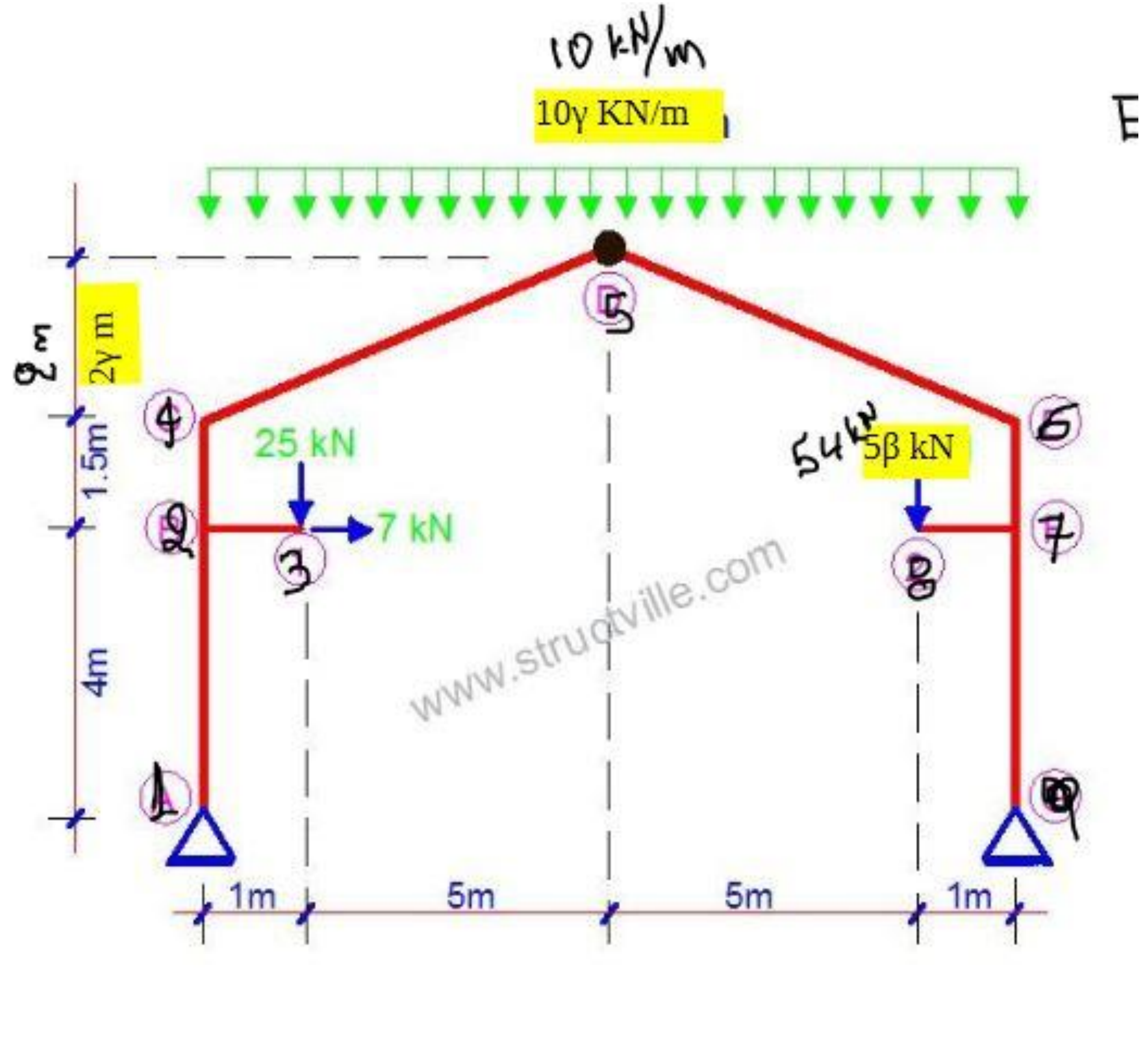
Άσκηση

Υπολογίστε το πλαίσιο του σχήματος και σχεδιάστε τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων, διατμητικών δυνάμεων και ροπών κάμψεως, όπου
Να μην ληφθεί υπόψη άρθρωση στο θέση D.
Να διερευνηθεί η επηρροή στις ροπές κάμψεως, σε περίπτωση που οι αρθρώσεις στις θέσεις A,G γίνουν πακτώσεις.
Προτείνεται η χρήση τυποποιημένης διατομής δομικού χάλυβα (για παράδειγμα στο παράρτημα).



Στο παραπάνω πλαίσιο έχουμε 8 δοκούς με διαφορετικές διευθύνσεις στο επίπεδο. Εκτός από τις επικόμβιες δυνάμεις, έχουμε και κατανεμημένες δυνάμεις, ενώ σε κάθε δοκό προστέθηκε και η φόρτιση λόγω του ιδίου βάρους. Επιπλέον έγινε επίλυση του πλαισίου, έχοντας ως στήριξη, πακτώσεις στους κάτω κόμβους αλλά και αρθρώσεις.

Για κάθε δοκό έχουμε 3 βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο, οπότε 6 βαθμούς ελευθερίας συνολικά. Συνεπώς το $local\ stiffenss\ matrix\ \hat{k}$, έχει διαστάσεις 6x6 με την ακόλουθη μορφή:

where $C_1 = \frac{AE}{L}$ and $C_2 = \frac{EI}{L^3}$

and, therefore,

$$\underline{\hat{k}} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 12C_2 & 6C_2L & 0 & -12C_2 & 6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 4C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 2C_2L^2 \\ -C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -12C_2 & -6C_2L & 0 & 12C_2 & -6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 2C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 4C_2L^2 \end{bmatrix}$$

Όμως λόγω της τυχαίας διεύθυνσης κάθε δοκού, όπως και στα δικτυώματα, μετασχηματίζουμε τον $\hat{k}$, έτσι ώστε οι προβολές των αξονικές και διατμητικές δυνάμεις στη δοκό να μπουν στο $global\ stiffness\ matrix$. Συνεπώς οι μετατοπίσεις υπολογίζονται στις $global$ συντεταγμένες.

Οι κατανεμημένες και οι συγκεντρωμένες δυνάμεις εισάγονται σύμφωνα με τις $global$ συντεταγμένες. Επιπλέον, οι κατανεμημένες δυνάμεις μετασχηματίζονται σε επικόμβιες μέσω του ολοκληρώματος.

$$W = \int_0^L (F_{\alpha\rho\chi.\kappa\acute{o}\mu\beta o\upsilon} + \frac{F_{\tau\varepsilon\lambda.\kappa\acute{o}\mu\beta o\upsilon} - F_{\alpha\rho\chi.\kappa\acute{o}\mu\beta o\upsilon}}{L} x)\ u\ dx$$

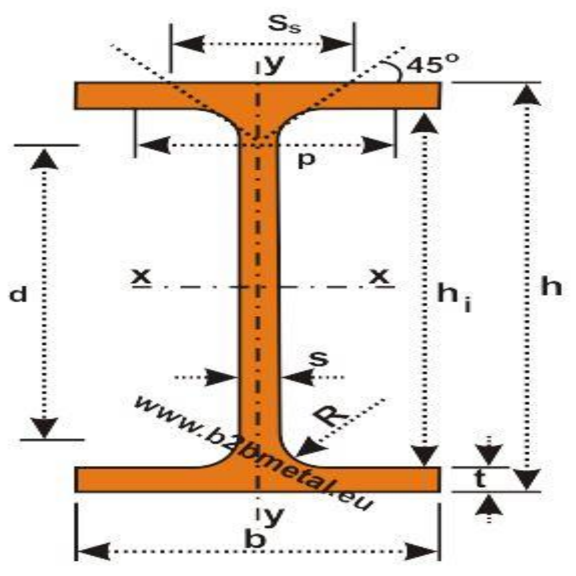
Παρόλο που στα στοιχεία μεταξύ των κόμβων (4,5) και (5,6), δέχονται κατανεμημένη δύναμη όχι κάθετη στον ουδέτερο άξονα της δοκού, δεν χρειάζεται κάποιος περαιτέρω μετασχηματισμός. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό, είναι διότι οι κατανεμημένες δυνάμεις μετασχηματίζονται σε επικόμβιες δυνάμεις στο $global$ σύστημα και έτσι μπορούμε να προχωρήσουμε με την επίλυση για τις μετατοπίσεις του πλαισίου, οι οποίες γίνονται στο $global$ σύστημα συντεταγνένων.

Η φόρτιση λόγω του ιδίου βάρους συμπεριλαμβάνεται με τις αντίστοιχες επικόμβιες δυνάμεις και ροπές που παράγει μία σταθερά κατανεμημένη δύναμη κατά μήκος της δοκού. Όμως αν έχουμε μία κατακόρυφη δοκό, η φόρτιση του βάρους αποτελείται από δύο επικόμβιες δυνάμεις στην y κατεύθυνση, μοιρασμένη στους δύο κόμβους.

Οι παραπάνω υπολογισμοί γίνονται με το ακόλουθο κομμάτι κώδικα:

```
%==============================================================================
%----------------ADD GRAVITY-------------------------------------
%----------FOR VERTICAL BEAMS ONLY Y NODAL FORCES --------------
%----------FOR INCLINED BEAMS CONSTANT DISTRUBED VERTICAL FORCE--
for i=1:size(n_s,1)
    Len=(LenX(i)^2+LenY(i)^2)^0.5;
    if (LenY(i)==0)
    F(3*(n_s(i)-1)+2)=F(3*(n_s(i)-1)+2)-density*10*Len/2*1e-3;
    %half gravity force in first nodes in -y direction
    F(3*(n_e(i)-1)+2)=F(3*(n_e(i)-1)+2)-density*10*Len/2*1e-3;
    %half gravity force in second nodes in -y direction
   else %according to constant distrubed load
    F(3*(n_s(i)-1)+2)=F(3*(n_s(i)-1)+2)-density*10*Len/2*1e-3;
    F(3*(n_e(i)-1)+2)=F(3*(n_e(i)-1)+2)-density*10*Len/2*1e-3;
    F(3*(n_s(i)-1)+3)=F(3*(n_s(i)-1)+3)-density*10*Len^2/12*1e-3;
    F(3*(n_e(i)-1)+3)=F(3*(n_e(i)-1)+3)+density*10*Len^2/12*1e-3;
    end
end
%---multiply with 1e-3, because force unit is kN----------------
%==============================================================================
```

Η δοκός που χρησιμοποιήθηκε για το πλαίσιο είναι ένα $i - beam$, που αντιστοιχεί στην ταυτοποίηση $IPE - 200$. Η διατομή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και έχει τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στον επόμενο πίνακα.



