FISICA GENERALE 1, ESAME SCRITTO DEL 10 GIUGNO 2024

Si chiede di svolgere non più di 6 dei seguenti 10 esercizi.

E1. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ che, in coordinate cartesiane ortogonali, hanno le componenti $A_x = 1$, $A_y = 2$, $A_z = -4$, $B_x = 3$, $B_y = 1$, $B_z = -3$. Si calcoli il prodotto scalare $\vec{A} \cdot \vec{B}$ e il prodotto vettore $\vec{A} \times \vec{B}$.

E2. Un punto materiale compie un moto unidimensionale lungo la retta reale con legge oraria del moto (t essendo la variabile temporale)

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

Come si ottengono A e B dalle condizioni iniziali $x(0)$ e $\dot{x}(0)$? Si calcolino poi la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea del punto materiale.

E3. Una particella di massa m e carica q si muove lungo l'asse X sotto l'azione di un campo elettrico uniforme, di modulo E. Facendo l'ipotesi che $x(0) = 0$ e $v(0) = 0$, si calcoli dapprima la legge oraria del moto $x(t)$ e la formula dell'energia cinetica acquistata dopo aver percorso una distanza x. Si calcoli poi il valore numerico di tale energia cinetica se $q = 3.2 \times 10^{-19} C$, $E = 10^3 \frac{N}{C}$, $x = 0.4$ cm.

E4. Una cassa incontra attrito dinamico lungo il suo moto su uno scivolo inclinato di un angolo θ rispetto al piano del pavimento. Si calcoli come il coefficiente μ di attrito dinamico dipende dall'angolo θ, dall'accelerazione a della cassa e dall'accelerazione g di gravità. Nella formula generale ottenuta, si calcoli poi μ nel caso in cui $\theta = 15$ gradi, $a = 0.16g$, g essendo l'accelerazione di gravità pari a $9.8 m/s^2$.

E5. Un fluido scorre alla velocità di 12 metri s^{-1} in un tubo avente sezione di 18 metri al quadrato. Ad un certo punto il tubo si restringe e la sua sezione diventa di soli 8 metri al quadrato. Qual è la velocità con cui si muove il fluido nel punto più stretto?

E6. Nel piano euclideo, introdotte coordinate cartesiane ortogonali, si consideri un dipolo elettrico prodotto da una carica q posta nel punto di coordinate $(-a, 0)$ e una carica $-q$

nel punto di coordinate $(a, 0)$. Si calcoli il modulo E del campo elettrico di dipolo nel punto di coordinate $(0, y)$. Qual è la forma limite di E se il rapporto $\frac{a}{y}$ tende a 0?

E7. Nel piano euclideo con coordinate cartesiane (x, y), si calcoli, in un punto $P = (x, 0)$, il potenziale V prodotto da una carica q_1 posta in $(0, 0)$ e da una carica q_2 posta in $(0, y)$. Si calcoli poi il rapporto $\frac{V}{k_e}$ quando $q_1 = 2\mu C$, $q_2 = 3\mu C$, $x = 1.5$cm, $y = 3.5$cm.

E8. Una molla avente costante elastica $K = 60\frac{N}{m}$ viene mantenuta fissa ad una estremità, mentre una forza esterna è applicata all'estremità libera. Supponendo che $x_A = 0$, $x_B = 5$ cm, si calcoli in Joule il lavoro svolto dalla forza esterna sulla molla.

E9. In un moto unidimensionale, si consideri un urto elastico tra due corpi di massa m_1 e m_2. Si ottengano dapprima le formule generali per le velocità finali $(v_1)_f$ e $(v_2)_f$ dei due corpi, se $(v_1)_i$ e $(v_2)_i$ sono le loro velocità iniziali. Si calcolino poi i valori assunti dalle velocità finali, se $m_1 = 1$ Kg, $m_2 = 0.5$ Kg, $(v_1)_i = 5ms^{-1}$, $(v_2)_i = 6ms^{-1}$.

E10. Si consideri un sistema termodinamico in cui un serbatoio A a temperatura T_A cede calore Q ad una macchina termica M. Tale M usa in parte Q per compiere un lavoro W, e cede il restante calore $Q - W$ ad un serbatoio B avente temperatura $T_B < T_A$. Quale formula esprime il valore massimo del lavoro W? Se ne calcoli poi il valore se $Q = 2$ Joule, $T_B = 0.7\, T_A$.

