n)^2, (\omega_n^2)^2, \ldots, (\omega_n^{n-1})^2\right\} = \left\{1, \omega_{\frac{n}{2}}, \omega_{\frac{n}{2}}^2, \ldots, \omega_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}-1}\right\},$$

denn

$$(\omega_n^k)^2 = \exp\left(\frac{2\pi i}{n} \cdot 2k\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{n/2} \cdot k\right) = \omega_{\frac{n}{2}}^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Schnelle Fouriertransformation

Übung Zeigen Sie $\{1, \omega_4^2, (\omega_4^2)^2, (\omega_4^3)^2\} = \{1, \omega_2\}$.

Es treten also Wiederholungen auf. Genauer: Durch quadrieren der n-ten Einheitswurzeln ergibt sich jede $n/2$-te Einheitswurzel genau zweimal.

Insbesondere halbiert sich die Anzahl der Einheitswurzeln, die man berechnen muss!

Schnelle Fouriertransformation

Es folgt

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \\ &= \left(a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots + a_{n-2} x^{n-2}\right) + \\ &\quad + x \left(a_1 + a_3 x^2 + a_5 x^4 + \ldots + a_{n-1} x^{n-2}\right) \\ &= A_0(x^2) + x A_1(x^2) \end{aligned}$$

für

$$\begin{aligned} A_0(x) &:= a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \ldots + a_{n-2} x^{\frac{n}{2}-1} \\ A_1(x) &:= a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{\frac{n}{2}-1}. \end{aligned}$$

Schnelle Fouriertransformation

Das Polynom A kann also an $\omega_n^0, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$ ausgewertet werden, indem man die Polynome A_0 und A_1 vom halben Grad an den Einheitswurzeln $(\omega_n^0)^2, \omega_n^2, (\omega_n^2)^2, \ldots, (\omega_n^{n-1})^2$ auswertet.

Algorithmus FFT_n (Fast Fourier Transformation)

Eingabe: $(a_0, \ldots, a_{n-1})$, wobei $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$
Ausgabe: $y = DFT_n(a_0, \ldots, a_{n-1})$

1. Falls $n - 1 = 0$. Ausgabe a_0.
2. $a^0 \leftarrow (a_0, a_2, \ldots, a_{n-2}), \quad a^1 \leftarrow (a_1, a_3, \ldots, a_{n-1})$
3. $y^0 \leftarrow FFT_{\frac{n}{2}}(a^0), \quad y^1 \leftarrow FFT_{\frac{n}{2}}(a^1)$
4. Setze y^0 und y^1 entsprechend $A(x) = A_0(x^2) + xA^1(x^2)$ zu $y = DFT_n(a)$ zusammen.

Schnelle Fouriertransformation

Bezeichnet $T(n)$ die Laufzeit von FFT_n, so ergibt sich die Rekursion

$$\begin{aligned} T(1) &= O(1) \\ T(n) &= 2T\left(n/2\right) + O(n) \end{aligned}$$

Lösen der Rekursionsgleichung liefert $T(n) = O(n \log n)$.

Schnelle Fouriertransformation

Zusammen:

- Schulmultiplikation $\rightsquigarrow$ Laufzeit $O(n^2)$
- punktweise Multiplikation mittels Stützstellen $\rightsquigarrow$ Laufzeit $O(n)$
- Auswertung mittels FFT_n $\rightsquigarrow$ Laufzeit $O(n \log n)$
- Interpolation mittels FFT_n^{-1} $\rightsquigarrow$ Laufzeit $O(n \log n)$

$$\begin{array}{ccc}
\text{Koeffizientendarstellung} & \xrightarrow{O(n^2)} & \text{Koeffizientendarstellung} \\
O(n \log n) \Big\downarrow & & \Big\uparrow O(n \log n) \\
\text{Stützstellendarstellung} & \xrightarrow{O(n)} & \text{Stützstellendarstellung}
\end{array}$$

Quanten-Fouriertransformation

Frage: Lassen sich die Ergebnisse zur DFT_n auf einem Quantencomputer realisieren?

