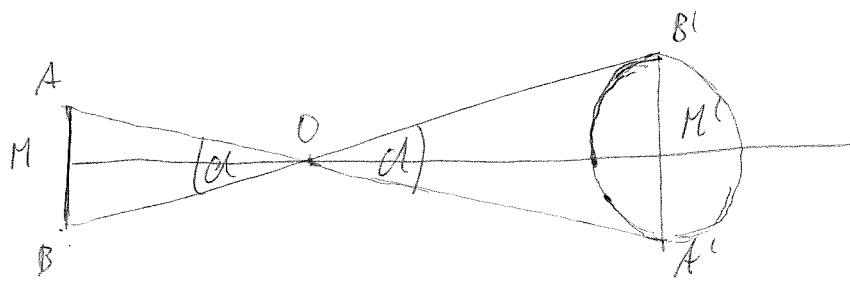


Calcolo tondo della distanza medior Terna - Mle:

EJP



$$\overline{OM} = \overline{OA} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{AM} = \overline{OA} \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{OB'} = \overline{OB} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{M'B'} = \overline{OB} \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OB'}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{OM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{M'B'}} \Rightarrow \frac{\overline{OM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{M'B'}}$$

$$\Rightarrow \frac{d_{cer2}}{\frac{1}{2} d_c} = \frac{d_{TS}}{\frac{1}{2} d_s} \Rightarrow d_{TS} = d_s \frac{d_{cer2}}{d_c}$$

$d_{cer2}$  = distanza fra i contorni  $c_2$  e  $c_2'$

$d_c$  = diametro del cerchio del contorno più piccolo

$d_s$  = diametro del gk =  $\overline{M'B'}$

- Nel piano euclideo, il prodotto scalare di due vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  è l'una legge che ad essa associa il numero reale  $S(\vec{A}, \vec{B})$  secondo la regola:

$$S: \vec{A}, \vec{B} \rightarrow S(\vec{A}, \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y \in \mathbb{R} \quad \textcircled{D}$$

Inoltre si allora i numeri  $i^j$  di componenti  $(1, 0)$  e  $j^j$  di componenti  $(0, 1)$  si può anche scrivere che

$$S(\vec{A}, \vec{B}) = (A_x i^j + A_y j^j) \cdot (B_x i^j + B_y j^j)$$

$$= A_x B_x S(i^j, i^j) + A_y B_y S(j^j, j^j) + A_x B_y S(i^j, j^j) + A_y B_x S(j^j, i^j)$$

da cui, per confronto con la  $\textcircled{D}$ , si trova che

$$S(i^j, i^j) = i^j \cdot i^j = 1, \quad S(j^j, j^j) = j^j \cdot j^j = 1$$

$$S(i^j, j^j) = S(j^j, i^j) = 0$$

- Nello spazio euclideo, il prodotto scalare di due vettori

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}, \quad \text{con } \vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \\ \vec{k} = (0, 0, 1)$$

è una legge che ad essa associa il numero reale  $S(\vec{A}, \vec{B})$  secondo la regola

$$S: \vec{A}, \vec{B} \rightarrow S(\vec{A}, \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad \leftarrow$$

D'altronde, è anche vero che

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) \quad \leftarrow$$

del confronto di tali formule troviamo che

$$S(i^j, i^j) = i^j \cdot i^j = 1, \quad S(j^j, j^j) = j^j \cdot j^j = 1, \quad S(k^j, k^j) = 1$$

$$S(i^j, j^j) = S(j^j, i^j) = 0, \quad S(j^j, k^j) = S(k^j, j^j) = 0$$

$$S(k^j, i^j) = S(i^j, k^j) = 0$$

Si definisca vettore  $\vec{V}(\vec{A}, \vec{B})$ , vettore in  $\mathbb{R}^3$ , il cui verso legge  
che ad esso associa il vettore  $\vec{V}(\vec{A}, \vec{B})$  secondo la regola

$$\vec{V}: \vec{A}, \vec{B} \rightarrow \vec{V}(\vec{A}, \vec{B}) = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} A_y A_z \\ B_y B_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} A_x A_z \\ B_x B_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_x A_y \\ B_x B_y \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2} (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (-1)^{2+3} (A_x B_z - A_z B_x) \vec{j} + (-1)^{1+3} (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

$$= V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

$$\text{dove } V_x = A_y B_z - A_z B_y$$

$$V_y = (A_z B_x - A_x B_z)$$

$$V_z = A_x B_y - A_y B_x$$

In particolare, se i vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  sono proporzionali,

$$\text{ovvero } \exists \frac{\alpha}{\neq} \in \mathbb{R}: \vec{A} = \alpha \vec{B} \Rightarrow A_x = \alpha B_x \\ A_y = \alpha B_y \\ A_z = \alpha B_z$$

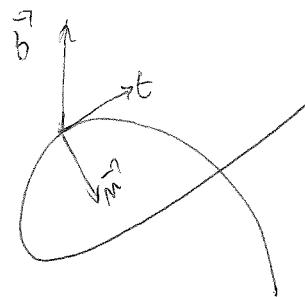
Allora il loro ~~non~~ prodotto

vettore si annulla:

$$\therefore \vec{V}(\vec{A}, \alpha \vec{B}) = \vec{V}(\alpha \vec{B}, \vec{B}) = \vec{0},$$

Ovvero due vettori paralleli hanno prodotto vettore nullo.

Dato l'intervallo chiuso  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , una curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  nello spazio, detta anche curva sferica, si può studiare prendendo riferimento ai 3 versori in figura:



Ma è il simbolo del prodotto vettore.

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}, \quad \vec{t} = \vec{n} \times \vec{b}, \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$$

Sia  $P(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  il trieho trirettangolo formato dai versori  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ . Le 3 facce del trieho sono

$P(\vec{t}, \vec{n})$  = piano osculatore = piano condotto per la tangente  $\vec{t}$  parallellamente alla normale  $\vec{n}$

$P(\vec{n}, \vec{b})$  = piano normale alla curva in  $P$

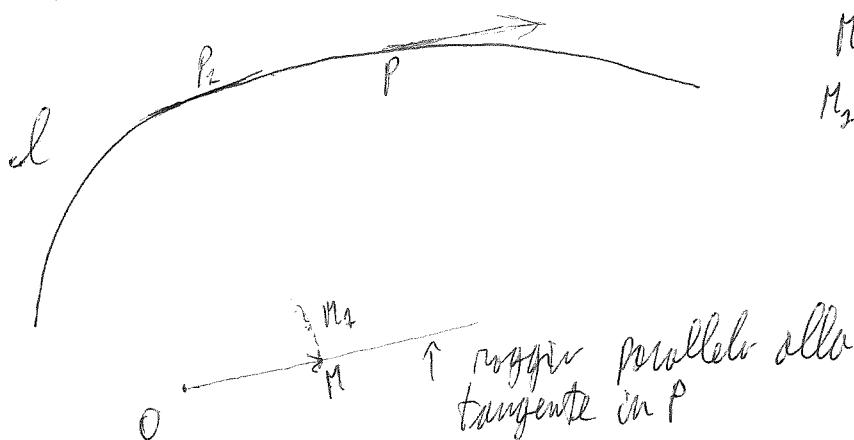
$P(\vec{b}, \vec{t})$  = piano determinato dalla tangente  $\vec{t}$  e dalla binormale  $\vec{b}$

$\vec{n}$  è il versore di  $\frac{d\vec{t}}{ds}$ , ovvero il versore di "modulo=1" che ha direzione e verso della normale principale

$$\text{Si ha: } \frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa(s) \vec{n} = \frac{1}{r} \vec{n} \quad \begin{aligned} \kappa(s) &= \text{curvatura} \\ r &= \text{raggio di curvatura} \end{aligned}$$

- Dato un generico punto di curva  $\ell$ , fissiamo ad arbitrario un punto  $O$  dello spazio  $\mathbb{R}^3$  e facciamo corrispondere ad ogni punto  $P$  di  $\ell$  il punto  $M$  che si ottiene operando su  $O$  un rapporto parallelo alla tangente in  $P$ , e prendendo su questo rapporto il punto  $M$  che dista  $r$  da  $O$ .

Questo si esprime scrivendo  $M = O + \vec{t}^7$ . I punti  $M$  appartengono per costruzione ad una sfera di raggio 1 centrata su  $O$ , e li troviamo disposti lungo un arco di linea d'onda indicatrice spina delle tangenti alla linea  $l$



$$M = \text{immagine di } P$$

$$M_2 = " " P_2$$

Angolo di contingenza relativo all'arco  $P_1 P_2$   
= angolo formato dalle tangenti in  $P$  e in  $P_2$

$\chi$  = lunghezza dell'arco di cerchio massimo che contingue  
 $M$  e  $M_2$  = misura in radianti dell'angolo di contingenza

Se  $\chi$  caratterizza globalmente la deviazione dall'andamento rettilineo che la curva  $l$  presenta nel tratto  $P_1 P_2$

ha deviazione minima, ovvero rispetto all'arco di lunghezza

e'  $\left| \frac{\chi}{AS} \right|$  = curvatura media dell'arco

$\lim_{P_1 \rightarrow P_2} \left| \frac{\chi}{AS} \right|$  = curvatura della curva in  $P$

$$M = O + \vec{E}$$

$$M_2 = O + \vec{F}_2$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \vec{E}_2 - \vec{E} = (M_2 - O) - (M - O) = M_2 - M$$

$$\Rightarrow \text{corda } MM_2 = \text{lunghezza } (\Delta \vec{E}) / \text{di } \Delta \vec{E}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x}{ds} \right| = \left| \frac{x}{dt} \right| \left| \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{x}{ds} \right| \left| \frac{dt}{ds} \right|$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{x}{ds} \right| = \left| \frac{dt}{ds} \right| = \kappa(s) \Rightarrow \kappa^2(s) = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{dt}{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{ds} = \kappa(s) \bar{n}^2$$

- si puo' anche osservare che

$$\left\{ \begin{array}{l} t(s) = \frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|} = \gamma'(s) \\ \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n(s) = \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|} = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow t'(s) = \gamma''(s) = \kappa(s) n(s)$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{ds} = \kappa(s) \bar{n}^2(s) = \frac{1}{2} \bar{n}^2(s)$$

do si ottiene l'equazione (nella sola  $x$ )

$$(7) \quad x^2(1 + 4m^2) + 8mx(1 - 3m) + 12m(3m - 2) = 0$$

le cui radici danno le ascisse dei punti di intersezione della retta (6) con l'ellisse (5). Le soluzioni del sistema costituito dalle (5), (6) coincidono se (e soltanto se) coincidono le soluzioni della (7); ciò d'altra parte accade qualora sia nullo il discriminante della (7), cioè qualora si abbia

$$16m^2(1 - 3m)^2 - 12m(3m - 2)(1 + 4m^2) = 0$$

ossia

$$(8) \quad m(-5m + 6) = 0$$

La (8) ha le due soluzioni

$$m_1 = 0 \quad , \quad m_2 = \frac{6}{5}$$

Le due tangenti  $t_1, t_2$  all'ellisse uscenti da  $P$  hanno pertanto le equazioni

$$t_1) \quad y = 1$$

$$t_2) \quad 6x - 5y - 13 = 0$$

La retta  $t_1$  è tangente all'ellisse nel punto  $(0, 1)$ ; infatti il sistema costituito dalla (5) e dalla  $y = 1$  ammette l'unica soluzione (da contare due volte)  $x = 0, y = 1$ . La retta  $t_2$  è tangente all'ellisse nel punto  $(\frac{24}{13}, -\frac{5}{13})$ , come facilmente può verificarsi.

#### 4. Disegnare l'ellisse

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

per punti e per tangenti.

Si segnino intanto i vertici dell'ellisse:  $A(6, 0)$ ,  $A'(-6, 0)$ ,  $B(0, 3)$ ,  $B'(0, -3)$ . Per disegnare l'ellisse per punti conviene procedere nel seguente modo (v. fig. 2): descritti i cerchi di centro  $O(0, 0)$  e raggi  $OA$ ,  $OB$ , siano  $H, K$  i punti in cui essi intersecano una generica semiretta  $r$  con l'origine in  $O$ . Il punto  $P$  intersezione della parallela per  $K$  alla  $AA'$  collappa

ralella per  $H$  alla  $BB'$  è un punto dell'ellisse. Ripetendo varie volte la precedente costruzione, a partire da varie semirette  $r$  di origine  $O$ , ci si procurano vari punti dell'ellisse e si può quindi disegnare l'ellisse per punti.

Osserviamo ancora che è sufficiente disegnare, con la precedente costruzione, il pezzo di ellisse contenuto nel primo quadrante: si completa poi il disegno dell'ellisse tenendo presente che essa è simmetrica rispetto a ciascuno degli assi  $AA'$ ,  $BB'$ .