① ~~E1~~ Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ che, in coordinate cartesiane ortogonali, hanno le componenti $A_x = 1$, $A_y = 2$, $A_z = -4$, $B_x = 3$, $B_y = 1$, $B_z = -3$. Si calcoli il prodotto scalare $\vec{A} \cdot \vec{B}$ e il prodotto vettore $\vec{A} \times \vec{B}$

CALCOLIAMO IL PRODOTTO SCALARA $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\vec{A} = (1, 2, -4), \quad B = (3, 1, -3)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (1)(3) + (2)(1) + (-4)(-3) = 3 + 2 + 12 = 17$$

CALCOLIAMO ORA IL PRODOTTO VETTORIALE $\vec{A} \times \vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & J & k \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - J \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

CALCOLIAMO I MINORI

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (2)(-3) - (1)(-4) = -6 + 4 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = (1)(-3) - (3)(-4) = -3 + 12 = 9$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (2)(3) = 1 - 6 = -5$$

QUINDI IL PRODOTTO VETTORIALE É:

$$\vec{A} + \vec{B} = i(-2) - J(9) + k(-5) = -2i - 9J - 5k = (-2, -9, -5)$$

② ~~E2~~ Un punto materiale compie un moto unidimensionale lungo la retta reale con legge oraria del moto (t essendo la variabile temporale)

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

Come si ottengono A e B dalle condizioni iniziali $x(0)$ e $\dot{x}(0)$? Si calcolino poi la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea del punto materiale.

Dalle condizioni iniziali $x(0)$ e $\dot{x}(0)$, possiamo ottenere A e B:

$x(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A$, quindi $A = x(0)$

Per ottenere B, deriviamo $x(t)$ rispetto a t per trovare la velocità istantanea $\dot{x}(t)$:

$\dot{x}(t) = -Aw\sin(wt) + Bw\cos(wt)$

Calcoliamo $\dot{x}(0)$:

$\dot{x}(0) = -Aw\sin(0) + Bw\cos(0) = -Aw(0) + Bw(1) = Bw$

quindi $B = \dfrac{\dot{x}(0)}{w}$.

La velocità istantanea $\dot{x}(t)$ è già stata calcolata come:

$\dot{x}(t) = -Aw\sin(wt) + Bw\cos(wt)$

L'accelerazione istantanea $\ddot{x}(t)$ si ottiene derivando la velocità istantanea $\dot{x}(t)$ rispetto a t:

$\ddot{x}(t) = -Aw^2\cos(wt) - Bw^2\sin(wt)$

Sostituendo i valori A e B ottenuti dalle condizioni iniziali, otteniamo:

$$\dot{x}(t) = -x(0)\,w\sin(wt) + \frac{\dot{x}(0)}{w}\cdot w\cos(wt) = -x(0)\,w\sin(wt) + \dot{x}(0)\cos(wt).$$

$$\ddot{x}(t) = -x(0)\,w^2\cos(wt) - \frac{\dot{x}(0)}{w}\,w^2\sin(wt) = -x(0)\,w^2\cos(wt) - \dot{x}(0)\,w\sin(wt)$$

3

E3 Una particella di massa m e carica q si muove lungo l'asse X sotto l'azione di un campo elettrico uniforme, di modulo E. Facendo l'ipotesi che $x(0) = 0$ e $v(0) = 0$, si calcoli dapprima la legge oraria del moto $x(t)$ e la formula dell'energia cinetica acquistata dopo aver percorso una distanza x. Si calcoli poi il valore numerico di tale energia cinetica se $q = 3.2 \times 10^{-19}C$, $E = 10^3 \frac{N}{C}$, $x = 0.4$ cm.