Identification	Nominal weight 1m	Nominal dimensions					Cross-section	Dimensions for detailing					Surface	
	kg/m			mm			A	h1	d	Ø	pmin	pmax	AL	AG
		b	h	t1	t2	R1	cm2	mm	mm		mm	mm	m2/m	m2/m
IPE 80	6,0	46	80	3,8	5,2	5,0	7,64	69,6	59,6	-	-	-	0,328	54,64
IPE 100	8,1	55	100	4,1	5,7	7,0	10,30	88,6	74,6	-	-	-	0,400	49,33
IPE 120	10,4	64	120	4,4	6,3	7,0	13,20	107,4	93,4	-	-	-	0,475	45,82
IPE 140	12,9	73	140	4,7	6,9	7,0	16,40	126,2	112,2	-	-	-	0,551	42,70
IPE 160	15,8	82	160	5,0	7,4	9,0	20,10	145,2	127,2	-	-	-	0,623	39,47
IPE 180	18,8	91	180	5,3	8,0	9,0	23,90	164,0	146,0	M10	48	48	0,698	37,13
IPE 200	22,4	100	200	5,6	8,5	12,0	28,50	183,0	159,0	M10	54	58	0,768	34,36
IPE 220	26,2	110	220	5,9	9,2	12,0	33,40	201,6	177,6	M12	60	62	0,848	32,36

Από αυτά τα δεδομένα κρατάμε το εμβαδόν, την ροπή αδράνειας ως προς τον δυνατό άξονα (για την κάμψη) και την πυκνότητα.

$$Area = 28.5\ cm^2 \quad I = 1943\ cm^4 \quad \rho = 22{,}4\ kg/m$$

Ενώ το μέτρο ελαστικότητα θεωρήθηκε ίσο με $E = 200\ GPa$

Από την επίλυση του πλαισίου προκύπτουν οι μετατοπίσεις του πλαισίου, όπου αν K είναι ο $global\ stiffness\ matrix$, και F οι επικόμβιες δυνάμεις στο $global$ σύστημα, προκύπτουν οι μετατοπίσεις στο $global$ συντεταγμένες ως $D_{global} = K^{-1}F$

Για να βρεθούν οι δυνάμεις σε κάθε κόμβο στο $local$ σύστημα, γίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$\hat{f} = \hat{k} * T * D_{global}$$

Επίσης, αν σε μία δοκό έχουμε παρουσία και κατανεμημένης δύναμης, τότε πρέπει να αφαιρεθούν οι ισοδύναμες επικόμβιες δυνάμεις από τον παραπάνω υπολογισμό (οι οποίες βρίσκονται και αυτές στο $global$ σύστημα). Αυτό γίνεται με την εξής πράξη:

$$\hat{f} = \hat{k} * T * D_{global} - T * F_{dist}$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί γίνονται με το ακόλουθο κομμάτι κώδικα:

```
%==========================================================================================
%--------------------BENDING MOMENT AND SHEAR/NORMAL FORCE FOR ELEMENTS--------------------------
F_elements=[];
f_element_form=K_loc*T;
for i=1:size(n_s,1)
Len=(LenX(i)^2+LenY(i)^2)^0.5;
f_element=E*subs(K_loc,[L I], [Len I_ibeam]);
f_element=f_element*subs(T, [C S], [LenX(i)/Len LenY(i)/Len]);
f_element=f_element*[D_glob(3*(n_s(i)-1)+1:3*(n_s(i)-1)+3); D_glob(3*(n_e(i)-1)+1:3*(n_e(i)-1)+3)];
if ([Fy_w1(i) Fy_w2(i)]~=zeros(1,2))
f_element=f_element-subs(T, [C S], [LenX(i)/Len LenY(i)/Len])*...
[F_dist_forc(3*(n_s(i)-1)+1:3*(n_s(i)-1)+3); F_dist_forc(3*(n_e(i)-1)+1:3*(n_e(i)-1)+3)];
end

F_elements=[F_elements f_element];
end
F_elements=double(F_elements);
```

Τα διαγράμματα της διατμητικής δύναμης και της ροπής κάμψης προέκυψαν από την θεωρία πεπερασμένων στοιχείων για την δοκό, όπου από τα κυβικά $shape\ function\ N$ και από της σχέσεις

$$m = EI\frac{d^2u}{dx^2} \text{ και } V = EI\frac{d^3u}{dx^3}$$

από την θεωρία δοκών, προέκυψαν τα διαγράμματα. Όπου $u = N * \widehat{d_{beam}}$, με το τοπικό διάνυσμα μετατοπίσεων να έχει μόνο τους βαθμούς ελευθερίας για κατακόρυφη μετατόπιση και στροφή.

Τα διαγράμματα των αξονικών δυνάμεων, προέκυψαν από τις $local$ δυνάμεις κάθε στοιχείου στην διεύθυνση x. Στις δοκούς που δεν έχουμε κατανεμημένη δύναμη στον άξονα x, η κατασκευή του διαγράμματος είναι απλή, αφού έχουμε σταθερή αξονική καταπόνηση εντός της δοκού. Όμως για τις δύο δοκούς στην κορυφή του πλαισίου, η κατανεμημένη δύναμη έχει συνιστώσα και στον άξονα x. Συνεπώς το διάγραμμα των αξονικών δυνάμεων έχει γραμμική μορφή και οι τιμές των $local$ δυνάμεων στην κατεύθυνση x, δίνουν τις δύο ακραίες τιμές.

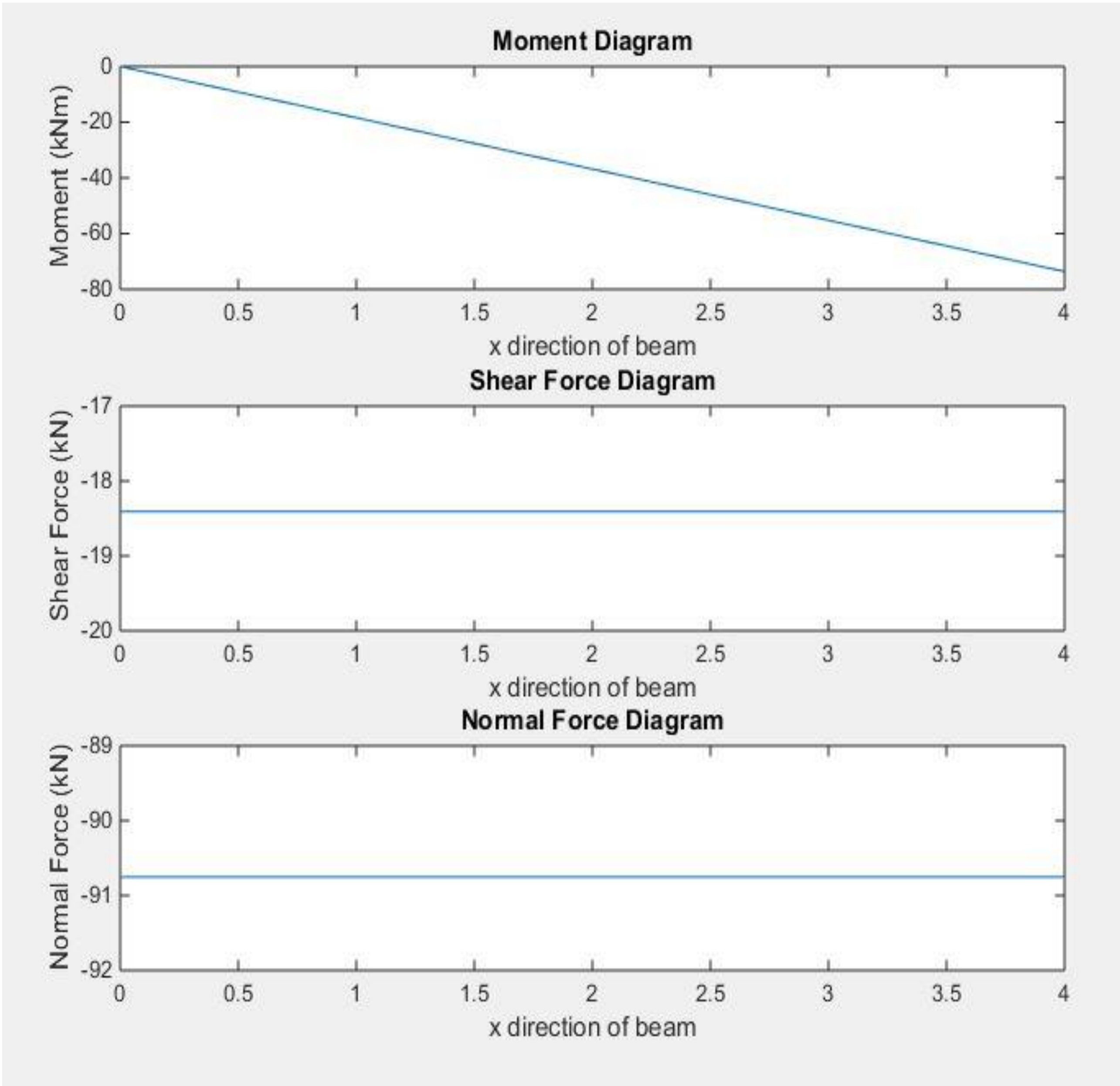
Οι παραπάνω υπολογισμοί γίνονται από το ακόλουθο κομμάτι κώδικα.

```
%==========================================================================================
%-------------------BENDING MOMENT AND SHEAR FORCE DIAGRAMM-----------------------------------
B1=diff(N,x,2);
B2=diff(N,x,3);
M_pl_form=E*I_ibeam*B1*d_beam;
V_pl_form=E*I_ibeam*B2*d_beam;
N_pl_form=-x1+(x2+x1)/L*x;

for i=1:size(n_s,1)
Len=(LenX(i)^2+LenY(i)^2)^0.5;
D_local=subs(T, [C S], [LenX(i)/Len LenY(i)/Len])*...
[D_glob(3*(n_s(i)-1)+1:3*(n_s(i)-1)+3); D_glob(3*(n_e(i)-1)+1:3*(n_e(i)-1)+3)];
M_plot=subs(M_pl_form,d_beam,[D_local(2:3); D_local(5:6)]);
V_plot=subs(V_pl_form,d_beam,[D_local(2:3); D_local(5:6)]);
N_plot=subs(N_pl_form,[x1 x2], [F_elements(1,i) F_elements(4,i)]);
M_plot=subs(M_plot,L,Len);  V_plot=subs(V_plot,L,Len); N_plot=subs(N_plot,L,Len);
x_plot=linspace(0,Len,50);
M_plot=subs(M_plot,x,x_plot); V_plot=subs(V_plot,x,x_plot); N_plot=subs(N_plot,x,x_plot);
M_plot=double(M_plot); V_plot=double(V_plot); N_plot=double(N_plot);

figure(i);
subplot(3,1,1);
plot(x_plot,M_plot); xlabel('x direction of beam'); ylabel('Moment (kNm)'); title('Moment Diagram');
subplot(3,1,2);
plot(x_plot,V_plot); xlabel('x direction of beam'); ylabel('Shear Force (kN)'); title('Shear Force Diagram');
subplot(3,1,3)
plot(x_plot,N_plot); xlabel('x direction of beam'); ylabel('Normal Force (kN)'); title('Normal Force Diagram');
end
```