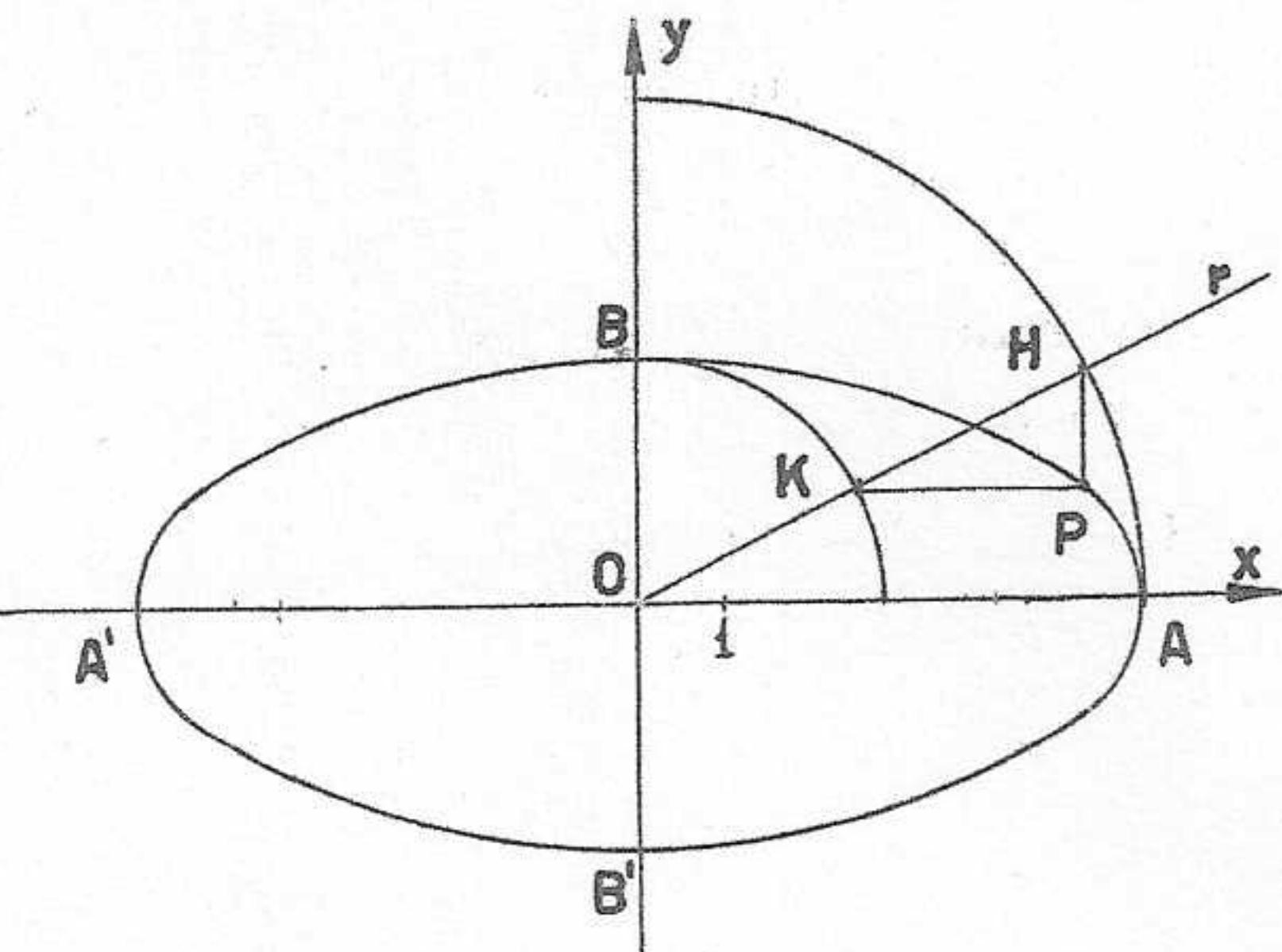


Fig. 2

Per disegnare l'ellisse per punti si può anche ricorrere alla proprietà seguente: ogni punto reale di un'ellisse ha dai fuochi distanze i cui valori assoluti hanno una somma costante (e precisamente eguale alla lunghezza  $2a$  dell'asse maggiore dell'ellisse). Seguendo questa via si comincerà col segnare i fuochi  $F, F'$ :  $F, F'$  sono le intersezioni dell'asse maggiore  $AA'$  col cerchio di centro  $B$  (o  $B'$ ) e raggio  $OA$ .

Si descriveranno poi due cerchi coi centri in  $F, F'$  ed i cui raggi abbiano per somma  $2a = 12$  (ma differenza  $< 2c$  cioè  $< 6\sqrt{3}$ )<sup>1</sup>: i punti comuni a tali due cerchi appartengono all'ellisse. Facendo variare i raggi dei due cerchi di centri  $F, F'$  (in modo che la loro somma sia sempre costante ed eguale a  $2a = 12$ ) si possono costruire quanti punti si vogliono dell'ellisse.

Per disegnare l'ellisse per tangenti (v. fig. 3), segnati i vertici  $A, A', B, B'$  ed i fuochi  $F, F'$  ( $F, F'$  sono le intersezioni dell'asse maggiore  $AA'$  col cerchio di centro  $B$ , o  $B'$ , e raggio  $OA$ ) si descriva il cerchio di diametro  $AA'$  (podària

<sup>1)</sup> Si osservi che affinchè due cerchi di centri  $F, F'$  si incontrino in punti reali è necessario che la differenza dei loro raggi sia  $< |F'F|$ .

dei fuochi rispetto all'ellisse); si considerino poi due semirette parallele con le origini rispettivamente in  $F$  ed in  $F'$  e situate entrambe da una stessa parte rispetto alla  $AA'$  e siano  $R, R'$  i punti in cui esse incontrano il cerchio podaria. La retta  $RR'$  (che riesce perpendicolare a  $FR$  e ad  $F'R'$ ) è una tangente dell'ellisse; ripetendo varie volte la costruzione (a partire da varie copie di semirette parallele con le origini in  $F, F'$ ) ci si procurano varie tangenti all'ellisse; si costruisce in tal modo l'ellisse per tangenti.

##### 5. Costruire le tangenti all'ellisse

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

che escono dal punto  $P(9, 2)$  (v. fig. 4).

Si segnino intanto i vertici  $A, A', B, B'$  ed i fuochi  $F, F'$ ; si disegni il cerchio di diametro  $AA'$  (podaria dei fuochi rispetto all'ellisse) e siano  $R, R'$  le sue intersezioni col cerchio di diametro  $FP$ : le rette  $PR, PR'$

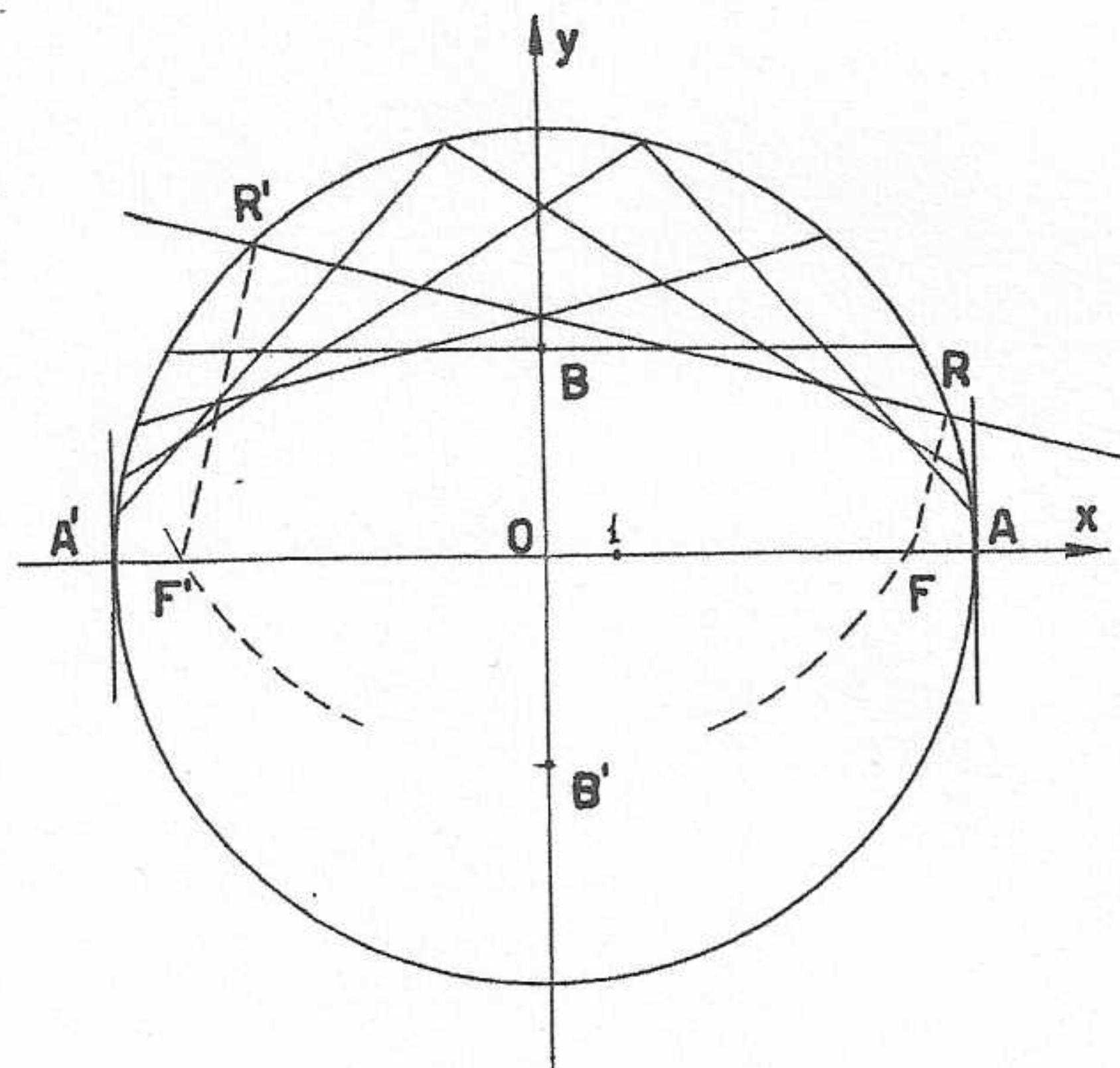


Fig. 3

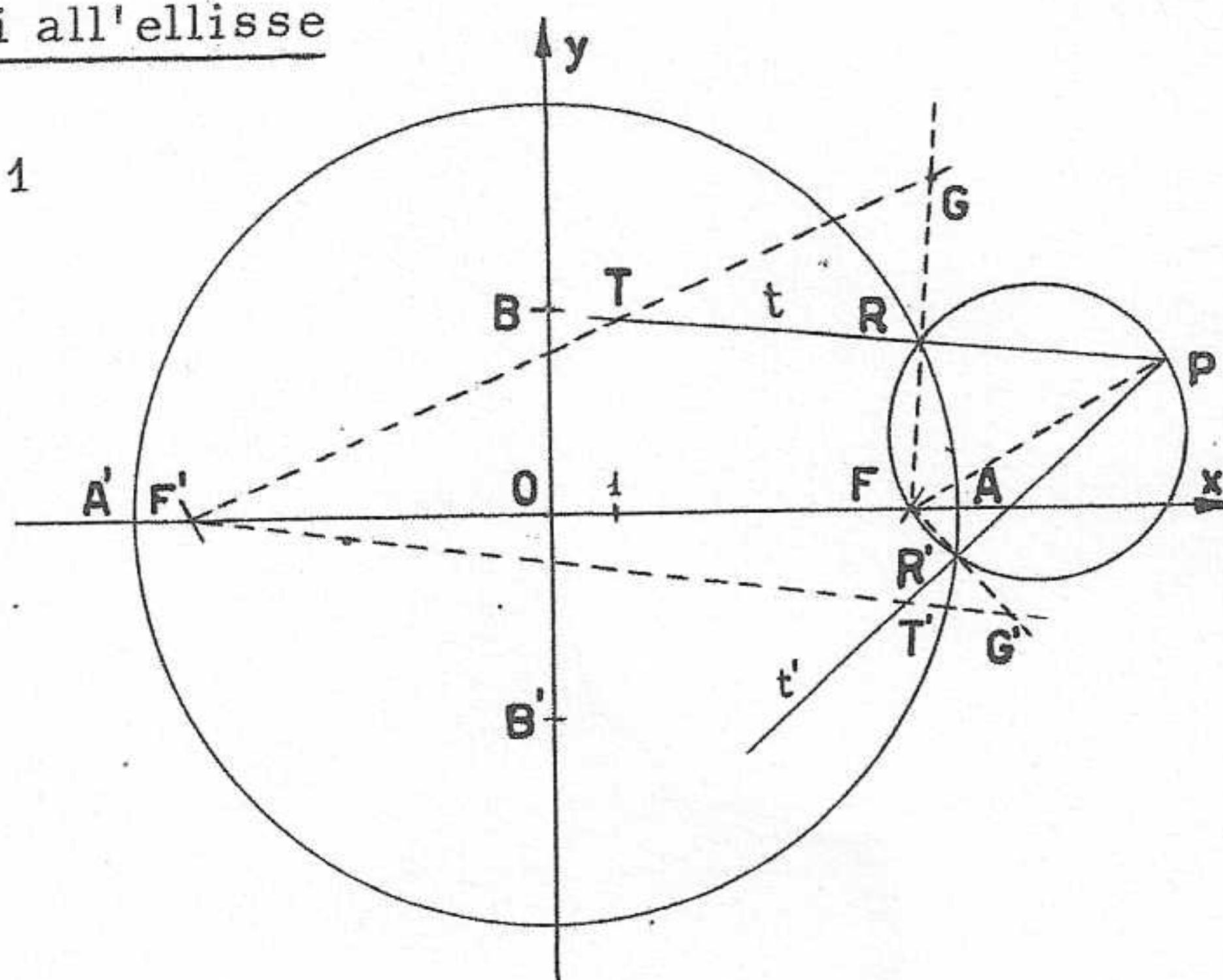


Fig. 4

## URTI

- QUANDO DUE OGGETTI si urtano e restano uniti l'uno all'altro viene trasferita all'esterno la massima frazione possibile dell'energia cinetica iniziale  $\Rightarrow$  l'urto è PERFETTAMENTE INELASTICO
- Un URTO ELASTICO è invece un urto in cui l'energia cinetica del sistema si conserva.
- Tra entrambi i tipi di urti, in un sistema chiuso  $\Rightarrow \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}^2 = 0$
- $\Rightarrow \frac{d(m\vec{v})}{dt} = 0 \Rightarrow$  la quantità di moto  $m\vec{v}$  si arresta.

## URTI PERFETTAMENTE INELASTICI (in una dimensione)

Per portare il moto iniziale a nuovo lungo una retta, e soprattutto a nuovo con velocità comune  $v_f$  e restare uniti  $\Rightarrow$  dalla conservazione della quantità di moto si ha

$$m_1(v_1)_i + m_2(v_2)_i = (m_1+m_2)v_f$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{m_1(v_1)_i + m_2(v_2)_i}{(m_1+m_2)}$$

## URTI ELASTICI

$$m_1(v_1)_i + m_2(v_2)_i = m_1(v_1)_f + m_2(v_2)_f \quad \leftarrow \text{Conservazione di moto}$$

$$\frac{1}{2}m_1(v_1)_i^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2)_i^2 = \frac{1}{2}m_1(v_1)_f^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2)_f^2 \quad \leftarrow \text{Energia cinetica}$$

$$\Rightarrow m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

$$\Rightarrow m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) \quad \boxed{2}$$

$$\checkmark m_1(v_{1i} - v_{1if}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad \boxed{2}$$

$$\Rightarrow \cancel{m_1} \frac{m_2(v_{2f} - v_{2i})}{m_2} (v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$$

$$\Rightarrow v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} \Rightarrow (v_{1i} - v_{1f}) = -(v_{2f} - v_{2i})$$

Relazione relativa dei due oggetti prima dell'urto

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{1f} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) V_{1i} + \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) V_{2i} \\ V_{2f} = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) V_{1i} + \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) V_{2i} \end{cases}$$

Suppose,  $A = V_{1i}, B = V_{2i}, \alpha = V_{1f}, \beta = V_{2f}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 A + m_2 B = m_1 \alpha + m_2 \beta \\ A - B = \beta - \alpha \end{cases} \Rightarrow \beta = \alpha + A - B$$

$$\Rightarrow m_1 A + m_2 B = m_1 \alpha + m_2 \alpha + m_2 (A - B)$$

$$\Rightarrow m_1 A + m_2 B + m_2 (B - A) = (m_1 + m_2) \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{(m_1 - m_2) A + 2m_2 B}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \beta = \alpha + A - B = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} A + \frac{2m_2 B}{m_1 + m_2} + A - B$$

$$= \frac{(m_1 - m_2 + m_2 + m_2) A}{m_1 + m_2} + \frac{2m_2 - m_1 - m_2}{m_1 + m_2} B$$

$$= \frac{2m_2}{m_1 + m_2} A + \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} B$$

## Dissertazione

ha legge di gravitazione

"Dati 2 corpi di masse rispettive  $m_1$  e  $m_2$  posti a distanza  $r$ , il corpo di massa  $m_1$ , come mostrato in fig. I, esercita una forza  $\vec{F}$  attrattiva sul corpo

di massa  $m_2$  pari a:

$$\vec{F} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_R \quad (1)$$

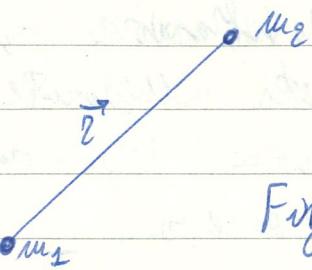


Fig I

ove nella (1) compare il segno meno da quanto in  $\vec{u}$  è scritto come positivo

il verso che conduce da  $m_1$  a  $m_2$ ,  $\vec{u}_R$  è il versore legato ad  $\vec{r}$  dalla relazione:  $\vec{r} = r \vec{u}_R$ , e' che  $G$  è un fattore di proporzionalità, detto costante di gravitazione universale, (nel quale torneremo tra poco)!".