Definition (Quanten-Fouriertransformation - Teil I)

Die *Quanten-Fouriertransformation* der Ordnung N ist durch die unitäre Matriz

$$QFT_N := \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

festgelegt, wobei ω_N die N-te Einheitswurzel $\exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$ bezeichnet.

Quanten-Fouriertransformation

Definition (Quanten-Fouriertransformation - Teil II)

Ist $|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |N-1\rangle$ eine Orthonormalbasis, dann operiert QFT_N auf dem N-dimensionalen Basisvektor $|j\rangle$ vermöge

$$QFT_N|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{jk} |k\rangle.$$

Für einen beliebigen Zustandsvektor $|v\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j |j\rangle$ gilt also

$$QFT_N|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \omega_N^{jk} \right) |k\rangle.$$

Quanten-Fouriertransformation

Der Zusammenhang zwischen *DFT* und *QFT* wird erkennbar, wenn man sich die Amplituden als Koeffizienten eines Polynoms vorstellt.

Zu klären bleibt, ob sich die *QFT* auch effizient ausführen lässt. Unser Ziel ist

Satz

Für $N = 2^n$ lässt sich QFT_N mit $O(n^2)$ vielen Quantengattern realisieren.

Wir werden uns die Beweisidee anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Quanten-Fouriertransformation

Für $N = 4$ ist

$$\begin{aligned} QFT_4|x\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{y=0}^{3} \omega_4^{xy}|y\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(\omega_4^0|00\rangle + \omega_4^x|01\rangle + \omega_4^{2x}|10\rangle + \omega_4^{3x}|11\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle + \omega_4^{2x}|1\rangle\right)\cdot\left(|0\rangle + \omega_4^x|1\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle + \omega_2^{x}|1\rangle\right)\cdot\left(|0\rangle + \omega_4^x|1\rangle\right), \end{aligned}$$

wobei wir im ersten Faktor $\omega_4^{2x} = \exp\left(\frac{2\pi i\cdot 2x}{4}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i\cdot x}{2}\right) = \omega_2^x$ verwenden.

Quanten-Fouriertransformation

Allgemeiner gilt:

Lemma

Besteht der Zustand $|x\rangle$ aus n Bits, wobei $N = 2^n$ gelte. Dann ist

$$QFT_N|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(|0\rangle + \omega_2^x|1\rangle\right) \cdot \left(|0\rangle + \omega_4^x|1\rangle\right) \dots \left(|0\rangle + \omega_N^x|1\rangle\right).$$

Übung: Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichung für $N = 8$.

Quanten-Fouriertransformation

Zur Umsetzung mittels einem Quantenregister beobachten wir

$$H|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + (-1)^x|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + \omega_2^x|1\rangle\right).$$

2-te Einheitswurzeln alleine sind jedoch nicht ausreichen.

Definition (Phasen-Rotation)

Sei $m \geq 4$. Die durch

$$R_m := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_m \end{pmatrix}$$

beschriebene Operation heißt *Phasen-Rotation*.

Quanten-Fouriertransformation

Übung:

1. Berechne $R_4 \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.
2. Zeigen Sie, dass R_m unitär ist.

Um ω_N^x zu berechnen, beobachten wir:

- Für den ganzzahligen Wert des Bitvektors $x = (x_2 x_1 x_0)_2$ gilt $x \mod 2 = x_0$, $x \mod 4 = 2x_1 + x_0$ und $x \mod 8 = 4x_2 + 2x_1 + x_0$.
- $\omega_N^k = \omega_N^{k \mod N}$ (da die komplexe Exponentialfunktion periodisch ist).