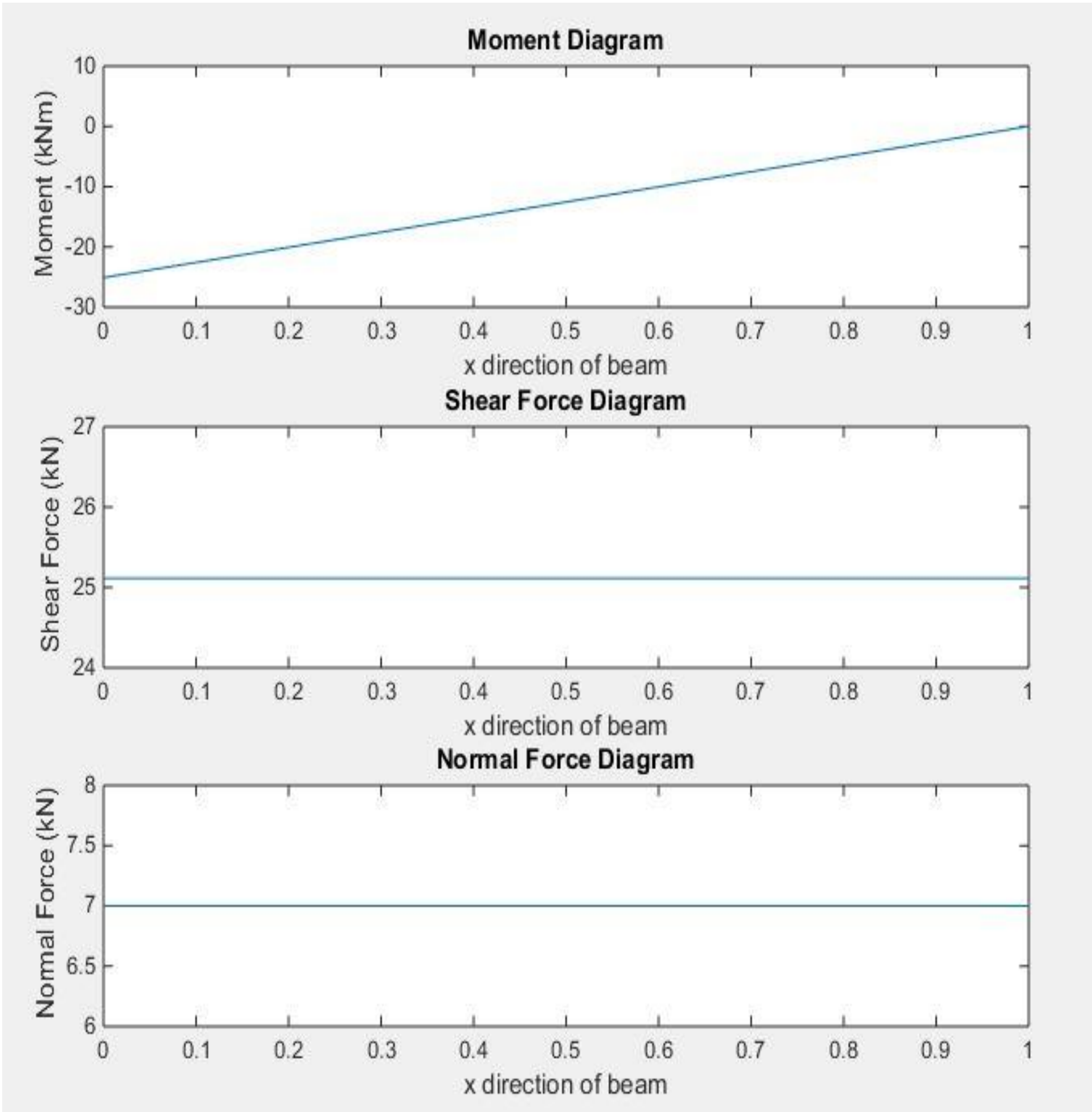
Συνοψίζοντας, ο κώδικας [*beam_frame*.m] έχοντας ως input τις συντεταγμένες των $nodes$, τις επικόμβιες και κατανεμημένες δυνάμεις σε κάθε ακμή (δοκό) και τα χαρακτηριστικά της διατομής, δίνει τις μετατοπίσεις των κόμβων, τις $local$ δυνάμεις σε κάθε κόμβο και τα διαγράμματα NQM για κάθε δοκό.

Στη συνέχεια ακολουθούν τα διαγράμματα για την περίπτωση στήριξης με άρθρωση και έπειτα με στήριξη πάκτωσης.

1η Δοκός

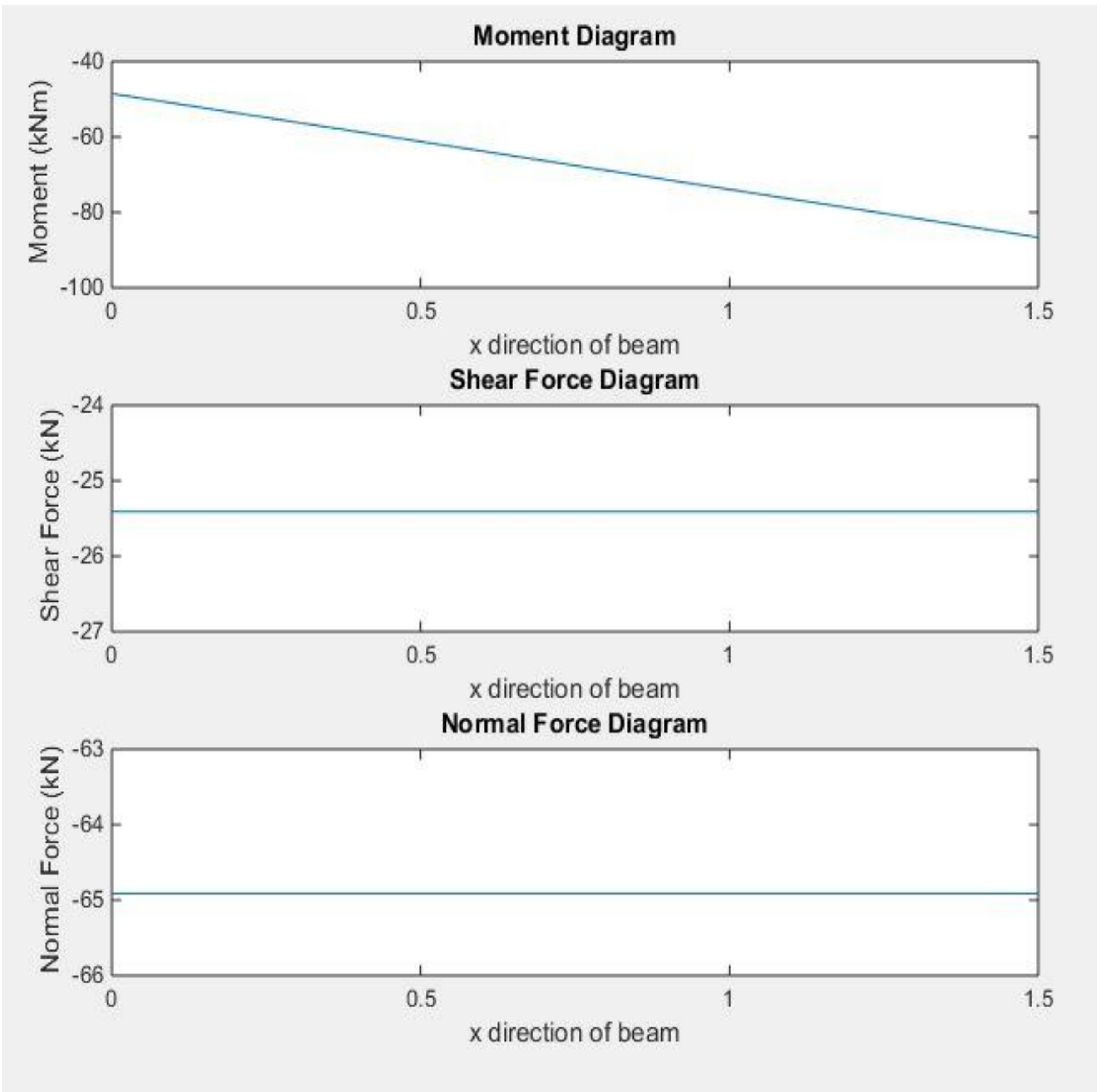

Moment Diagram
Moment (kNm)
x direction of beam
0
-20
-40
-60
-80
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
Shear Force Diagram
Shear Force (kN)
x direction of beam
-17
-18
-19
-20
Normal Force Diagram
Normal Force (kN)
x direction of beam
-89
-90
-91
-92

2^{η} Δοκός



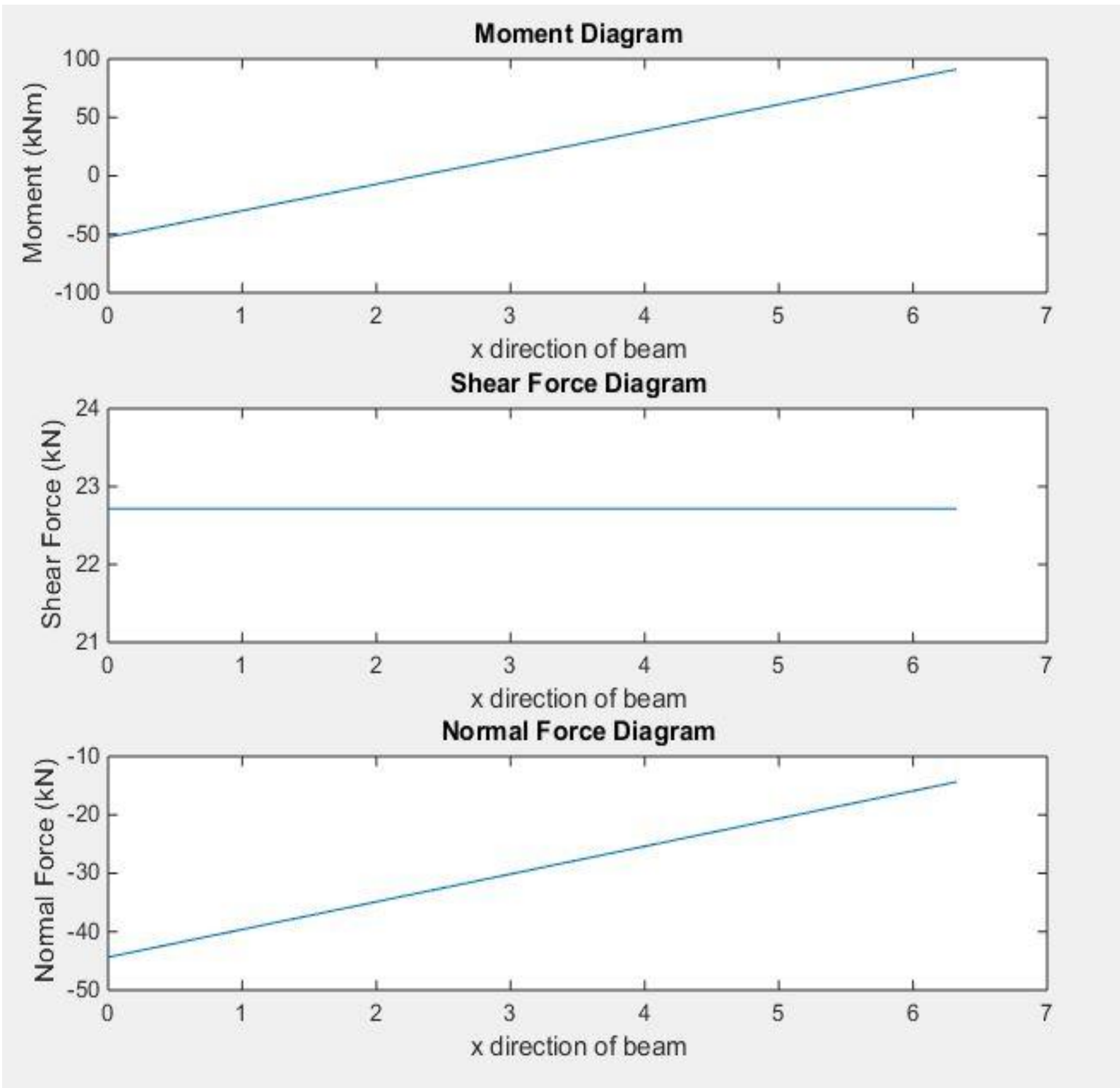
Moment Diagram
Moment (kNm)
10
0
-10
-20
-30
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x direction of beam
Shear Force Diagram
Shear Force (kN)
27
26
25
24
x direction of beam
Normal Force Diagram
Normal Force (kN)
8
7.5
7
6.5
6
x direction of beam