- Quanto ora detto costituisce l'enunciato della legge di gravitazione universale. Io stesso puo' dire per l'attrazione gravitazionale che  $m_2$  esercita su  $= m_1$ , dalla definizione data e allora che la forza di gravità è una forza centrale, conservativa, e dipende dall'avverso del quadrato della distanza, se quest'ora che andremo ora ad approfondire vera la gravità sono le seguenti:

- 1) Se masse  $m_1$  e  $m_2$  che comparevano nell'equazione (1) sono lo stesso tipo di massa che figura nell'equazione fondamentale della meccanica newtoniana?
- 2) Come determinareperimentalmente il valore di  $G$ ?

3) Qual è la misura dell'intensità del campo gravitazionale terrestre? Da quale fattore dipende l'intensità di tale campo? Come nasce dalla sua conoscenza degli sperimentati risultati, quale ad es. la determinazione della massa della Terra?

4) Quale equazione regola l'orbita di un corpo che si muove di un campo gravitazionale? Come, in particolare, sfruttare tale equazione per risolvere il problema di Keplero, ritrovando e reformulando le leggi di Keplero sul moto dei pianeti del sistema solare?

1) Da base all'equazione fondamentale della meccanica newtoniana sappiamo che possiamo calcolare la massa  $M$  di un corpo misurando l'accelerazione a cui esso prodotta da una forza  $F$  netta:

$$(g) M = \frac{F}{a} ; \text{ tale massa viene detta massa universale}$$

Sì può poi misurare la massa del corpo misurando la forza  $F$  gravitazionale esercitata su di esso ad es. dalla terra:

$$\frac{GM_T M}{R_T^2} = F \Rightarrow M = \frac{FR_T^2}{GM_T} ; (\beta) R_T \text{ e } M_T \text{ escludo rispettivamente raggio e massa della terra.}$$

Tale massa viene detta massa gravitazionale. Dunque le equazioni (g) e ( $\beta$ ) definiscono due masse differenti, almeno in linea di principio. ~~Il barone Von Etos~~

e Weke hanno eseguito gli esperimenti più importanti per dimostrare ~~che~~ l'equivalenza tra questi due tipi di massa, che i risultati mostrano con la precisione di una parte su  $10^{10}$ . E da notare che la costanza del rapporto tra le due masse consente un'eguale osservazione della verticale per tutti i corpi, come è facile rendere conto ricordando l'equazione:

$$\vec{P} = \vec{f}_g + \vec{f}_e$$

In cui  $\vec{P}$  è la forza peso,  $\vec{f}_g$  la forza gravitazionale ed  $\vec{f}_e$  la forza centrifuga, tali che:

$$\vec{f}_g \propto m g$$

$$\vec{f}_e \propto m_i g_{\text{centrale}}$$

- Ma la costanza del rapporto tra  $m_i$  e  $m g$ , nel caso di 2 corpi di uguali masse gravitazionali, implica l'equivalenza tra le loro masse materiali. Se ciò non accade,  $\frac{m_i}{m g}$  non è

proprio una costante. È questo uno dei principi su cui si basano gli esperimenti a riguardo.

Ci è però il famoso principio d'equivalenza, che rivela che l'equivalenza tra  $m_i$  e  $m g$  per qualche corpo, in forma semplificata, possiamo dire che secondo tale principio un osservatore che si trova su un pianeta in caduta libera si trova in uno stesso di apparente assenza di forze (ovvero la somma delle forze agenti su di esso è nulla). Ma com'è vero se e solo se  $m_i = m g$ . Ed è sempre per tale ragione che possiamo dire che nel vuoto tutto è leggero

Cadono con la stessa accelerazione; infatti l'equazione per un ~~masso~~ corpo che cade nel vuoto è:  $m_i \cdot a = \frac{G M_i m_i}{R_i^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \frac{G M_i}{R_i^2} \frac{m_i}{m_i}$$

da cui risulta chiaro che, se pesa:  $m_i \neq m_0$ , i corpi

cadrebbero nel vuoto con accelerazioni diverse, potendo allora avere la non ~~egualità~~ costanza del rapporto  $\frac{m_i}{m_0}$  (cioè prova anche negli zero della costanza del rapporto  $\frac{m_i}{m_0}$  duplice di pesantezza:  $\frac{m_0}{m_0} = 1$ )

2) Per la determinazione gerometricale di G, esamineremo un breve l'esperimento classico compiuto da Cavendish a Cambridge.

In fig. (II) sono mostrate due sferette elettriche di massa m sospese alle estremità di un asta di lunghezza l a e sospese al filo così da poter ruotare attorno. Alle sferette di massa m viugono accostate delle sfere elettriche di massa  $M > m$ , nello stesso spazio tra loro baneentro

Sia  $N$ .

Poiché fra m ed M  
n'esiste una forza gravitazionale

$G m M / l^2$ , si avrà una corrispondente una coppia di momenti:



fig. II

$\frac{G m M}{l^2} \alpha = K\theta$ ; tale coppia deflettente, all'equilibrio, ~~crea~~ porta un momento  $\rightarrow$  equivalente dal momento  $K\theta$ , ove  $K$  è la costante di torsione del filo  $l\theta$  è l'angolo di cui l'asta è rotata attorno al filo, da cui:

$$\frac{G m M}{l^2} \alpha = K\theta .$$

Inoltre, l'asta compie delle oscillazioni attorno al filo che possono approssimarsi ad oscillazioni armoniche di periodo  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}}$ ,  $I$  essendo il momento d'

inertia dell'asta attorno al filo, da cui:  $K = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$

Valore, questo, che sostituito nell'equazione che ~~crea~~ descrive la condizione d'equilibrio, da:

$$\frac{G m M}{l^2} \alpha = \frac{4\pi^2 I}{T^2} \theta \Rightarrow G = \frac{4\pi^2 I l^2}{T^2 m M a} \theta \quad (8)$$

-In base all'eq. (8), misurando  $l$ ,  $\theta$ ,  $T$ , nelle essendo  $M, m$  ed  $a$ , si trova  $G$ . Nell'esperimento che condusse Cavendish era:  $a = 1$  metro

$$m = 0,775 \text{ kg}$$

$$M = 49,5 \text{ kg}$$

la sferetta di massa  $m$  aveva diametro di 5,1 cm, quella di massa  $M$  diametro di 20,3 cm.

-Il valore di  $G$ , espresso in unità C.B.S., è:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ gr}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

3) - ha misura dell'intensità del campo gravitazionale terrestre è detta accelerazione di gravità, e denotata con  $\vec{g}$ . Detto  $g$  il suo modulo, possiamo riassumere due cause essenzialmente per la sua variazione:

3-a) Variazione di  $\vec{g}$  con la latitudine:

Vale infatti, a causa della rotazione terrestre (e trascurando la forza di Coriolis), l'equazione:

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - w_T^2 \cos^2 \lambda \hat{R} \quad (J)$$

ove  $\vec{g}$  è l'accelerazione di gravità misurata da un osservatore che ruota assieme alla terra,  $\vec{g}_0$  l'accelerazione di gravità che si misurerrebbe su asse di rotazione ( $\vec{g}_0$  non è comunque costante!),  $\lambda$  è la latitudine del luogo ove si misura la misura,  $R_T$  il raggio terrestre e  $w_T$  la velocità angolare di rotazione della terra attorno al proprio asse. È evidente allora dalla (J) che  $\vec{g}$  assume il valore minimo all'equatore, dove:  
 $\lambda = 0 \Rightarrow \cos \lambda = 1$ , ed è misura al polo, dove  $\lambda = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{g}$  al polo =  $\vec{g}_0$  al polo.

E' la  $\vec{g}$  definita dall'eq. (J) che figura nell'espressione della forza peso  $\vec{P}$  di un corpo:  $\vec{P} = m \vec{g}$ , ed il suo modulo  $g$  è quello che figura nell'espressione del periodo  $T$  di un pendolo:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ .

- Per gli scopi pratici si può tuttavia commettere l'errore di approssimare il peso  $\vec{P}$  alla forza di gravità  $\vec{F}_g$  trascurando la forza centrifuga, a' che:  $\vec{P} \approx \vec{F}_g \Rightarrow$

$$\Rightarrow mg \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \Rightarrow g \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \quad (\varepsilon)$$

3-b) Referendosi alla formula approssimata ( $\varepsilon$ ) per l'accelerazione gravitazionale sulla superficie terrestre, il posto;  $g' = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$ , allora chi per un corpo che si trova ad un'altezza  $h$  dalla superficie terrestre vale l'equazione:

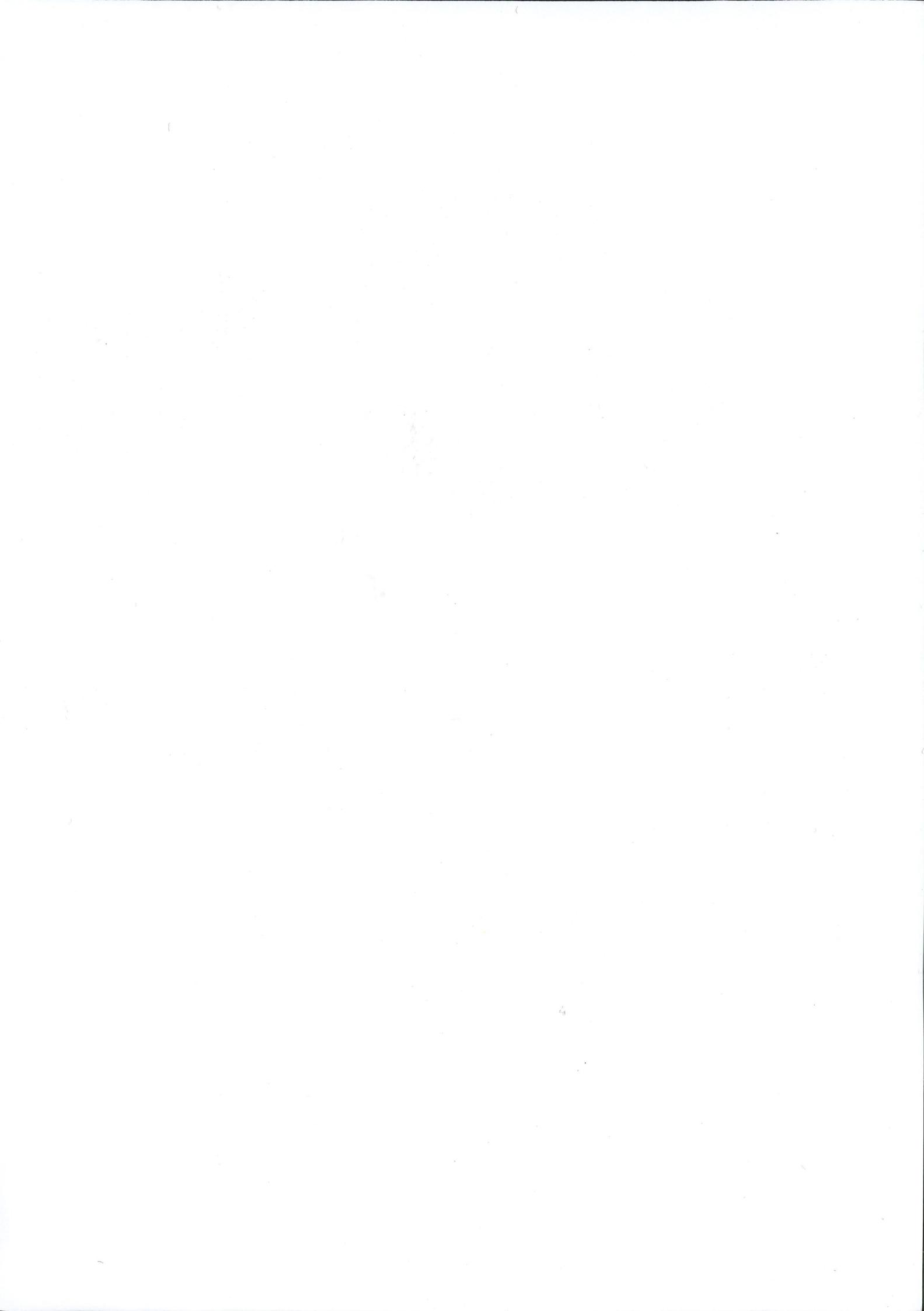
~~g'~~  $g'(h) = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$ , da cui:

$$\frac{g'}{g(h)} = \frac{(R_T + h)^2}{R_T^2} = 1 + \frac{2h}{R_T} + \frac{h^2}{R_T^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(h) = \frac{g'}{1 + \frac{2h}{R_T} + \frac{h^2}{R_T^2}} \quad (?)$$

Dall'eq. (?) è allora chiaro che per  $h \gg R_T$ ,  $g(h)$  ~~è~~ diventa molto piccola, ossia il campo gravitazionale terrestre è molto debole.

4) Consideriamo un punto di forza attrattiva determinato da una forza gravitazionale, ed escludiamo il resto di una particella di massa in tale potenziale attrattivo. Introducendo le coordinate polari  $r$  e  $\theta$



Dissertazione:

Attraverso quale catena di misure ed osservazioni è stato possibile determinare la massa della Terra e dei corpi del sistema planetario?

