Übungen Serie 3

Teil Lineare Algebra

Aufgabe 1

Wir wissen: Die Menge aller invertierbaren $(n\times n)$-Matrizen über einem Körper K ist bzgl. Multiplikation eine Gruppe; Bezeichnung: $GL(n,K)$.

In unserem Fall: $K=\mathbb{C}$ ist ein Körper; betrachte $GL(2,\mathbb{C})$

Wir verwenden das Untergruppenkriterium um zu zeigen das

$$U(2)=\{U\in\mathbb{C}^{2\times 2} \mid U \text{ unitär}\}$$

eine Untergruppe der Gruppe $GL(2,\mathbb{C})$ ist. Als Untergruppe ist $U(2)$ insb. selbst eine Gruppe.

Nach Serie 2, Aufgabe 3 gilt

$$U(2)=\left\{e^{i\varphi}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times 2} \;\middle|\; |\alpha|^2+|\beta|^2=1\right\}$$

Zeige 1. Für alle $U_1,U_2\in U(2)$ folgt $U_1U_2\in U(2)$

2. Für alle $U\in U(2)$ folgt $U^{-1}\in U(2)$

Zu 1 Für

$$U_1=\exp(i\varphi_1)\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ -\bar\beta_1 & \bar\alpha_1\end{pmatrix},\quad U_2=\exp(i\varphi_2)\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ -\bar\beta_2 & \bar\alpha_2\end{pmatrix}\in U(2)$$

gilt

$$\begin{aligned}U_1U_2&=\exp(i\varphi_1)\exp(i\varphi_2)\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ -\bar\beta_1 & \bar\alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ -\bar\beta_2 & \bar\alpha_2\end{pmatrix}\\
&=\exp(i(\varphi_1+\varphi_2))\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2-\beta_1\bar\beta_2 & \alpha_1\beta_2+\beta_1\bar\alpha_2\\ -\bar\beta_1\alpha_2-\bar\alpha_1\bar\beta_2 & -\bar\beta_1\beta_2+\bar\alpha_1\bar\alpha_2\end{pmatrix}\\
&=\exp(i(\varphi_1+\varphi_2))\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2-\beta_1\bar\beta_2 & \alpha_1\beta_2+\beta_1\bar\alpha_2\\ -\overline{(\beta_1\bar\alpha_2+\alpha_1\beta_2)} & \overline{\alpha_1\alpha_2-\beta_1\bar\beta_2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Mit

$$|\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\bar\beta_2|^2 + |\alpha_1\beta_2 + \beta_1\bar\alpha_2|^2 \overset{|z| = \sqrt{z\bar z},\ z\in\mathbb{C}}{=}$$

$$= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\bar\beta_2)\overline{(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\bar\beta_2)} + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\bar\alpha_2)\overline{(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\bar\alpha_2)}$$

$$= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\bar\beta_2)(\overline{\alpha_1\alpha_2} - \overline{\beta_1\bar\beta_2}) + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\bar\alpha_2)(\overline{\alpha_1\beta_2} + \overline{\beta_1\bar\alpha_2})$$

$$= \alpha_1\alpha_2\overline{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_1\alpha_2\overline{\beta_1\bar\beta_2} - \beta_1\bar\beta_2\overline{\alpha_1\alpha_2} + \beta_1\bar\beta_2\overline{\beta_1\bar\beta_2} +$$

$$+ \alpha_1\beta_2\overline{\alpha_1\beta_2} + \alpha_1\beta_2\overline{\beta_1\bar\alpha_2} + \beta_1\bar\alpha_2\overline{\alpha_1\beta_2} + \beta_1\bar\alpha_2\overline{\beta_1\bar\alpha_2}$$

$$= |\alpha_1\alpha_2|^2 + |\beta_1\bar\beta_2|^2 + |\alpha_1\beta_2|^2 + |\beta_1\bar\alpha_2|^2$$

$$= |\alpha_1\alpha_2|^2 + |\beta_1\beta_2|^2 + |\alpha_1\beta_2|^2 + |\beta_1\alpha_2|^2$$

$$= (|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2)(|\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2)$$

$$= 1\cdot 1 = 1$$

folgt $U_1U_2 \in U(2)$

<u>zu 2</u> Für

$$U = \exp(i\varphi)\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix} \in U(2)$$

ist

$$U^{-1} = \exp(-i\varphi)\begin{pmatrix}\bar\alpha & -\beta\\ \bar\beta & \alpha\end{pmatrix}$$

nach Serie 2, Aufgabe 3, ein Element von $U(2)$.
$U^{-1}U = I_2$ bzw. $UU^{-1} = I_2$ rechnet man mit
$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = \alpha\bar\alpha + \beta\bar\beta = 1$ nach.