Una particella carica si muove sotto l'influenza di un campo elettrico uniforme. La forza elettrica che agisce su una carica q in un campo elettrico E è data dalla legge di Coulomb: $F = q \cdot E$

Secondo la seconda legge del moto di Newton, l'accelerazione a di un corpo è proporzionale alla forza F applicata e inversamente proporzionale alla sua massa m:

$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{q \cdot E}{m}$

La particella parte da ferma e da una posizione iniziale zero, quindi $x(0)=0$ e $v(0)=0$. L'accelerazione é costante, quindi possiamo usare le equazioni del moto per il moto uniformemente accelerato per trovare la posizione x al tempo t:

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2.$$

Sostituendo $x(0)=0$, $v(0)=0$ e $a = \frac{q \cdot E}{m}$, otteniamo:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{q \cdot E}{m}\right)t^2$$

Per trovare la velocitá v in funzione del tempo t, possiamo derivare $x(t)$ rispetto a t: $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q \cdot E}{m}t^2\right) = \frac{q \cdot E}{m}t$

L'energia cinetica K di una particella in movimento é data da:

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Sostituendo $v(t)$, otteniamo:

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{q \cdot E}{m}t\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2 E^2}{m^2}\right)t^2 \Rightarrow K = \frac{q^2 E^2}{2m}t^2$$

Per esprimere K in funzione di x, utilizziamo la relazione precedentemente trovata $x(t) = \frac{1}{2}\frac{q \cdot E}{m}t^2$ e risolviamo per t^2:

$$t^2 = \frac{2m\,x(t)}{q \cdot E}$$

Sostituendo t^2 nella formula di K otteniamo:

$$K = \frac{q^{\cancel{2}} E^{\cancel{2}}}{\cancel{2m}}\left(\frac{\cancel{2m}\,x(t)}{\cancel{q \cdot E}}\right) = q \cdot E\, x(t)$$

Ora possiamo calcolare il valore numerico K per i valori dati di q, E, e x:

$q = 3{,}3 \cdot 10^{-19}\ C$, $E = 10^{3}\ N/C$, $x = 0{,}4\ cm = 0{,}004\ m$

Quindi l'energia cinetica K é:

$K = qEx = (3{,}3 \cdot 10^{-19}\ C)(10^{3}\ N/C) \cdot 0{,}004 = 1{,}32 \cdot 10^{-15}\ J$

4) ~~E4.~~ Una cassa incontra attrito dinamico lungo il suo moto su uno scivolo inclinato di un angolo θ rispetto al piano del pavimento. Si calcoli come il coefficiente μ di attrito dinamico dipende dall'angolo θ, dall'accelerazione a della cassa e dall'accelerazione g di gravità. Nella formula generale ottenuta, si calcoli poi μ nel caso in cui $\theta = 15$ gradi, $a = 0.16g$, g essendo l'accelerazione di gravità pari a $9.8m/s^2$.

Per calcolare il coefficiente di attrito dinamico μ in funzione di θ, a, e g iniziamo analizzando le forze in gioco su una cassa su uno scivolo inclinato.

Le forze principali che agiscono sulla cassa sono:

La forza di gravità mg, che agisce verticalmente verso il basso.

La forza normale N, che agisce perpendicolarmente alla superficie dello scivolo.

La forza di attrito dinamico $f_{ATTRITO}$, che agisce in direzione opposta al moto della cassa lungo lo scivolo.

La componente della forza di gravità parallela allo scivolo é $mg\sin(\theta)$ e quella perpendicolare allo scivolo é $mg\cos(\theta)$. La forza di attrito dinamico é data da $f_{ATTRITO} = \mu N$, dove $N = mg\cos(\theta)$ é la forza normale.

La seconda legge di Newton lungo la direzione inclinata dello scivolo dá:

$ma = mg\sin(\theta) - \mu N$.

Sostituendo $N = mg\cos(\theta)$, si ottiene:

$ma = mg\sin(\theta) - \mu mg\cos(\theta)$

Dividendo entrambi i membri per m, otteniamo:

$$a = g\sin(\theta) - \mu g\cos(\theta)$$

Risolvendo per μ, si ottiene:

$$\mu = \frac{\cancel{g}\sin(\theta) - a}{\cancel{g}\cos(\theta)}$$

Sostituendo $a = 0{,}16\,g$, $g = 9{,}8\ m/s^2$, e $\theta = 15°$, abbiamo:

$$\mu = \frac{\sin(15°) - 0{,}16}{\cos(15°)} \approx \frac{0{,}2588 - 0{,}16}{0{,}9659} \approx 0{,}1022$$

Quindi, il coefficiente di attrito dinamico μ per $\theta = 15°$ e $a = 0{,}16\,g$

è circa $0{,}1022$

5 ~~E5~~. Un fluido scorre alla velocità di 12 metri s^{-1} in un tubo avente sezione di 18 metri al quadrato. Ad un certo punto il tubo si restringe e la sua sezione diventa di soli 8 metri al quadrato. Qual è la velocità con cui si muove il fluido nel punto più stretto?