3^{η} Δοκός



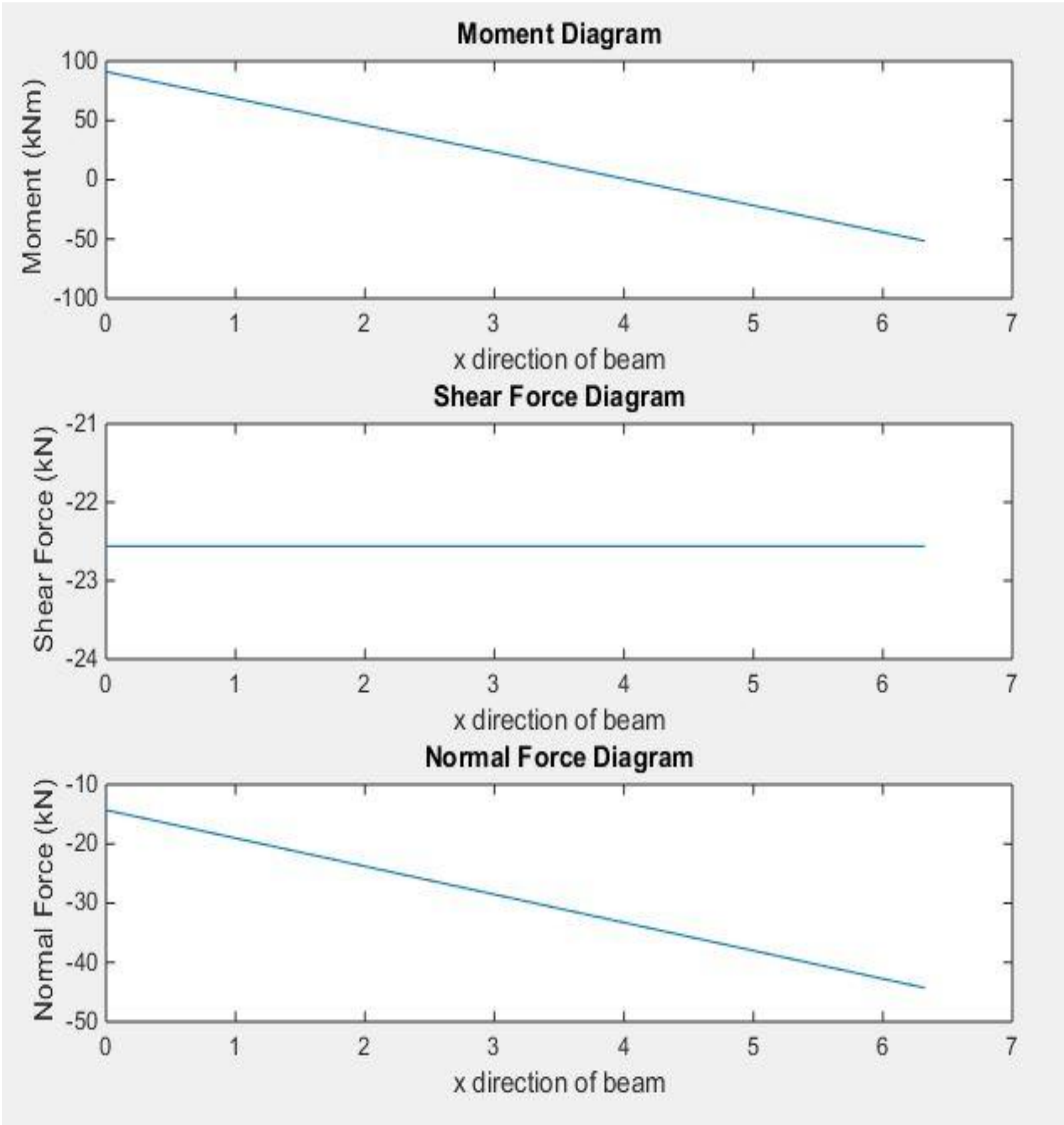
Moment Diagram
Moment (kNm)
-40
-60
-80
-100
0
0.5
1
1.5
x direction of beam
Shear Force Diagram
Shear Force (kN)
-24
-25
-26
-27
0
0.5
1
1.5
x direction of beam
Normal Force Diagram
Normal Force (kN)
-63
-64
-65
-66
0
0.5
1
1.5
x direction of beam

4$^{\eta}$ Δοκός



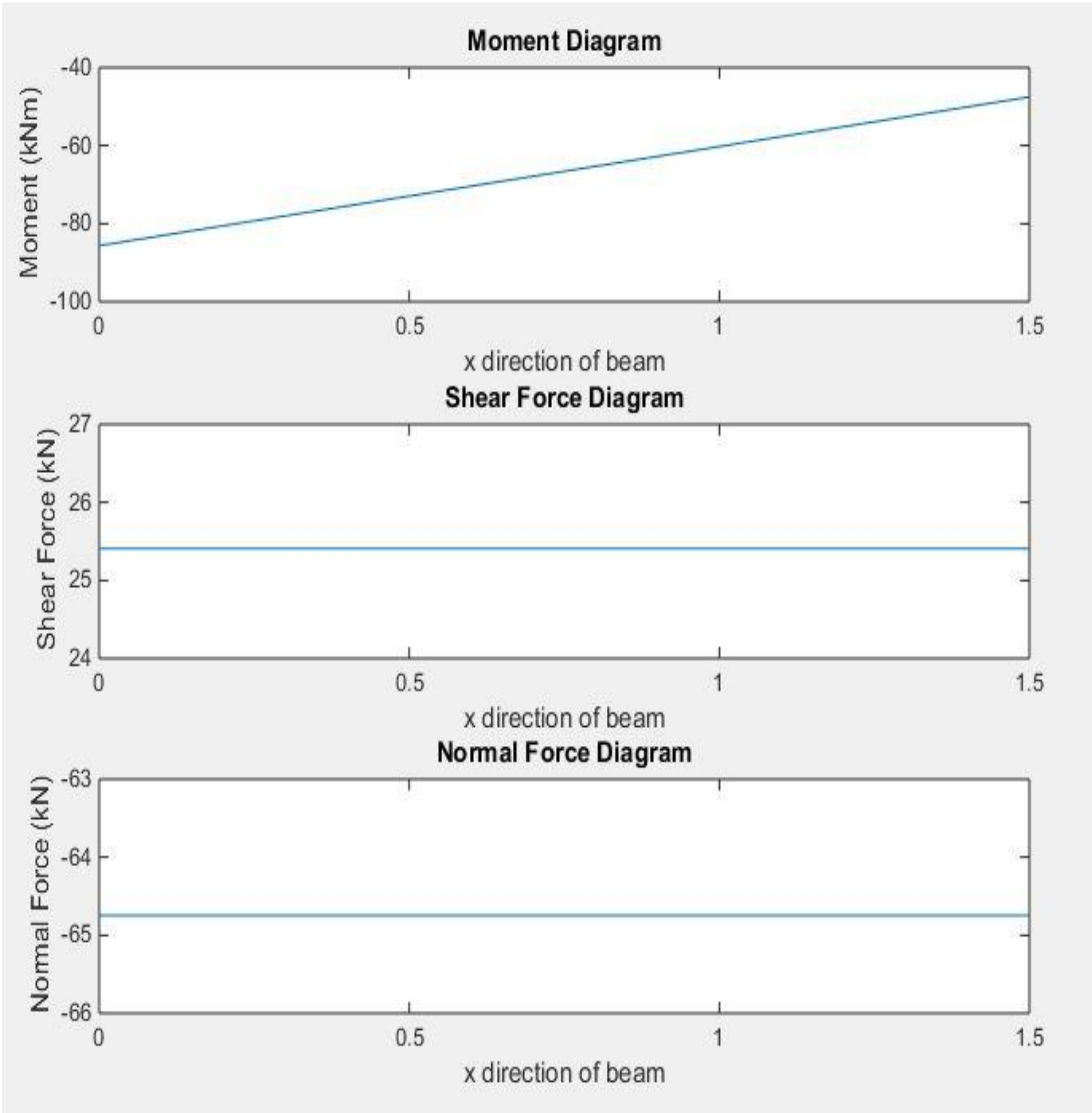
Moment Diagram
Moment (kNm)
100
50
0
-50
-100
0
1
2
3
4
5
6
7
x direction of beam
Shear Force Diagram
Shear Force (kN)
24
23
22
21
0
1
2
3
4
5
6
7
x direction of beam
Normal Force Diagram
Normal Force (kN)
-10
-20
-30
-40
-50
0
1
2
3
4
5
6
7
x direction of beam