- La prima volta che si è stata in grado di determinare la massa della Terra, senza far ricorso a metodi astronomici, risale al 1798, allora da cui Cavendish, a Cambridge, misurò la costante  $G$  di gravitazione universale ottenendo per essa il valore:  $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ gr}^{-1} \text{ s}^{-2}$ . Infatti, trascurando la forza centrifuga dovuta alla rotazione terrestre, possiamo egualizzare l'espressione della forza peso agente su un corpo di massa  $m$  posto sulla superficie terrestre e della attrazione gravitazionale esercitata su di esso dalla Terra di massa  $M_T$  e raggio  $R_T$ , da cui:  $mg = \frac{G M_T m}{R_T^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M_T = \frac{g R_T^2}{G} ; \quad (\text{I})$$

In tale equazione avremo comunque il modulo  $g$  dell'accelerazione di gravità del luogo, che poteva già all'epoca determinarsi misurando il periodo  $T$  d'oscillazione d'un pendolo di lunghezza  $l$  in base alla relazione:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ; l'altra grandezza, il raggio terrestre, era nota fin dai tempi di Eratostene con ottima approssimazione, e le sue misure furono sempre più perfezionate (Eratostene in pratica misurò l'angolo fra la verticale d'Alessandria e quella di Salsel, trovandolo pari ad  $\frac{1}{50}$   $2\pi$  rad, e, supponendo perfettamente sferica la Terra<sup>50</sup> e conoscendo la distanza tra

Alessandria e Irene, moltiplico dunque per 50 tale distanza ottenendo il valore di  $250.000 \text{ stadi} = 39375 \text{ Km} \Rightarrow R_2 = \frac{39375 \text{ Km}}{2\pi}$ )

- La determinazione della massa degli altri pianeti del sistema solare si è invece ~~fatato~~ ottenuta mediante osservazioni astronomiche. Ecco da sinistra le tappe che hanno portato alla scoperta di alcune di esso, con indicazione delle tracce che segnate per calcolarne la massa, in ordine cronologico un po' invertito:

1 Venere: nel dicembre 1962 la sonda spaziale Mariner 2 passò a 35 000 Km da Venere: misurando la deviazione dalla traiettoria orizzontale subita da Mariner 2, si poté così risalire alla massa di Venere

Giove: la sua massa è stata ricavata dal moto dei suoi satelliti e dalle perturbazioni che provoca sui piccoli pianeti. Le tappe che hanno portato a scoprire i suoi satelliti sono le seguenti:

- a) I 4 satelliti maggiori: Io, Europa, Ganimede e Callisto, molto più pluriamente degli altri, furono scoperti da Galileo Galilei nel 1610.
- b) E. E. Barnard scoprì il 5° satellite nel 1892
- c) C. D. Perrine scoprì il 6°, 7° e 8° satellite nel 1904, 1905 e 1908 rispettivamente
- d) S. B. Nicholson scoprì il 9° satellite nel 1914

Saturno: il suo più importante satellite è Titano. Determinando allora trascurabile la massa di Titano rispetto a

quella di Saturno, si può guardare questo come un problema ad un sol corpo, ed egualando le espressioni della forza centrifuga e gravitazionale agente, su Titano si trova per la massa  $M_{SAT}$  di Saturno l'espressione:

$$M_{SAT} = \frac{\omega^2 d^3}{G}$$

Ma ad  $\omega$ , vel. angolare di rotazione, da Titano attorno a Saturno, si vede misurando da Terra il corrispondente periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ,

si ha, distanza di Titano da Saturno,  $d$  si vede misurando da Terra l'elongazione del moto di Titano (un moto annuale) il periodo di rivoluzione di Saturno attorno al Sole, da cui si ricava  $\omega$  alla distanza Saturno - Sole, e quindi Saturno - Terra, assumendo un prima approssimazione che valga la terza legge di Keplero e volgendo questo come se l'orbita di Saturno attorno al Sole non fosse ellittica ma circolare, pur con tali semplificazioni, che non danno ovviamente un risultato esatto, si arriva a capire come sia possibile conoscere gli elementi orbitali del satellite dei pianeti.

Uranus: fu scoperto il 13 marzo 1871 da Galle; i calcoli di A. J. Fesell mostravano inequivocabile il carattere planetario di Urano. Urano è però molto importante ~~per~~ in quanto per la prima volta grasse alle studi dell'orbita di Urano si poteva confermare l'esistenza di un altro pianeta:

Nettuno: era stato infatti osservato che l'orbita di Urano mostrava deviazioni rispetto

all'ellisse ottenuta dai calcoli per una teoria, il numero  
 secondo presenta le perturbazioni dovute a Saturno e a Giove,  
 rispettivamente il più vicino e quello di maggior massa, tra i  
 pianeti già presenti, si riusciva a rendere conto ~~della~~ di  
 tale discrepanza fra teoria ed osservazioni. Il primo calcolo per  
 risolvere il problema furono dovuti da un allievo di Bessel,  
 morto però prematuramente. Il primo a risolvere il problema fu  
 il giovane matematico Adams: doveva esistere un altro  
 pianeta al di là del vicino di, con la sua attrazione gravi-  
 tazionale, ne perturbava l'orbita. Adams comunicò i suoi  
 risultati nel 1845 all'osservatorio di Greenwich, ma il dire-  
 ttore dell'osservatorio non ne fu persuaso; e nessuno  
 controllò la previsione di Adams. La fortuna arrivò invece al  
 lavoro del matematico Le Verrier, di quale, dopo esser riman-  
 to vittima dello scetticismo dell'osservatorio di Parigi, servito  
 al Galle, all'osservatorio di Berlino: la sera stessa del 23  
 settembre 1846, Galle puntò il cannocchiale nel punto indica-  
 to da <sup>(giorno d'arrivo della lettera)</sup> Le Verrier, e Nettuno apparve alla prima  
 osservazione, a meno d'un grado dalla  
 posizione prevista da Le Verrier.

- Plutone: Quando Nettuno venne scoperto, se Verrier stesso  
 avuisse fatto allora la constatazione di dedurre con  
 il calcolo le orbite e le masse dei pianeti ancor  
 più lontani. Tra gli astronomi che si dedicarono alla  
 ricerca d'un pianeta trans-neptuniano si  
 distinguono in particolar modo Percival Lowell. Egli, poiché Nettuno,  
 dal giorno in cui venne scoperto, ha descritto un arco ancora  
 troppo piccolo della propria orbita, seguendo il metodo del

Se Verner, diede in una sua memoria del 1915 la soluzione più attendibile del problema, reso diffidoso dallo scetticismo delle deviazioni residue. Finalmente all'autunno del 1930, nell'osservatorio di Flagstaff nell'Arizona, fondato dal Lowell, l'assistente P. W. Tombaugh, esaudendo con uno spesale corposo a spalle d'una gran serie copie di lastre fotografiche, ~~arrivò~~ alla scoperta del nuovo pianeta corrispondentemente alle previsioni del Lowell. Il nuovo pianeta fu chiamato Plutone e designato con  $P_1$  ad onore del Lowell. Se ne ebbe dunque dopo la scoperta hanno portato a determinare molti elementi dell'orbita. Rimane però incerto proprio il valore della massa, che secondo le previsioni del Lowell dovrebbe essere quasi 7 volte quella della Terra; mentre su base a livello non del tutto certo per l'albedo e la densità gli astronomi ritengono che la massa di Plutone dovrebbe essere inferiore a quella della Terra.

— — —

A completamento del metodo ora esposto e per ragionare le idee principali, voglio ~~ora~~ ora elencare le tecniche fondamentali inseguite per determinare la massa dei pianeti del sistema solare, applicabili ovunque anche a Mercurio e a Marte che non ho menzionato:

1) Forse il problema del moto d'un pianeta attorno al Sole è un problema a 2 corpi, trascurando le interazioni con gli altri corpi del sistema planetario, vale l'equazione:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_3 + M_p)} \quad (\text{II})$$

ove nella (II) :  $M_S$  = massa del sole

$M_p$  = massa del pianeta

$T$  = periodo di rivoluzione del pianeta attorno al Sole

$a = \frac{\text{maggiore}}{\text{minore}}$  dell'orbita ellittica del pianeta attorno al Sole.

Pertanto:

$$M_p = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} - M_S \quad (\text{III})$$

Quindi bisogna determinare gli elementi orbitali  $a$  e  $T$ , e da base alla (II) si ha subito il valore di  $M_p$ , una volta nota  $M_S$  ( $M_S$  si puo' ad es. ricavare dello studio del moto della Terra attorno al Sole, facendo uso della relazione approssimata:

$$M_S = \frac{4\pi^2}{G} \frac{T_{\text{Terra-Sole}}^2 R_{\text{Terra-Sole}}^3}{T_{\text{Terra-Sole}}^2}$$

"metta" (II) introduce un errore piccolissimo).

2) Studiare degli elementi dell'orbita dei satelliti del pianeta attorno al pianeta con relativi effetti perturbatori

3) Rilevando come l'orbita d'un pianeta variazioni da quella prevista teoricamente si dimostra l'esistenza d'un altro corpo la cui attrazione gravitazionale perturba l'orbita del pianeta, e ovunque alla massa di tale corpo planetario

4) Si invia una sonda (questo e' il metodo piu' moderno) nelle vicinanze del pianeta, e si misura da quantita'

una traiettoria orizzontale viene deviata dal campo gravitazionale prodotto dal pianeta. La Terra avrà risposta con grande precisione questa deviazione e gli elementi dell'orbita della sonda prima e dopo la deviazione, rispondendo così alla massa del pianeta.

Di questi metodi, quello descritto al n.(1) è più che rigoroso per la maggioranza degli scopi pratici, ma non tiene conto degli effetti perturbatori prodotti dagli altri corpi del sistema planetario e più in generale del sistema solare. Il (2) e il (3) sono più rigorosi sotto l'aspetto fisico e matematico, e hanno portato ai maggiori frutti, ossia la scoperta di Nettuno e Plutone.  
 - Difesa Il metodo (5) offre la migliore possibilità di verifica dei risultati ottenuti con i metodi (1), (2) e (3), ma non può essere pesantemente applicato per ovvie ragioni (le sonde impiegano molto tempo per raggiungere i pianeti, e il viaggio di sonde nello spazio non avviene a vettore costante).



e utile osservando i valori noti di  $\gamma$ , Med R av trova:

$$\frac{dT}{dh} = -9,8 \text{ gradi/Km}$$

Si noti che qui si è però trascurato l'effetto d condensazione del vapore nella massa d'aria in espansione, altrimenti avremmo trovato un valore di  $\frac{dT}{dh}$  più presto,

### (III) Il I° principio della termodinamica:

- Il 1° principio della termodinamica è essenzialmente il principio di conservazione dell'energia per i sistemi termodinamici.

Si può perciò esprimere questo come la variazione dell'energia di un sistema durante una qualsiasi trasformazione è uguale all'energia che il sistema riceve dai corpi circostanti.

Se  $U_A$  e  $U_B$  sono le energie del sistema da 2 stati A e B, ma non sono delle forze che agiscono sul sistema, non necessariamente  $U_A = U_B$ , e vedendo con L' lavoro compiuto dalle forze esterne durante una trasformazione dallo stato iniziale A allo stato finale B, allora il principio di conservazione dell'energia per tale sistema termodinamico va scritto così:

$$U_B - U_A = -L, \text{ vale a dire,}$$

(III)

$$\text{posto } U_B - U_T = \Delta U : \quad \Delta U + L = 0$$

Se invece il sistema non è termicamente isolato, può esibir uno scambio di calore con l'esterno, per cui dobbiamo scrivere:

$$\Delta U + L = \Delta Q \quad (1)$$

Applicando l'equazione (1) del 1° principio ad una trasformazione infinitesima, dovremo considerare che le variabili indipendenti ~~sono~~ variano solo da quantità infinitesime, e scrivere:

$$dU + dL = dQ, \text{ ed essendo } dL = pdV;$$

$$dU + pdV = dQ \quad (2)$$

Assumendo  $T$  e  $V$  come variabili indipendenti, si ha:

$$U = f(T, V) \Rightarrow dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

per cui la (2) diventa:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV = dQ \quad (3)$$

Assumendo  $T$  e  $p$  come variabili indipendenti, si ha:

$$U = f(T, p) \Rightarrow$$



(III)

$$\Rightarrow dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_T dP$$

$$\boxed{p dV = p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + p \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP}$$

da cui:

$$dU + pdV = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right] dT + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_T + p \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \right] dP = dQ \quad (5)$$

Dunque, assumendo  $V$  e  $p$  come variabili indipendenti, si ha:

$$U = f(V, P)$$

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_P dV + \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_V dP$$

$$dU + pdV = \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_V + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_P + p \right] dV = dQ \quad (5)$$

- Con relazione alla (3) si noti che:

$$dV=0 \Rightarrow \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = e_V \quad (6)$$

(III)

poiché per definizione, è:  $\ell = \frac{dQ}{dT}$

Moltre, poiché l'energia del gas perfetto è funzione della sola temperatura, concebe':  $U = U(T)$ , possiamo eliminare la notazione di derivate parziali, e scrivere:

$$\frac{dU}{dT} = \ell_V , \text{ da cui, integrando:}$$

$$U(T) = \ell_V \cdot T + W \quad (7)$$

ove ~~W~~ la costante d'integrazione  $W$  è l'energia residua del gas alla temperatura dello zero assoluto.

— Con relazione ora alla (5) notiamo che:

$$dp=0 \Rightarrow \frac{dQ}{dT} = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_p + p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \ell_p \quad (8)$$

Dal confronto

della (6) e della (8) ricaviamo la differenza tra la capacità termica di un corpo a volume (6) e a pressione (8) costante,

Il termine  $p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$  che compare nella (8) rappresenta l'effetto del lavoro compiuto durante l'espansione sulla capacità

termica  $C_p$ . Il stesso termine non figura nella (6), perché in questo caso il volume è mantenuto costante e non si ha, quindi, alcuna espansione.

Si noto che il calore specifico è la capacità termica di 1 grammo di sostanza, mentre il calore molecolare è la capacità termica di 1 mole di una sostanza. Come anticipato a pag 81, la capacità termica è di un corpo è data dal rapporto fra la quantità diffusotessuna di calore  $dQ$  assorbita dal corpo e l'incremento infinitesimo di temperatura  $dT$  prodotto da questo calore.

(II) Con relazione alla (7) di pag 81 notiamo allora che per trasformazioni diffusotessime,

$$dU = c_v \cdot dT$$

E dunque il 1° principio della termodinamica può esser scritto nella forma [vedi anche la (1) di pag (3)]:

$$c_v dT + p dV = dQ \quad (9)$$

da cui, sfruttando l'equazione di stato  $pV = RT$  nella sua forma differenziale, si ha:

$p dV = R dT - V dp$ , che sostituito nella (9) da:

$$c_v dT + R dT - V dp = (c_v + R) dT - V dp = dQ$$

Che, per  $p = \text{cost} \Rightarrow dp = 0$  fornisce:

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = c_p = c_v + R \quad (10)$$

Poiche' dalla teoria cinetica sappiamo che:

$$P_V = \frac{3}{2} R \quad \text{per un gas monoatomico}$$

$$P_V = \frac{5}{2} R \quad \text{per un gas biatomico}$$

In base all'importante nostra equazione (10) abbiamo allora le relazioni:

$$P_T = \frac{5}{2} R \quad \text{per un gas monoatomico}$$

$$P_T = \frac{7}{2} R \quad \text{per un gas biatomico}$$

Ricordando la formula di pag 14 per la costante K, si trova allora:

$$K = \frac{5}{3} \quad \text{per un gas monoatomico}$$

$$K = \frac{7}{5} \quad \text{per un gas biatomico}$$

Valori questi usati negli esercizi ~~esercizi~~.