Per trovare la velocità del fluido nel punto in cui il tubo si restringe, possiamo usare la legge di conservazione della massa, nota come principio di continuità per i fluidi incompressibili. Il principio di continuità afferma che la velocità del fluido è inversamente proporzionale all'area della sezione del tubo.

Siano:

A_1 l'area della sezione trasversale più ampia,

v_1 la velocità del fluido in questa sezione,

A_2 l'area della sezione trasversale più stretta,

v_2 la velocità del fluido in questa sezione.

Il principio di continuità dice che:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 .$$

Dati $A_1 = 18\ m^2$, $v_1 = 12\ m/s$ e $A_2 = 8\ m^2$, possiamo risolvere per v_2:

$$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2}$$ Sostituendo i valori forniti, otteniamo:

$$v_2 = \frac{18\, m^2 \cdot 12\, m/s}{8\, m^2} = \frac{216}{8}\, m/s = 27\, m/s$$

6

E6. Nel piano euclideo, introdotte coordinate cartesiane ortogonali, si consideri un dipolo elettrico prodotto da una carica q posta nel punto di coordinate $(-a, 0)$ e una carica $-q$ nel punto di coordinate $(a, 0)$. Si calcoli il modulo E del campo elettrico di dipolo nel punto di coordinate $(0, y)$. Qual è la forma limite di E se il rapporto $\frac{a}{y}$ tende a 0?

Il campo elettrico $\vec{E}$ generato da una carica puntiforme é dato dall'equazione:

$\vec{E} = K_c \frac{q}{r^2}\hat{r}$, dove K_c é la costante di Coulomb, q é la carica,

r é la distanza dalla carica al punto dove si calcola il campo, e $\hat{r}$ é il vettore unitario che punta dalla carica al punto di interesse.

Nel caso di un dipolo elettrico con cariche $+q$ e $-q$ poste rispettivamente nei punti $(-a, 0)$ e $(a, 0)$, il campo elettrico totale nel punto $(0, y)$ é la somma vettoriale dei campi prodotti da ciascuna carica.

La distanza dal punto $(0, y)$ a ciascuna carica é $\sqrt{a^2+y^2}$. Il campo elettrico prodotto da ciascuna carica in $(0, y)$ sarà diretto lungo la linea che connette la carica con il punto. Per la carica positiva $+q$ in $(-a, 0)$, il campo elettrico punterá verso il punto $(0, y)$, mentre per la carica negativa $-q$ in $(a, 0)$, il campo elettrico punterá lontano dal punto $(0, y)$.

Le componenti del campo elettrico $\vec{E}_+$ prodotto dalla carica $+q$ sono:

$$E_{+x} = -K_c \frac{q}{a^2+y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}, \quad E_{+y} = K_c \frac{a}{a^2+y^2} \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

Le componenti del campo elettrico $\vec{E}_-$ prodotto dalla carica $-q$ sono:

$$E_{-x} = K_c \frac{a}{a^2+y^2} \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}, \quad E_{-x} = -K_c \frac{a}{a^2+y^2} \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

Sommando le componenti lungo l'asse x, si annullano a vicenda, poiché sono uguali in modulo ma opposte in direzione. La somma delle componenti lungo l'asse y ci dà il campo elettrico totale:

$$E_y = E_{+y} + E_{-y} = 2k_c \frac{qy}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

Il modulo del campo elettrico totale E è dato dal valore assoluto della componente lungo l'asse y, poiché non ci sono componenti lungo l'asse x:

$$E = |E_y| = 2k_c \frac{qy}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

Se il rapporto a/y tende a 0, significa che $a < y$. In questo caso, possiamo approssimare $a^2+y^2 \simeq y^2$ e quindi il modulo del campo elettrico diventa:

$$E \simeq 2k_c \frac{qy}{y^3} = 2k_c \frac{q}{y^2}.$$

Quindi è il campo elettrico di un dipolo elettrico lungo l'asse del dipolo a grande distanza dalle cariche.

