FISICA GENERALE 1, ESAME SCRITTO DEL 4 LUGLIO 2023

Si chiede di svolgere non più di 6 dei seguenti 10 esercizi.

E1. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ che, in coordinate cartesiane ortogonali, hanno le componenti $A_x = 1$, $A_y = 3$, $A_z = 1$, $B_x = -1$, $B_y = -1$, $B_z = 4$. Si calcoli il prodotto scalare $\vec{A} \cdot \vec{B}$ e il prodotto vettore $\vec{A} \times \vec{B}$.

E2. Un punto materiale compie un moto unidimensionale lungo la retta reale con legge oraria del moto (t essendo la variabile temporale)

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(2\omega t),$$

ove A e B sono costanti aventi dimensione di una lunghezza, e ω è una costante avente dimensione dell'inverso di un tempo. Si calcolino la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea del punto materiale.

E3. Una cassa incontra attrito dinamico lungo il suo moto su uno scivolo inclinato di un angolo θ rispetto al piano del pavimento. Si calcoli come il coefficiente di attrito dinamico dipende dall'angolo θ, dall'accelerazione a della cassa e dall'accelerazione g di gravità. Nella formula generale ottenuta, si calcoli poi il caso in cui $\theta = 30$ gradi, $a = 0.25g$, g essendo l'accelerazione di gravità pari a $9.8 m/s^2$.

E4. Un fluido scorre alla velocità di 8 metri s^{-1} in un tubo avente sezione di 20 metri al quadrato. Ad un certo punto il tubo si restringe e la sua sezione diventa di soli 5 metri al quadrato. Qual è la velocità con cui si muove il fluido nel punto più stretto?

E5. Una particella accelera uniformemente in linea retta da una velocità di $3.2 \cdot 10^3\ m\ s^{-1}$ a una velocità di $4.1 \cdot 10^4\ m\ s^{-1}$ lungo un percorso di 3.1 cm. Per quanto tempo è stata accelerata la particella?

E6. Si supponga assegnato il potenziale elettrico

$$V(x, y, z) = V_0 + A(x^2 + 2y^2 + 3z^2),$$

ove V_0 e A sono costanti dimensionali. Si calcoli in elettrostatica il campo elettrico che ne risulta.

E7. Nel piano euclideo con coordinate cartesiane (x, y), si calcoli, in un punto $P = (x, 0)$, il potenziale V prodotto da una carica q_1 posta in $(0, 0)$ e da una carica q_2 posta in $(0, y)$. Si calcoli poi il rapporto $\frac{V}{k_e}$ quando $q_1 = 2\mu C$, $q_2 = 3\mu C$, $x = 1$cm, $y = 2$cm.

E8. Si colleghino due sfere conduttrici cariche di raggi R_1 e R_2 mediante un sottile filo conduttore, e si supponga che le sfere siano abbastanza distanti, in modo tale che il campo elettrico dell'una non influenzi il campo elettrico dell'altra. Si supponga $R_1 > R_2$. Quale delle due sfere ha densità superficiale di carica maggiore? Si calcoli poi il rapporto $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ tra le densità di carica superficiali quando $R_1 = 40$cm e $R_2 = 8$cm.

E9. Sull'asse delle ascisse si suppongano collocate la carica $+q$ in $(a, 0)$, e la carica $-q$ in $(-a, 0)$. Si calcoli, nel punto $P = (x, 0)$, supponendo x maggiore di a e a positivo, il potenziale elettrostatico $V(x)$ e il campo elettrico $E(x)$ risultante (in una dimensione spaziale non usiamo la notazione vettoriale per il campo elettrico). Si calcolino alfine i rapporti

$$\frac{(E(x) + E(-x))}{E(x)}, \ \frac{(E(x) - E(-x))}{E(x)}.$$

E10. Si ottenga la formula per la velocità di fuga dal campo gravitazionale terrestre e la formula per la dipendenza dell'accelerazione di gravità $g(h)$ dall'altitudine h. Si calcoli alfine il rapporto $\frac{g(h)}{g(h=0)}$ quando $h = 200$ metri, tenendo presente che il raggio della Terra eguaglia 6371 chilometri.