Il II° principio della termodinamica: (IV)

Enunciato secondo il postulato di Lord Kelvin:

E' impossibile realizzare una trasformazione il cui risultato sia la trasformazione in lavoro di calore tratto da un'unica sorgente a temperatura uniforme.

Enunciato secondo il postulato di Clausius:

E' impossibile realizzare una trasformazione il cui risultato sia il trasferimento di calore da un corpo a una data temperatura a un corpo a temperatura più alta.

---

(V)

S'entropia: definizione e alcune sue proprietà (inizio trattazione)

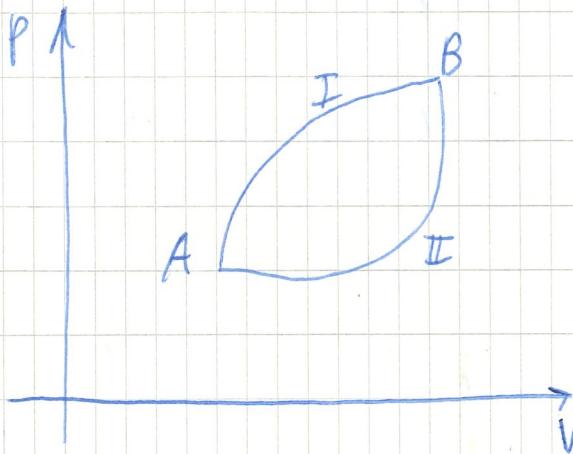


fig. 1

Ricordiamo prima brevemente che dato un sistema che compie una trasformazione reversibile passando da uno stato iniziale A ad uno stato finale B, è:

$$\left( \int_A^B \frac{dQ}{T} \right)_I = \left( \int_A^B \frac{dQ}{T} \right)_II$$

$dQ$  essendo la quantità di calore infinitesima che il sistema riceve alla temperatura  $T$ .

Perché l'integrale

$$\int_A^B \frac{dQ}{T}$$

dipende solo dagli stati iniziale A e finale B, e non dal particolare tipo di trasformazione che ha consentito di passare da A a B.

Chiamato allora O ~~esso~~ stato di riferimento un dato stato di equilibrio del sistema, e considerato un altro stato d'equilibrio A, la funzione:

$$S(A) = \int_0^A \frac{dQ}{T} \quad (1) \quad \text{prende il nome di entropia dello stato A.}$$

Si noti che la scelta dello stato di riferimento è del tutto arbitraria, e pertanto definito uno stato di riferimento  $0' \neq 0$ , si ha che:

$$S'(A) = \int_{0'}^A \frac{dQ}{T}$$

$$S'(A) = S(A) - S(0')$$

$$S(A) - S'(A) = S(0')$$

da cui vediamo che la differenza fra le entropie dello stato A e lo stato  $0'$  è una costante, e che in generale l'entropia è una grandezza definita a meno di una costante additiva.

Da tali definizioni deduciamo allora che la variazione  $dS$  di entropia subita da un sistema durante una trasformazione infinitesimale reversibile vale:

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (2)$$

A questo punto, riassumono le formule di pag 19 che esprimono  $dQ$  in funzione di  $T$  e  $V$  variabili, da cui si vede che:

$$dS = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] dV \quad (9')$$

Ricordiamo inoltre che dato un'espressione differenziale  $dz$  delle due variabili  $x, y$ , ~~è~~ del tipo qui sotto:

$$dz = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

essa è un differenziale esatto se e solo se:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Usando tale definizione per vedere se  $dQ$  e  $dS$  sono differenziali esatti, e ne ricordiamo che:

$$dQ = \rho_V dT + RT \frac{dU}{V}$$

$$dS = \frac{\rho_V}{T} dT + \frac{R}{V} dV$$

$$\text{posto: } \begin{cases} M(T, U) dT = \rho_V dT \\ N(T, V) dV = \frac{R}{V} T dV \end{cases} \quad \begin{cases} M'(T, V) dT = \frac{\rho_V}{T} dT \\ N'(T, V) dU = \frac{R}{V} dV \end{cases}$$

si vede facilmente che:



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M(T, U)}{\partial U} &= 0 \\ \frac{\partial N(T, U)}{\partial T} &= \frac{R}{V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow dQ \text{ non e' un differenziale esatto}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M'(T, U)}{\partial U} &= 0 \\ \frac{\partial N'(T, U)}{\partial T} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow dS \text{ e' un differenziale esatto,}$$

Questa e' una conclusione importante, e si puo' dire perciò che una formulazione analitica del 2° principio e' la seguente:

$dS$  e' un differenziale esatto.

Altra notevole proprietà dell'entropia e' che in un qualunque sistema isolato, per una qualsiasi trasformazione che avviene in esso, l'entropia dello stato finale non e' mai inferiore a quella dello stato ~~iniziale~~ iniziale. E' impossibile far compiere ulteriori trasformazioni ad un sistema isolato che affriva raggiunto il suo massimo livello d'entropia; perciò lo stato di massima entropia e' anche lo stato di massimo equilibrio ~~del~~ di un sistema isolato, a cui tende. Dallo studio del 2° principio si giunge così a determinare che i fenomeni naturali segnano un'evoluzione che tende a portarla

stato d'entropia sempre maggiore.

Aveando ora visto che  $dS$  è un differenziale esatto, possiamo sfruttare la (9) da pag 96 per l'equazione di stato del gas, applicata ad una mole di gas perfetto monoatomico, per ottenere due importanti espressioni della funzione di stato entropia.

Infatti, dalla relazione:  $dS = C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}$ , integrando,

si ottiene:

$$S(T, V) = \nu \log T + R \log V + a; \quad (3)$$

con a costante indeterminata d'integrazione, in accordo con quanto prima accennato, secondo cui l'entropia viene ad essere definita a meno di una costante additiva.

D'altronde, essendo  $pV = RT \Rightarrow V = \frac{RT}{p}$ , si ha anche:

$$\left. \begin{aligned} & p = \nu T + R \\ & \end{aligned} \right\}$$

$$S = (\nu - 1) \log T + R \log \frac{RT}{p} + a =$$

$$= \nu \log T - R \log T + R (\log R + \log T - \log p) + a =$$

$$= \nu \log T - R \log p + R \log R + a; \quad (3)$$

Discussione dei postulati di Kelvin e Clausius del par 84;  
il ciclo di Carnot.

- Vediamo come tali 2 postulati sono in perfetto accordo l'uno con l'altro.  
Se infatti il postulato di Kelvin non fosse vero, potremmo realizzare una trasformazione adiabatica per unico risultato la ~~unica~~ trasformazione di lavoro da calore sottratto da un'unica sorgente a temperatura uniforme  $t_1$ . Potremmo poi trasformare nuovamente in calore, mediante altro lavoro, utilizzando <sup>per</sup> il calore <sup>così</sup> prodotto per dimostrare la temperatura  $t_2$  di un corpo, qualunque sia il suo valore. Per  $t_2 > t_1$ , avremmo però in contrasto col postulato di Clausius!
- Analogamente, se il postulato di Clausius non fosse vero, potremmo realizzare un ciclo di Carnot sottraendo calore da un'unica sorgente a temperatura uniforme  $t_1$  nuova della temperatura  $t_2$  della 2<sup>a</sup> sorgente, e così in contrasto col postulato di Sord Kelvin!

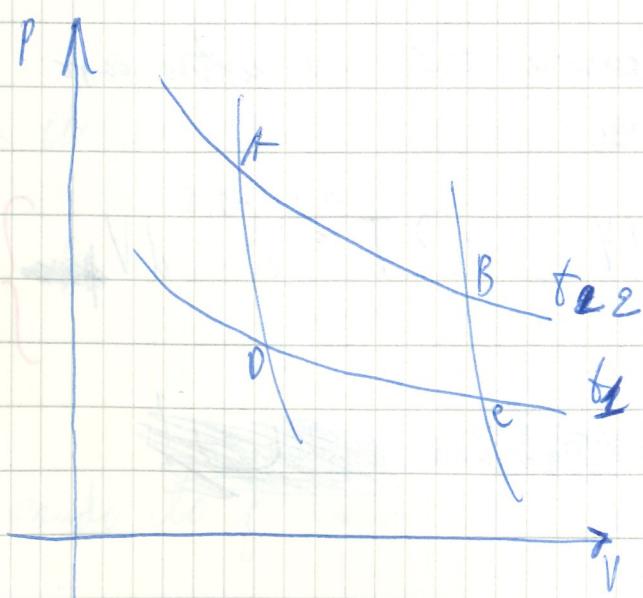


fig. 5

(XII)

Un ciclo di Carnot è composto da 4 fasi (vedi fig. 5)

1<sup>a)</sup>) Un'isoterma <sup>AB</sup><sub>AB</sub> a temperatura  $t_2$ . Un fluido è contenuto in un recipiente le cui pareti laterali e fondo termicamente isolanti; la base del recipiente cilindrico viene posta in comunicazione con una sorgente a temperatura  $t_2$ , dalla quale viene assorbita una quantità di calore  $Q_2$ ; rianalando il pistone del cilindro, il volume del fluido viene al valore  $V_B$ .

2<sup>a)</sup>) Un'adiabatica BC. La base viene collegata ad un isolante termico per evitare scambi di calore con l'esterno ( $dQ=0$ ). Il volume viene allora aumentato fino al valore  $V_C$  rianalando il pistone. Alla fine la temperatura si è abbassata fino al valore  $t_1 < t_2$ .

3<sup>a)</sup>) Un'isoterma CD. Si pone nuovamente la base in contatto con una sorgente, stavolta a temperatura  $t_1 < t_2$ , alla quale viene ceduta una quantità di calore  $Q_1 < Q_2$ . Il fluido viene compresso fino a che il volume da esso occupato raggiunge il valore  $V_D$ .

4<sup>a)</sup>) Un'adiabatica DA. Nuovamente la base è collegata ad un isolante termico. Si effettua una ulteriore compressione del fluido, finché la sua pressione e il suo volume raggiungono nuovamente i valori iniziali  $p_A$  e  $V_A$ . La temperatura si rianalza fino al valore iniziale  $t_2$ .

- Il ciclo di Carnot è reversibile; perciò si può

suebe assorbire il lavoro  $L$  avrebbe' compiuto, assorbiendo una quantita' di calore  $Q_2$  dalla sorgente a temperatura  $t_2$  e cedendo una quantita' di calore  $Q_1$  alla sorgente a temperatura  $t_1$ .

~~Applicando il 1° principio della termodinamica al lavoro L compiuto durante un ciclo da termot, gli ha che L vale:~~

$$\boxed{L = Q_2 - Q_1}$$

(XII) Ha temperatura termodinamica assoluta

- Ricordiamo anzitutto il importante teorema per cui:

"dati più motori, alcuni dei quali reversibili, che compiono cicli fra le temperature  $t_1$  e  $t_2$ , i motori reversibili hanno sempre uguale rendimento, mentre i motori irreversibili hanno rendimento, "al massimo eguale a quello dei motori reversibili."

Indicando allora con  $Q_2$  la quantita' di calore assorbita da un motore reversibile dalla sorgente a temperatura  $t_2$ , e con  $Q_1$  la quantita' di calore ceduta dallo stesso motore alla sorgente a temperatura  $t_1$ , poiché il rendimento  $\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$ , ed è uguale per tutti i motori reversibili,

si deriva che il rapporto  $\frac{Q_2}{Q_1}$

non dipende in tal caso dalle proprietà del motore, ma unicamente dalle temperature  $t_2$  e  $t_0$ .

Possiamo esprimere così l'entropia matematica) servendo l'equazione:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(t_2, t_0) \quad (9)$$

Consideriamo ora due motori reversibili che consumano celi assorbindi quantità di calore diverse ( $Q_2$  e  $Q_1$ ) da sorgenti a temperature diverse ( $t_2$  e  $t_1$ ), ma che ~~cedono~~ cedono la stessa quantità di calore  $Q_0$  a sorgente posta alla stessa temperatura  $t_0$ , scelta arbitrariamente.

Dalla (9) ~~segue~~ segue allora che:

$$\frac{Q_1}{Q_0} = f(t_0, t_1); \quad \frac{Q_2}{Q_0} = f(t_0, t_2).$$

Rividendo tra loro tali equazioni si ha perciò:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{f(t_0, t_2)}{f(t_0, t_1)} \quad (10)$$

Falliamo ora lavoro avendo tali due motori realizzando un ciclo reversibile in cui il motore  $A_2$  assorbe  $Q_2$  e cede  $Q_0$ , e il motore  $A_1$  stavolta assorbe  $Q_0$  e cede  $Q_1$  alla sorgente a temperatura  $t_1$ . Così facendo,  $Q_0$  è la sorgente a temperatura  $t_0$  non danno più luogo a due cicli staccati, ma

è come se si fosse realizzato un nuovo ciclo reversibile fra le temperature  $t_0$  e  $t_2$  descrivibile da un'equazione identica alla (9), dall'uguaglianza dei primi membri della (9) e della (10) segue l'uguaglianza del secondo membro, e giungiamo così all'importante risultato per cui:

$$f(t_2, t_0) = \frac{f(t_0, t_0)}{f(t_0, t_2)} \quad (11)$$

Notiamo ora che, escludo, come già prima detto, arbitraria la scelta di  $t_0$ , possiamo assumere  $t_0$  come costante, così che in generale la funzione  $f(t_0, t)$  dipende solo da  $t$ . Possiamo allora porre:

$$K f(t_0, t) = \theta(t)$$

$$\text{da cui: } \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\theta(t_2)/K}{\theta(t_1)/K} = \frac{\theta(t_2)}{\theta(t_1)} \quad (12)$$

Perché la scelta di  $t_0$  e  $t_1$  è arbitraria, non si può ovviamente determinare la ~~espressione~~ espressione analitica della  $\theta(t)$ . Si può però stabilire una nuova scala delle temperature, assumendo la  $\theta(t)$  stessa come temperatura al posto della  $t$ , e ponendo uguale a 100 la differenza tra la temperatura di ebollizione e la temperatura di congelamento dell'acqua alla pressione di 1 atmosfera per stabilire una unità di misura.