7 **E7**. Nel piano euclideo con coordinate cartesiane (x, y), si calcoli, in un punto $P = (x, 0)$, il potenziale V prodotto da una carica q_1 posta in $(0, 0)$ e da una carica q_2 posta in $(0, y)$. Si calcoli poi il rapporto $\frac{V}{k_e}$ quando $q_1 = 2\mu C$, $q_2 = 3\mu C$, $x = 1.5$cm, $y = 3.5$cm.

Il potenziale elettrico V in un punto dello spazio causato da una carica puntiforme è dato dalla formula: $V = k_c \frac{q}{r}$,
dove k_c è la costante di Coulomb, q è la carica, e r è la distanza dalla carica al punto di misura.

Nel caso di due cariche, q_1 posta in $(0,0)$ e q_2 posta in $(0,y)$, il potenziale totale nel punto $P=(x,0)$ è la somma dei potenziali causati da ciascuna carica.

La distanza di P da q_1 é semplicemente $r_1 = x$ e la distanza P da q_2 é $r_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. Quindi, il potenziale totale V in P é:

$$V = K_c \frac{q_1}{x} + K_c \frac{q_2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Sostituendo $q_1 = 2\,\mu C = 2 \cdot 10^{-6}\,C$, $q_2 = 3\,\mu C = 3 \cdot 10^{-6}\,C$, $x = 1{,}5\,cm = 0{,}015\,m$

$y = 3{,}5\,cm = 0{,}035\,m$, otteniamo:

$$V = k_c \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0{,}015} + (8{,}987 \cdot 10^{9}) \frac{3 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{0{,}015^2 + 0{,}035^2}}.$$

Calcoliamo i valori numerici:

$$V = (8{,}987 \cdot 10^{9}) \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0{,}015} + (8{,}987 \cdot 10^{9}) \frac{3 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{0{,}015^2 + 0{,}035^2}}$$

$$V \approx (8{,}987 \cdot 10^{9}) \left(\frac{2 \cdot 10^{-6}}{0{,}015} + \frac{3 \cdot 10^{-6}}{0{,}03767} \right)$$

$$V \approx (8{,}987 \cdot 10^{9})(133{,}333 \cdot 10^{-6} + 79{,}656 \cdot 10^{-6})$$

$$V \approx (8{,}987 \cdot 10^{9})(212{,}989 \cdot 10^{-6})$$

$$V \approx 1{,}914 \cdot 10^{3}\,V$$

Per calcolare il rapporto V / K_c, dove $K_c = k_c = 8{,}987 \cdot 10^{9}\,Nm^2/C^2$, e V é il potenziale trovato:

$$\frac{V}{k_c} = \frac{1{,}914 \cdot 10^{3}}{8{,}987 \cdot 10^{9}} \approx 2{,}13 \cdot 10^{-7}\,C^{-1}.$$

(8) E8. Una molla avente costante elastica $K = 60 \frac{N}{m}$ viene mantenuta fissa ad una estremità, mentre una forza esterna è applicata all'estremità libera. Supponendo che $x_A = 0$, $x_B = 5$ cm, si calcoli in Joule il lavoro svolto dalla forza esterna sulla molla.

Il lavoro svolto su una molla da una forza esterna durante la sua estensione o compressione è dato dall'equazione del lavoro elastico, che è:

$$W = \frac{1}{2} K (x_B^2 - x_a^2),$$

dove K è la costante elastica della molla, x_a è l'allungamento iniziale e x_B è l'allungamento finale della molla. Sostituendo i valori dati: $K = 60$ N/m, $x_A = 0$ m e $x_B = 5$ cm $= 0{,}05$ m, otteniamo:

$$W = \frac{1}{2} \cdot 60 \text{ N/m} \cdot (0{,}05^2 - 0^2) \text{ m}^2.$$

Calcoliamo il lavoro svolto:

$$W = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 0{,}0025$$

$$W = 30 \cdot 0{,}0025$$

$$W = 0{,}075 \text{ J}$$

Il lavoro svolto dalla forza esterna per estendere la molla da 0 a 5 cm è quindi di 0,075 Joule.