5$^{\eta}$ Δοκός



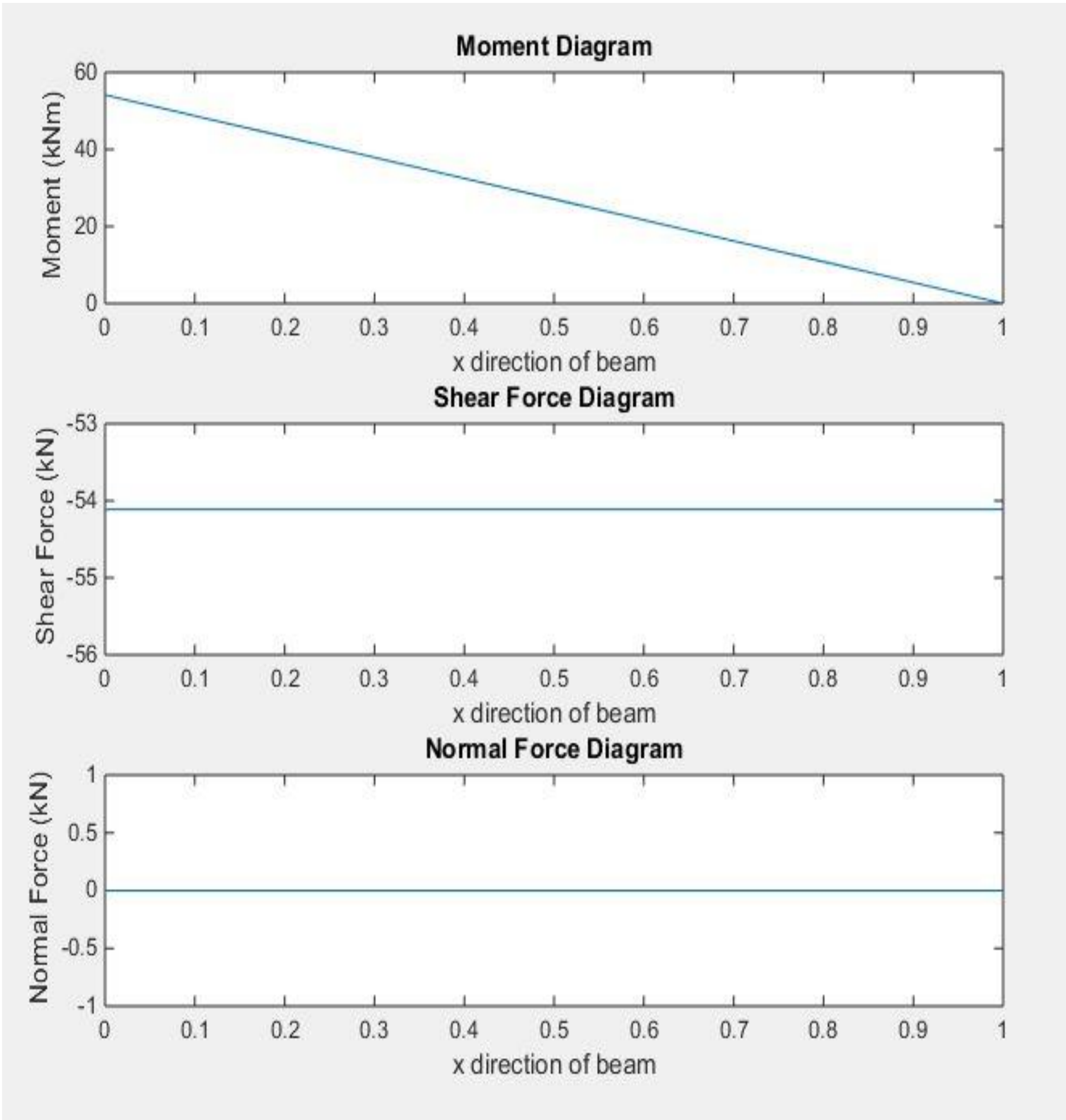
Moment Diagram
Moment (kNm)
100
50
0
-50
-100
0
1
2
3
4
5
6
7
x direction of beam
Shear Force Diagram
Shear Force (kN)
-21
-22
-23
-24
0
1
2
3
4
5
6
7
x direction of beam
Normal Force Diagram
Normal Force (kN)
-10
-20
-30
-40
-50
0
1
2
3
4
5
6
7
x direction of beam

6^{η} Δοκός



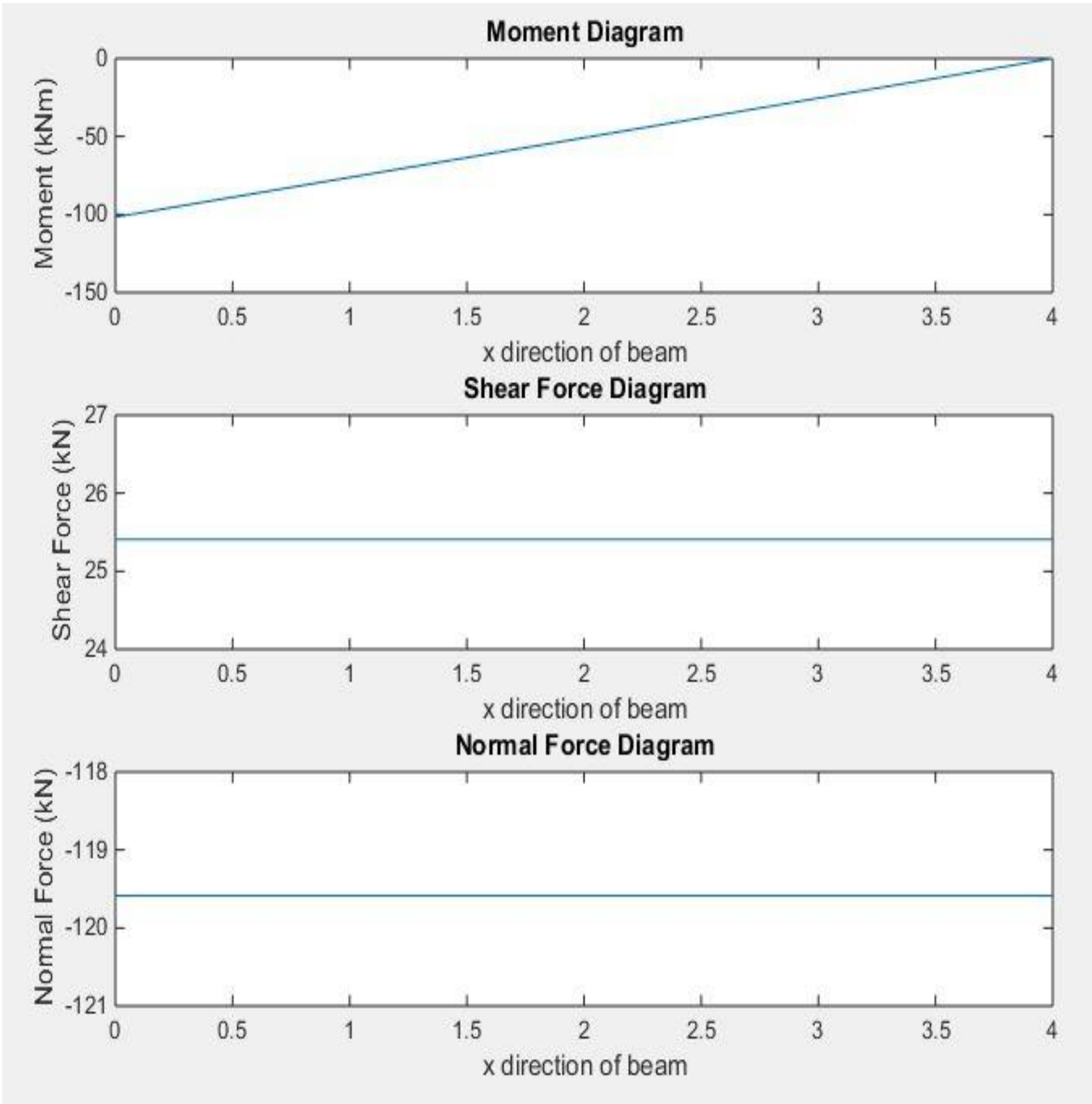
Moment Diagram
Moment (kNm)
-40
-60
-80
-100
0
0.5
1
1.5
x direction of beam
Shear Force Diagram
Shear Force (kN)
27
26
25
24
0
0.5
1
1.5
x direction of beam
Normal Force Diagram
Normal Force (kN)
-63
-64
-65
-66
0
0.5
1
1.5
x direction of beam

7η Δοκός



Moment Diagram
Moment (kNm)
60
40
20
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x direction of beam
Shear Force Diagram
Shear Force (kN)
-53
-54
-55
-56
x direction of beam
Normal Force Diagram
Nomal Force (kN)
1
0.5
0
-0.5
-1
x direction of beam