La temperatura così definita prende il nome di tempera-

fuorì termodinamica assoluta, e offre il grande vantaggio di poter formulare in maniera semplice tutte le leggi della termodinamica.

Essa è poi uguale esattamente alla temperatura assoluta  $T$ .

Infatti, consideriamo un ciclo di Carnot composto da una serie di gas perfetti, come mostrato in fig. 6:

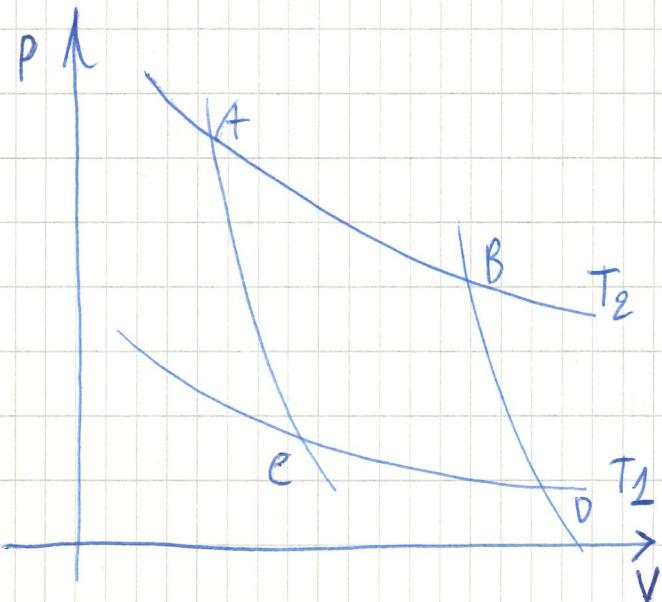


fig. 6

Applicando il 1° principio all'~~espansione~~ espansione isoterma AB si ha:

$$U_B - U_A + L_{AB} = Q_2$$

da cui, ricordando che l'energia di un gas perfetto è funzione della sola temperatura (vedi pag 37), e applicando l'espressione del lavoro compiuto durante un'espansione isoterma, si ha:

$$U_B - U_A = 0; \quad L_{AB} = RT_2 \log \frac{V_B}{V_A}; \quad Q_2 = RT_2 \log \frac{V_B}{V_A}$$

Analogamente, sarà lungo il tratto di compressione isoterma  $\delta l'$ :

$$V_e - V_D = 0; \quad |L|_{\text{def}} = RT_2 \log \frac{V_D}{V_e} \quad \boxed{\text{L}};$$

$$Q_2 = RT_2 \log \frac{V_D}{V_e}.$$

D'altronde, per l'adiabatica (espansione)  $\beta D \delta l'$ :

$$T_2 V_B^{K-1} = T_1 V_D^{K-1}$$

e per la compressione adiabatica  $\alpha A \delta l'$ :

$$T_1 V_e^{K-1} = T_2 V_A^{K-1}$$

confermando queste relazioni si ha però:

$$\frac{V_B^{K-1}}{V_A^{K-1}} = \frac{V_D^{K-1}}{V_e^{K-1}} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_D}{V_e}$$

Perciò per tale ciclo di Carnot il rapporto  $Q_2/Q_1$  vale:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{RT_2 \log(V_B/V_A)}{RT_2 \log(V_D/V_e)} = \frac{T_2 \log(V_B/V_A)}{T_2 \log(V_D/V_A)} = \frac{T_2}{T_1} \quad (3)$$

Dal confronto tra la (2) e la (3) scende allora che:

$$\frac{\theta(t_2)}{\theta(t_1)} = \frac{T_2}{T_1}, \text{ vale a dire: } T_2 \propto \theta(t_2)$$

$$T_1 \propto \theta(t_1)$$

E poiché le unità di misura sono state scelte uguali, per le due scale di temperatura, tali relazioni di proporzionalità si trasformano in relazioni di egualanza:

$$\left. \begin{array}{l} T_2 = \theta(t_2) \\ T_1 = \theta(t_1) \end{array} \right\} \Rightarrow T = \underline{\theta(t)}$$

Che è quanto prima anticipato.

### (XIII) Alcune proprietà dei cicli:

- Consideriamo un sistema  $S$  che compie una trasformazione circolare scambiando calore con un numero finito di sorgenti alle temperature  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , e tranne  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  le quantità di calore che  $S$  assorbe da tali sorgenti.

Consideriamo inoltre altri  $n$  fuoriuscite reversibili, vale a dire un ciclo di Carnot che assorbe una quantità di calore  $Q_{i0}$  da una sorgente a temperatura ~~uniforme~~  $T_0$  e cedono alle sorgenti  $T_1, T_2, \dots, T_n$  una quantità di calore identica a quella assorbita dal sistema  $S$ .

Dalla (13) vediamo che:  $Q_{i0} = \frac{T_0}{T_i} Q_i$ ,

e la situazione è dunque schematicamente come sotto:

- 1)  $S$  assorbe  $Q_i$  da  $T_i$
- 2)  $C_i$  assorbe  $Q_{i0}$  da  $T_0$  e cede  $Q_i$  a  $T_i$

Si è cioè realizzato un ciclo composto da un ciclo di  $S$  e un ciclo dei cicli  $C_i$  di Carnot.

Poiché la sorgente a temperatura  $T_i$  cede  $Q_i$  ad  $S$  una serie  $Q_i$  da  $C_i$ , essa alla fine non subisce alcuna modificazione. Tranne la sorgente a temperatura uniforme  $T_0$ , alla fine del ciclo, avrà ceduto all'universo:

$\{S, C_1, C_2, \dots, C_n\}$  una quantità di calore tornato allo stato iniziale,

$$Q_0 = \sum_{i=1}^m Q_{i0} = T_0 \sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{T_i} . \quad (14)$$

Fallendo la convenzione di contare come positive le quantità di calore se esse vengono assorbite e negative se cedute, potrebbe allora l'numero risultato del nostro cielo sarebbe da trasformare in lavoro del calore tratto da un'unica sorgente a temperatura uniforme ( $T_0$ ), fatto in evidente contraddizione col postulato di Kelvin, doffriamo ~~possiamo~~ di assumere, affinché tale cielo sia realizzabile, che la  $Q_0$  sia negativa, da cui:

$$\sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad (15)$$

Se il cielo così realizzato è reversibile, esso può essere percorso in senso inverso; allora il segno delle  $Q_i$  si invierte, e si ottiene:

$$\sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{T_i} \geq 0 \quad \text{che, messa in sistema con la (15), dà:}$$

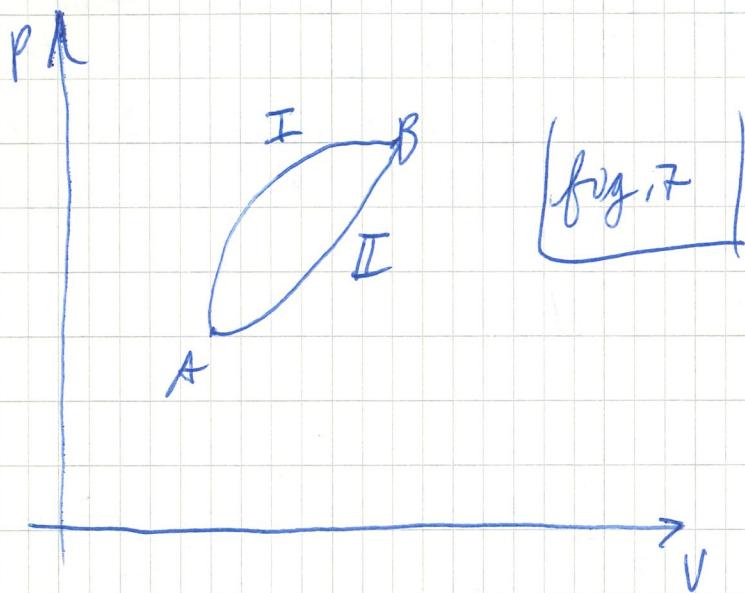
$$\sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{T_i} = 0 \quad (16) \quad \begin{array}{l} \text{relazione valida} \\ \text{per cielo reversibile.} \end{array}$$

Quando, avrebbe assorbito delle quantità  $Q_i$  di calore da un numero finito di sorgenti, si assorbe tali quantità da una distribuzione continua di sorgenti, il segno del

somma totale va sostituito da quello di integrale, e indicando col simbolo  $\int$  l'integrale esteso al cielo, si

ottengono le equazioni:  $\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$  per i cicli irreversibili

$\oint \frac{dQ}{T} = 0$  per i cicli reversibili.



Quando un sistema passa da uno stato iniziale A ad uno finale B,

l'integrale

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} \text{ dipende solo}$$

dallo stato iniziale A e finale B, e non dal particolare percorso fatto nell'andare da A a B.

Infatti, possiamo scomporre tale integrale in somma degli integrali  $\left( \int_A^B \frac{dQ}{T_I} \right)$  e  $\left( \int_B^A \frac{dQ}{T_{II}} \right)$  (vedi fig. 7),

da cui, nel caso che la trasformazione sia reversibile, si ha l'equazione:

$$\left( \int_A^B \frac{dQ}{T_I} \right)_I + \left( \int_B^A \frac{dQ}{T_{II}} \right)_{II} = 0 \quad (\text{fig. 7})$$

Osservando che:  $\left(\int_B^A \frac{dQ}{T}\right)_{II} = -\left(\int_A^B \frac{dQ}{T}\right)_{II}$ ,

si ha allora dalla (17):

$$\left(\int_A^B \frac{dQ}{T}\right)_I = -\left[-\left(\int_A^B \frac{dQ}{T}\right)_{II}\right] = \left(\int_A^B \frac{dQ}{T}\right)_{II}$$

Che esprime appunto quanto prima detto: nel caso di una trasformazione reversibile, l'integrale  $\int_A^B \frac{dQ}{T}$  assume

lo stesso valore lungo due qualsiasi diverse percorsi reversibili che portano da B da A.

Tutte le funzioni che soddisfano a questa condizione, quale ad es. l'entropia (pag 25), sono dette funzioni di stato.

In base a tale definizione, possiamo dire che nel lavoro ne' il calore sono funzioni di stato.

(XVII) Calcolo del lavoro fatto da una mole di gas durante un'espansione adiabatica.

- Sappiamo che l'espressione generale del lavoro che compie un gas espandendosi da un volume iniziale  $V_1$  a un volume finale  $V_2$  è:

$$L = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Nel caso l'espansione sia adiabatica, sappiamo poi che vale l'equazione di stato:

~~$pV^\gamma$~~  = Costante.

Indicata con  $K$  tale costante, abbiamo che:  $p = \frac{K}{V^\gamma} = KV^{-\gamma}$ , espressione questa di  $p$  che, sostituita nell'equazione che da il lavoro  $L$  fornibile:

$$L = K \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma} dV = \frac{K}{1-\gamma} [V^{-\gamma+1}]_{V_1}^{V_2} =$$

$$= \frac{K}{1-\gamma} \left( V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1} \right) = \frac{K}{\gamma-1} \left( V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma} \right);$$

Ricordiamo ora che, sempre dell'equazione  $pV^\gamma = K$  costante, segue che:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \Rightarrow p_2 = \frac{V_2^\gamma}{V_1^\gamma} p_1;$$

possiamo così scrivere:  $K = P_2 V_2^\gamma$ , ottenendo pertanto:

$$L = \frac{P_2 V_2^\gamma}{\gamma - 1} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) = \frac{1}{\gamma - 1} (P_2 V_1 - P_2 V_1^\gamma V_2^{1-\gamma}) =$$

$$= \frac{1}{\gamma - 1} \left( P_2 V_1 - \frac{V_2^\gamma}{V_1^\gamma} P_2 V_1^\gamma V_2^{1-\gamma} \right) = \frac{1}{\gamma - 1} (P_2 V_1 - P_2 V_2) =$$

$$= \frac{P_2 V_1 - P_2 V_2}{\gamma - 1}; \quad (25)$$

E' questa l'equazione che cercavamo. Se notate che, sfruttando l'equazione di stato del gas perfetto, applicata ad una mole di gas perfetto, avete:

$$L = \frac{R T_2 - R T_1}{\gamma - 1} = \frac{R (T_2 - T_1)}{\gamma - 1}. \quad (26)$$

- Basta pertanto conoscere le temperature iniziale e finale per trovare il lavoro compiuto dalla mole di gas perfetto durante la sua espansione adiabatica.

- Si puo' giungere ad un'espressione ancor piu' semplice della (26) per esprimere il lavoro L compiuto durante la trasformazione adiabatica ricordando che la costante  $\gamma$  e' data dal rapporto fra il calore specifico  $C_p$  a pressione costante, e il

calore specifico  $\ell_V$  a volume costante; dobbiamo altresì ricordare  
l'altra relazione tra tali due calori specifici;

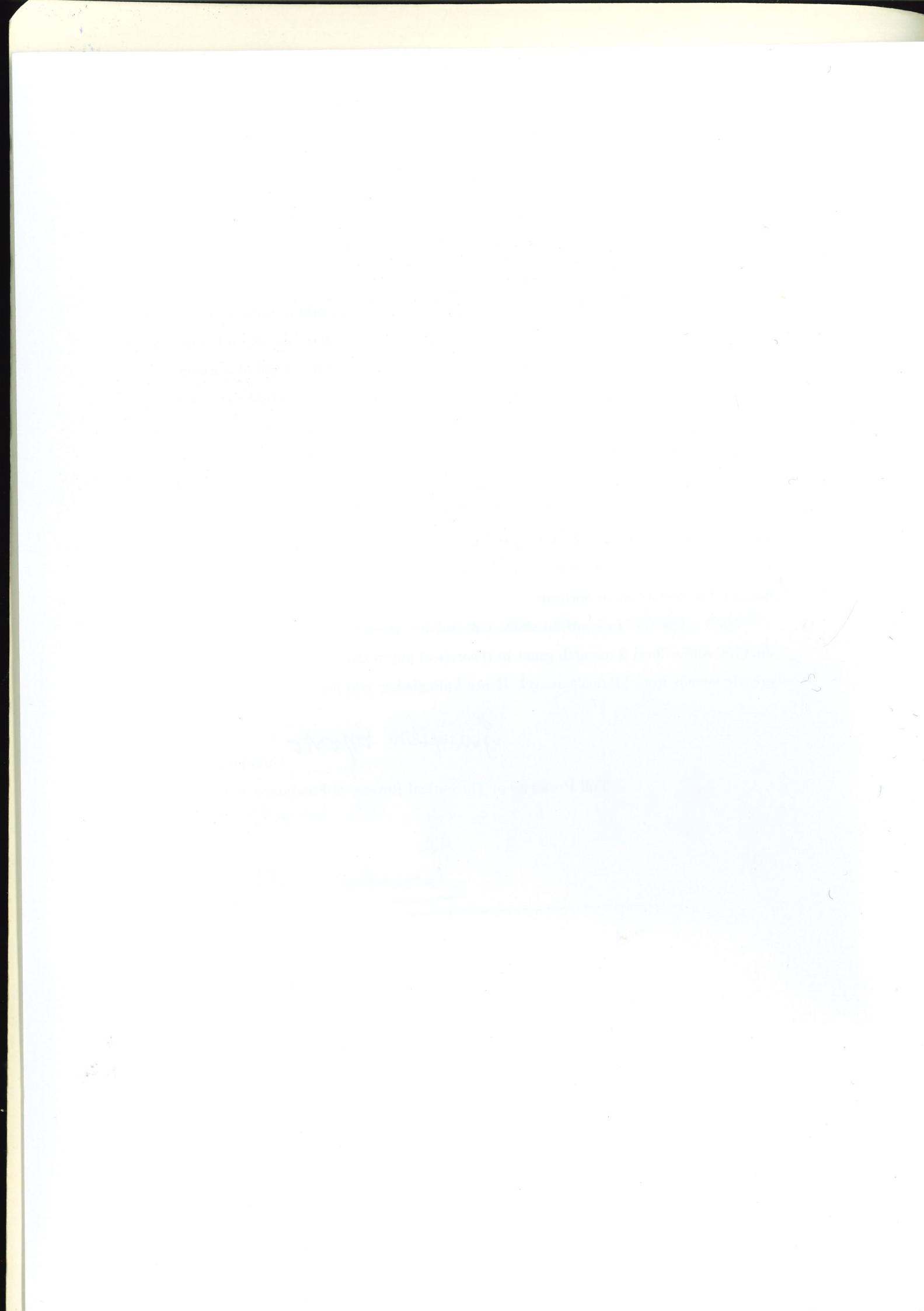
$$\ell_p = \ell_V + R \Rightarrow \ell_p - \ell_V = R.$$