(9) E9. In un moto unidimensionale, si consideri un urto elastico tra due corpi di massa m_1 e m_2. Si ottengano dapprima le formule generali per le velocità finali $(v_1)_f$ e $(v_2)_f$ dei due corpi, se $(v_1)_i$ e $(v_2)_i$ sono le loro velocità iniziali. Si calcolino poi i valori assunti dalle velocità finali, se $m_1 = 1$ Kg, $m_2 = 0.5$ Kg, $(v_1)_i = 5ms^{-1}$, $(v_2)_i = 6ms^{-1}$.

In un urto elastico unidimensionale, le leggi di conservazione di energia cinetica e quantità di moto si applicano. Le formule generali per le velocità finali $(v_1)_f$ e $(v_2)_f$ di due corpi di massa m_1 e m_2 con velocità iniziali $(v_1)_i$ e $(v_2)_i$ sono:

$$m_1 (v_1)_i + m_2 (v_2)_i = m_1 (v_1)_f + m_2 (v_2)_f$$

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1)_i^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2)_i^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1)_f^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2)_f^2$$

Risolvendo il sistema di equazioni per $(v_1)_f$ e $(v_2)_f$, otteniamo:

$$(v_1)_f = \frac{(m_1 - m_2)(v_1)_i + 2m_2(v_2)_i}{m_1 + m_2}$$

$$(v_2)_f = \frac{(m_2 - m_1)(v_2)_i + 2m_1(v_1)_i}{m_1 + m_2}$$

Sostituendo i valori dati $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 0{,}5$ kg, $(v_1)_i = 5$ m/s e $(v_2)_i = 6$ m/s

otteniamo:

$$(v_1)_f = \frac{(1-0{,}5)(5) + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 6}{1+0{,}5} = \frac{0{,}5 \cdot 5 + 6}{1{,}5} = \frac{2{,}5+6}{1{,}5} = \frac{8{,}5}{1{,}5} = \frac{17}{3} \text{ m/s}$$

$$(v_2)_f = \frac{(0{,}5-1)(6) + 2 \cdot 1 \cdot 5}{1+0{,}5} = \frac{-0{,}5 \cdot 6 + 10}{1{,}5} = \frac{-3+10}{1{,}5} = \frac{7}{1{,}5} = \frac{14}{3} \text{ m/s}$$

Le velocità finali dopo l'urto sono quindi:

$$(v_1)_f = \frac{17}{3} \text{ m/s}, \quad (v_2)_f = \frac{14}{3} \text{ m/s}$$

10

E10. Si consideri un sistema termodinamico in cui un serbatoio A a temperatura T_A cede calore Q ad una macchina termica M. Tale M usa in parte Q per compiere un lavoro W, e cede il restante calore $Q - W$ ad un serbatoio B avente temperatura $T_B < T_A$. Quale formula esprime il valore massimo del lavoro W? Se ne calcoli poi il valore se $Q = 2$ Joule, $T_B = 0.7\, T_A$.

Il massimo valore del lavoro W che può essere compiuto da una macchina termica che opera tra due serbatoi di calore a temperature T_A e T_B (con $T_B < T_a$) è dato dal rendimento massimo possibile, che è quello del ciclo di Carnot. Il rendimento η di una macchina di Carnot è dato da:

$$\eta = 1 - \frac{T_B}{T_A}$$

Il lavoro massimo W_{max}, quindi, può essere espresso come una frazione del calore Q assorbito dal serbatoio a temperatura più alta:

$$W_{max} = \eta Q = \left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right) \cdot Q$$

Sostituendo $T_B = 0{,}7\, T_A$ e $Q = 2$ Joule, otteniamo:

$$W_{max} = \left(1 - \frac{0{,}7\, \cancel{T_A}}{\cancel{T_A}}\right) \cdot 2 \text{ Joule} = (1 - 0{,}7) \cdot 2 \text{ Joule}$$

$$= 0{,}3 \cdot 2 \text{ Joule} = 0{,}6 \text{ Joule}$$

Quindi, il valore massimo del valore W che può essere compiuto dalla macchina termica sotto queste condizioni è di 0,6 Joule.