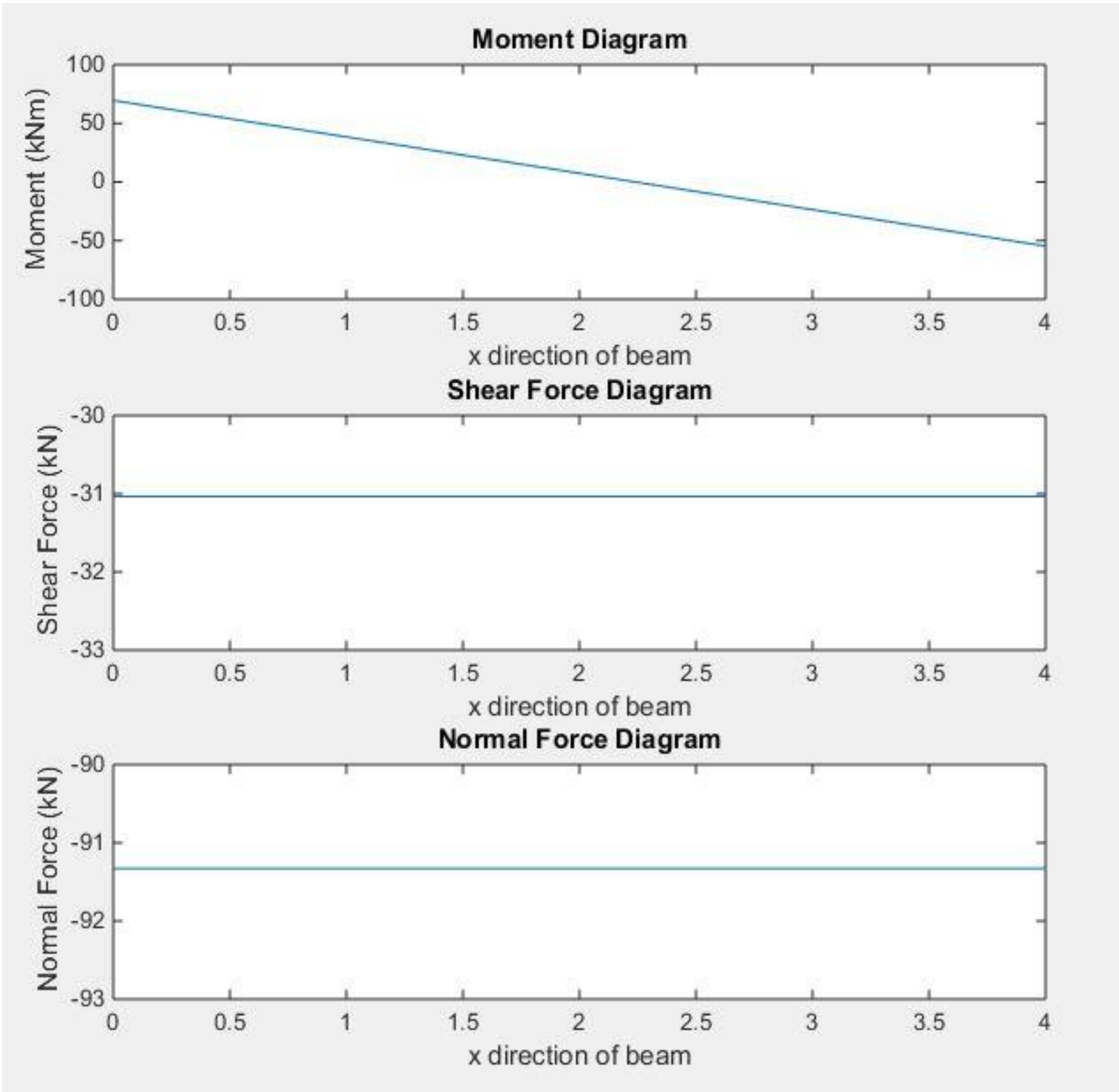
8η Δοκός



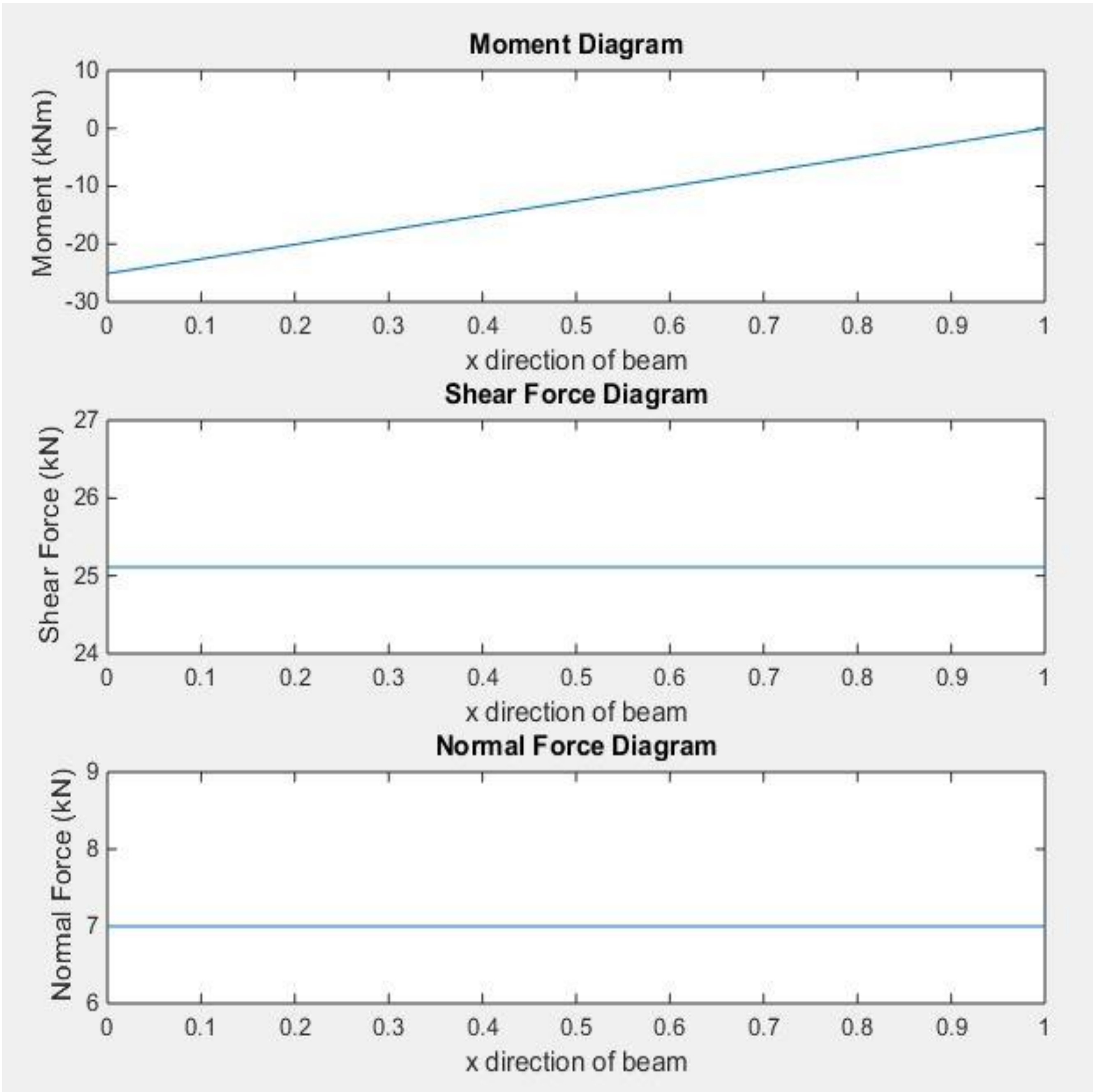
Moment Diagram
Moment (kNm)
0
-50
-100
-150
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
x direction of beam
Shear Force Diagram
Shear Force (kN)
27
26
25
24
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
x direction of beam
Normal Force Diagram
Normal Force (kN)
-118
-119
-120
-121
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
x direction of beam