Si ha allora:

$$L = \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_2) = \frac{(\ell_p - \ell_V)}{\frac{\ell_p}{\ell_V} - 1} (T_1 - T_2) =$$

$$= \frac{(\ell_p - \ell_V)}{\frac{\ell_p}{\ell_V} - 1} \cdot (T_1 - T_2) = \ell_V (T_1 - T_2) \quad (27)$$





# Termodinamica : (I° Cap)

- 1) Volendo calcolare il lavoro compiuto da un corpo che si espande, da un volume iniziale di 3,18 litri a un volume finale di 9,02 litri, alla pressione di 9,34 atmosfere, recordiamo la formula:  $L = p \Delta V$ .  
 Poiché 1 atmosfera =  $1,02 \cdot 10^5 \frac{\text{Newton}}{\text{m}^2}$ , nel nostro caso si ha allora:

$$L = p \Delta V = 9,34 \cdot 1,02 \cdot \frac{10^5 \text{ Newton}}{\text{m}^2} \cdot 0,89 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = \\ = 8,12 \cdot 10^2 \text{ Joule.}$$

- 2) Calcolare la pressione di 30 gr. di idrogeno contenuto in un recipiente di  $1 \text{ m}^3$  alla temperatura di  $18^\circ\text{C.} = 288^\circ\text{K}$

- Per il nostro calcolo, recordiamo l'equazione di stato di un sistema composto di m grammi di un gas di peso molecolare M :

$$pV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow p = \frac{mRT}{MV}$$

Nel nostro caso è allora:  $p = \frac{30}{2} \cdot \frac{8,314 \cdot 10^7 \text{ erg}}{\cancel{^\circ\text{K}}} \cdot \frac{288 \text{ }^\circ\text{K}}{\cancel{1 \text{ m}^3}} =$

$$= \cancel{35916,48} \cdot \frac{\text{Joule}}{\text{m}^3} = \cancel{35916,48} \cdot \frac{\text{Newton}}{\text{m}^2} = \cancel{3,5916,48} \cdot 10^{-1} \text{ atmosfere.}$$

2.

3) Calcolare il lavoro L compiuto da 10 gr. di ossigeno che si espanderà isotermaicamente alla temperatura di  $20^{\circ}\text{C}$  da 100 a 0,3 atmosfere.

Usando l'espressione del lavoro compiuto da un gas durante un'espansione isoterma, otteniamo:

$$L = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \left[ \log V \right]_{V_1}^{V_2} =$$

$$= \frac{m}{M} RT \log \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \log \frac{P_1}{P_2} .$$

Nel nostro caso l'�ero:

$$L = \frac{10}{16} \cdot 8,314 \cdot 293 \cdot \text{Joule} \log \frac{100}{0,3} =$$

$$= \cancel{1522,5} \text{ Joule} \log \left( \frac{1}{3} \cdot 10^3 \right) =$$

$$= \cancel{1522,5} \text{ Joule} \left[ \log \frac{1}{3} + 3 \log 10 \right] =$$

$$= \cancel{1522,5} \text{ Joule} \left[ (1,10866) + 6,90776 \right] =$$

$$= \cancel{1522,5} \quad \underline{8829,12 \text{ Joule}};$$

(II° cap)

- 4) Calcolare la variazione di energia  $\Delta U$  di un sistema che compie un lavoro di  $3,4 \cdot 10^8$  erg e assorbe 32 cal.

Dalla formula  $\Delta U + L = Q \Rightarrow \Delta U = Q - L$

applicata al nostro caso, si ottiene:

$$\Delta U = (32 \cdot 4,185 \cdot 10^7 - 3,4 \cdot 10^8) \text{ erg} = 9,992 \cdot 10^8 \text{ erg} = 99,92 \text{ Joule}$$

- 5) Un gas binatomico si espande adiabaticamente a un volume 1,35 volte il volume iniziale. Se temperatura iniziale è  $18^\circ\text{C}$ . Trovare la temperatura finale.

- dall'equazione delle espansioni adiabatiche;

$$TV^{K-1} = \text{cost}, \text{ ricalcoliamo:}$$

$$T_1 V_1^{K-1} = T_2 V_2^{K-1} \Rightarrow T_2 = \frac{T_1 V_1^{K-1}}{V_2^{K-1}}.$$

Avrebbe' nel nostro caso il volume finale  $V_2$  vale:

$$V_2 = 1,35 V_1, \text{ si ha:}$$

$$T_2 = \frac{T_1 V_1^{K-1}}{(1,35 V_1)^{K-1}}$$

4

Possendo ora un logaritmo, e ricordando che per i gas ideali  
nella costante  $K = \frac{2}{5}$ , si ha:

$$\log T_2 = \log T_1 + (K-1) \log V_1 - (K-1) \log 1,35 - (K-1) \log V_1$$

$$= \log 18 - 0,4 \log 1,35 = \log 10 + \log 1,8 - 0,4 \cdot 0,3001 =$$

$$= 9,89038 - 0,12004 = 9,77034;$$

$$\log T_2 = 9,77034 \Rightarrow T_2 \approx 15,5^\circ\text{C}$$

- 6) Una mole di gas bilattuoso compie una trasformazione da uno stato iniziale di volume  $91000 \text{ cm}^3$  e temperatura  $291^\circ\text{K}$  a uno stato finale il cui volume e la cui temperatura sono rispettivamente  $12700 \text{ cm}^3$  e  $305^\circ\text{K}$ .  
La trasformazione è rappresentata da una linea retta  
su un diagramma  $(V, p)$ . Trovare il lavoro  
compiuto e il calore assorbito dal sistema.

- Chiamiamo:  $V_1 = 91000 \text{ cm}^3 \quad T_1 = 291^\circ\text{K}$   
 $V_2 = 12700 \text{ cm}^3 \quad T_2 = 305^\circ\text{K}$

da cui:  $\Delta T = T_2 - T_1 = 14^\circ\text{K}$ ;  $\Delta V = V_2 - V_1 = 8300 \text{ cm}^3$

- dall'equazione di stato di una mole di gas perfetto scriviamo inoltre:

$$pV = RT \Rightarrow d(pV) = d(RT) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p dV + V dp = R dT \Rightarrow p dV + V dp = R dT.$$

~~Soltanto nel nostro caso la pressione non varia, dT = 1~~

~~$$\Rightarrow \frac{p}{V} = \frac{R dT}{dV}$$~~

~~Portando in questo l'equazione totale:  $L = p dV = R dT =$~~ 

$$= 8,11 \text{ Joule} \cdot \text{K}^{-1} = 11,396 \text{ Joule},$$

Riportando che il calore specifico a pressione costante,  $C_p$ , ha un valore ben preciso vale:  $C_p = \frac{7}{2} R$ , otta che il calore  $\Delta Q$  assorbito dal sistema è dato da:

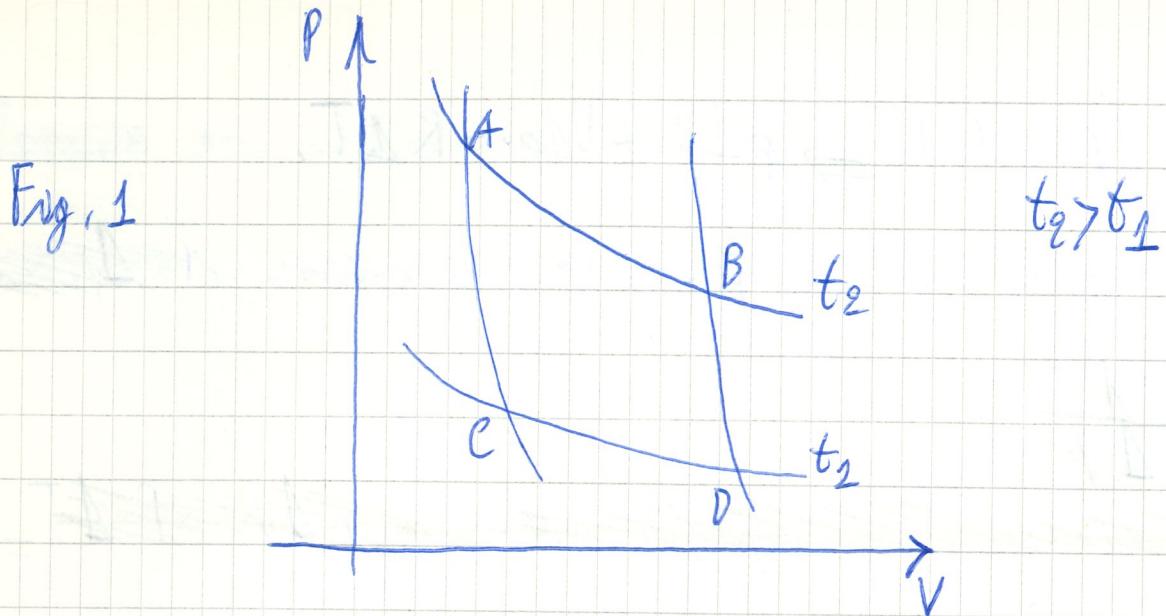
$$\Delta Q = C_p \Delta T = \frac{7}{2} R \Delta T = \frac{7}{2} L = 40,75 \text{ Joule} = \\ = 97,35 \text{ cal}.$$

- 7) Una mole di gas monatomico compie un ciclo di Carnot tra le temperature  $400^\circ\text{K}$  e  $300^\circ\text{K}$ . Nella trasformazione isoterma superiore, il volume iniziale è di 1 litro, quello finale di 5 litri. Trovare il lavoro compiuto durante un ciclo, e le quantità di calore scambiato con le due sorgenti.

Troviamo apertutto a mente il grafico di un ciclo di Carnot:  
(vedi fig. 1)

(III° cap)

6



Chiamiamo poi:  $V_{\text{finale}} = V_f = 5 \text{ l}$

$V_{\text{iniziale}} = V_I = 1 \text{ l}$

il volume finale  
e iniziale ~~è~~ occupato

dalla mole di gas monoatomico durante l'isoterma AB,

$\frac{V_f}{V_I}$  il volume finale e iniziale occupato dalla  
stessa mole durante l'isoterma CD

$$T_2 = 400^\circ\text{K} \quad e \quad T_1 = 300^\circ\text{K}.$$

Indicando con  $L_2$  e  $L_1$  rispettivamente il lavoro compiuto  
durante l'isoterma AB a temperatura maggiore  $T_2$   
e il lavoro compiuto durante l'isoterma CD a temperatura  
inferiore  $T_1$ , si ha allora:

$$L_2 = R T_2 \log \frac{V_f}{V_I}$$

$$L_1 = R T_1 \log \frac{V_f}{V_I}$$

Per calcolare le inegualità  $V_f^i$  e  $V_I^i$  si considera che BD e CA sono due tratti di espansione adiabatica della rete di gas; applicando perciò l'equazione delle ~~adiabatiche~~ adiabatiche al tratto BD si ha:

$$T_2 V_f^{K-1} = T_1 V_I^{K-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_I^{K-1} = \frac{T_2}{T_1} V_f^{K-1} = \frac{5}{3} 5^{K-1}; \text{ da cui, passando}$$

al logaritmo, si ha:

$$(K-1) \log V_I^i = \log \frac{5}{3} + (K-1) \log 5$$

Poiché per i gas monatomici la costante  $K = \frac{5}{3}$ , si ha ancora:

$$\frac{2}{3} \log V_I^i = \log 1,33333 + 1,07296$$

$$\log V_I^i = 9,03271 \Rightarrow V_I^i \approx \underline{7,635} \text{ litri}$$

Analogo modo, applicando l'equazione delle adiabatiche al tratto CA si ha:

$$T_2 V_f^{K-1} = T_1 V_I^{K-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_f^{K-1} = \frac{T_2}{T_1} V_I^{K-1} = \frac{5}{3} V_I^{K-1}; \text{ da cui, passando ai}$$

logaritmo, sì ha:

$$(K_2) \log V_f = \log \frac{L}{3} + (K_2) \log 1$$

$$\frac{2}{3} \log V_f = \log \frac{L}{3} \Rightarrow \log V_f = 1,5 \cdot \log \frac{L}{3} =$$

$$= 0,42777 \Rightarrow V_f = \underline{\underline{1,535}} \text{ litri}$$

- Restante i lavori  $L_2$  e  $L_1$  valgono rispettivamente:

$$L_2 = 8,315 \text{ Joule} \cdot 500 \cdot 1,60955 = \underline{\underline{5358}} \text{ Joule}$$

$$L_1 = 8,315 \text{ Joule} \cdot 300 \log \frac{1,535}{7,635} =$$

$$= 8,315 \cdot 300 \text{ Joule} \cdot (-0,39056) = \underline{\underline{-975}} \text{ Joule}$$

~~Per il lavoro compiuto~~ possiamo allora dire che il lavoro  $L_{tot}$  compiuto durante un ciclo vale:

$$L_{tot} = L_2 - |L_1| = (5358 - 975) \text{ Joule} = \underline{\underline{4378}} \text{ Joule.}$$

- La quantità di calore  $Q_2$  scambiata con la sorgente a temperatura  $T_2$  vale:

$$Q_2 = \frac{L_2}{T} = \frac{5358}{4,186} \text{ cal} = \underline{\underline{1278,5575}} \text{ cal}$$

fra quantità di calore  $Q_1$  scambiata con la sorgente a temperatura  $T_1$  vale:

$$Q_1 = \frac{|L_1|}{T} = \frac{975}{4,186} \text{ cal} = \underline{\underline{238,68036 \text{ cal}}}$$

(vedi pag 51-52)

Il ciclo di Carnot può essere percorso in senso inverso per sottrarre una quantità di calore  $Q_1$  da una sorgente a temperatura inferiore  $T_1$  assorbendo un certo lavoro  $L$ .