1) $\vec{A} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ $\quad \vec{B} = -\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{i}\cdot(-\vec{i}) + 3\hat{j}\cdot(-\hat{j}) + 4\vec{k}\cdot\vec{k} = -1 - 3 + 4 = 0$$

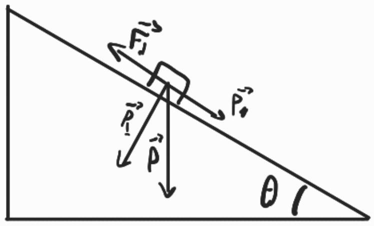
$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 13\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

2) $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(2\omega t)$

$$V_i(t) = x'(t) = -A\sin(\omega t)\cdot\omega + B\cos(2\omega t)\cdot 2\omega = -\omega A\sin(\omega t) + 2\omega B\cos(2\omega t)$$

$$a_i(t) = x''(t) = V_i'(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t) - 4\omega^2 B\sin(2\omega t)$$

3)



$$F_{tot_{\parallel}} = P_{\parallel} - F_d \Rightarrow ma = P\sin\theta - kN \Rightarrow ma = mg\sin\theta - kP_{\perp}$$

$$\Rightarrow \cancel{m}a = \cancel{m}g\sin\theta - k\cancel{m}g\cos\theta$$

$$k = \frac{g\sin\theta - a}{g\cos\theta} = \tan\theta - \frac{a}{g\cos\theta}$$

4) $v_1 = 8\,m\,s^{-1}$ $\quad S_1 = 20\,m^2$ $\quad S_2 = 5\,m^2$ $\quad v_2 = ?$

$$P_0 = v_1 S_1, \quad P_0 = v_2 S_2 \quad \Rightarrow v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2}$$

5) $v_i = 3.2\cdot 10^3\,m\,s^{-1}$ $\quad v_f = 5.1\cdot 10^5\,m\,s^{-1}$ $\quad \Delta x = 3.1\cdot 10^{-2}\,m$

$$\Delta x = \frac{v_i + v_f}{2}\cdot \Delta t \qquad a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{v_f - v_i}{a}$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}(v_f + v_i)\frac{(v_f - v_i)}{a} = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta x}$$

$$\Delta x = v_i\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{-v_i + \sqrt{v_i^2 + 4(a/2 - \Delta x)}}{a}$$

$$= \frac{-v_i + \sqrt{v_i^2\left(1 + \frac{2a - 4\Delta x}{v_i^2}\right)}}{a} = \frac{v_i}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{2(a - 2\Delta x)}{v_i^2}} - 1\right)$$

6) $V(x,y,z) = V_0 + A(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$

$$E = -\frac{dV}{ds}$$

$$E = -\mathrm{grad}(V(x,y,z)) = -\mathrm{grad}(V_0 + A(x^2 + 2y^2 + 3z^2)) = -A(2x + 4y + 6z)$$

7) $P = (x, 0)$ $\quad P_{q_1} = (0,0)$ $\quad P_{q_2} = (0, y)$

$$V = k_e\left(\frac{q_1}{s_1} + \frac{q_2}{s_2}\right) = k_e\left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{V}{k_e} = \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

8) $Q_1 = Q_2 = Q$

$$\sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow \sigma_2 > \sigma_1$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\frac{Q}{4\pi R_2^2}}{\frac{Q}{4\pi R_1^2}} = \frac{\cancel{Q}}{\cancel{4\pi} R_2^2} \cdot \frac{\cancel{4\pi} R_1^2}{\cancel{Q}} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

9) $P_{+q} = (a,0)$ $P_{-q} = (-a,0)$ $P = (x,0)$ $x > a > 0$

$$V_{(x)} = k_e\left(\frac{q}{x-a} + \frac{-q}{x+a}\right)$$

$$E_{(x)} = k_e\left(\frac{q}{(x-a)^2} + \frac{-q}{(x+a)^2}\right)$$

$$\frac{E(x) + E(-x)}{E(x)} = 1 - \frac{(x-a)^2}{(x+a)^2} = 1 - \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2$$

$$\frac{E(x) - E(-x)}{E(x)} = 1 + \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2$$

10) $E_m(r) = \frac{1}{2}\cancel{m}v_f^2 - G\frac{M_T \cancel{m}}{r_T} = 0$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_T}}$$

$$P = G\frac{mM}{(r_T+h)^2} \Rightarrow mg = G\frac{mM}{(r_T+h)^2} \Rightarrow g = \frac{GM}{(r_T+h)^2}$$

con $h = 200\,m$

$$\frac{g(h)}{g(h=0)} = \frac{GM}{(r_T+h)^2} \cdot \frac{r_T}{GM} = \frac{r_T}{(r_T+h)^2}$$