Τα ακόλουθα διαγράμματα για κάθε δοκό είναι για πάκτωση

$1^η$ Δοκός

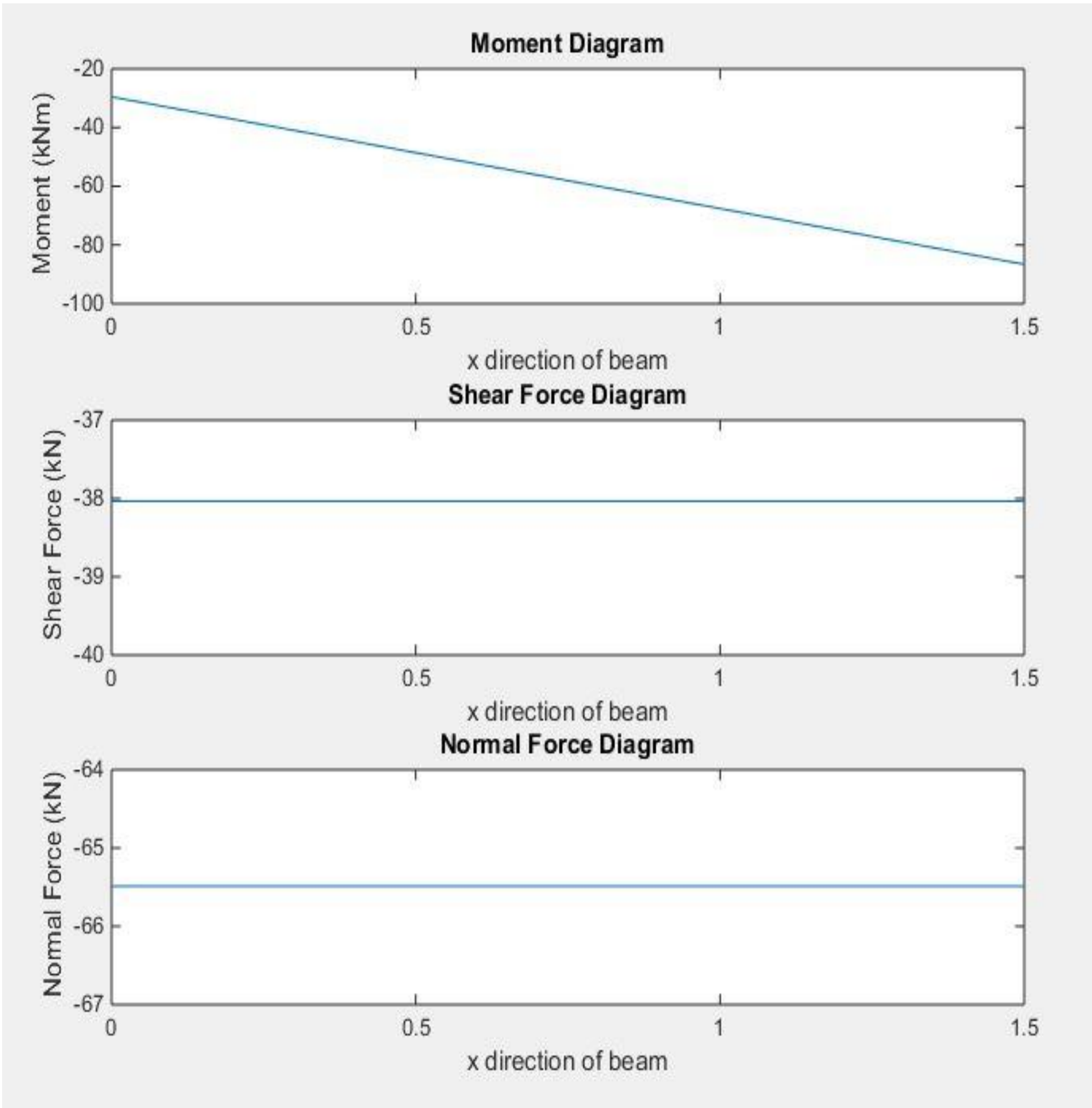


2η Δοκός



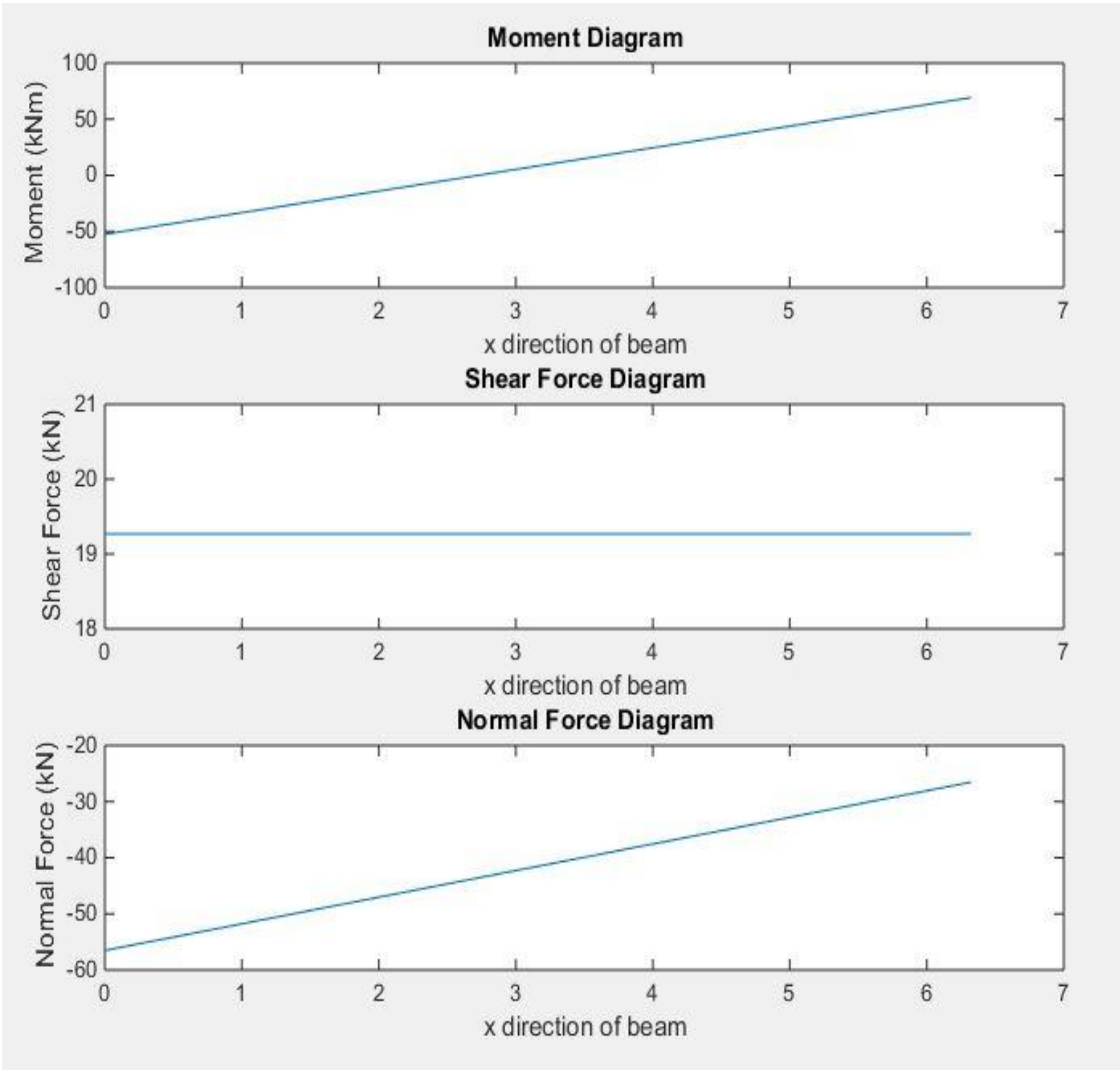
Moment Diagram
Moment (kNm)
10
0
-10
-20
-30
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x direction of beam
Shear Force Diagram
Shear Force (kN)
27
26
25
24
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x direction of beam
Normal Force Diagram
Normal Force (kN)
9
8
7
6
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x direction of beam

3^{η} Δοκός

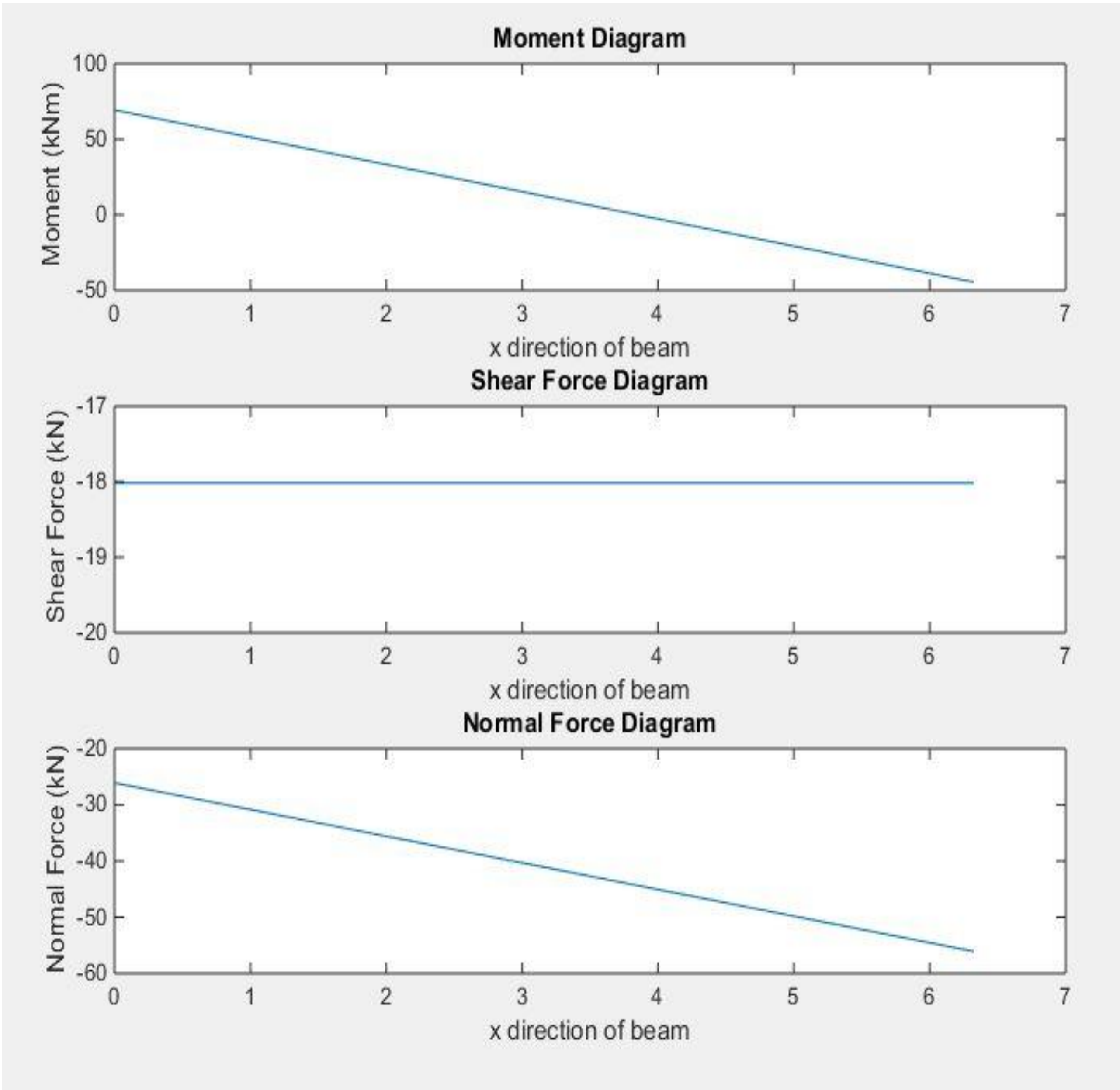


Moment Diagram
Moment (kNm)
-20
-40
-60
-80
-100
0
0.5
1
1.5
x direction of beam
Shear Force Diagram
Shear Force (kN)
-37
-38
-39
-40
0
0.5
1
1.5
x direction of beam
Normal Force Diagram
Nomal Force (kN)
-64
-65
-66
-67
0
0.5
1
1.5
x direction of beam

4^{η} Δοκός

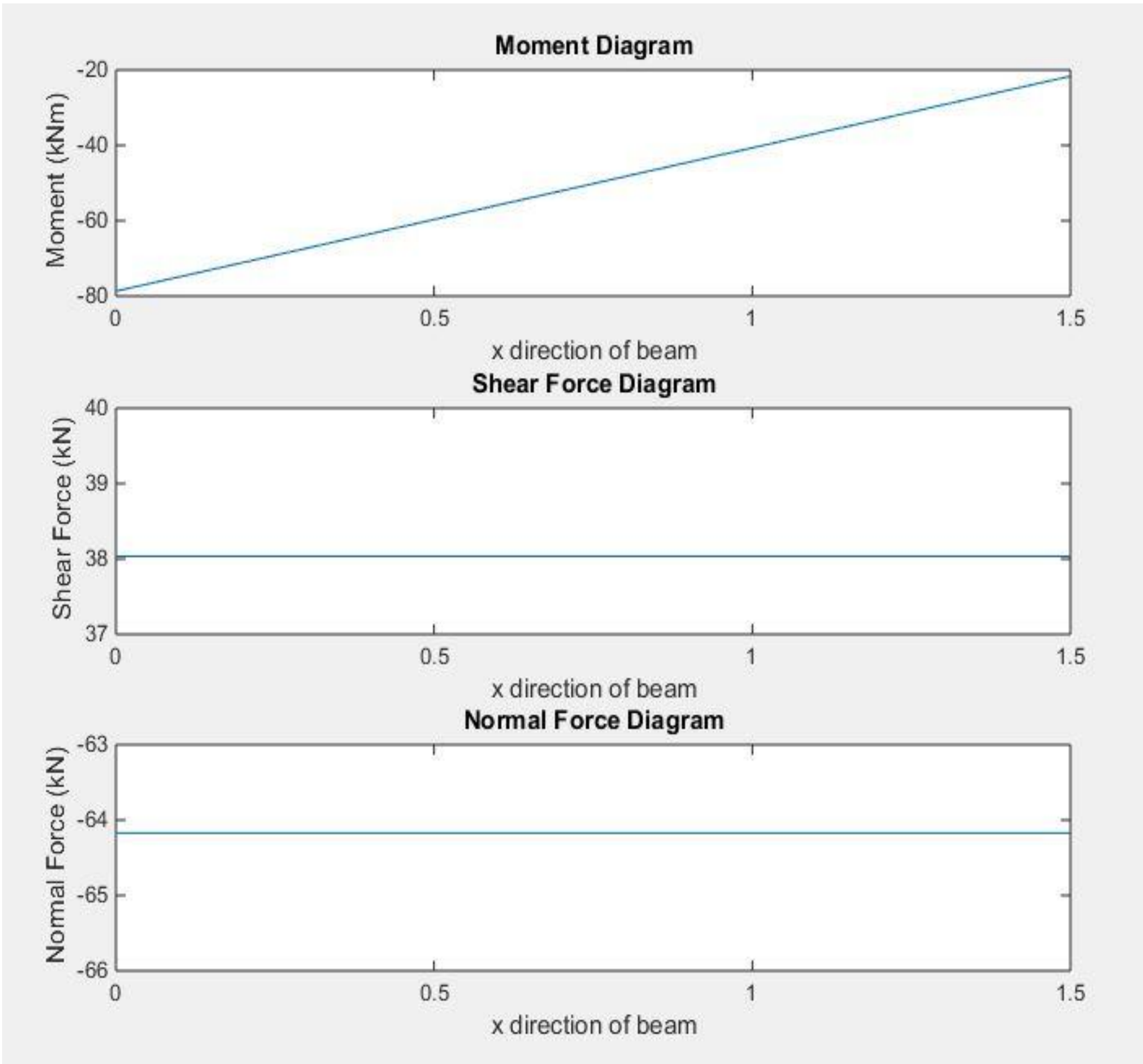

Moment Diagram
Moment (kNm)
100
50
0
-50
-100
0
1
2
3
4
5
6
7
x direction of beam
Shear Force Diagram
Shear Force (kN)
21
20
19
18
0
1
2
3
4
5
6
7
x direction of beam
Normal Force Diagram
Normal Force (kN)
-20
-30
-40
-50
-60
0
1
2
3
4
5
6
7
x direction of beam