- Basandosi su questo principio si può perciò costruire un dispositivo frigorifero per sottrarre una quantità di calore  $Q_1$  da una sorgente più fredda, utilizzando la temperatura  $T_2$  dell'ambiente come temperatura maggiore.

Pertanto, essendo:  $Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow L = Q_2 - Q_1 = Q_1 \frac{T_2}{T_1} - Q_1$

$$= Q_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right), \quad \text{il lavoro } L \text{ necessario a sottrarre}$$

Q<sub>2</sub> dalla sorgente a temperatura T<sub>1</sub> è tanto maggiore quanto minore è T<sub>1</sub>. Si possono perciò risolvere problemi come questo: calcolare la minima quantità di lavoro necessaria a sottrarre 1 Cal da un corpo raffreddato alla temperatura di  $-10^{\circ}\text{C}$ , sapendo che la temperatura dell'ambiente è di  $35^{\circ}\text{C}$ .

- Infatti allora si ha:  $L = Q_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = 1 \text{ cal} \left[ \frac{35^{\circ}\text{C}}{-10^{\circ}\text{C}} - 1 \right] = 0,7262 \text{ Joule}$



"Sia funzione di stato entropia"

- Sia dato un sistema, e scegliamo arbitrariamente uno stato d'equilibrio  $O$  del sistema, chiameremo stato di riferimento.  
Sia poi  $A$  un altro stato d'equilibrio del sistema, e consideriamo una trasformazione reversibile che porta il nostro sistema da  $O$  ad  $A$ . S'integrale:  $\int_0^A \frac{dQ}{T}$  calcolato lungo una

trasformazione reversibile qualunque che connetta  $O$  ad  $A$  è chiamata entropia  $S$  dello stato  $A$  del sistema.

Da tale definizione è evidente che  $S(A)$  è definita a meno d'una costante arbitraria, in quanto, essendo arbitraria la scelta di  $O$ , può aversi, per  $O' \neq O$ :

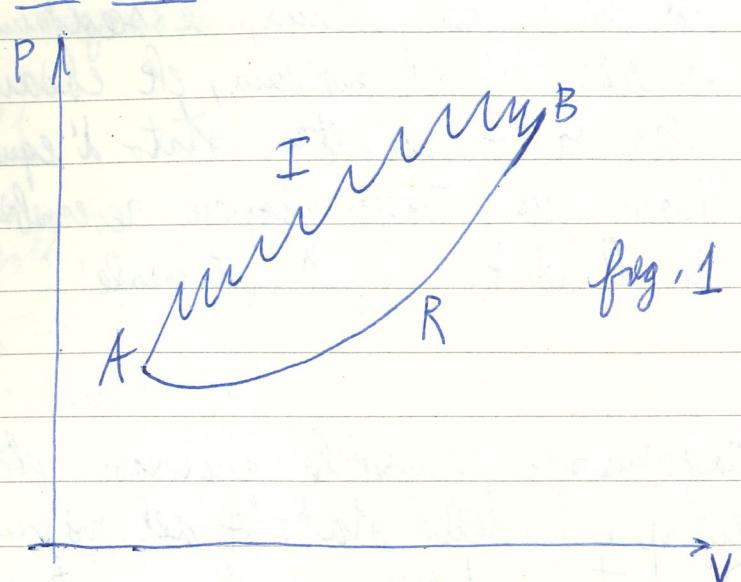
$$S'(A) = \int_{O'}^A \frac{dQ}{T} \Rightarrow S(A) = \int_0^A \frac{dQ}{T} = \int_{O'}^{O'} \frac{dQ}{T} + \int_{O'}^A \frac{dQ}{T} =$$

$$= S(O') + S'(A) \Rightarrow S(A) - S'(A) = S(O') = \text{costante},$$

- Così premesso, ci proponiamo ora di ricavare delle equazioni che ci permettano di evidenziare delle proprietà notevoli dell'entropia, a' da poter ritrovare o reformulare più semplicemente i risultati della termodinamica classica in termini delle proprietà dell'entropia.  
- Per comprendere meglio il significato fisico dell'entropia, tratteremo for' un breve della sua interpretazione statistica. Infine, ecerberemo delle equazioni che legano l'entropia alle altre funzioni di stato termodinamiche (in special modo i potenziali termodinamici) si' da mostrare

qualche ulteriore, notevole applicazione.

(I) Consideriamo la fig. 1, in cui è mostrato nel piano  $P, V$  un ciclo irreversibile, in cui un sistema compie una trasformazione irreversibile  $I$  che lo conduce da  $A$  a  $B$ , e poi una trasformazione reversibile  $R$  che lo conduce da  $B$  ad  $A$ . In base alla nostra discussione di Clapeyron si ha allora che:



$$\text{Oggi } \int_{AIBRA} \frac{dQ}{T} = \left( \int_A^B \frac{dQ}{T} \right)_I + \left( \int_B^A \frac{dQ}{T} \right)_R =$$

$$= \left( \int_A^B \frac{dQ}{T} \right)_I + S(A) - S(B), \text{ da cui in generale:}$$

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} \leq S(B) - S(A) \quad \text{per una generica trasformazione.}$$

In particolare, se il sistema è isolato, si ha:  $dQ = 0 \Rightarrow S(A) \leq S(B)$ . Dov'ero: l'entropia di un sistema isolato non può mai diminuire; un sistema isolato raggiunge

lo stato di equilibrio stabile quando la sua entropia è massima. Pertanto, vediamo con  $\Delta S$  la variazione d'entropia d'un sistema isolato che compie una generica trasformazione, si ha che:

$\Delta S \neq 0$  disp (g) . La relazione (g) rappresenta in modo possibile di formulare il 2° principio della termodinamica in maniera formalmente diversa dagli enunciati classici di Lord Kelvin ed di Clausius. Molto spesso, in termodinamica, può capitare che il sistema oggetto del nostro studio non è isolato, ma interagisce con l'ambiente circostante. Sarà allora positiva o al più nulla la variazione  $\Delta S$  d'entropia dell'universo costituito dal sistema e da esso che lo circonda localmente, che prende il nome di universo termodinamico. La forma più generale della relazione (g) è allora:

$$\Delta S_{\text{universo}} \neq 0 \quad (g')$$

Inoltre dalla definizione data di entropia, segue che, per un processo <sup>infinitesimale</sup> ~~irreversibile~~, risulta:

$$dS = \frac{dQ}{T} . \quad \text{Essendo } S \text{ una funzione di stato,}$$

$dS$  è un differentiale esatto; ~~ossia~~ ovvero, il fattore integrante di  $dQ$  è pari ad  $\frac{1}{T}$ . L'esistenza d'una funzione  $S$  quale

quella ora definita è pertanto indissolubilmente connessa all'esistenza d'un fattore integrante per  $dQ$ , che dipende soltanto dalla temperatura in una forma che è la stessa per ogni sistema.

4

Come applicazione pratica della ~~eq.~~ (1), consideriamo la fig. 2:

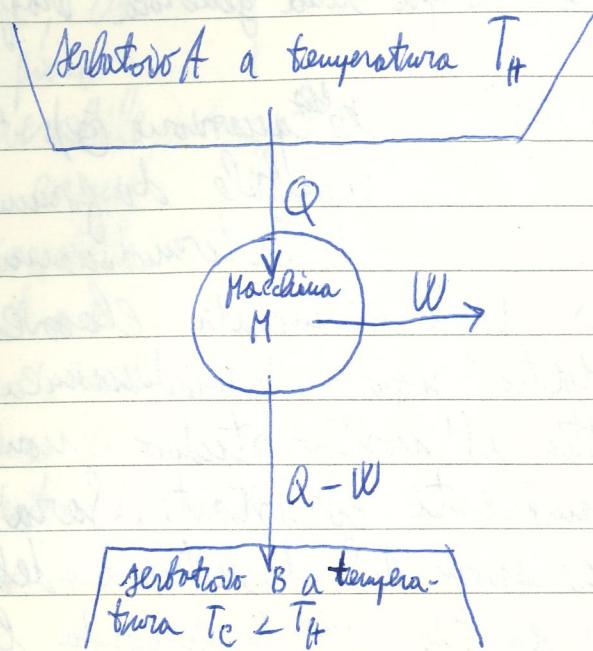


fig. 2

In essa è mostrata la macchina M che, lavorando in un qualunque ciclo fra le temperature  $T_H$  e  $T_C$ , assorbe il calore  $Q$  dal serbatoio A, compie il lavoro  $W$ , e cede il calore  $Q - W$  al serbatoio B. Pertanto:

$$\Delta S_{universo} = \frac{Q-W}{T_C} - \frac{Q}{T_H} \geq 0 \Rightarrow W \leq Q \left(1 - \frac{T_C}{T_H}\right)$$

$$\Rightarrow W_{\max} = Q \left(1 - \frac{T_C}{T_H}\right) \quad \begin{aligned} &\text{(ove si è sfruttato il fatto che)} \\ &\text{l'entropia è una variabile} \\ &\text{estensiva} \end{aligned}$$

Ma allora:



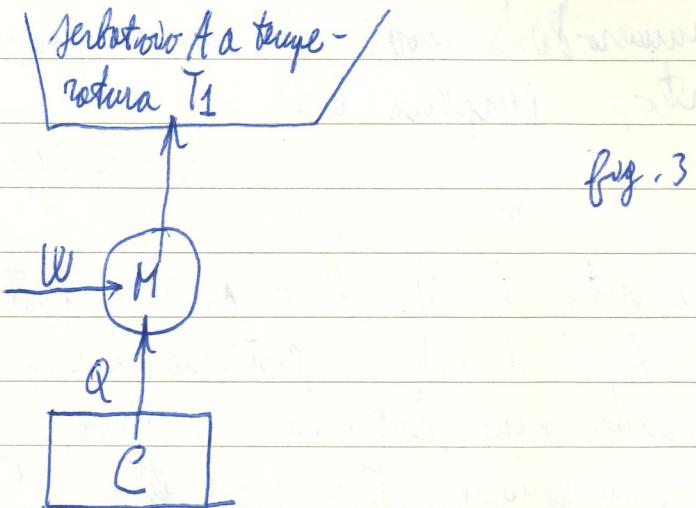
$$\eta_{\text{max}} = \frac{W_{\text{max}}}{Q} = 1 - \frac{T_c}{T_H}$$

$$\eta_{\text{di Carnot}} = 1 - \frac{T_c}{T_H}$$

$\Rightarrow \eta_{\text{max}}(T_H, T_c) = \eta_{\text{di Carnot}}(T_H, T_c)$

equazione, questa, è l'espressione del nostro teorema di Carnot.

Come 2° esempio d'applicazione della ~~equazione~~ (91), consideriamo la fig. 3:



In essa è mostrato un corpo C di massa finita, di cui si vuole abbassare la temperatura dal valore  $T_1$  al valore  $T_2$ . La macchina M svolta lavoro, contrariamente al solito, assorbiendo il lavoro  $W$  e cedendo il calore  $Q+W$  al serbatoio A. Si ha pertanto:

$$\Delta S_{\text{universo}} = \Delta S_{\text{di } C} + \Delta S_{\text{refrigerante}} +$$

$$+ \Delta S_{\text{di } A} = (S_2 - S_1) + 0 + \frac{Q+W}{T_1} = S_2 - S_1 + \frac{Q+W}{T_1} > 0$$

$$\text{da cui: } W \geq T_1(S_1 - S_2) - Q \Rightarrow W_{\min} = T_1(S_1 - S_2) - Q$$

Si può allora arrivare a stimare il costo minimo d'esercizio dell'apparato frigorifero una volta nate le proprietà termodinamiche del materiale e  $Q$ .

(II) La probabilità di trovare un sistema isolato in uno stato d'entropia  $S$  è proporzionale ad  $e^{S/K}$ ,  $K$  essendo la costante di Boltzmann. Tale relazione, (che non stiamo ora a dimostrare), pone che tale probabilità è interpretabile come il numero di modi in cui si può realizzare un dato macro-stato, duplice etc.

$$S = K \lg \Omega + \text{costante} \quad \text{eq (B)}$$

Nota pertanto la  $\Omega$  d'un dato sistema termodinamico, nello stato A, è nota l'entropia dello stato A.

- Ma prima ora dimostrare come, ammessa valida una relazione funzionale fra  $S$  ed  $\Omega$ ,  $\Omega$ , ed in base al fatto che l'entropia è una variabile estensiva, si può giungere all'equazione (B).

Infatti, scorporando il sistema in esame in 2 sistemi, di entropie rispettive:  $S_1 = f(\Omega_1)$   $S_2 = f(\Omega_2)$  poiché  $\Omega = \Omega_1 \Omega_2$ , risulta:

$$S = S_1 + S_2, \text{ ovvero:}$$

$$f(\Omega_1 \Omega_2) = f(\Omega_1) + f(\Omega_2) \quad \text{da cui:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial I_1} = f'(\Omega_1, \Omega_2) \Omega_2 \\ \frac{\partial S}{\partial I_2} = f'(\Omega_1, \Omega_2) \Omega_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\frac{dS_1}{dI_1}}{\frac{dS_2}{dI_2}} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dS_1}{dI_1} I_1 = \frac{dS_2}{dI_2} I_2 = \text{cost} = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 = \int dS_1 = C \int \frac{dI_1}{I_1} = C \log I_1 + \text{cost}$$

$$S_2 = \int dS_2 = C \int \frac{dI_2}{I_2} = C \log I_2 + \text{cost}$$

$$\text{Percio': } S = S_1 + S_2 = C (\log I_1 + \log I_2) + \text{cost} =$$

$$= C \log I_1 I_2 + \text{cost} = C \log I + \text{cost} \quad \text{eq (B)}$$

che è proprio un'equazione del tipo di (B), ove alla 1<sup>a</sup> costante indeterminata C si sostituisca il valore K.

- Sempre con metodi statistici, e partendo dall'equazione:  $S = K \lg I$ , si può ottenere un'altra notevole equazione, che collega l'entropia S di un sistema a quella che fu chiamata da Boltzmann la "Zustandsgesamtheit" (somma sugli stati), vale a dire la funzione Z di partizione.