Teil Übungen zum Quantencomputing

Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \otimes B = \begin{pmatrix} 6B & 5B & 4B \\ 3B & 2B & B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6\alpha & 6\beta & 5\alpha & 5\beta & 4\alpha & 4\beta \\ 6\gamma & 6\delta & 5\gamma & 5\delta & 4\gamma & 4\delta \\ 3\alpha & 3\beta & 2\alpha & 2\beta & \alpha & \beta \\ 3\gamma & 3\delta & 2\gamma & 2\delta & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \otimes A = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6\alpha & 5\alpha & 4\alpha & 6\beta & 5\beta & 4\beta \\ 3\alpha & 2\alpha & \alpha & 3\beta & 2\beta & \beta \\ 6\gamma & 5\gamma & 4\gamma & 6\delta & 5\delta & 4\delta \\ 3\gamma & 2\gamma & \gamma & 3\delta & 2\delta & \delta \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Für $|q_1\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, $|q_0\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$
ergibt sich

a.) $$(H \otimes I_2)|q_1 q_0\rangle = H(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle)\, I_2(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle)$$

$$= \left(\frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right)(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\alpha_0+\alpha_1)|0\rangle + (\alpha_0-\alpha_1)|1\rangle\Big)(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\alpha_0+\alpha_1)\beta_0|00\rangle + (\alpha_0+\alpha_1)\beta_1|01\rangle +$$

$$+ (\alpha_0-\alpha_1)\beta_0|10\rangle + (\alpha_0-\alpha_1)\beta_1|11\rangle\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\alpha_0+\alpha_1)\beta_0|0\rangle + (\alpha_0+\alpha_1)\beta_1|1\rangle + (\alpha_0-\alpha_1)\beta_0|2\rangle +$$

$$+ (\alpha_0-\alpha_1)\beta_1|3\rangle\Big)$$

b) $(I_2 \otimes H)|q_1 q_0\rangle = I_2\left(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle\right) H\left(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle\right)$

$$= \left(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left((\beta_0+\beta_1)|0\rangle + (\beta_0-\beta_1)|1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\alpha_0(\beta_0+\beta_1)|00\rangle + \alpha_0(\beta_0-\beta_1)|01\rangle +$$
$$+ \alpha_1(\beta_0+\beta_1)|10\rangle + \alpha_1(\beta_0-\beta_1)|11\rangle\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\alpha_0(\beta_0+\beta_1)|0\rangle + \alpha_0(\beta_0-\beta_1)|1\rangle + \alpha_1(\beta_0-\beta_1)|2\rangle$$
$$+ \alpha_1(\beta_0-\beta_1)|3\rangle\Big)$$

c.) $(H \otimes H)|q_1 q_0\rangle = H\left(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle\right) H\left(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\alpha_0+\alpha_1)|0\rangle + (\alpha_0-\alpha_1)|1\rangle\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left((\beta_0+\beta_1)|0\rangle + (\beta_0-\beta_1)|1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big((\alpha_0+\alpha_1)(\beta_0+\beta_1)|00\rangle + (\alpha_0+\alpha_1)(\beta_0-\beta_1)|01\rangle$$
$$+ (\alpha_0-\alpha_1)(\beta_0+\beta_1)|10\rangle + (\alpha_0-\alpha_1)(\beta_0-\beta_1)|11\rangle\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big((\alpha_0+\alpha_1)(\beta_0+\beta_1)|0\rangle + (\alpha_0+\alpha_1)(\beta_0-\beta_1)|1\rangle$$
$$+ (\alpha_0-\alpha_1)(\beta_0+\beta_1)|2\rangle + (\alpha_0-\alpha_1)(\beta_0-\beta_1)|3\rangle\Big)$$

Alternativ kann auch die entsprechende Matrix (4×4) aus dem jeweiligen Tensorprodukt verwendet werden.