5^{η} Δοκός

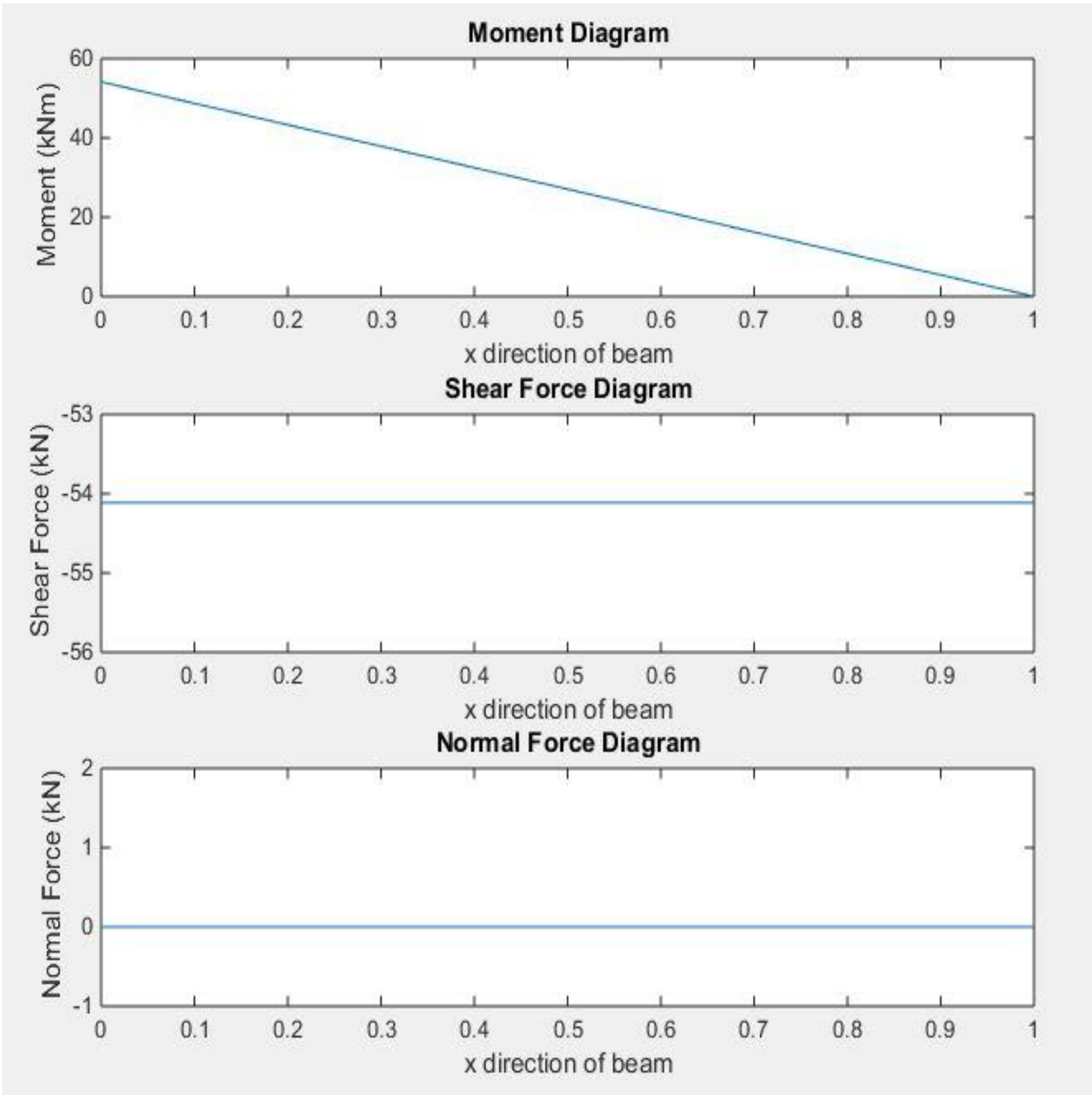


Moment Diagram
Moment (kNm)
100
50
0
-50
0
1
2
3
4
5
6
7
x direction of beam
Shear Force Diagram
Shear Force (kN)
-17
-18
-19
-20
0
1
2
3
4
5
6
7
x direction of beam
Normal Force Diagram
Normal Force (kN)
-20
-30
-40
-50
-60
0
1
2
3
4
5
6
7
x direction of beam

6η Δοκός

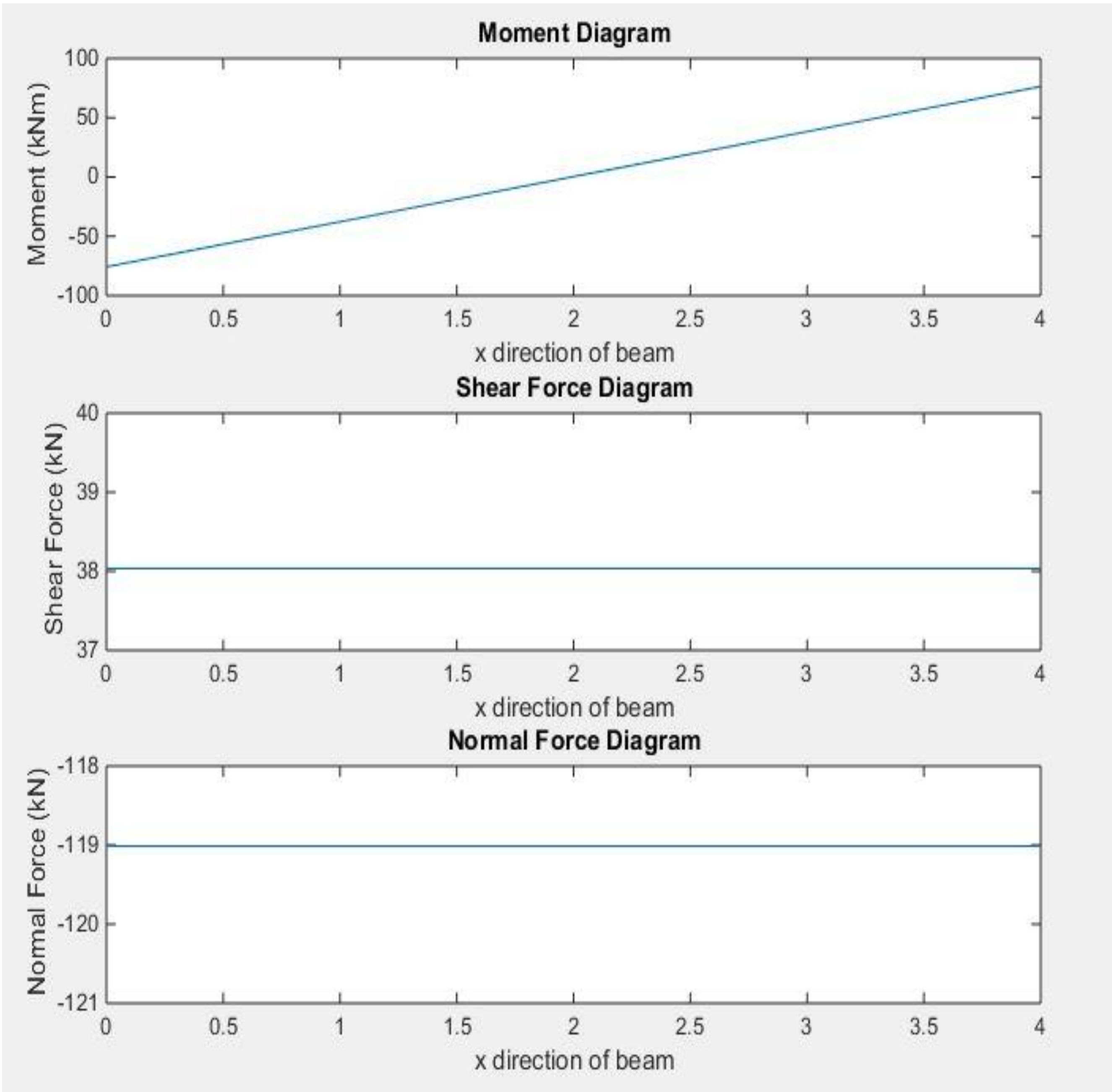

Moment Diagram
Moment (kNm)
-20
-40
-60
-80
0
0.5
1
1.5
x direction of beam
Shear Force Diagram
Shear Force (kN)
40
39
38
37
0
0.5
1
1.5
x direction of beam
Normal Force Diagram
Normal Force (kN)
-63
-64
-65
-66
0
0.5
1
1.5
x direction of beam

7^{η} Δοκός



Moment Diagram
Moment (kNm)
60
40
20
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x direction of beam
Shear Force Diagram
Shear Force (kN)
-53
-54
-55
-56
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x direction of beam
Normal Force Diagram
Normal Force (kN)
2
1
0
-1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x direction of beam

8η Δοκός



Moment Diagram
Moment (kNm)
100
50
0
-50
-100
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
x direction of beam
Shear Force Diagram
Shear Force (kN)
40
39
38
37
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
x direction of beam
Normal Force Diagram
Normal Force (kN)
-118
-119
-120
-121
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
x direction of beam

Από την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε ότι η όταν έχουμε στήριξη με άρθρωση οι κατακόρυφες δοκοί στην βάση έχουν μεγαλύτερη καταπόνηση λόγω ροπών κάμψης.

Η μέγιστη ροπή κάμψης για στήριξη άρθρωσης εμφανίζεται στην δοκό της δεξιάς βάσης στον κόμβο 8 με τιμή $M_8 = 101.16\ kNm$, ενώ η αντίστοιχη ροπή κάμψης για πάκτωση είναι $M_8 = 75{,}75\ kNm.$

Επίσης, η ίδια εικόνα ισχύει και για τις δοκούς της οροφής, με αυτές που αντιστοιχούν στο πλαίσιο με την άρθρωση να εμφανίζουν μεγαλύτερες ροπές κάμψης, από αυτές της πάκτωσης. Παρόλα αυτά η μέγιστή ροή κάμψης εμφανίζεται και στις δύο περιπτώσεις στις βάσεις του πλαισίου.

Όσον αφορά τις αξονικές και διατμητικές δυνάμεις, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της πάκτωσης έχουμε μικρότερες καταπονήσεις σε διάτμηση (λογικό συμπέρασμα λόγω των αντίστοιχων μειωμένων ροπών κάμψης), αλλά μεγαλύτερες καταπονήσεις λόγω αξονικών δυνάμεων. Οι διαφορές όμως στις αξονικές δυνάμεις δεν είναι μεγάλες.