Quanten-Fouriertransformation

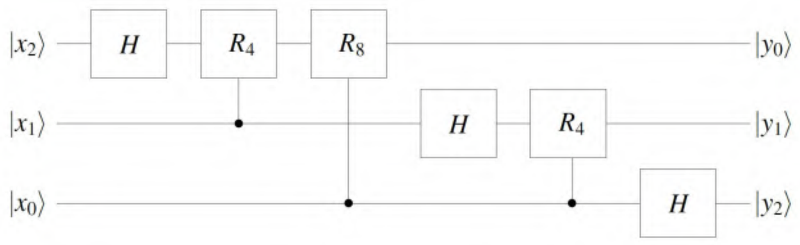
Es folgt

- $\omega_2^x = \omega_2^{x \pmod 2} = \omega_2^{x_0}$ (lässt sich Hadamard-Transformation realisieren)
- $\omega_4^x = \omega_4^{2x_1 + x_0} = \omega_4^{2x_1}\omega_4^{x_0} = \omega_2^{x_1}\omega_4^{x_0}$
- $\omega_8^{4x_2 + 2x_1 + x_0} = \omega_8^{4x_2}\omega_8^{2x_1}\omega_8^{x_0} = \omega_2^{x_2}\omega_4^{x_1}\omega_8^{x_0}$

Man kann also $\omega_m^{x_i}$ mit einem durch x_i gesteuerten Phasen-Rotationsgatter bestimmen.

Quanten-Fouriertransformation

Graphische Darstellung von QFT_8:



Die Ideen aus dem Beispiel lassen sich verallgemeinern, sodass tatsächlich $O(n^2)$ viele Quantengatter ausreichen.

Simons- & Shors Algorithmus

Zur Vorbereitung auf den Algorithmus von Shor betrachten wir zunächst den strukturell ähnlich *Algorithmus von Simon*:

Ausgangssituation: Gegeben ist eine Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ für die eine der Alternativen gilt:

1. f ist bijektiv
2. Je zwei Vektoren x, x' aus $\{0,1\}^n$ haben dasselbe Bild und es gibt ein $s \in \{0,1\}^n$, $s \neq 0$ mit $f(x) = f(x')$ genau dann, wenn $x \oplus s = x'$.

Aufgabe: Entscheide, welcher Fall vorliegt. Im zweiten Fall soll s angeben werden.

Simons- & Shors Algorithmus

Wegen $f(x \oplus s) = f(x)$ wird s als Periode von f bezeichnet.

Beispiel: Für die Funktion
$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n,\ f(x,y) = (0, x \oplus y)$ gilt

$$00 \mapsto 00, \quad 01 \mapsto 01, \quad 10 \mapsto 01, \quad 11 \mapsto 00.$$

Beobachtung:

- 00 und 11 werden auf 00 abgebildet,
- 01 und 10 werden auf 11 abgebildet.

Die Periode ist also $s = (1,1)$.

Simons- & Shors Algorithmus

Simons Algorithmus

$|a\rangle|b\rangle$ zwei n-Bit Quantenregister
Eingabe: Quantenorakel $U_f : |a\rangle|b\rangle \mapsto |a\rangle|b \oplus f(a)\rangle$

1. $R = |a\rangle|b\rangle \leftarrow |0...0\rangle|0...0\rangle$
2. Wende Hadamard-Transformation H_n auf $|a\rangle$ an:
$$R \leftarrow H_n|a\rangle|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x\in\{0,1\}^n} |x\rangle|0...0\rangle$$
3. Wende Orakel U_f an:
$$R \leftarrow U_f R = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x\in\{0,1\}^n} |x\rangle|f(x)\rangle$$

Simons- & Shors Algorithmus

Simons Algorithmus

4. Messe das Register $|b\rangle$
5. Wende die Hadamard-Transformation H_n auf $|a\rangle$ an: $|a\rangle \leftarrow H_n|a\rangle$
6. Messe das Register $|a\rangle$. Das Ergebnis ist ein Vektor z, der ausgegeben wird.

Wiederhole diesen Prozess, bis $n-1$ linear unabhängige Vektoren $z_1, \ldots, z_{n-1}$ erzeugt wurden.

Die Schritte 1.-6. bilden den Quantenteil von Simons Algorithmus. Die kommenden Schritte 7. & 8. bilden den klassischen Teil.

Simons- & Shors Algorithmus

Simons Algorithmus

7. Löse das lineare Gleichungssystem

$$z_1 t = 0, \ldots, z_{n-1} t = 0$$

in den Unbekannten $t = (t_1, \ldots, t_{n-1})$. Die Lösung, ungleich dem Nullvektor, sei s.

8. Ist $f(s) = f(0)$, dann Ausgabe: f ist periodisch mit Periode s. Sonst, Ausgabe: f ist bijektiv.